



## تعیین ثوابت معیار تسلیم BBC2003 برای ورق‌های آلیاژ آلومینیوم ناهمسانگرد بر اساس آزمون کشش کرنش صفحه‌ای

سجاد ایزدپناه نجم‌آباد<sup>1</sup>، مهدی گردویی<sup>2\*</sup>، سید هادی قادری<sup>2</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

2- استادیار، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

\* شاهرود، صندوق پستی 3619995161، gerdooei@shahroodut.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 20 تیر 1394  
پذیرش: 06 مهر 1394  
ارائه در سایت: 25 مهر 1394  
کلید واژگان:  
معیار تسلیم ناهمسانگرد  
تنش تسلیم کرنش صفحه‌ای  
ورق آلیاژ آلومینیومی  
ناهمسانگردی پلاستیک  
تابع خطا

### چکیده

این مقاله یک روش جدید عددی-تجربی برای محاسبه‌ی ثوابت معیار تسلیم ناهمسانگرد پیشرفته‌ی BBC2003 ارائه می‌دهد. محاسبه‌ی هشت ثابت این معیار تسلیم نیازمند تعیین تجربی هشت خاصیت مکانیکی است. این خواص عبارتند از تنش تسلیم تک‌محوره در جهت  $0^\circ$ ،  $45^\circ$  و  $90^\circ$  نسبت به راستای نورد، ضرایب ناهمسانگردی در این جهت‌ها و تنش تسلیم در شرایط کرنش صفحه‌ای در دو جهت  $0^\circ$  و  $90^\circ$ . اما، تعیین تنش تسلیم و ضرایب ناهمسانگردی دو محوره یکسان هزینه‌ی نسبتاً بالایی دارد. در روش ارائه شده در این مقاله، ثوابت معیار تسلیم با استفاده از یک شیوه‌ی ساده، بر مبنای تنش‌های تسلیم کرنش صفحه‌ای در دو جهت  $0^\circ$  و  $90^\circ$  نسبت به راستای نورد، محاسبه می‌شود. دستگاه معادلات ثوابت تابع تسلیم، با تشکیل تابع خطا و کمینه کردن آن با استفاده از روش شیب‌دارترین نزول به روش عددی حل می‌شود. در دو مطالعه‌ی موردی، ثوابت معیار BBC2003 برای ورق آلومینیوم از آلیاژهای AA3105 و AA6061-O با استفاده از این روش محاسبه شد. سپس، دقت پیش‌بینی تنش تسلیم تک‌محوره و ضریب ناهمسانگردی در جهت‌های مختلف و نیز قابلیت منطبق شدن سطح تسلیم با نتایج تجربی، برای دو معیار تسلیم BBC2003 و هیل 48 بررسی شد. نتایج نشان می‌دهد که روش ارائه شده دارای دقت و ثبات مطلوب در محاسبه‌ی ثوابت معیار تسلیم پیشرفته و در نتیجه پیش‌بینی خواص مکانیکی ورق‌های ناهمسانگرد، در جهت‌های مختلف می‌باشد.

## Determination of BBC2003 yield criterion constants for anisotropic aluminum alloy sheets based on plane strain tensile test

Sajjad Izadpanah Najmabad, Mahdi Gerdooei\*, Seyed Hadi Ghaderi

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University, Shahrood, Iran

\* P.O.B. 3619995161 Shahrood, Iran, gerdooei@shahroodut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 11 July 2015  
Accepted 28 September 2015  
Available Online 17 October 2015

#### Keywords:

Anisotropic yield criterion  
Plane strain yield stress  
Aluminum alloy sheet  
Plastic anisotropy

### ABSTRACT

This paper puts forward a novel numerical-experimental method for calculation of constants of advanced anisotropic yield criterion BBC2003. Calculation of the eight constants of this yield criterion demands experimental determination of eight mechanical properties of the material. These properties include: axial-yield stresses in  $0$ ,  $45$  and  $90^\circ$  with respect to the rolling direction, anisotropic parameters in the directions mentioned and plane strain yield stresses for  $0$  and  $90^\circ$  orientations. However, determination of the equi-biaxial yield stresses and anisotropic coefficients is relatively expensive. In the method presented in this paper, using a simple technique, the constants of the yield criterion are calculated based on plane strain yield stresses in  $0^\circ$  and  $90^\circ$  to the rolling direction. The system of equations involving the constants of the yield function, is solved numerically through defining an error function and minimizing it using steepest descent method. In two case studies, the constants of BBC2003 yield criterion for anisotropic sheets of aluminum alloys AA3105 and AA6061-O, were calculated using this method. Subsequently, the accuracy of prediction of axial-yield stress and anisotropic coefficient in different directions as well as the coincidence of yield surface with experimental results for BBC2003 and Hill48 yield criteria have been investigated. The results show that the proposed method has good accuracy and stability in calculation of advanced yield criterion constants and consequently the mechanical properties of anisotropic sheets in different directions.

### 1- مقدمه

عیوب آن، می‌تواند گام بزرگی در ارتقای توان صنعتی کشور باشد. از شایع‌ترین عیوب موجود در قطعات تولیدی از ورق، گوشواره‌ای شدن، چروکیدگی، برگشت فتری و نازک شدن موضعی است. پیش‌بینی این پدیده‌ها و حذف اثرات مخرب آن از محصولات شکل‌دهی ورق، نیازمند استفاده از معیارهای

فرآیندهای شکل‌دهی ورق‌های فلزی یکی از اثرگذارترین روش‌های تولید در صنعت خودروسازی، هواپیماسازی، صنایع غذایی، هوافضا و ... می‌باشد. از این روی، بهبود و ارتقای روش‌های مورد استفاده در این فرآیندها و همچنین رفع

Please cite this article using:

S. Izadpanah Najmabad, M. Gerdooei, S. H. Ghaderi, Determination of BBC2003 yield criterion constants for anisotropic aluminum alloy sheets based on plane strain tensile test, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 11, pp. 127-135, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

مکانیکی مورد نیاز برای تعیین ثوابت معیار تسلیم BBC2005 را بررسی کردند. در این مقاله با استفاده از شش، هفت و هشت خاصیت مکانیکی از آلایژ AA6016-T4، ثوابت این معیار به دست آمد و پیش‌بینی سطح تسلیم، ارتفاع گنبد و توزیع ضخامت برای شبیه‌سازی آزمون انبساط آزاد با نتایج تجربی مقایسه گشت. در این تحقیق از تنش تسلیم و ضریب ناهمسانگردی دو محوره یکسان استفاده شد و قابلیت بالای این معیار با تعداد 7 و 8 عدد ثابت در شبیه‌سازی‌ها اثبات شد. احمدی و همکاران [8]، با روش M-K منحنی حد شکل‌دهی ورق آلومینیوم آلایژی AA3003-O را پیش‌بینی کردند. برای این منظور، از معیارهای تسلیم پیشرفته‌ی BBC2000، BBC2002 و BBC2003 استفاده شد. آنها برای تعیین ثوابت معیارهای تسلیم، از مقادیر تنش تسلیم و ضرایب ناهمسانگردی در جهات  $0^\circ$ ،  $22/5^\circ$ ،  $45^\circ$ ،  $67/5^\circ$  و  $90^\circ$  نسبت به راستای نورد استفاده کردند. با تشکیل تابع خطا و کمینه کردن آن به روش نیوتن-رافسون، ثوابت معیار تسلیم محاسبه و سپس، پیش‌بینی تنش تسلیم تک‌محوره و ضریب ناهمسانگردی را برای این آلایژ انجام دادند.

روش‌های مختلف ارائه شده برای تعیین ثوابت معیارهای تسلیم پیشرفته، دارای نقص‌هایی مانند استفاده از تجهیزات گران‌قیمت و روش‌های عددی پیچیده است که غلبه بر این نقاط ضعف، همواره موضوع تحقیقات سال‌های اخیر بوده است. در مقاله‌ی حاضر، محاسبه ثوابت معیار تسلیم BBC2003 برای دو ورق آلایژ آلومینیوم AA3105 و AA6061-O به کمک مقادیر تجربی تنش تسلیم و ضرایب ناهمسانگردی ورق در سه راستای  $0^\circ$ ،  $45^\circ$  و  $90^\circ$  نسبت به راستای نورد و همچنین تنش تسلیم کرنش صفحه‌ای ورق در دو راستای نورد و عمود بر نورد ورق انجام شده است. محاسبه‌ی تنش تسلیم کرنش صفحه‌ای در هر راستا با کشش سه نمونه‌ی شیاردار با ابعاد متفاوت صورت گرفته است. دستگاه معادلات غیر خطی به روش عددی حل و ثوابت معیار تسلیم BBC2003 برای دو آلایژ فوق محاسبه شد. سپس، دقت این روش در پیش‌بینی تنش تسلیم و ضریب ناهمسانگردی در جهت‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفت. توانایی منطبق شدن سطح تسلیم این دو آلایژ بر اساس معیار تسلیم BBC2003 با نتایج تجربی بررسی و با معیار هیل<sup>4</sup> مقایسه شد. استفاده از آزمون کشش کرنش صفحه‌ای به جای روش متداول کشش دو محوری یکسان از مزایای این روش محسوب می‌شود.

## 2- روش عددی

### 2-1- معیار تسلیم BBC2003

معیار تسلیم BBC2003، در سال 2003 با هدف ارتقای دقت و صحت شبیه‌سازی‌های عددی شکل‌دهی ورق فلزی ناهمسانگرد طراحی و ارائه گردید. این معیار تسلیم، حالت تنش را صفحه‌ای در نظر گرفته و در آن تنش معادل به صورت رابطه‌ی (1) بیان شده است [9].

$$\bar{\sigma} = [a(\Gamma + \psi)^{2k} + a(\Gamma - \psi)^{2k} + (1 - a)(2\Lambda)^{2k}]^{\frac{1}{2k}} \quad (1)$$

در رابطه‌ی (1)،  $k \in \mathbb{N} \geq 1$  و  $0 \leq a \leq 1$  پارامترهای ماده می‌باشد و  $\Gamma$ ،  $\psi$  و  $\Lambda$  توابعی از مولفه‌های تانسور تنش هستند که با روابط (2) تا (4) بیان می‌شوند [9].

$$\Gamma = \frac{\sigma_{11} + M\sigma_{22}}{2} \quad (2)$$

$$\psi = \sqrt{\left(\frac{N\sigma_{11} - P\sigma_{22}}{2}\right)^2 + Q^2\sigma_{12}\sigma_{21}} \quad (3)$$

تسلیم دقیق می‌باشد. تحقیقات نشان می‌دهد که معیارهای تسلیم ناهمسانگرد کلاسیک مانند معیار تسلیم خانواده‌ی هیل، در پیش‌بینی این عیوب خصوصاً برای ورق‌های آلومینیومی ناهمسانگرد دارای ضعف می‌باشد، که این نقص به عنوان رفتار غیر طبیعی<sup>1</sup> معیارهای کلاسیک شناخته می‌شود [1]. بررسی این مشکل در سال‌های اخیر، منجر به ارائه‌ی معیارهای تسلیم پیشرفته‌ای مانند معیار بارلات، BBC و چندجمله‌ای شده است. مهم‌ترین چالش استفاده از معیارهای تسلیم پیشرفته در مدل‌سازی شکل‌دهی ورق‌ها، تعیین ثوابت این معیارها است که با توجه به داشتن تعداد زیاد آنها، نیازمند تشکیل و حل دستگاه معادلات غیر خطی با تعداد مجهولاتی برابر تعداد ثوابت معیار تسلیم است.

روش‌های تعیین ثوابت معیارهای تسلیم پیشرفته و قابلیت پیش‌بینی خواص مکانیکی ورق‌های فلزی، تاکنون در تحقیقات مختلف بررسی شده است. بانابیک و همکاران [1]، ثوابت معیار تسلیم پیشرفته‌ی BBC2003 را با دو روش نیوتن-رافسون و کمینه کردن تابع خطا محاسبه کردند و نشان دادند که روش نیوتن-رافسون دارای دقت بالاتری در محاسبه‌ی ثوابت است. در این پژوهش از تنش تسلیم و ضریب ناهمسانگردی دو محوره یکسان استفاده شد. در پژوهشی دیگر، بانابیک [2] روش تعیین ثوابت معیار تسلیم BBC2005 را به همراه روابط، با استفاده از روش کمینه کردن تابع خطا محاسبه و قابلیت این معیار را با معیارهای تسلیم پیشرفته مقایسه کرد و نشان داد که این روش دقت بالایی در پیش‌بینی ثوابت دارد و تنها عیب آن در سرعت پایین همگرا شدن است. آرتز با ارائه‌ی یک معیار تسلیم پیشرفته جدید، با نام Yld2003، قابلیت و انعطاف‌پذیری این معیار را در پیش‌بینی تغییرات تنش تسلیم تک‌محوره، ضریب ناهمسانگردی در جهت‌های مختلف و همچنین سطح تسلیم با معیار Yld2000-2D مقایسه کرد. در این تحقیق روش تعیین ثوابت معیار تسلیم پیشنهادی با تشکیل تابع خطا و کمینه کردن آن محاسبه و نتایج آن دقت بالا در تعیین ثوابت و انعطاف‌پذیری قابل قبول این معیار را نشان می‌دهد [3]. سیستر و بانابیک اثر استفاده از معیارهای تسلیم پیشرفته را در شبیه‌سازی فرآیندهای شکل‌دهی ورق‌ها بر روی دو ورق فولادی و آلومینیومی بررسی کردند و نشان دادند که استفاده از تنش تسلیم دو محوره یکسان برای افزایش دقت شبیه‌سازی‌های عددی، الزامی است [4]. پاراینو و همکاران با استفاده از معیار تسلیم پیشرفته‌ی BBC2005 اثر خواص مکانیکی مواد را در تعیین ثوابت و در نتیجه دقت شبیه‌سازی در فرآیندهای شکل‌دهی ورق‌های فلزی بررسی کردند [5]. در این پژوهش دو سری خواص مکانیکی برای تعیین ثوابت در نظر گرفته شد و در به دست آوردن تنش تسلیم در شرایط کرنش صفحه‌ای از آزمون انبساط آزاد<sup>2</sup> ورق استفاده گردید. ترسیم سطح تسلیم به دست آمده از هر دو روش برای آلایژ AA6061-T4 نشان داد که استفاده از تنش تسلیم کرنش صفحه‌ای در پیش‌بینی سطح تسلیم در ناحیه‌ی تسلیم دو محوره یکسان با دقت پایین‌تر و در نواحی شامل تنش تسلیم کرنش صفحه‌ای با دقت بیشتر عمل می‌کند. ژانگ و همکاران در تحقیقی با استفاده از آزمون کشش دو محوره یکسان، ثوابت معیار تسلیم برن و بیسن<sup>3</sup> را برای آلایژ AA5086 با کمینه کردن تابع خطای تشکیل شده توسط کرنش‌ها، محاسبه کردند [6]. نتایج این تحقیق برای شبیه‌سازی آزمون کشش دو محوره یکسان و پیش‌بینی سطح تسلیم، دقت بالای این روش را نشان می‌دهد. لازارسکو و همکاران در مقاله‌ای [7] اثر تعداد خواص

1- Anomalous behavior  
2- Free bulging  
3- Bron and Besson

4- Hill's 1948 criterion

$$\Lambda = \tilde{Y}_\theta \Lambda_\theta \quad (12)$$

که در روابط بالا  $\Gamma_\theta$ ،  $\Psi_\theta$  و  $\Lambda_\theta$  با روابط (13) تا (14) تعریف می‌شوند.

$$\Gamma_\theta = \frac{\cos^2 \theta + M \sin^2 \theta}{2} \quad (13)$$

$$\Psi_\theta = \sqrt{\left(\frac{N \cos^2 \theta - P \sin^2 \theta}{2}\right)^2 + Q^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \quad (14)$$

$$\Lambda_\theta = \sqrt{\left(\frac{R \cos^2 \theta - S \sin^2 \theta}{2}\right)^2 + T^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \quad (15)$$

با قرار دادن روابط بالا در رابطه‌ی تنش معادل، می‌توان تنش معادل را برای زوایای مختلف نسبت به راستای نورد ورق طبق رابطه‌ی (16) تعیین کرد.

$$\bar{\sigma}|_\theta = \tilde{Y}_\theta F(\theta) \quad (16)$$

$$F(\theta) = (a(\Gamma_\theta + \Psi_\theta)^{2K} + a(\Gamma_\theta - \Psi_\theta)^{2K} + (1-a)(2\Lambda_\theta)^{2K})^{\frac{1}{2K}} \quad (17)$$

در صورتی که رابطه‌ی (16) در رابطه‌ی سطح تسلیم (5) قرار داده شود می‌توان رابطه‌ی تئوری برای محاسبه‌ی تنش تسلیم تک‌محوره در جهت‌های دلخواه  $\theta$ ، به دست آورد (رابطه‌ی 18).

$$\tilde{Y}_\theta = \frac{Y_{\text{ref}}}{F(\theta)} \quad (18)$$

#### 4-2- ضریب ناهمسانگردی تئوری در جهت $\theta$

ضریب ناهمسانگردی پلاستیک تئوری برای زاویه‌ی دلخواه  $\theta$  نسبت به راستای نورد ورق را می‌توان از رابطه‌ی (19) به دست آورد.

$$r_\theta = \frac{\dot{\varepsilon}_{\theta+90}^p}{\dot{\varepsilon}_{\text{ND}}^p} \quad (19)$$

در رابطه‌ی (19)،  $\dot{\varepsilon}_{\theta+90}^p$  نرخ کرنش پلاستیک منطبق با راستای مشخص شده با زاویه‌ی  $\theta + 90^\circ$  و  $\dot{\varepsilon}_{\text{ND}}^p$  نرخ کرنش پلاستیک در راستای ضخامت است، به‌گونه‌ای که هر دوی این مقادیر در یک تانسور کرنش بیان شده‌اند. با در نظر گرفتن فرض تراکم‌ناپذیری در تغییر شکل پلاستیک (رابطه‌ی 20) داریم.

$$\dot{\varepsilon}_\theta^p + \dot{\varepsilon}_{\theta+90}^p + \dot{\varepsilon}_{\text{ND}}^p = 0 \quad (20)$$

از رابطه‌ی (20) می‌توان مقدار  $\dot{\varepsilon}_{\theta+90}^p$  را برحسب مقادیر  $\dot{\varepsilon}_\theta^p$  و  $\dot{\varepsilon}_{\text{ND}}^p$  محاسبه کرد که با قرار دادن این مقدار در رابطه‌ی (19) رابطه‌ی (21) برای محاسبه‌ی ضریب ناهمسانگردی تئوری در جهت‌های دلخواه به دست می‌آید.

$$r_\theta = -\frac{\dot{\varepsilon}_\theta^p}{\dot{\varepsilon}_{\text{ND}}^p} - 1 \quad (21)$$

در رابطه‌ی (21) پارامتر  $\dot{\varepsilon}_\theta^p$  نمایانگر نرخ کرنش پلاستیک در راستایی با زاویه‌ی  $\theta$  نسبت راستای نورد ورق است. دو پارامتر  $\dot{\varepsilon}_\theta^p$  و  $\dot{\varepsilon}_{\text{ND}}^p$  را می‌توان با استفاده از نرخ کرنش‌های پلاستیک در دستگاه مختصات مرجع، به صورت روابط (22) و (23) بیان کرد.

$$\dot{\varepsilon}_\theta^p = \dot{\varepsilon}_{11}^p \cos^2 \theta + \dot{\varepsilon}_{22}^p \sin^2 \theta + (\dot{\varepsilon}_{12}^p + \dot{\varepsilon}_{21}^p) \sin \theta \cos \theta \quad (22)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\text{ND}}^p = \dot{\varepsilon}_{33}^p = -\dot{\varepsilon}_{11}^p - \dot{\varepsilon}_{22}^p \quad (23)$$

$$\Lambda = \sqrt{\left(\frac{R\sigma_{11} - S\sigma_{22}}{2}\right)^2 + T^2 \sigma_{12} \sigma_{21}} \quad (4)$$

در روابط (1) تا (4)،  $a, M, N, P, Q, R, S$  و  $T$  ثوابت معیار تسلیم می‌باشد. تحقیقات نشان می‌دهد که مثبت بودن این پارامترها به تقریب بهتر معیار تسلیم منجر می‌شود [6]. پارامتر  $K$ ، وابسته به ساختار کریستالی ماده بوده، برای مواد BCC برابر 3 و برای مواد FCC برابر 4 در نظر گرفته می‌شود. با داشتن روابط (1) تا (4) می‌توان سطح تسلیم این معیار را به صورت رابطه‌ی (5) ارائه کرد.

$$\Phi(\sigma_{\alpha\beta}, Y) := \bar{\sigma}(\sigma_{\alpha\beta}) - Y_{\text{ref}} = 0 \quad (5)$$

در رابطه‌ی (5)  $Y_{\text{ref}}$  تنش تسلیم مرجع است که در این پژوهش، برابر تنش تسلیم تک‌محوره در جهت نورد ورق در نظر گرفته شده است.

#### 2-2- تشکیل دستگاه معادلات

برای به دست آوردن ثوابت مجهول داده شده در رابطه‌ی سطح تسلیم، نیاز به داشتن خواص مکانیکی ماده به روش تجربی است. از طرفی با داشتن رابطه‌ی معیار تسلیم و روشی که در ادامه توضیح داده خواهد شد، می‌توان خواص ماده را در جهت‌های مختلف به صورت تئوری نیز محاسبه کرد و با قرار دادن خواص تجربی در معادله‌ی تئوری، دستگاه معادلات را تشکیل داده، ثوابت مجهول را به دست آورد. برای معیار تسلیم مورد استفاده در این تحقیق دستگاه معادلات با هشت مجهول مطابق روابط (6) خواهد بود.

$$\begin{aligned} Y_0^{\text{exp}} &= Y_0 & Y_{45}^{\text{exp}} &= Y_{45}, & Y_{90}^{\text{exp}} &= Y_{90}, \\ r_0^{\text{exp}} &= r_0, & r_{45}^{\text{exp}} &= r_{45}, & r_{90}^{\text{exp}} &= r_{90}, \\ Y_0^{\text{exp ps}} &= Y_0^{\text{ps}}, & Y_{90}^{\text{exp ps}} &= Y_{90}^{\text{ps}} \end{aligned} \quad (6)$$

خواص مکانیکی مورد نیاز به شرح زیر است:

- 1- تنش تسلیم تک‌محوره  $Y$  در سه جهت  $0^\circ$ ،  $45^\circ$  و  $90^\circ$  نسبت به راستای نورد،
- 2- ضریب ناهمسانگردی  $r$  در سه جهت  $0^\circ$ ،  $45^\circ$  و  $90^\circ$  نسبت به راستای نورد،
- 3- تنش تسلیم در شرایط کشش کرنش صفحه‌ای در دو جهت  $0^\circ$  و  $90^\circ$  نسبت به راستای نورد.

#### 3-2- تنش تسلیم تئوری در کشش تک‌محوره در جهت $\theta$

با در نظر گرفتن این‌که  $\tilde{Y}_\theta$  بیانگر تنش تسلیم تئوری در راستای زاویه‌ی  $\theta$  نسبت به راستای نورد قطعه است، می‌توان اجزای تانسور تنش صفحه‌ای را طبق روابط (7) تا (8) بیان کرد.

$$\sigma_{11} = \tilde{Y}_\theta \cos^2 \theta \quad (7)$$

$$\sigma_{22} = \tilde{Y}_\theta \sin^2 \theta \quad (8)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \tilde{Y}_\theta \sin \theta \cos \theta \quad (9)$$

در نتیجه،  $\Gamma$ ،  $\Psi$  و  $\Lambda$  را می‌توان به صورت روابط (10) تا (12) بازنویسی کرد.

$$\Gamma = \tilde{Y}_\theta \Gamma_\theta \quad (10)$$

$$\Psi = \tilde{Y}_\theta \Psi_\theta \quad (11)$$

$$G(\theta) = a(\Gamma_\theta + \Psi_\theta)^{2k-1} \left\{ \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_{11}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{11}} \right) + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_{22}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{22}} \right) \right\} \Big|_\theta + \frac{a(\Gamma_\theta - \Psi_\theta)^{2k-1}}{2(1-a)(2\Lambda_\theta)^{2k-1}} \left\{ \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_{11}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{11}} \right) + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_{22}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{22}} \right) \right\} \Big|_\theta + \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma_{11}} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma_{22}} \right) \Big|_\theta \quad (34)$$

در نتیجه، می‌توان رابطه‌ی بیان‌کننده‌ی ضرایب ناهمسانگردی پلاستیک را به صورت رابطه‌ی (35) بازنویسی کرد.

$$r_\theta = \frac{[F(\theta)]^{2k}}{G(\theta)} - 1 \quad (35)$$

## 2-5- تنش تسلیم کرنش صفحه‌ای در راستای 0° و 90°

در روش تئوری برای محاسبه‌ی تنش تسلیم کرنش صفحه‌ای، ابتدا باید شرایط کرنش صفحه‌ای را اعمال نمود. با در نظر گرفتن نسبت  $\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}} = \alpha_{RD}^{ps}$  می‌توان رابطه‌ی بیان‌کننده‌ی نسبت تنش در شرایط کرنش صفحه‌ای را برحسب  $\alpha_{RD}^{ps}$  به صورت رابطه‌ی (36) نوشت (RD نشان دهنده‌ی جهت نورد ورق است).

$$a.M. \left[ \left( \Gamma_{\alpha_{RD}^{ps}} + \Psi_{\alpha_{RD}^{ps}} \right)^{2k-1} + \left( \Gamma_{\alpha_{RD}^{ps}} - \Psi_{\alpha_{RD}^{ps}} \right)^{2k-1} \right] + \frac{a}{2} \left[ \left( \Gamma_{\alpha_{RD}^{ps}} + \Psi_{\alpha_{RD}^{ps}} \right)^{2k-1} - \left( \Gamma_{\alpha_{RD}^{ps}} - \Psi_{\alpha_{RD}^{ps}} \right)^{2k-1} \right] \frac{P(P\alpha_{RD}^{ps} - N)}{\Psi_{\alpha_{RD}^{ps}}} + (1-a) \left[ 2\Lambda_{\alpha_{RD}^{ps}} \right]^{2k-1} \frac{S(S\alpha_{RD}^{ps} - R)}{\Lambda_{\alpha_{RD}^{ps}}} = 0 \quad (36)$$

در رابطه‌ی (36) ترم‌های  $\Gamma_{\alpha_{RD}^{ps}}$ ،  $\Psi_{\alpha_{RD}^{ps}}$  و  $\Lambda_{\alpha_{RD}^{ps}}$  طبق روابط (37) تا (39) تعریف می‌شوند.

$$\Gamma_{\alpha_{RD}^{ps}} = \frac{1 + M\alpha_{RD}^{ps}}{2} \quad (37)$$

$$\Psi_{\alpha_{RD}^{ps}} = \left| \frac{N - P\alpha_{RD}^{ps}}{2} \right| \quad (38)$$

$$\Lambda_{\alpha_{RD}^{ps}} = \left| \frac{R - S\alpha_{RD}^{ps}}{2} \right| \quad (39)$$

از رابطه‌ی (36) مقدار نسبت تنش در شرایط کرنش صفحه‌ای محاسبه خواهد شد. برای به دست آوردن تنش تسلیم کرنش صفحه‌ای  $\sigma_{RD}^{ps}$ ، در رابطه‌ی تنش معادل (1)، با اعمال  $\sigma_{12}, \sigma_{21} = 0$  و فاکتورگیری از  $\sigma_{22}$ ، رابطه‌ی (40) به دست می‌آید.

$$\bar{\sigma}_{\alpha_{RD}^{ps}} = \sigma_{11} H_1(\alpha_{RD}^{ps}) \quad (40)$$

که  $H_1(\alpha_{RD}^{ps})$  با رابطه‌ی (41) تعریف می‌شود.

$$H_1(\alpha_{RD}^{ps}) = \left[ a \left( \Gamma_{\alpha_{RD}^{ps}} + \Psi_{\alpha_{RD}^{ps}} \right)^{2k} + a \left( \Gamma_{\alpha_{RD}^{ps}} - \Psi_{\alpha_{RD}^{ps}} \right)^{2k} + (1-a) \left( 2\Lambda_{\alpha_{RD}^{ps}} \right)^{2k} \right]^{\frac{1}{2k}} \quad (41)$$

در صورتی که مقدار  $\sigma_{11}$ ، برابر تنش تسلیم در حالت کرنش صفحه‌ای در نظر گرفته شود و با نماد  $\sigma_{RD}^{ps}$  نشان داده شود، با قرار دادن این معادله در رابطه‌ی سطح تسلیم، معادله‌ی زیر برای تنش تسلیم کرنش صفحه‌ای در جهت صفر

با جای‌گذاری دو رابطه‌ی (22) و (23) در رابطه‌ی (21)، رابطه‌ی (24) به دست می‌آید.

$$r_\theta = \frac{\dot{\epsilon}_{11}^p \cos^2 \theta + \dot{\epsilon}_{22}^p \sin^2 \theta + (\dot{\epsilon}_{12}^p + \dot{\epsilon}_{21}^p) \sin \theta \cos \theta}{\dot{\epsilon}_{11}^p + \dot{\epsilon}_{22}^p} - 1 \quad (24)$$

با استفاده از قانون جریان پلاستیک<sup>1</sup> وابسته به معیار تسلیم، می‌توان به جای مقادیر نرخ کرنش از مشتقات تابع تسلیم برحسب مولفه‌های تنش جایگذاری کرد، که نتیجه به صورت رابطه‌ی (25) خواهد شد.

$$r_\theta = \frac{1 \left( \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} \right) \Big|_\theta}{Y_\theta \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{11}} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{22}} \right) \Big|_\theta} - 1 \quad (25)$$

در رابطه‌ی (25)،  $(.)|_\theta$  بیانگر مشتق‌گیری جزئی نسبت به مولفه‌های تنش در راستای زاویه‌ی  $\theta$  است.

با توجه به اینکه رابطه‌ی بیان شده برای تنش تسلیم معادل، تابعی همگن نسبت به اجزای تنش است، و درجه‌ی همگنی آن از مرتبه‌ی یک می‌باشد، می‌توان برای ساده‌تر شدن رابطه‌ی (25)، از تئوری اویلر<sup>2</sup> استفاده کرد. با استفاده از این تئوری رابطه‌ی (26) به دست می‌آید.

$$\bar{\sigma} = \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} \quad (26)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (26) در رابطه‌ی (25) رابطه‌ی (27) به دست می‌آید.

$$r_\theta = \frac{F(\theta)}{\left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{11}} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{22}} \right) \Big|_\theta} - 1 \quad (27)$$

اکنون برای تکمیل رابطه‌ی (27)، به بیان مخرج کسر یعنی ترم  $\left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{11}} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{22}} \right) \Big|_\theta$  پرداخته می‌شود، که این رابطه به صورت رابطه‌ی (28) بیان می‌گردد.

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{11}} \Big|_\theta = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Gamma} \Big|_\theta \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_{11}} \Big|_\theta + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Psi} \Big|_\theta \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{11}} \Big|_\theta + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Lambda} \Big|_\theta \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma_{11}} \Big|_\theta \quad (28)$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{22}} \Big|_\theta = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Gamma} \Big|_\theta \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_{22}} \Big|_\theta + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Psi} \Big|_\theta \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{22}} \Big|_\theta + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Lambda} \Big|_\theta \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma_{22}} \Big|_\theta \quad (29)$$

در رابطه‌ی (28) و (29) رابطه‌ی (30) به دست می‌آید.

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Gamma} \Big|_\theta = \frac{a}{[F(\theta)]^{2k-1}} [(\Gamma_\theta + \Psi_\theta)^{2k} + (\Gamma_\theta - \Psi_\theta)^{2k}] \quad (30)$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Psi} \Big|_\theta = \frac{a}{[F(\theta)]^{2k-1}} [(\Gamma_\theta + \Psi_\theta)^{2k} - (\Gamma_\theta - \Psi_\theta)^{2k}] \quad (31)$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Lambda} \Big|_\theta = \frac{2(1-a)}{[F(\theta)]^{2k-1}} [(2\Lambda_\theta)^{2k-1}] \quad (32)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (28) و (29) در مخرج رابطه‌ی (27)، رابطه‌ی (33) به دست می‌آید.

$$\left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{11}} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{22}} \right) \Big|_\theta = \frac{G(\theta)}{[F(\theta)]^{2k-1}} \quad (33)$$

در رابطه‌ی (33) تابع  $G(\theta)$  به صورت رابطه‌ی (34) تعریف می‌شود.

1- Flow rule  
2- Euler's theorem

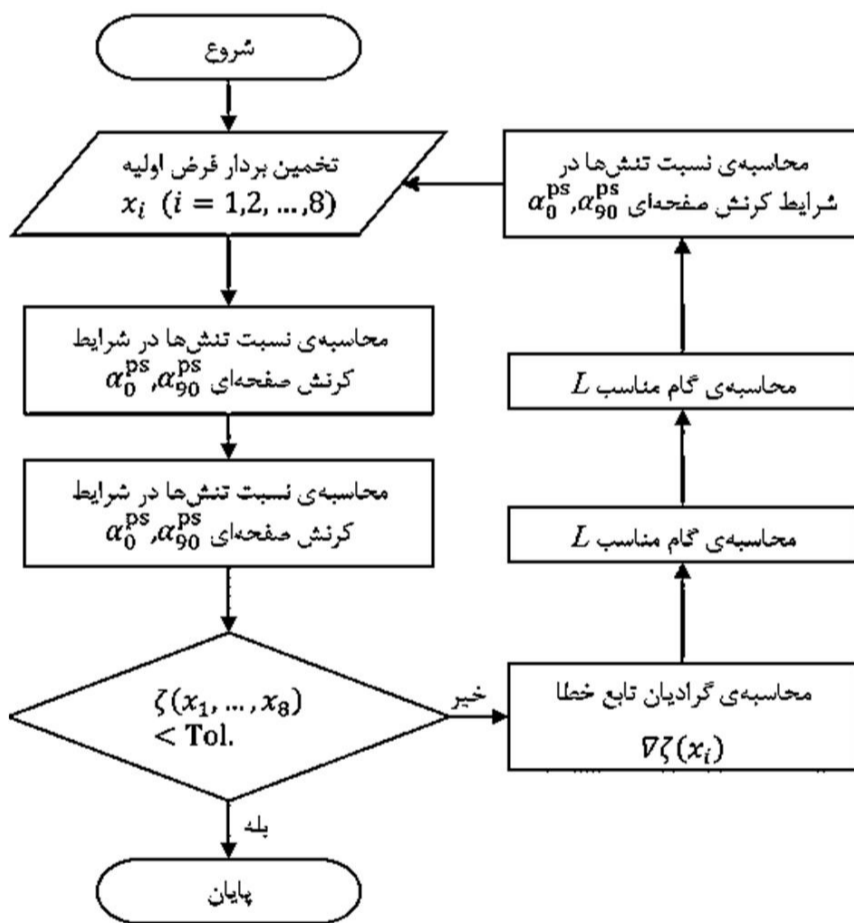
یک کمینه موضعی، برای تابع خطا، محاسبه کرد. مراحل حل دستگاه معادلات (45) به کمک روش کمینه کردن تابع خطا (46) در فلوجارت شکل 1 نمایش داده شده است.

### 3- روش تجربی

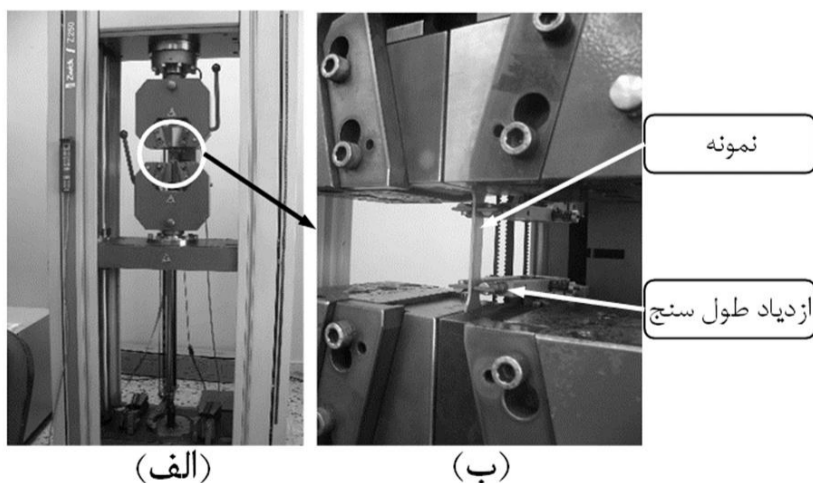
#### 3-1- آماده‌سازی نمونه‌ها

با هدف استخراج خواص مکانیکی آلیاژ آلومینیوم AA3105 و AA6061-O که عبارتند از: تنش تسلیم در سه جهت  $0^\circ$ ،  $45^\circ$  و  $90^\circ$ ، ضرایب ناهمسانگردی در سه جهت مذکور و تنش تسلیم در شرایط کرنش صفحه‌ای در جهت  $0^\circ$  و  $90^\circ$ ، دو گروه آزمایش کلی طراحی شد. اولین گروه آزمایش، کشش نمونه‌های ورق دمبلی شکل و دومین گروه آزمایش کشش نمونه‌های دارای شیار با ابعاد مختلف برای شرایط کرنش صفحه‌ای است.

برای انجام آزمون‌های نام برده شده، از دستگاه کشش زوئیک Z250 با ظرفیت 250 kN استفاده شد. نیروی فک‌های این دستگاه توسط اهرمی مکانیکی تعبیه شده در کنار فک، تأمین می‌شود که با پیشرفت آزمایش نیروی بیشتری را اعمال می‌کنند. این دستگاه در طول انجام آزمایش به یک واحد کامپیوتری متصل بوده و تغییر طول به کمک گیج ازدیاد طول سنج و نیرو توسط نیرو سنج در هر لحظه اندازه‌گیری و ثبت می‌شود. تصویر این دستگاه در شکل 2 ارائه شده است.



شکل 1 روند حل دستگاه معادلات به کمک کمینه کردن تابع خطا



شکل 2 آزمون کشش (الف) تصویر دستگاه (ب) ازدیاد طول سنج و موقعیت نمونه

نسبت به راستای نورد ورق، به دست می‌آید (رابطه‌ی 42).

$$\sigma_{RD}^{ps} = \frac{Y_{ref}}{H_1(\alpha_{RD}^{ps})} \quad (42)$$

به صورت مشابه با اعمال شرایط کرنش صفحه‌ای برای راستای عمود بر نورد ورق، می‌توان رابطه‌ی (43) را برای محاسبه‌ی نسبت تنش‌ها در جهت عرضی ورق TD به دست آورد.

$$\begin{aligned} a. & \left[ \left( \Gamma_{\alpha_{TD}^{ps}} + \Psi_{\alpha_{TD}^{ps}} \right)^{2k-1} + \left( \Gamma_{\alpha_{TD}^{ps}} - \Psi_{\alpha_{TD}^{ps}} \right)^{2k-1} \right] \\ & + \frac{a}{2} \left[ \left( \Gamma_{\alpha_{TD}^{ps}} + \Psi_{\alpha_{TD}^{ps}} \right)^{2k-1} \right. \\ & \left. - \left( \Gamma_{\alpha_{TD}^{ps}} - \Psi_{\alpha_{TD}^{ps}} \right)^{2k-1} \right] \frac{N(N\alpha_{TD}^{ps} - P)}{\Psi_{\alpha_{TD}^{ps}}} \\ & + (1-a) \left[ 2\Lambda_{\alpha_{TD}^{ps}} \right]^{2k-1} \frac{R(R\alpha_{TD}^{ps} - S)}{\Lambda_{\alpha_{TD}^{ps}}} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

مطابق آنچه آمد، می‌توان تنش تسلیم کرنش صفحه‌ای را توسط رابطه‌ی (44) محاسبه کرد.

$$\sigma_{TD}^{ps} = \frac{Y_{ref}}{H_2(\alpha_{TD}^{ps})} \quad (44)$$

#### 2-6- حل دستگاه معادلات غیر خطی

برای تعیین ثوابت معیار تسلیم BBC2003، باید دستگاه معادلات (6) را حل کرد. روش استفاده شده برای حل این دستگاه عبارت است از تشکیل تابع خطا با استفاده از این هشت معادله و کمینه کردن این تابع به روش شیب-دارترین نزول [10]. در این روش نیاز به محاسبه‌ی بردار گرادیان تابع خطا و تعیین گام مناسب برای کاهش مقدار تابع در هر مرتبه تکرار است. برای این منظور یک کد رایانه‌ای با استفاده از نرم‌افزار MATLAB-R2013a نوشته شد.

#### 2-7- کمینه کردن تابع خطا به روش شیب‌دارترین نزول

با توجه به آنچه که در بخش‌های قبلی بیان شد، می‌توان دستگاه معادلاتی مانند رابطه‌ی (45) را با برابر قرار دادن خواص مکانیکی حاصل از آزمون‌های تجربی و روابط تئوری به دست آورد.

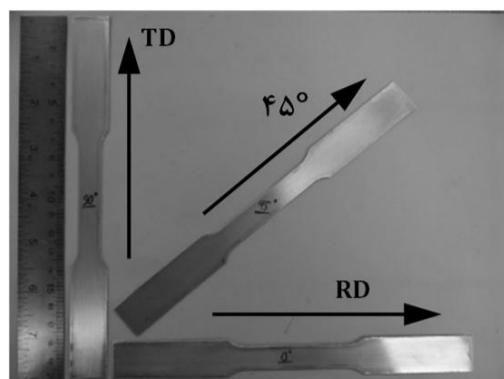
$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad n = 1, 2, \dots, 8 \quad (45)$$

در این رابطه مقادیر  $x_1$  تا  $x_8$  هشت ثابت مجهول معیار تسلیم و مقادیر  $f_1$  تا  $f_n$  نیز توابع ریاضی بیان‌کننده‌ی خواص مکانیکی است.

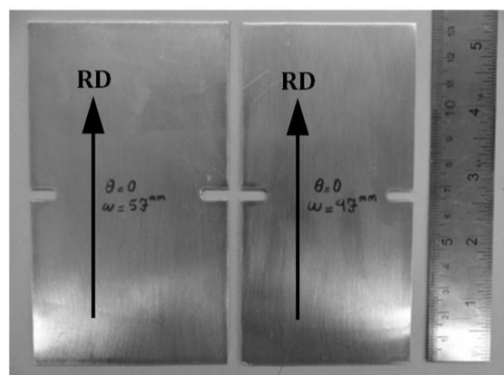
با توجه به دستگاه معادلات (45) می‌توان تابع خطا را به صورت رابطه‌ی (46) تعریف کرد.

$$\begin{aligned} \zeta(x_1, \dots, x_8) &= \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\sigma_{\psi_i}^{ps} - (\sigma_{\psi_i}^{ps})^{exp}}{Y_{ref}} \right)^2 \\ &+ \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\bar{\sigma}_{\varphi_i} - Y_{ref}}{Y_{ref}} \right)^2 \\ &+ \sum_{i=1}^3 \left( \frac{r_{\varphi_i} - r_{\varphi_i}^{exp}}{r_{\varphi_i}^{exp}} \right)^2 \end{aligned} \quad (46)$$

مطابق این رابطه متغیر تئوری از مقدار تجربی تفریق و به کمک کمیت مرجع، بی‌بعد می‌شود. اکنون با استفاده از روش شیب‌دارترین نزول، می‌توان



(الف)



(ب)

شکل 4 نمونه‌های آزمون کشش (الف) تک‌محوره (ب) کرنش صفحه‌ای

جدول 1 مشخصات آزمون‌های تجربی

نوع آزمایش	نرخ کرنش اولیه (1/sec)	طول مرجع (mm)	سرعت کشش (mm/sec)
کشش تک‌محوره	0/001	50	0/05
کشش کرنش صفحه‌ای	0/001	10	0/01

براساس روش اتخاذ شده در این پژوهش، در یک کرنش دلخواه، نیروی کل کشش را می‌توان به صورت تابعی از نیروی کشش در لبه‌ها، ضخامت، تنش کرنش صفحه‌ای و اندازه‌ی  $W_{ps}$  بیان کرد. این تابع به صورت رابطه (47) بیان می‌شود.

$$F_{tot} = \sigma_{ps} \times t \times W_{ps} + 2F_{edge} \quad (47)$$

در رابطه‌ی (47)،  $F_{tot}$  نیروی کل کشش،  $F_{edge}$  نیروی لبه‌های قطعه که دارای شرایط تغییر شکل کرنش صفحه‌ای نیست،  $W_{ps}$  عرض ناحیه‌ی کرنش صفحه‌ای،  $\sigma_{ps}$  تنش کششی کرنش صفحه‌ای و  $t$  ضخامت ورق است. نیروی  $F_{edge}$  در رابطه‌ی (47) را می‌توان عرض از مبدأ معادله‌ای خطی در نظر گرفت که متغیر مستقل آن عرض نمونه‌ها،  $W_{ps}$  و تنش مهندسی کرنش صفحه‌ای ضرب در ضخامت را شیب آن  $T_{ps}$  به حساب آورد. در نتیجه رابطه‌ی (47) را می‌توان به صورت (48) بازنویسی کرد.

$$F_{tot} = T_{ps} \times W_{ps} + 2F_{edge} \quad (48)$$

در نتیجه با توجه به رابطه‌ی (44) کل نیروی کشش، تابعی خطی از عرض مرجع نمونه‌ی کشش است که شیب آن حاصل ضرب تنش کرنش صفحه‌ای در ضخامت نمونه است و با کم کردن مقدار عرض از مبدأ می‌توان اطلاعاتی از جابجایی و نیروی خالص در شرایط کرنش صفحه‌ای به دست آورد. اکنون برای به دست آوردن تنش تسلیم کرنش صفحه‌ای، ابتدا باید کرنش و نیروی حد تسلیم را به دست آورد و سپس با رسم رابطه‌ی (44) برای چهار نمونه با عرض‌های مختلف تنش تسلیم را محاسبه کرد.

#### 4- نتایج و بحث

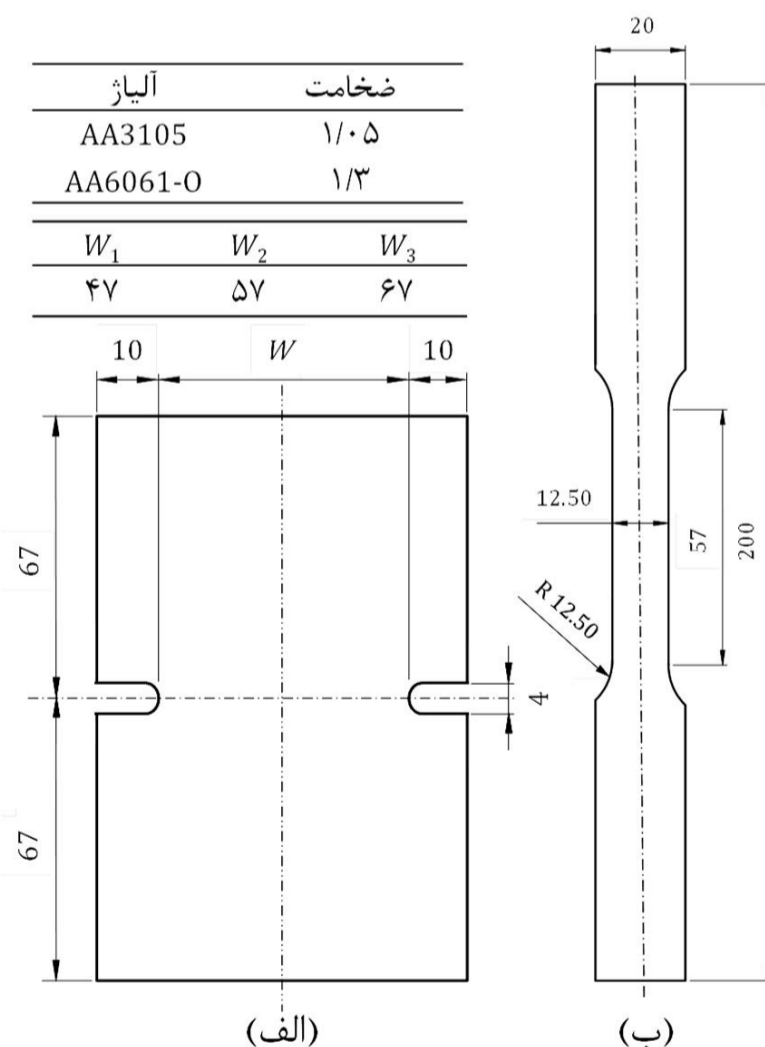
در این مقاله برای تعیین ثوابت معیار تسلیم پیشرفته‌ی BBC2003 برای

برای تهیه‌ی نمونه‌ی کشش تک‌محوره، از استاندارد ASTM-E8 استفاده شد. برای به دست آوردن ابعاد نمونه‌های کشش کرنش صفحه‌ای، با توجه به روش محاسبه‌ی تنش تسلیم کرنش صفحه‌ای، از مرجع [11] استفاده شد. در شکل 3 ابعاد این نمونه‌ها داده شده است.

برای هر آلایژ، از نمونه‌های معرفی شده در شکل 3 تعداد سه نمونه‌ی کشش تک‌محوره، در سه جهت  $0^\circ$ ،  $45^\circ$  و  $90^\circ$  برای به دست آوردن تنش تسلیم تک‌محوره، سه نمونه‌ی کشش تک‌محوره، در سه جهت مذکور، برای محاسبه‌ی ضریب ناهمسانگردی در جهت‌های مذکور و شش نمونه‌ی کشش کرنش صفحه‌ای، (سه نمونه در جهت  $0^\circ$  و سه نمونه در جهت  $90^\circ$ ) با هدف محاسبه‌ی تنش تسلیم کرنش صفحه‌ای در دو جهت  $0^\circ$  و  $90^\circ$  تهیه شد. تصویر تعدادی از این نمونه‌ها در شکل 4 داده شده است. لازم به ذکر است که اندازه‌ی  $W$  در شکل 3-ب به ترتیب برابر با 57، 47، 67 mm و ضخامت ورق برای آلایژ AA3105 برابر 1/05 mm و برای آلایژ AA6061-O برابر 1/3 است.

#### 3-2- آزمون کشش کرنش صفحه‌ای

با توجه به این که در کشش یک ورق با عرض زیاد، در تمامی عرض عمود بر راستای کشش، شرایط کرنش صفحه‌ای صادق نمی‌باشد و در لبه‌های نمونه شرایط کرنشی سه محوری وجود دارد، باید پس از انجام آزمایش، بر روی خروجی‌ها تحلیل‌هایی صورت گیرد تا تنش در قسمتی از نمونه که دارای حالت کرنش صفحه‌ای است استخراج شود. در این روش برای محاسبه‌ی تنش تسلیم در شرایط کرنش صفحه‌ای در هر جهت مورد نظر نسبت به راستای نورد ورق، مطابق شکل 3-ب نیاز به سه نمونه دارای شیار و اندازه‌ی  $W$  متفاوت است. در جدول 1 تنظیمات انجام شده برای اجرای آزمون‌های تجربی ارائه شده است.



(الف)

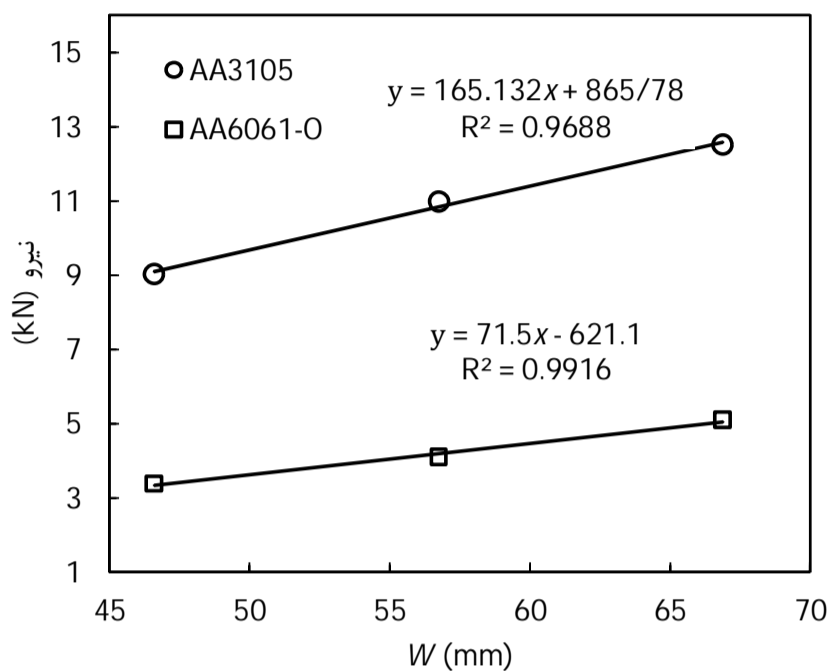
(ب)

شکل 3 هندسه‌ی نمونه‌ی (الف) کشش کرنش صفحه‌ای و (ب) کشش تک‌محوره، (ابعاد بر حسب mm)

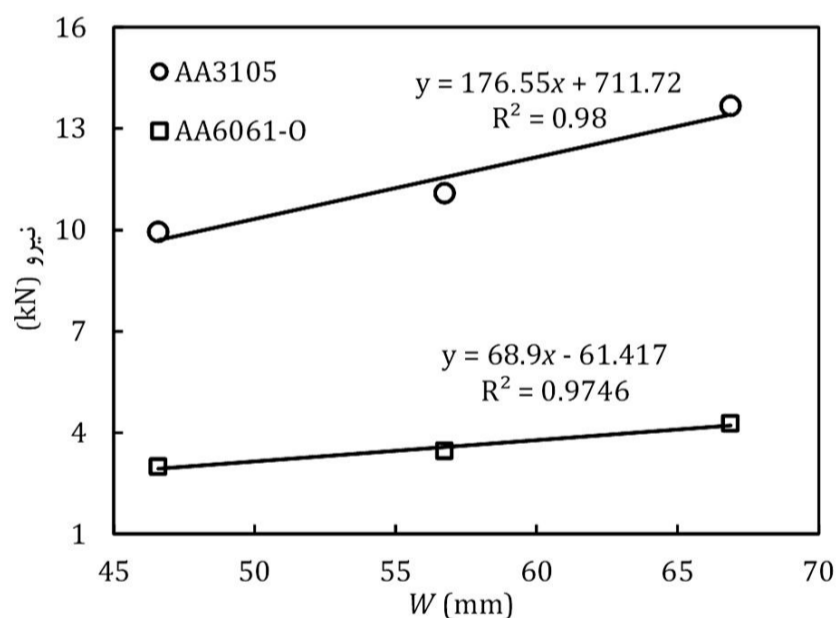


## 2-4- نتایج آزمون کشش کرنش صفحه‌ای

نمودارهای ارائه شده در شکل‌های 7 و 8، تغییرات نیروی حد شکست را نسبت به  $W$  نشان می‌دهد. نمودارهای مربوط به آلایژ AA3105 نسبت به نمودارهای آلایژ AA6061-O نیروی حد تسلیم بیشتری را نشان می‌دهد. به علاوه، شیب خط‌های برازش شده روی نتایج تجربی این آلایژ، نسبت به آلایژ AA6061-O بیشتر است که به دلیل استحکام بیشتر این آلایژ است. جدول 2 و 3 خواص مکانیکی این دو آلایژ را نشان می‌دهد.



شکل 7 نمودار نیروی حد تسلیم-اندازه‌ی  $W$  در راستای نورد برای آلایژ AA3105 و AA6061-O



شکل 8 نمودار نیروی حد تسلیم برحسب  $W$  در راستای  $90^\circ$  برای آلایژ AA3105 و AA6061-O

جدول 2 خواص مکانیکی آلایژ AA3105

راستا نسبت به جهت نورد	تنش تسلیم تک-محوره (MPa)	تنش تسلیم کرنش صفحه‌ای (MPa)	ضریب ناهمسانگردی
$0^\circ$	153	157/27	0/797
$45^\circ$	155/6	-----	0/889
$90^\circ$	157/5	168/14	0/69

جدول 3 خواص مکانیکی آلایژ AA6061-O

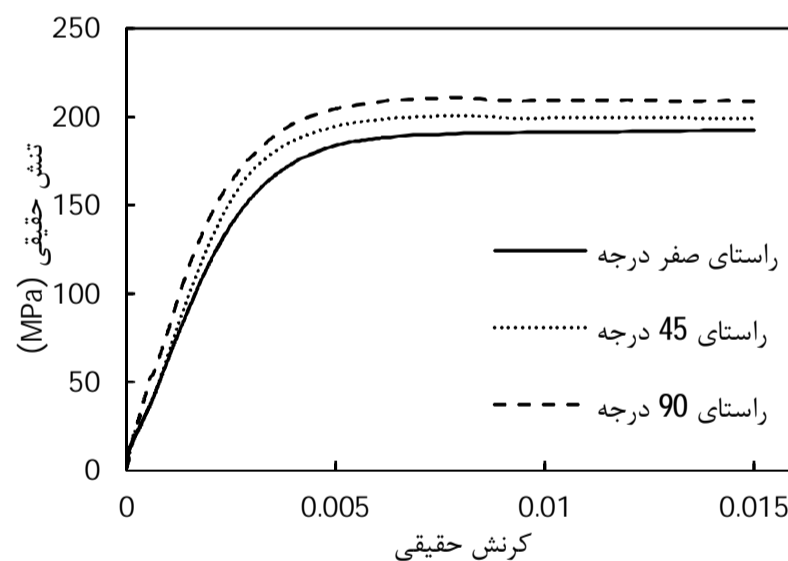
راستا نسبت به جهت نورد	تنش تسلیم تک-محوره (MPa)	تنش تسلیم کرنش صفحه‌ای (MPa)	ضریب ناهمسانگردی
$0^\circ$	50	55	0/564
$45^\circ$	55	-----	0/65
$90^\circ$	50/2	53	0/443

آلایژهای AA3105 و AA6061-O، تعداد 24 آزمون تجربی در دو گروه آزمون‌های کشش تک‌محوره و کشش کرنش صفحه‌ای انجام شده است. سپس با استفاده از برنامه‌ی رایانه‌ای نوشته شده، این ثوابت محاسبه و برای تعیین دقت کار عددی نتایج حاصل از کار تئوری شامل: پیش‌بینی تغییرات تنش تسلیم تک‌محوره در جهت‌های مختلف، تغییرات ضریب ناهمسانگردی در جهت‌های مختلف و سطح تسلیم این آلایژها براساس معیار تسلیم BBC2003 رسم و با نتایج تجربی مقیاسه شده است. در پایان مکان هندسی تسلیم بر روی صفحه‌ی تنش‌ها برای دو آلایژ مذکور توسط معیار هیل 48، مطابق رابطه‌ی (49)، و تابع تسلیم BBC2003 ترسیم و در مقایسه با نتایج تجربی بررسی خواهد شد.

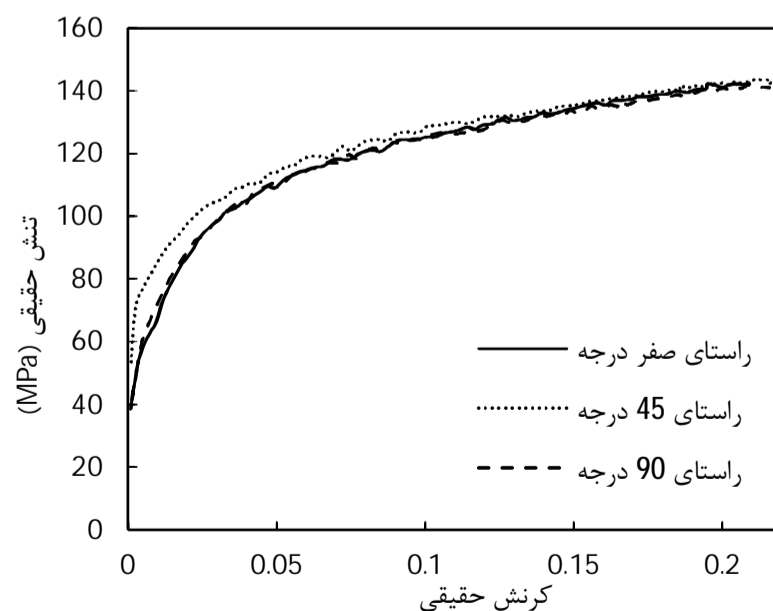
$$\sigma_{11}^2 - \frac{2r_0}{1+r_0} \sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{r_0(1+r_0)}{r_0(1+r_0)} \sigma_{22}^2 = Y_{ref}^2 \quad (49)$$

## 1-4- نتایج آزمون کشش تک‌محوره

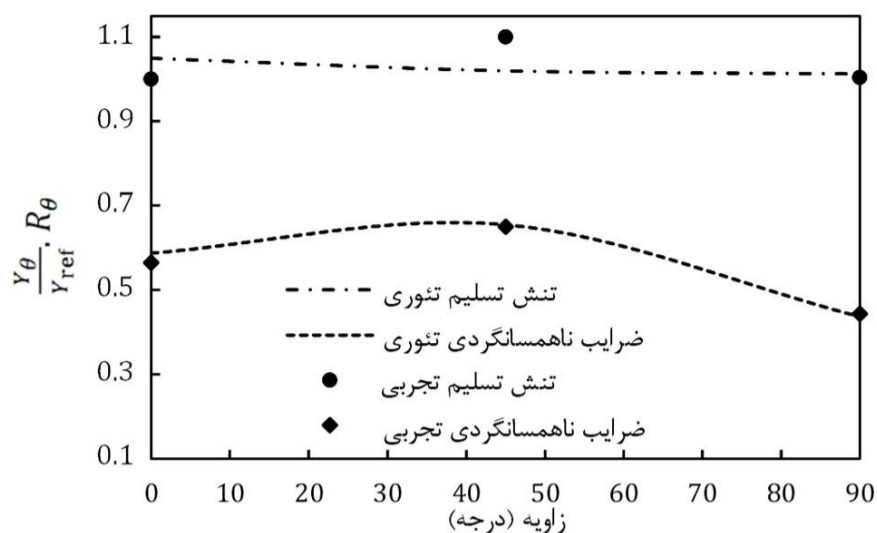
پس از انجام آزمایش کشش بر روی آلایژهای AA3105 و AA6061-O، نمودارهای تنش-کرنش حقیقی مطابق شکل‌های 5 و 6 به دست آمد. با توجه به نمودارهای شکل 5 و 6 می‌توان نتیجه گرفت که آلایژ AA3105 به دلیل عدم کار سختی و کرنش حقیقی شکست برابر با 0/015 دارای رفتاری ترد و شکننده است و اختلاف موجود در نمودارهای این آلایژ در جهت‌های مختلف حاکی از ناهمسانگردی این آلایژ است. در مقابل، آلایژ AA6061-O دارای رفتاری نرم است و فاصله داشتن نمودارها در ابتدا و منطبق شدن آنها بر یکدیگر در انتهای آزمون، نشان دهنده‌ی مقداری ناهمسانگردی اولیه است که پس از تغییر شکل، با تغییر ضرایب ناهمسانگردی، به شرایط همسانگرد نزدیک می‌شود.



شکل 5 نمودار تنش-کرنش حقیقی برای ورق AA3105 در جهت‌های مختلف



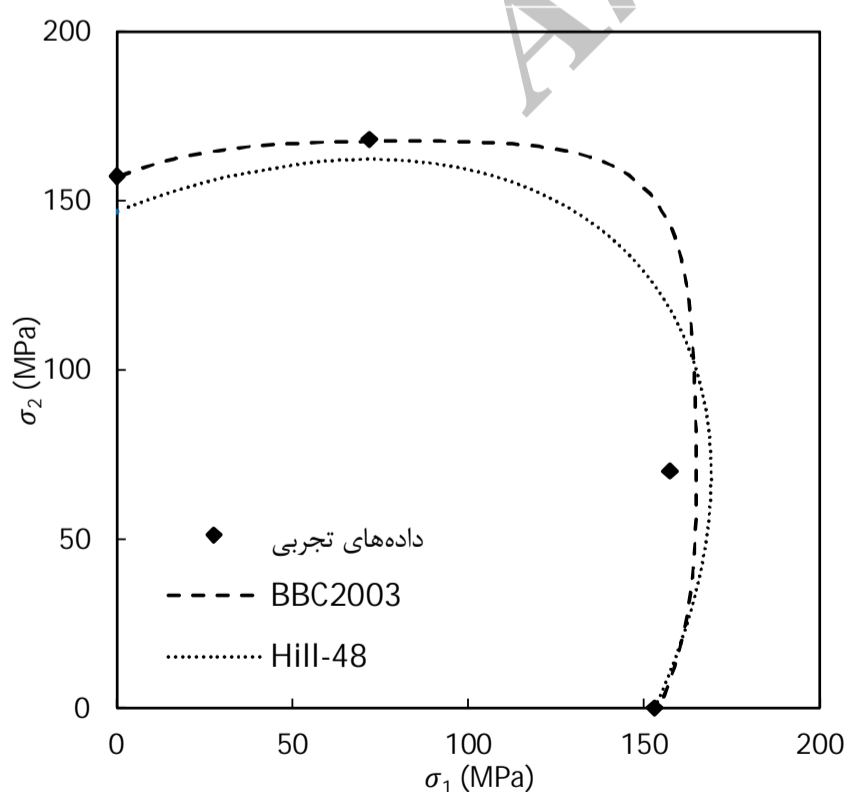
شکل 6 نمودار تنش-کرنش حقیقی برای ورق AA6061-O در جهت‌های مختلف



شکل 10 پیش‌بینی تغییرات ضریب ناهمسانگردی و تنش تسلیم در جهت‌های مختلف نسبت به راستای نورد ورق برای آلایژ AA6061-O

نتایج پیش‌بینی تغییرات تنش تسلیم تک‌محوره در جهت‌های مختلف، برای آلایژ AA3105 بر نتایج تجربی منطبق شده است. اما برای آلایژ AA6061-O این نتایج از داده‌های تجربی مقداری فاصله گرفته است. عامل اصلی این خطا، عدم انعطاف‌پذیری رابطه‌ی ریاضی معیار تسلیم BBC2003 می‌باشد. استفاده از معیار تسلیم با انعطاف‌پذیری بیشتر [13] برای این ماده می‌تواند در کاستن از این خطاها موثر واقع شود.

یکی دیگر از راه‌های بررسی دقت برنامه‌ی رایانه‌ای تعیین ثوابت، رسم سطح تسلیم با استفاده از این ثوابت است. شکل‌های 11 و 12 به ترتیب سطح تسلیم ترسیم شده با معیار BBC2003 و هیل 48 را برای آلایژهای AA3105 و AA6061-O نشان می‌دهند. با مقایسه‌ی مقادیر نتایج تجربی و سطح تسلیم پیش‌بینی شده به روش تئوری در شکل‌های 11 و 12 دقت متوسط برای معیارهای BBC2003 و هیل 48 برای آلایژ AA3105 به ترتیب برابر 99/90% و 97/47% می‌باشد. این مقادیر برای آلایژ AA6061-O به ترتیب برابر 99/99% و 70/11% است. شکل‌های 11 و 12 قابلیت بیشتر معیار تسلیم BBC2003 را در منطبق شدن با نتایج تجربی نسبت به معیار هیل 48 و همچنین دقت ثوابت این معیار برای هر دو آلایژ را نشان می‌دهد.



شکل 11 مکان هندسی تسلیم طبق معیارهای تسلیم BBC2003 و هیل 48 برای آلایژ AA3105

### 3-4- نتایج حل عددی برای تعیین ثوابت

برای صحت‌گذاری عملکرد برنامه‌ی رایانه‌ای نوشته شده جهت به دست آوردن ثوابت معیار تسلیم BBC2003، ابتدا نتایج تجربی گزارش شده در [2] برای تنش تسلیم و ضرایب ناهمسانگردی در راستاهای 0°، 45° و 90° و نیز تنش تسلیم کرنش صفحه‌ای در راستای نورد و عمود بر آن برای آلایژ آلومینیوم AA6181-T4 مورد استفاده قرار گرفت. سپس ثوابت معیار تسلیم محاسبه شد. با توجه به این ثوابت، تنش تسلیم و ضرایب ناهمسانگردی در راستاهای مختلف پیش‌بینی گردید. نتایج به دست آمده از این پیش‌بینی، در مطابقت نزدیک با نتایج تجربی [2] می‌باشد.

با داشتن هشت خاصیت مکانیکی ارائه شده در جدول‌های 2 و 3 می‌توان ثوابت معیار تسلیم BBC2003 را برای آلایژهای مورد مطالعه در این تحقیق محاسبه کرد. این ثوابت در جدول‌های 4 و 5 ارائه شده است. با استفاده از ثوابت ارائه شده در جدول‌های 4 و 5 پیش‌بینی تغییرات تنش تسلیم و ضریب ناهمسانگردی در جهت‌های مختلف برای آلایژ AA3105 و AA6061-O مورد بررسی قرار گرفت. نتایج مربوطه به ترتیب در شکل‌های 9 و 10 نشان داده شده است. در این نمودارها، تنش‌های تسلیم در جهت‌های مختلف با تقسیم بر تنش تسلیم در جهت نورد ورق بی‌بعد شده‌اند.

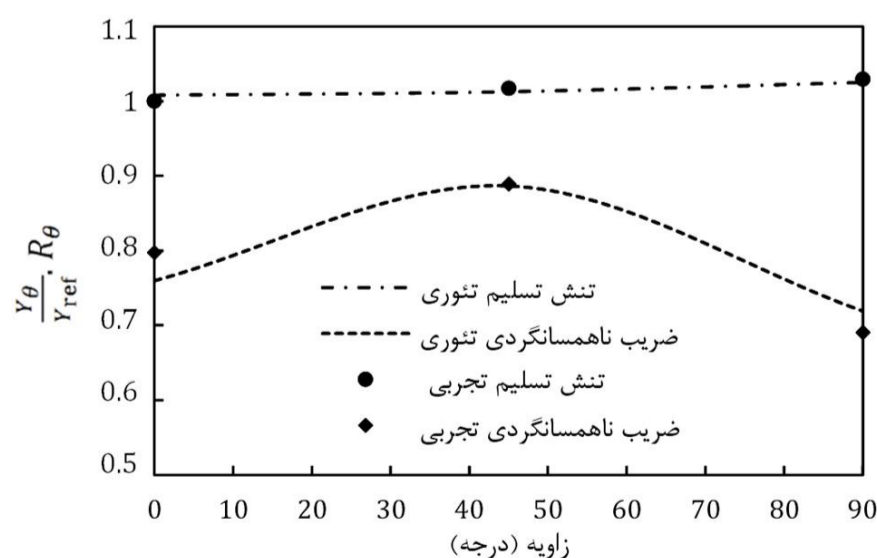
دقت متوسط ضریب ناهمسانگردی در زوایای مختلف برای آلایژهای AA6061-O و AA3105 به ترتیب برابر 99/77% و 99/98% و همچنین دقت تخمین تنش تسلیم در زوایای مختلف برای دو آلایژ مذکور به ترتیب برابر 99/99% و 99/51% می‌باشد. نمودارهای ارائه شده در شکل‌های 9 و 10 دقت مطلوب روش عددی و برنامه رایانه‌ای را در پیش‌بینی تغییرات تنش تسلیم و ضریب ناهمسانگردی تجربی در جهت‌های مختلف نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای آلایژ AA3105 نمودار پیش‌بینی کننده‌ی ضریب ناهمسانگردی، تنها در زوایای 0° و 90° دارای کمی اختلاف با نتایج تجربی است. مقدار خطا در این نقاط حداکثر 5% می‌باشد. احتمالاً یکی از عوامل ایجاد این خطا، عدم دقت کافی در تعیین ضرایب ناهمسانگردی در روش تجربی به کار گرفته شده است. استفاده از روش پردازش تصویر می‌تواند نتایج بهتری در مورد ضرایب ناهمسانگردی به دست دهد [12].

جدول 4 ثوابت معیار تسلیم BBC2003 برای آلایژ AA3105

k	a	M	N	P	Q	R	S	T
4	0/488	1/0193	1/011	0/981	0/982	0/978	0/946	0/9789

جدول 5 ثوابت معیار تسلیم BBC2003 برای آلایژ AA6061-O

k	a	M	N	P	Q	R	S	T
4	0/5	1/0379	0/961	1/013	0/9846	0/9178	0/935	0/9555



شکل 9 پیش‌بینی تغییرات ضریب ناهمسانگردی و تنش تسلیم در جهت‌های مختلف نسبت به راستای نورد ورق برای آلایژ AA3105



## علائم یونانی

$\alpha$	نسبت تنش
$\Gamma$	تابع کمکی معیار تسلیم BBC2003
$\varepsilon$	کرنش
$\Lambda$	تابع کمکی معیار تسلیم BBC2003
$\sigma$	تنش (MPa)
$\varphi$	زاویه نسبت به راستای نورد در کشش تک‌محوره (درجه)
$\psi$	زاویه نسبت به راستای نورد در کشش کرنش صفحه‌ای (درجه)
$\Psi$	تابع کمکی معیار تسلیم BBC2003
$\zeta$	تابع خطا

## بالانویس‌ها

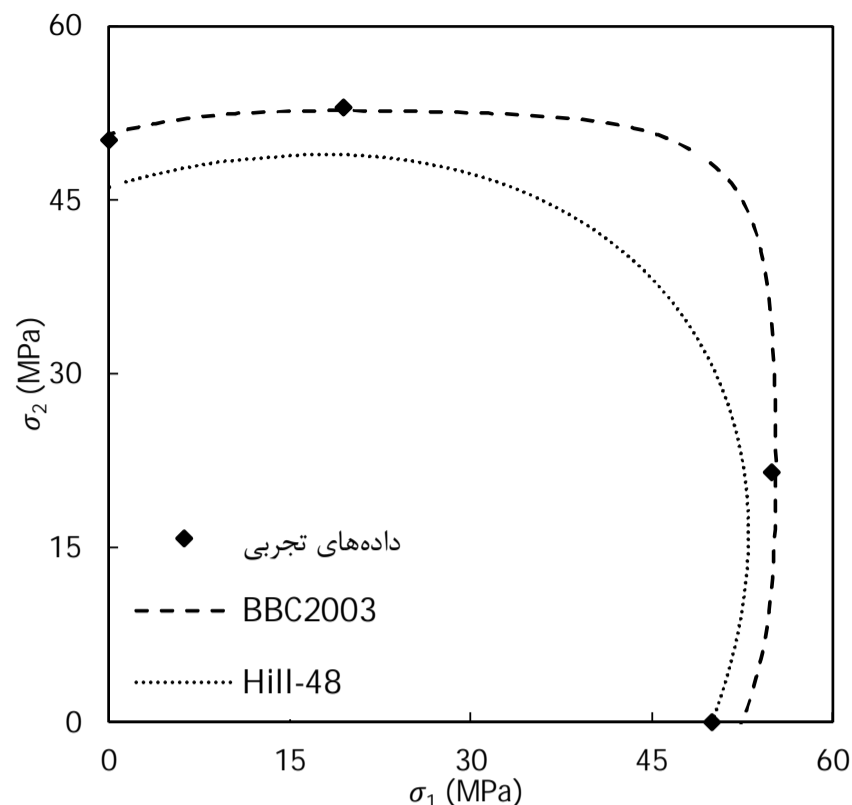
exp	داده‌ی تجربی
P	پلاستیک
ps	حالت کرنش صفحه‌ای

## زیرنویس‌ها

0	زاویه نسبت به راستای نورد ورق (درجه)
45	زاویه نسبت به راستای نورد ورق (درجه)
90	زاویه نسبت به راستای نورد ورق (درجه)
edge	لبه‌های نمونه
ref	مقدار مرجع
tot	مجموع کل
$\theta$	زاویه (درجه)
ps	حالت کرنش صفحه‌ای

## 7-مراجع

- [1] D. Banabic, *Sheet Metal Forming Processes*, First Edition, pp. 91-120, New York: Springer, 2010.
- [2] D. Banabic, H. Aretz, D.S. Comsa, L. Paraianu, An improved analytical description of orthotropy in metallic sheets, *International Journal of Plasticity*, Vol. 21, pp. 493-512, 2005.
- [3] H. Aretz, A non-quadratic plane stress yield function for orthotropic sheet metals, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 168, pp. 1-9, 2005.
- [4] M. Sester, D. Banabic, Influence of constitutive equations on the accuracy of prediction in sheet metal forming simulation, *Materials and Manufacturing Processes*, Vol. 27, pp. 304-308, 2012.
- [5] L. Paraianu, D.S. Comsa, D. Banabic, Calibration of BBC2005 yield criteria using plane strain yielding results from a bulge test, in *International Deep Drawing Research Group Conference*, Zurich, Switzerland, 2013.
- [6] S. Y. Zhang, L. Leotoing, D. Guines, S. Thuillier, Identification of Anisotropic Yield Criterion Parameters from a Single Biaxial Tensile Test. *Key Engineering Materials*, Vol. 611, pp. 1710-1717, 2014.
- [7] L. Lazarescu, I. Ciobanu, I.P. Nicodim, D.S. Comsa, D. Banabic, Effect of the mechanical parameters used as input data in the yield criteria on the accuracy of the finite element simulation of sheet metal forming processes, *Key Engineering Materials*, Vol. 554-557, pp. 204-209, 2013.
- [8] S. Ahmadi, A.R. Eivani, A. Akbarzadeh, An experimental and theoretical study on the prediction of forming limit diagrams using new BBC yield criteria and M-K analysis, *Journal of Computational Materials Science*, Vol. 44, pp. 1272-1280, 2009.
- [9] L. Paraianu, *Modelling of the FLC using the large deformation theory*, PhD Thesis, Department of Mechanical Engineering, Cluj Napoca University, Romanian, 2013.
- [10] J. D. Faires, R. Burden, *Numerical Methods*, Second Edition, pp. 243-250, New York: McGraw-Hill, 1998.
- [11] Y. An, H. Vegter, L. Elliott, A novel and simple method for the measurement of plane strain work hardening, *Journal of materials processing technology*, Vol. 155, pp. 1616-1622, 2004.
- [12] H. Aretz, J. Aegerter, O. Engler, Analysis of earing in deep drawn cups, in *The 10th International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, Pohang, Republic of Korea, 2010.
- [13] H. Aretz, F. Barlat, New convex yield functions for orthotropic metal plasticity, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 51, pp. 97-111, 2013.



شکل 12 مکان هندسی تسلیم طبق معیارهای تسلیم BBC2003 و هیل 48 برای آلایژ AA6061-O

## 5-نتیجه‌گیری

در این مقاله، ثوابت معیار تسلیم پیشرفته‌ی BBC2003 توسط یک روش جدید تجربی-عددی محاسبه شد. در این روش تنها از نتایج آزمون کشش تک‌محوره و کشش کرنش صفحه‌ای به همراه یک روند بهینه‌سازی برای تعیین ثوابت استفاده می‌شود. بنابراین، با روش ارائه شده، می‌توان بدون انجام آزمون کشش دومحوره‌ی یکسان، که نیازمند تجهیزات خاص و گران‌قیمت است، ثوابت تابع تسلیم را یافت. مطالعه‌ی موردی برای دو آلایژ آلومینیوم AA3105 و AA6061-O نشان داد که روش ارائه شده با دقت مناسبی قادر به پیش‌بینی تنش تسلیم تک‌محوره، ضرایب ناهمسانگردی و سطح تسلیم است. استفاده از این معیار تسلیم برای شبیه‌سازی فرایند شکل‌دهی ورق آلایژ آلومینیوم و پیش‌بینی پدیده‌هایی چون گوشواره‌ای شدن، موضوع تحقیقات آینده خواهد بود.

## 6-فهرست علائم

$a$	ثابت تابع تسلیم BBC2003
$F$	نیرو (N)
$M$	ثابت تابع تسلیم BBC2003
$N$	ثابت تابع تسلیم BBC2003
ND	راستای ضخامتی ورق
$P$	ثابت تابع تسلیم BBC2003
$Q$	ثابت تابع تسلیم BBC2003
$r$	ضریب ناهمسانگردی
$R$	ثابت تابع تسلیم BBC2003
RD	راستای نورد ورق
$S$	ثابت تابع تسلیم BBC2003
$T$	ثابت تابع تسلیم BBC2003
TD	راستای عرضی ورق
$Y$	تنش تسلیم (MPa)