مجله مهندسی مکانیک مدرس، بهمن 1394، دوره 15، شماره 11، ص‌ص 162-168

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل دقیق پدیده چتر ماشین‌ابزار در فضای پارامترهای سیستم

رضا حسن‌زاده قاسمی[1*]، علی غفاری[2]

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار
2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
* سبزوار، صندوق پستی 397، r.hasanzadeh@hsu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 12 مرداد 1394
پذیرش: 27 شهریور 1394
ارائه در سایت: 28 مهر 1394

کلید واژگان:
پایداری
چتر
انشقاق
تابع لمبرت

چکیده

یکی از معمول‌ترین مشکلاتی که در حین عملیات ماشین‌کاری اتفاق می‌افتد پدیده چتر ماشین‌ابزار است که تاثیرات بدی روی کیفیت سطح، دقت ابعادی، عمر ابزار و عمر دستگاه می‌گذارد. معادلات ریاضی حاصل از مدل‌سازی پدیده چتر را می‌توان به شکل معادلات دیفرانسیل تاخیری خطی بیان کرد. وجود ترم تاخیر در معادلات دیفرانسیل، تحلیل را پیچیده و مشکل می‌کند. معادله مشخصه این نوع معادلات دارای بی‌نهایت ریشه می‌باشد؛ در نتیجه روش‌های تحلیلی بررسی این مدل‌های ریاضیاتی بسیار پیچیده بوده و از طرفی روش‌های تقریبی از دقت مناسب برخوردار نیستند. در این مقاله از یک روش جدید برای تعیین نواحی دقیق پایداری در فضای پارامترهای سیستم چتر ماشین‌ابزار استفاده می‌شود. در این روش ابتدا نقاط انشقاق بدست آمده و سپس به کمک تابع لمبرت نواحی پایدار چتر تعیین می‌شود. مزیت این روش سادگی اجرای آن و نیز قابلیت استفاده در سیستم‌های با تاخیر زمانی خطی مرتبه بالا می‌باشد. به کمک این روش و رسم نواحی پایداری برای این سیستم می‌توان سرعت مناسب دستگاه تراش برای جلوگیری از چتر را انتخاب کرد. این روش جدید در مقایسه با روش‌های گرافیکی، محاسباتی و تقریبی از دقت بالایی برخوردار است.

Exact stable regions in the parameter space of machine tool chatter

Reza Hasanzadeh Ghasemi[1*], Ali Ghaffari[2],

1- Department of Engineering, Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran
2- Department of Mechanical Engineering, Khajeh Nasir Toosi University of Technology, Tehran, Iran
* P.O.B. 397, Sabzevar, Iran, r.hasanzadeh@hsu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 03 August 2015
Accepted 18 September 2015
Available Online 20 October 2015

Keywords:
Stability
Chatter
Bifurcation
Lambert function

ABSTRACT

One of the most commonly occurring problems during machining is Machine tool chatter, which adversely affects surface finish, dimensional accuracy, tool life and machine life. Machine tool chatter can be modeled as a linear time invariant differential equation with time delay or delay differential equation. Infinite dimensional nature of delay differential equations is apparent in the study of time delay systems. The analytical stability methods are thus more difficult for these differential equations and approximate methods do not give accurate results. In this paper, a new method is developed to determine the exact stable region(s) in the parameter space of machine tool chatter. In this method, first, the bifurcation points are determined. Then, the Lambert function is used to decide on the stability characteristics of each particular region. The advantages of this method are simple implementation and applicability to high order linear time delay systems. From the resulting stability regions of this method, an optimal spindle speed can be chosen to suppress the chatter. The new approach is the most acceptable method in comparison to traditional graphical, computational and approximate methods due to excellent accuracy and other advantages.

1- مقدمه

توسعه سریع فرآیندهای ماشین‌کاری در یک دهه گذشته و تجاری شدن ماشین‌کاری با سرعت بالا و مطمئن و ساخت قطعات با کیفیت بالا به عنوان خروجی این فرآیندها، سبب شده نیاز به بررسی دینامیک کامل فرآیندهای ماشین‌کاری امری لازم و ضروری شود [1]. یکی از مهم‌ترین پدیده‌هایی که عملیات ماشین‌کاری با دقت بالا و تولید قطعات با کیفیت مطلوب را با مشکل مواجه می‌کند پدیده چتر[1] است [2].

چتر یک ناپایداری دینامیکی است که می‌تواند نرخ براده‌برداری را محدود کند [3]. این ارتعاشات نامطلوب باعث کاهش بازدهی ماشین‌کاری می‌شود [4]. چتر، یک ارتعاش خود تحریک است که بوسیله ارتباط بین فرآیند براده برداری و ساختار ماشین‌ابزار ایجاد می‌شود [5،6]. نتیجه این پدیده، اثرات منفی مانند کیفیت سطح نامطلوب، نرخ براده‌برداری کم، دقت غیر قابل قبول، نویز زیاد، سایش ابزار و آسیب دیدن آن، آسیب اجزاء ماشین‌ابزار مثل یاتاقان ها و ... می‌باشد [2،3].

مشخص شده است که اثر احیاکننده[2]، مهم‌ترین و اصلی‌ترین عامل در ارتعاشات نامطلوب چتر در فرآیندهای ماشین‌کاری است. سطح بیرونی

1- Chatter

2- Regenerative

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
R. Hasanzadeh Ghasemi, A. Ghaffari, Exact stable regions in the parameter space of machine tool chatter, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 11, pp. 162-168, 2015 (In Persian)

موج‌دار قطعه که به دلیل ماشین‌کاری قبلی و نیز ارتعاشات در برش قبلی ایجاد شده است خود سبب تولید ارتعاش دینامیکی نیروی برش می‌شود که دوباره موج‌های جدیدی روی سطح قطعه ایجاد می‌کند [4]. زمانی که دامنه ارتعاش نیروی برشی زیاد می‌شود، چتر اتفاق می‌افتد. این اثر ابتدا توسط تلوستی، اسپاکک و توبیاس در حدود 50 سال پیش بررسی شده است [7]. پدیده چتر می‌تواند در تراش‌کاری، فرزکاری و سوراخ‌کاری اتفاق بیفتد [5]. موضوع چتر در ماشین‌کاری در ابعاد میکرو نیز با توجه به افزایش دقت، مورد بررسی قرار گرفته است [8].

با توجه به اهمیت پدیده چتر، پیش‌بینی نواحی پایداری چتر و کنترل چتر در ماشین‌کاری از اهمیت بسیاری برخوردار بوده و راهنمایی برای کاربر ماشین‌ابزار بوده تا سرعت اسپیندل و عمق برش بهینه را انتخاب نماید به نحوی که ارتعاش چتر و نویز را کاهش دهد. بدین منظور لازم است فرآیند شبیه‌سازی دینامیکی ارتباط مکانیکی بین ابزار ماشین و فرآیند ماشین‌کاری انجام پذیرد تا بتوان فرآیند ماشین‌کاری را بهینه کرد. راه حل بررسی پدیده چتر، تجزیه و تحلیل کردن مدل ریاضیاتی آن است.

مدل‌سازی دقیق اثر احیاکننده سبب ایجاد معادلات دیفرانسیل تاخیری[1] می‌شود. معادله مشخصه معادلات دیفرانسیل تاخیری دارای بی‌نهایت ریشه است و این موضوع تحلیل پایداری این سیستم‌ها را با مشکل مواجه می‌کند. به همین دلیل تحلیل این معادلات از مباحث مورد علاقه محققان است. اما در این میان روش‌های دقیق تحلیل معادلات دیفرانسیل تاخیری بیشتر مورد توجه بوده است. استفاده از تابع لمبرت[2] در تحلیل سیستم‌های با تاخیر زمانی به عنوان یک روش دقیق به طور گسترده‌ای ارائه شده است.

برای تحلیل پایداری سیستم تاخیردار مرتبه اول خطی به فرم $\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-\tau) = 0$ روشی کاملاً تحلیلی توسط اصل و آلسوی [6] ارائه شده که در آن از تابع لمبرت استفاده شده است. اما برای حالت خاص از معادلات دیفرانسیل مرتبه بالا با معادله مشخصه $(s+a)^n e^{\tau s} + b = 0$ نیز روش‌های کاملا تحلیلی به کمک تابع لمبرت توسط چن و مور [۹،10] و وانگا و چنگ [11] ارائه شده است. در [12] با تعیین بزرگ‌ترین ریشه معادله مشخصه سیستم‌های با تاخیر زمانی به کمک تابع لمبرت، پایداری این سیستم‌ها بررسی شده است. در [13] از تابع لمبرت برای بررسی ارتعاشات تاخیری عملگرهای ساخته شده از مواد هوشمند استفاده شده است. در [14] به بررسی خواص ویژه معادله مشخصه مربوط به معادلات دیفرانسیل تاخیری مرتبه فرد به کمک تابع لمبرت پرداخته شده است و پایداری این نوع از سیستم‌ها بررسی شده است. از تابع لمبرت برای کنترل سیستم‌های با تاخیر زمانی و مباحث مرتبط با آن نیز کمک گرفته شده است [15-17]. استفاده از تابع لمبرت برای تحلیل چتر به عنوان یک سیستم با تاخیر زمانی توسط آلسوی و همکاران در [18،۶-20] بررسی شده است.

در روش‌هایی که از تحلیل انشقاق[3] به منظور بررسی سیستم‌های با تاخیر زمانی استفاده شده [18،21،22]، بحث تعیین نواحی پایداری بررسی شده است. اما بعضی از این روش‌ها نیاز به محاسبات پیچیده بوده و گاهی در تعیین نواحی درست پایداری با مشکل مواجه هستند. تصمیم‌گیری نقطه‌ای بجای تصمیم‌گیری ناحیه‌ای از معایب این روش‌هاست.

تحلیل پایداری سیستم‌های با تاخیر زمانی مرتبه 2 به کمک روش حوزه فرکانسی توسط استفان [23] و اتای [24] انجام شده است. در این مقالات ترکیبی از روش حوزه فرکانسی، روش‌های گرافیکی و ریاضیاتی برای پیدا کردن ناحیه پایداری مورد استفاده قرار گرفته است. منابع و مراجع بسیاری به تحلیل پایداری سیستم‌های با تاخیر زمانی پرداخته‌اند که از میان آن‌ها می‌توان به کتاب‌های خریتونوف [25]، استفان [26] و مالک زواره‌ای و جمشیدی [27] اشاره کرد.

در این مقاله یک روش جدید برای تحلیل پایداری معادلات دیفرانسیل تاخیری چتر ارائه می‌شود که به کمک روش حوزه فرکانس اقدام به بدست آوردن نقاط انشقاق کرده و سپس به کمک تابع لمبرت، نواحی پایدار چتر را تعیین می‌کند. این روش هم سادگی اجرای روش‌های تقریبی گذشته و هم دقت کامل روش‌های دقیق پیچیده که قبلا مورد استفاده قرار می‌گرفت را دارا می‌باشد. این روش دارای اصول ریاضی بسیار ساده‌تر از روش‌های گذشته است. بنابراین برای پیدا کردن جواب نیاز به محاسبات ساده‌تر و کوتاه‌تری دارد.

در روش‌های دیگر به کمک تابع لمبرت، اظهار نظر در مورد سیستم با مشخصات خاص امکان‌پذیر است. در حالی‌که همچنان پیدا کردن نواحی پایداری دارای مشکلات خود است. در روش ما نواحی پایداری به سادگی قابل تعیین است و این نقطه قوت روش ارائه شده در این مقاله است. روش ارائه شده بدون بررسی نقطه به نقطه فضای پارامترها اقدام به تعیین نواحی پایداری می‌کند. این نکته می‌تواند حجم محاسبات را بشدت کاهش داده و زمینه برای اظهار نظر در مورد محدوده‌های وسیع‌تری از فضای پارامترها را فراهم آورد.

استفاده از تابع لمبرت برای سیستم‌های مرتبه بالا محققان را به سمت استفاده از تابع لمبرت ماتریسی سوق داده است. شکل ماتریسی تابع لمبرت پیچیدگی‌های جدیدی در زمینه بررسی پایداری سیستم‌های با تاخیر زمانی ایجاد می‌کند. بدین منظور یی، آلسوی و نلسون [16] روشی را ارائه کرده‌اند. ما در این مقاله روش بسیار ساده‌تری را برای تعیین ریشه‌های معادلات مرتبه بالا به کمک تابع لمبرت استفاده کرده‌ایم که همان نتیجه را در اختیار ما قرار می‌دهد. این روش برخلاف روش [16]، دستورالعمل کوتاه‌تری را ارائه می‌نماید.

نکته دیگر در روش ارائه شده، جامعیت آن برای سیستم‌های با تاخیر زمانی خطی است. این در حالیست که بعضی از روش‌ها محدودیت‌هایی را برای معادله مشخصه در نظر می‌گیرند.

در ادامه مقاله ابتدا مدل مکانیکی چتر آورده شده است و سپس روش تحلیل پایداری ارائه و برای مدل مورد نظر بکار برده می‌شود و در نهایت نتیجه‌گیری مقاله خواهد آمد.

2- مدل دینامیکی چتر ماشین‌ابزار

روش تحلیل پایداری برای بررسی چتر در فرآیندهای ماشین‌کاری مختلف قابل استفاده است. در این مقاله معادلات مربوط به فرآیند تراش‌کاری مورد بررسی قرار گرفته است. در فرآیند تراش‌کاری، یک قطعه‌کار استوانه‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت چرخیده و ابزار با برداشتن ماده، سطح جدیدی را ایجاد می‌کند. نیروی برش به موقعیت لبه ابزار برای چرخش جاری و همچنین چرخش قبلی وابسته است، در نتیجه هرگونه ارتعاش ابزار به سطح منتقل می‌شود.

همان‌طور که قبلا توضیح داده شد، فرآیند تراش‌کاری تحت تاثیر اثر احیاکننده است. زمانی که ابزار در تماس با قطعه‌کار است، ضخامت براده‌ای که برداشته می‌شود بین موقعیت جاری ابزار برش و موقعیت یک دوران قبل

1- Delay Differential Equations (DDE)
2- Lambert function
3- Bifurcation

ابزار برش با هم متفاوت است. این مساله تاخیر زمانی در سیستم ایجاد می‌کند [28].

به منظور استخراج معادلات دینامیکی چتر، اثر احیاکننده باید مدل‌سازی شود. این اثر در شکل 1 به خوبی نشان داده شده است. بر این اساس مقالات زیادی به بررسی معادلات دینامیکی پرداخته‌اند [29-32].

این معادلات که به دلیل اثر احیاکننده، به شکل معادلات تاخیری خواهد بود به صورت معادله (1) است [16]:

$$\frac{1}{\omega_n^2}\ddot{x}(t) + \frac{2\xi}{\omega_n}\dot{x}(t) + x(t) = -\frac{K_c}{K_m}\big(x(t) - \mu x(t-\tau)\big) \qquad (1)$$

که در این معادله $x(t)$ مختصه کلی موقعیت لبه ابزار است.

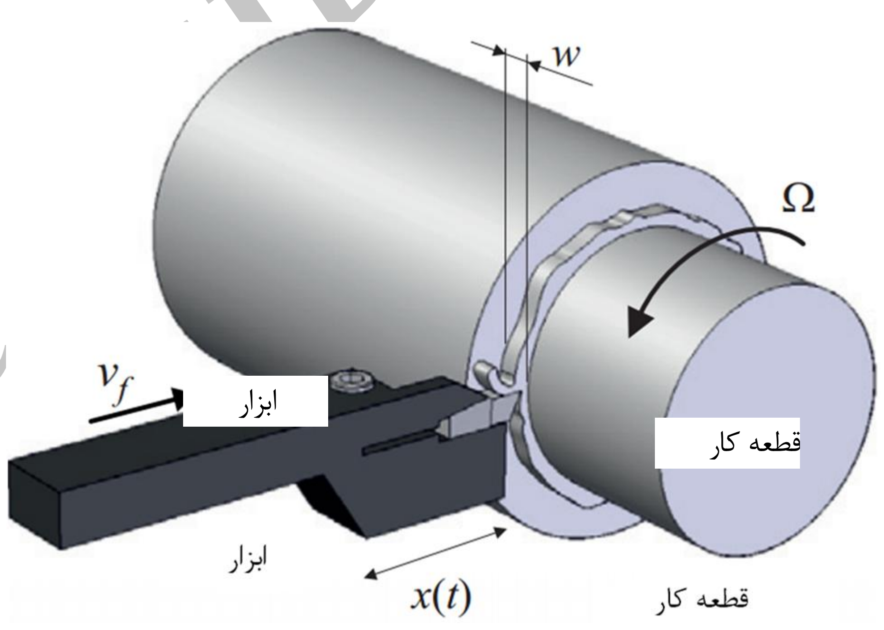
ω_n و ξ فرکانس زاویه‌ای طبیعی و ضریب میرایی سیستم هستند.

K_m سختی ساختاری بوده و از رابطه $K_m = m\omega_n^2$ محاسبه می‌شود.

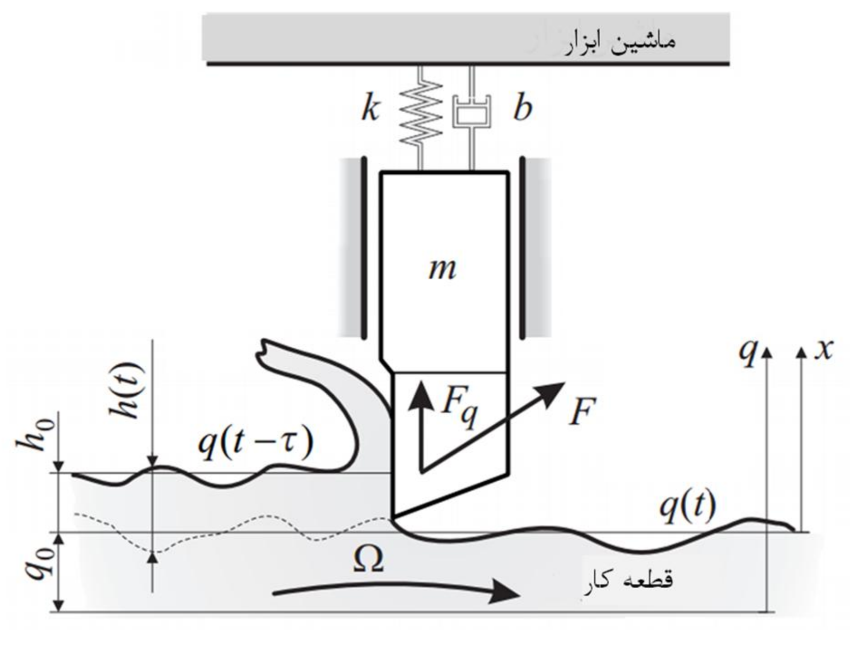
K_c ضریب برشی است که از یک مدل ایستا نیروی برشی استخراج شده است این مدل تجربی تابعی از پارامترهایی مانند پهنای براده، ضخامت براده و سرعت برش است.

τ زمان لازم برای یک چرخش (تاخیر زمانی) است و با رابطه $\tau = 2\pi/\Omega$ قابل محاسبه است که در آن Ω سرعت زاویه‌ای قطعه‌کار است.

μ فاکتور همپوشانی[1] [33] است که مساوی با یک در نظر گرفته شده است.



الف) شماتیکی از ابزار برش در تماس با قطعه کار



ب) بیان گرافیکی نیروهای اعمال شده به ابزار

شکل 1 اثر احیاکننده، عامل اصلی در ایجاد چتر ماشین‌ابزار [28]

معادله (1) را می‌توان به فرم فضای حالت به شکل معادله (2) نوشت:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BX(t-\tau) \qquad (2)$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(1+\frac{K_c}{K_m}\right)\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu\frac{K_c}{K_m}\omega_n^2 & 0 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب A و B ماتریس ضرایب خطی شده از مدل فرآیند بوده و تابعی از پارامترهای ساختاری قطعه‌کار/ ابزار ماشین مانند فرکانس طبیعی، میرایی و سختی می‌باشند. پایداری چنین سیستم خطی می‌تواند شرایط شروع پدیده چتر را بیان کند اما حد دامنه غیرخطی مربوط به ارتعاشات چتر را نشان نمی‌دهد [6،19].

3- تابع لمبرت

هر تابع $W(s)$ که شرایط معادله (3) را تامین نماید، با عنوان تابع لمبرت شناخته می‌شود.

$$W(s)e^{W(s)} = s \qquad (3)$$

این تعریف در سال 1758 توسط لمبرت و سپس اولر ارائه شده است.

این مفهوم در حل معادله مشخصه غیرجبری و در معادله دیفرانسیل تاخیری کاربرد دارد، به عنوان مثال معادله (4) که معادله مشخصه یک سیستم با تاخیر زمانی اسکالر است را توسط تابع لمبرت بررسی می‌کنیم.

$$(s+\beta) + \alpha e^{-s\tau} = 0 \qquad (4)$$

برای تامین شرایط معادله (3)، معادله (4) را به‌صورت معادله (5) بازنویسی می‌کنیم:

$$(s+\beta)e^{+s\tau} + \alpha = 0 \to \tau(s+\beta)e^{s\tau} = -\alpha\tau$$
$$\to \tau(s+\beta)e^{\tau(s+\beta)} = -\alpha\tau e^{\beta\tau} \qquad (5)$$

اکنون با استفاده از تعریف تابع لمبرت در معادله (3)، معادله (6) قابل دستیابی است:

$$\tau(s+\beta) = W\left(-\alpha\tau e^{\beta\tau}\right) \qquad (6)$$

و در نهایت جواب معادله (4) برحسب تابع لمبرت به صورت معادله (7) بدست می‌آید:

$$s = \frac{1}{\tau}W\left(-\alpha\tau e^{\beta\tau}\right) - \beta \qquad (7)$$

که در این معادله، W با عنوان تابع لمبرت شناخته می‌شود.

شکل کلی تابع لمبرت یک تابع پیچیده، با شاخه‌های نامحدود است. محاسبه شاخه اصلی این تابع به شکل سری، بوسیله کارتئودوری ارائه شده است و به صورت رابطه (8) می‌باشد:

$$W_0(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^{n-1}}{n!}s^n \qquad (8)$$

همچنین از معادله (9) می‌توان محاسبه شاخه‌های دیگر تابع لمبرت برای $k = -\infty, \ldots -1, 0, +1, \ldots, +\infty$ را مورد بررسی قرار داد.

$$W_k(s) = \ln_k(s) - \ln\left(\ln_k(s)\right) + \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{lm}\frac{\left(\ln(\ln_k(s))\right)^m}{\ln_k(s)^{l+m}} \qquad (9)$$

که در این معادله $\ln_k(s) = \ln(s) + 2\pi i k$ نشان‌دهنده kامین شاخه لگاریتم است و ضرایب C_{lm} می‌تواند به صورت اعداد سیکل استرلینگ[2] در معادله (10) نشان داده شود.

$$C_{lm} = \frac{1}{m!}(-1)^l \begin{bmatrix} l+m \\ l+1 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

مباحث جزئی‌تر از تابع لمبرت در [34-36] آمده است.

1- Overlapping

2- Stirling Cycle number

4- تحلیل پایداری

ما در این بخش یک روش تحلیلی دقیق برای بدست آوردن نواحی پایدار سیستم‌های با تاخیر زمانی مرتبه بالا در فضای پارامترها ارائه می‌کنیم. یک کلاس کلی از سیستم‌های با تاخیر زمانی خطی به صورت معادله (11) قابل نمایش است.

$$\dot{x} = Ax(t) + Bx(t-\tau)$$
$$x(n\times 1), A, B \in R(n\times n)\ ,\ \tau \in R^{+} \tag{11}$$

که معادله مشخصه آن به صورت معادله (12) خواهد بود

$$\det(sI - A - Be^{-\tau s}) = 0 \quad with \quad \tau \geq 0 \tag{12}$$

و می‌تواند به فرم کلی معادله (13) نیز نشان داده شود

$$CE(s,\tau) = \sum_{n=1}^{m} a_n(s)e^{-n\tau s} + b(s) = 0 \tag{13}$$

این سیستم از نوع دیرکار[1] در نظر گرفته شده، بنابراین درجه ترم $b(s)$ بالاترین درجه سیستم است. همان‌طور که می‌دانیم سیستم (11) پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر همه ریشه‌های معادله مشخصه مربوط به معادله غیرجبری (12) در سمت چپ محور موهومی باشند. از آنجا که تعداد ریشه‌های مورد بررسی در این نوع معادلات بی‌نهایت هستند کار را با مشکل مواجه می‌کند.

ما روش حوزه فرکانسی را به کمک تابع لمبرت طوری توسعه داده‌ایم تا بتوان نواحی پایداری سیستم‌های با تاخیر زمانی خطی مرتبه بالا را از آن استخراج کرد. این روش به ما اجازه می‌دهد که با بدست آوردن نقاط انشقاق در فضای دو تا از پارامترهای سیستم اقدام به بدست آوردن نواحی پایدار سیستم کنیم.

به طور کلی انشقاق موقعی اتفاق می‌افتد که ریشه‌های معادله مشخصه محور موهومی را قطع کنند که همه انواع آن (فولد، هاپف و گذار بحرانی)[2] در این موضوع مشترک هستند که قسمت حقیقی این نقاط صفر است. ما در استخراج نواحی پایداری از این نکته استفاده می‌کنیم که نواحی پایداری یک سیستم با تاخیر زمانی بوسیله منحنی انشقاق تشکیل می‌شود. روش ارائه شده در این مقاله یک روش عددی تعمیم یافته برای بدست آوردن نواحی پایداری سیستم‌های مرتبه n است. در ادامه روال ریاضیاتی روش ارائه می‌شود.

در معادله (13) فرض کنید که $a(s)$ و $b(s)$ توابعی از x و y باشند که این x و y پارامترهایی از معادله دیفرانسیل تاخیری هستند. همان‌طور که قبلا بحث شد، نواحی پایداری سیستم با منحنی انشقاق بدست می‌آید. برای بدست آوردن نقاط انشقاق، s به $i\omega$ جایگزین می‌شود که در آن $i = \sqrt{-1}$. از آنجا که معادله (13) یک شبه چند جمله‌ای حقیقی است، همه ریشه‌های آن به فرم مزدوج مختلط ظاهر می‌شوند، یعنی از خاصیت تقارن مختلط تبعیت می‌کنند. بنابراین کافی است تنها مقادیر مثبت ω مورد بررسی قرار بگیرد. با این جای‌گذاری معادله (13) به معادله (14) تبدیل می‌شود.

$$a(i\omega,x,y)e^{-\tau\omega i} + b(i\omega,x,y) = 0 \tag{14}$$

از آن‌جا که $e^{-\tau\omega i} = \cos(\tau\omega) - i\sin(\tau\omega)$ و با تعریف $\psi = \tau\omega$ معادله (14) را می‌توان به شکل معادله (15) بیان کرد:

$$F = C(\psi,x,y)\big(\cos(\psi) - i\sin(\psi)\big) + D(\psi,x,y) = 0 \tag{15}$$

معادله (15) ارضاء می‌شود اگر و فقط اگر شرایط معادله (16) ارضاء شود.

$$\mathrm{Im}(F) = 0 \quad , \quad \mathrm{Re}(F) = 0 \tag{16}$$

پس اکنون دو معادله داریم با دو مجهول x و y، نقاط انشقاق ایجاد نواحی مختلف در سیستم می‌کنند که پیدا کردن ناحیه پایدار سیستم از بین آن‌ها را با مشکل مواجه می‌کند. بنابراین در مرحله بعد، هدف پیدا کردن ناحیه‌ای است که قسمت حقیقی ریشه‌های معادله مشخصه (12) در آن منفی می‌باشد که آن در واقع ناحیه پایدار سیستم است. یک نکته اساسی این است که تغییرات پایداری سیستم با تغییر تعداد ریشه‌های مثبت در صورتی اتفاق می‌افتد که ما نقاط انشقاق را قطع کنیم؛ یعنی از یک ناحیه وارد ناحیه دیگر شویم. به بیان ساده این که تعداد ریشه‌های با قسمت حقیقی مثبت در هر ناحیه بدست آمده ثابت است [37,38]. در نتیجه اگر فقط یک نقطه از ناحیه چک شود می‌توان آن را به تمام نقاط آن ناحیه تعمیم داد. برای بدست آوردن ریشه‌های معادله در یک نقطه خاص، از تابع لمبرت کمک می‌گیریم.

از سیستم (11)، معادله مشخصه ماتریسی (16) قابل تعیین است:

$$S - A - Be^{-S\tau} = 0 \tag{16}$$

که براساس تعریف تابع لمبرت (3)، مقادیر S به صورت معادله (17) بدست می‌آید.

$$S_k = W\big(k, Be^{-S_k\tau}e^{(S_k - A)}\big) + A \tag{17}$$

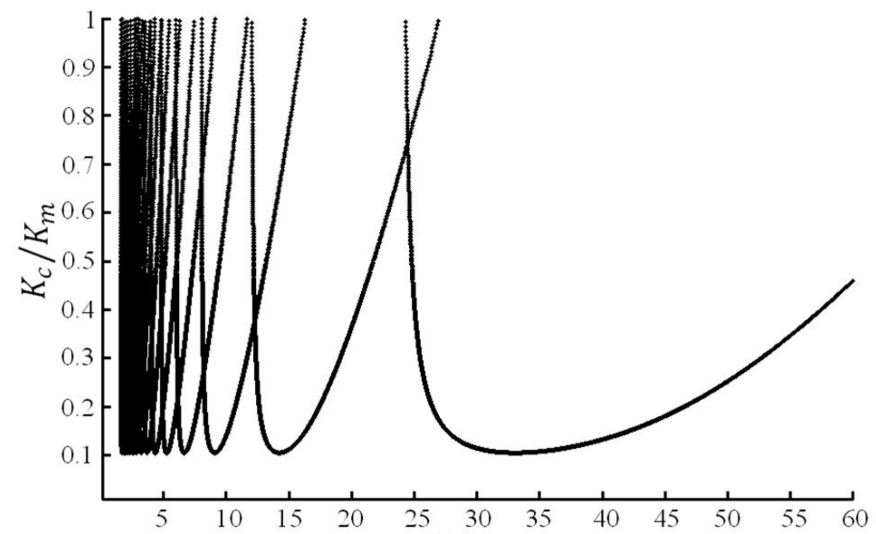
که k نشان‌دهنده شاخه تابع لمبرت است و $k = -\infty,\dots,+\infty$. مقادیر ویژه S_k ریشه‌های معادله مشخصه (16) می‌باشند پس بنابراین به کمک مقادیر ویژه S_k می‌توان در مورد پایداری یا ناپایداری سیستم اظهار نظر کرد.

ثابت شده است که ریشه‌های به‌دست آمده از شاخه اصلی تابع لمبرت ($k = 0$) تعیین‌کننده پایداری سیستم‌های با تاخیر زمانی اسکالر است [39]. برای این مساله در حالت ماتریسی، که در واقع همان سیستم‌های مرتبه بالا می‌باشد اثباتی ارائه نشده است، اما این موضوع در [20] به تجربه پذیرفته شده است. این بحث دارای این مفهوم است که مقادیر ویژه معادله (17) برای $k = 0$ معیار پایداری یا ناپایداری سیستم است، یعنی اگر ریشه‌های معادله مشخصه سیستم در $k = 0$ دارای ریشه‌ای با قسمت حقیقی مثبت نبود می‌توان گفت این سیستم پایدار است.

اکنون به کمک این روش به تحلیل پدیده چتر می‌پردازیم. معادله دیفرانسیل سیستم (1) به فرم لاپلاسین معادله (18) قابل بیان است.

$$\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1 = -\frac{K_c}{K_m}\left(1 - \mu e^{-\tau s}\right) \tag{18}$$

با جای‌گذاری $s = i\omega$ و نیز $e^{-\tau\omega i} = \cos(\tau\omega) - i\sin(\tau\omega)$ و با تعریف $\psi = \tau\omega$ در نهایت مقادیر τ و K_c/K_m نسبت به ψ بدست خواهد آمد. رسم نقاط انشقاق گراف‌هایی ایجاد می‌کند که این گراف‌ها برای شرایط $\omega_n = 150, \xi = 0.05$ در شکل 2 آورده شده است. لازم به ذکر است از نظر ریاضیاتی این نقاط در بخش‌های منفی گراف نیز وجود دارند، اما با توجه به مثبت بودن پارامترهای انتخاب شده، در شکل 2 آورده نشده است.



شکل2 نقاط انشقاق برای حالت $\omega_n = 150, \xi = 0.05$

1- Retarded
2- Fold, Hopf, Transcritical

همان‌طور که مشاهده می‌شود، نقاط انشقاق نواحی مختلفی را ایجاد می‌کند. برای بررسی این‌که کدام ناحیه، ناحیه پایدار سیستم است، نقطه با مختصات $\tau = 1/50$ و $K_c/K_m = 0.08$ را انتخاب می‌کنیم. با این مختصات، ریشه‌های معادله (17) در $k = 0$ به صورت رابطه (19) خواهد بود:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -26344.9 & -13.7 \end{bmatrix} \quad (19)$$

که مقادیر ویژه آن عبارتند از:

$\lambda_{1,2} = -6.85 \pm 162.17i$

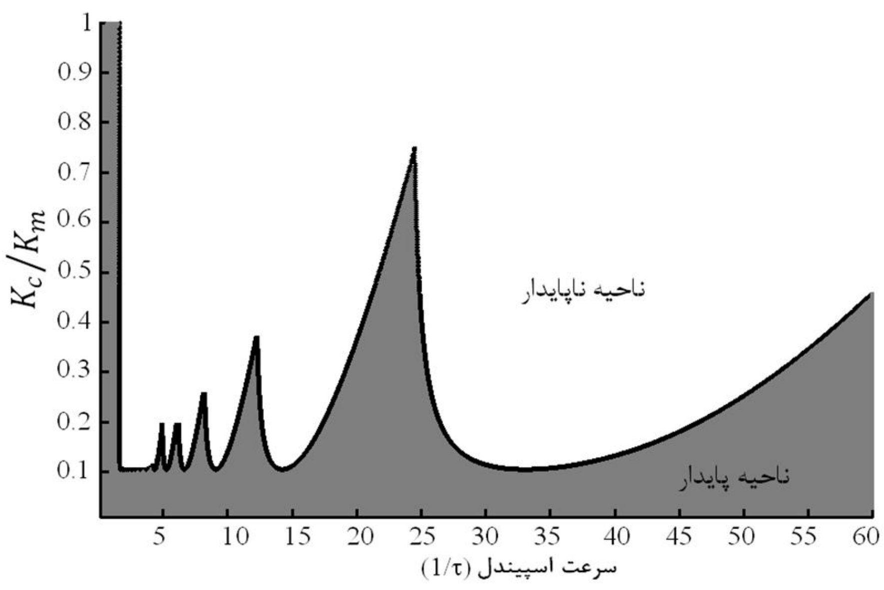
منفی بودن مقادیر ویژه براساس توضیحات داده شده، نشان‌دهنده پایدار بودن ناحیه پایین است.

با بررسی ریشه معادله (17) در نواحی دیگر ایجاد شده، مشخص می‌شود، که مقدار حقیقی مقادیر ویژه در تمام این نواحی، مثبت خواهد بود. که به معنی ناپایدار بودن این نواحی چتر در فضای پارامترهای مشخص شده می‌باشد. پس در این سیستم ناحیه پایدار دیگری نمی‌توان یافت. ناحیه پایدار در شکل 3 به خوبی نشان داده شده است.

به منظور بررسی دقیق‌تر، نحوه تغییر مقادیر ویژه ماتریس ریشه مربوط به معادله (16) در نزدیکی مرز پایداری در تاخیر زمانی $\tau = 1/35$ آورده می شود. در شکل 4 مرز پایداری در تاخیر زمانی مذکور مشاهده می‌شود. در جدول 1، ریشه معادله (17) و مقادیر ویژه مربوطه به ازاء K_c/K_m های مختلف ارائه شده است.

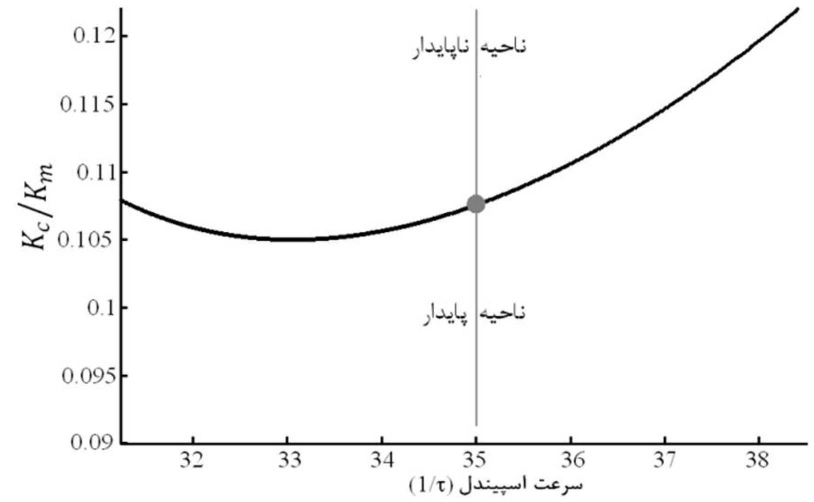
در شکل 5 نحوه تغییر بخش حقیقی مقادیر ویژه با تغییر K_c/K_m نشان داده شده است. از جدول 1 و شکل 5 می‌توان مشاهده کرد که با دور شدن از منحنی انشقاق در ناحیه ناپایدار، قسمت حقیقی مثبت مقادیر ویژه بزرگ‌تر می‌شود. یعنی ریشه‌های مثبت معادله مشخصه از حیث اندازه بزرگ‌تر شده و اثرگذاری آن روی ناپایداری سیستم بیشتر خواهد شد. همچنین با دور شدن از منحنی انشقاق در ناحیه پایدار قسمت حقیقی منفی مقادیر ویژه بزرگ‌تر می‌شود که به معنی فاصله بیشتر سیستم از ناپایداری است.

الف) نواحی پایدار و ناپایدار به همراه نقاط انشقاق



ب) مرز نواحی پایدار و ناپایدار

شکل 3 ناحیه پایداری چتر برای حالت $\omega_n = 150, \xi = 0.05$



شکل 4 بررسی دقیق‌تر در مرز پایداری برای مشاهده نحوه تغییر علامت مقادیر ویژه

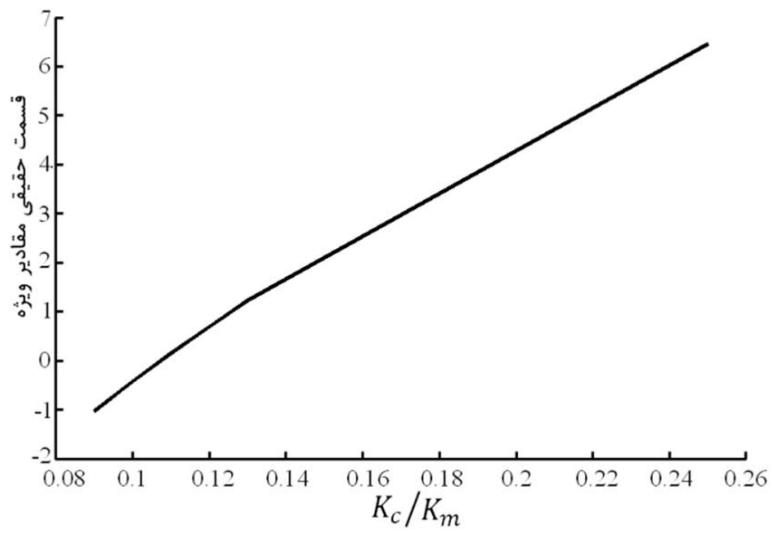
جدول 1 ریشه معادله (17) و مقادیر ویژه مربوطه به ازاء K_c/K_m های مختلف

$\frac{K_c}{K_m}$	ریشه معادله 18 در $k = 0$	مقادیر ویژه
0.09	$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -24928.81 & -2.06 \end{bmatrix}$	$\lambda_{1,2} = -1.03 \pm 157.89i$
0.1	$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25153.91 & -0.87 \end{bmatrix}$	$\lambda_{1,2} = -0.43 \pm 158.60i$
0.11	$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25372.98 & +0.28 \end{bmatrix}$	$\lambda_{1,2} = +0.14 \pm 159.29i$
0.12	$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25586.51 & +1.38 \end{bmatrix}$	$\lambda_{1,2} = +0.69 \pm 159.96i$
0.13	$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25794.93 & +2.45 \end{bmatrix}$	$\lambda_{1,2} = +1.22 \pm 160.60i$
0.25	$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -28001.13 & +12.91 \end{bmatrix}$	$\lambda_{1,2} = +6.46 \pm 167.21i$

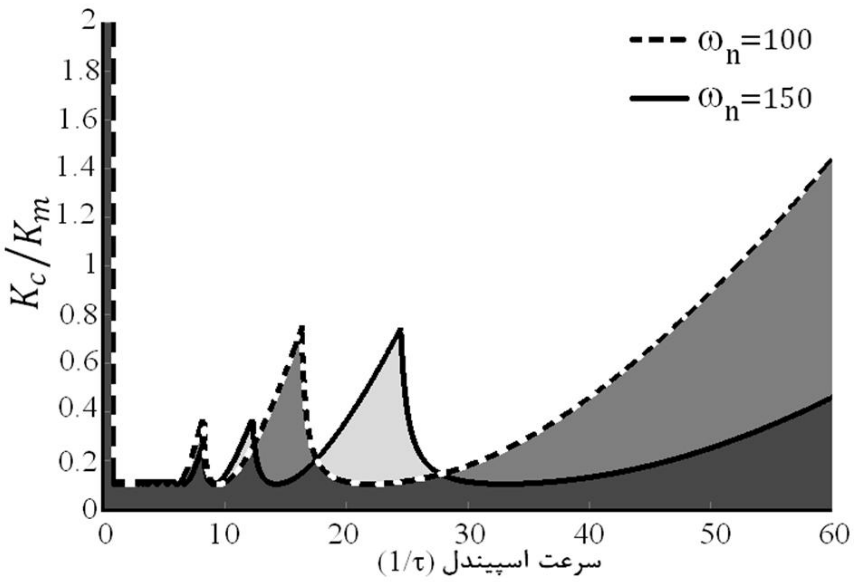
با توجه به تعیین نواحی پایداری به کمک روش پیشنهادی، اکنون می‌توان اثر تمامی پارامترهای سیستم را روی تغییر نواحی پایدار چتر بررسی کرد. به عنوان نمونه در ادامه اثر تغییر فرکانس طبیعی و ضریب دمپینگ سیستم روی نواحی پایداری چتر ارائه می‌شود.

در شکل 6 مقایسه نواحی پایداری برای دو $\omega_n = 100$ و $\omega_n = 150$ مختلف آورده شده است. در این شکل، رنگ تیره نشان‌دهنده ناحیه مشترک پایداری برای دو ω_n، ناحیه روشن تنها مربوط به $\omega_n = 150$ و نواحی خاکستری تنها مربوط به $\omega_n = 100$ است. بنابراین مشاهده می‌شود که کاهش مقدار ω_n سبب افزایش ناحیه پایداری می‌شود.

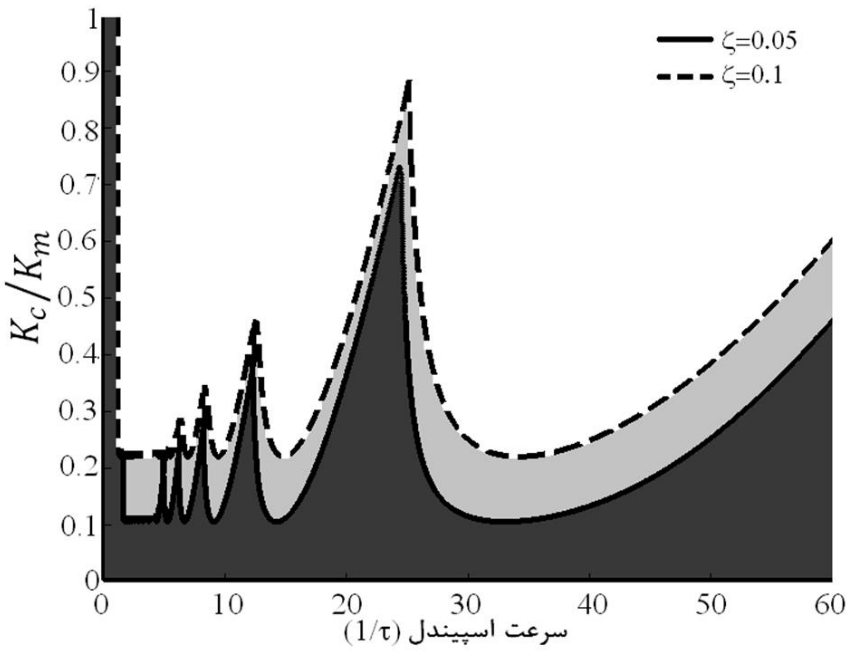
در شکل 7 مقایسه نواحی پایداری برای دو $\xi = 0.05$ و $\xi = 0.1$ مختلف آورده شده است. در این شکل، رنگ تیره نشان‌دهنده ناحیه مشترک پایداری برای دو ξ و ناحیه روشن تنها مربوط به $\xi = 0.1$ است. به این ترتیب افزایش مقدار ξ سبب جابجایی ناحیه پایداری به سمت بالا خواهد شد و ناحیه پایداری بزرگ‌تر می‌شود.



شکل 5 تغییر قسمت حقیقی مقادیر ویژه مربوط به ماتریس ریشه معادله (17)



شکل 6 مقایسه ناحیه پایداری برای دو حالت ω_n = 100 و ω_n = 150 در ξ = 0.05



شکل 7 مقایسه ناحیه پایداری برای دو حالت ξ = 0.1 و ξ = 0.05 در ω_n = 150

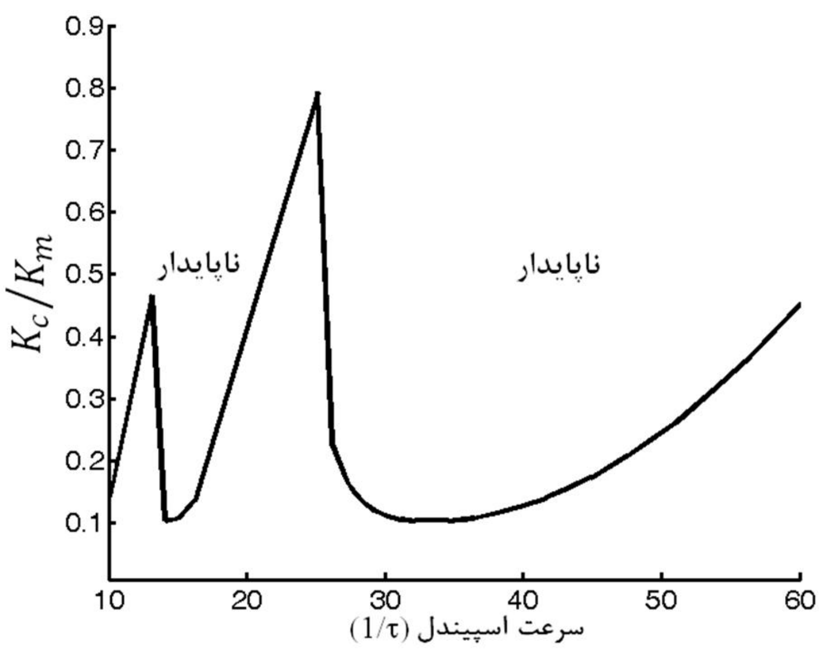
در تمامی شکل‌های ارائه شده برای نواحی پایداری با افزایش سرعت اسپیندل و به عبارتی کاهش مقدار تاخیر زمانی، نواحی پایداری سیستم بزرگ‌تر می شود. در واقع هرچه تاخیر زمانی کوچک‌تر باشد برای انتخاب نسبت K_c/K_m انعطاف بیشتری وجود داشته و برعکس در تاخیرهای زمانی بزرگ برای انتخاب این نسبت به شدت محدودیت وجود دارد.

5-مقایسه نتایج با کارهای گذشته

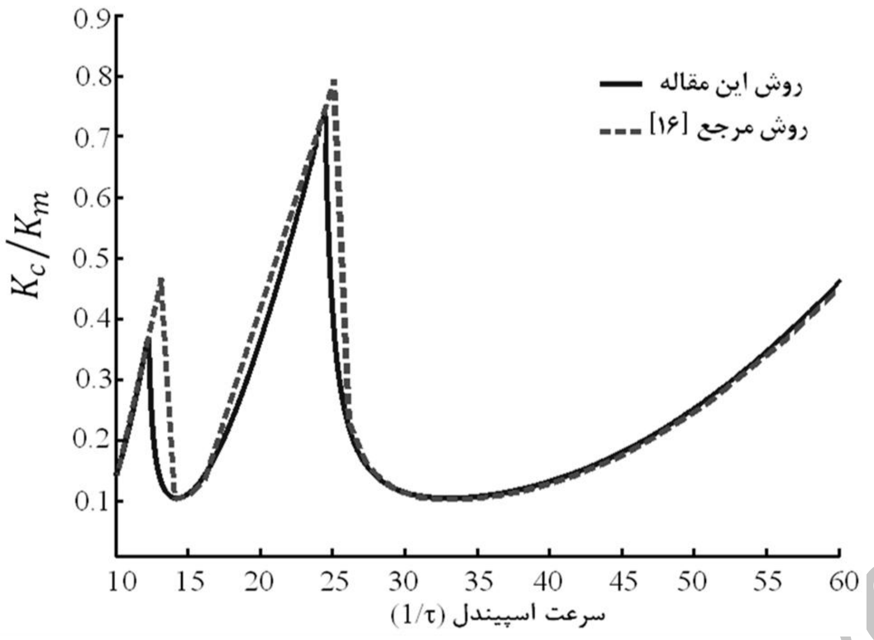
به منظور صحت‌سنجی روش ارائه شده در این مقاله، در شرایط و پارامترهای مشابه، نتایج روش این مقاله با روش ارائه شده در مرجع [16] مورد بررسی قرار می‌گیرد. پارامترهای مرجع [16] به این صورت می‌باشد؛ ω_n = 150 و ξ = 0.05.

در شکل 8 نمودار مربوط به منحنی پایداری برای شرایط ذکر شده که در مرجع [16] ارائه شده، آورده شده است. در شکل 9، منحنی پایداری برای این شرایط به کمک روش ارائه شده در این مقاله در کنار منحنی پایداری مرجع [16] ارائه شده است.

این مقایسه، نشان‌دهنده تشابه نتایج بدست آمده است. در واقع با روش ارائه شده، با تحلیل‌ها و محاسبات کمتر می‌توان نتایج مشابه با روش با حجم محاسبات بیشتر در [16] را ارائه کرد. دلیل اختلاف کم بین دو نمودار به این دلیل است که در روش مرجع [16] محاسبات و حل‌های عددی بیشتری استفاده شده و این سبب کاهش دقت در مسیر استخراج منحنی پایداری شده است.



شکل 8 منحنی پایداری ارائه شده در مرجع [16]



شکل 9 مقایسه منحنی پایداری در شرایط یکسان برای روش ارائه شده در این مقاله و روش مرجع [16]

با مشاهده دو نمودار مشخص می‌شود که در روش مرجع [16] به دلیل حجم بالای محاسبات، یافتن تمامی نقاط مربوط به منحنی پایداری کاری بسیار زمان‌بر می‌باشد. از آن جهت نمودار ارائه شده یک نمودار با خطوط شکسته است. به عبارتی مقادیر میانی بدون دقت محاسبه خواهد شد. در حالی‌که در روش ارائه شده در این مقاله، نمودار شکل کاملا منحنی داشته و به عبارتی برای هر نقطه می‌توان با دقت خوبی اظهار نظر کرد.

6-نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی پدیده چتر در ماشین‌های ابزار به کمک روش تحلیلی جدید پرداخته شد. با توجه به شکل معادلات مربوط به چتر و وجود ترم تاخیر در آن تحلیل این سیستم از پیچیدگی‌های خاص خود برخوردار است. در روش ارائه شده در این مقاله نواحی پایدار سیستم به کمک روش حوزه فرکانسی، تحلیل انشقاق و تابع لمبرت به سادگی استخراج شد. این روش دارای مزایایی چون امکان اعمال آسان آن به سیستم‌ها و استفاده از آن برای سیستم‌های مرتبه بالا می‌باشد. به کمک این روش نواحی پایدار برای چتر در شرایط مختلف به‌دست آمد. با نتایج استخراج شده می‌توان سرعت اسپیندل را طوری انتخاب کرد تا سیستم ناپایدار نشود و به عبارتی بهتر از ایجاد پدیده چتر جلوگیری به عمل آید. با توجه به این‌که مشخصات ماشین‌ابزار روی نواحی پایدار چتر تاثیر قابل توجهی دارد، می‌توان با طراحی صحیح و مناسب ماشین‌ابزار، چتر را تا حد ممکن کنترل کرد و کیفیت محصولات را بالا برد.

روش ارائه شده در این مقاله قابلیت تعمیم به مدل‌های پیچیده‌تر و کامل‌تر چتر را دارا بوده و می‌تواند به عنوان یک موضوع جدید مورد بررسی قرار گیرد.

7-مراجع

[1] T. Insperger, J. Gradisek, M. Kalveram, G. Stepan, K. Weinert, E. Govekar, Machine tool chatter and surface quality in milling processes, *in Proceedings of IMECE'04 ASME International Mechanical Engineering Congress,* Anaheim, California, USA, 2004.

[2] R. Sunilsing, D.S. Deshmukh, Experimental analysis of regenerative chatter in BFW vertical milling machine, *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology,* Vol. 3, No. 6, pp. 13731-13739, 2014.

[3] T. Insperger, B.P. Mann, G. Stepan, P.V. Bayly, Stability of up-milling and down-milling, part 1: alternative analytical methods, *International Journal of Machine Tools and Manufacture,* Vol. 43, pp. 25–34, 2003.

[4] A. Ottoa, S. Rauhb, M. Kolouchb, G. Radons, Extension of Tlusty's law for the identification of chatter stability lobes in multi-dimensional cutting processes, *International Journal of Machine Tools and Manufacture,* Vol. 82–83, pp. 50–58, 2014.

[5] A.S. White, Simulation of active control of chatter vibrations, *International Journal of Recent Development in Engineering and Technology,* Vol. 3, No. 4, pp. 6-13, 2014.

[6] F.M. Asl, A.G. Ulsoy, Analysis of a system of linear delay differential equations, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Transactions of the ASME,* Vol. 125, No. 3, pp. 215–223, 2003.

[7] T. Kalmar-Nagy, J.R. Pratt, Experimental and analytical investigation of the subcritical instability in metal cutting, *Proceedings of DETC'99, 17th ASME Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise,* , Las Vegas, Nevada, USA, 1999.

[8] P. Moore, G. Wiens, P. Parenti, G. Bianchi, Mitigating chatter in micro and mesoscale milling by tuning fixturing dynamics: A feasability study, *9th International Workshop on Microfactories,* Honolulu, USA, 2014.

[9] Y. Chen, K.L. Moore, Analytical stability bound for delayed second-order systems with repeating poles using Lambert function W, *Automatica,* Vol. 38, pp. 891–895, 2002.

[10] Y. Chen, K.L. Moore, Analytical stability bound for a class of delayed fractional-order systems, *Proceeding of the 40th IEEE Conference on Decision and Control Orlando,* Florida USA, 2001.

[11] C. Hwanga, Y.C. Cheng, Anote on the use of the Lambert W function in the stability analysis of time-delay systems, *Automatica,* Vol. 41, pp. 1979–1985, 2005.

[12] Z.H. Wang, H.Y. Hu, Calculation of the rightmost characteristic root of retarded time-delay systems via Lambert W function*, Journal of Sound and Vibration,* Vol. 318, No. 4–5, pp. 757–767, 2008.

[13] D. Bandopadhya, A method to solve and study the time delayed vibration characteristics of smart material actuator applying Lambert W function, *International Journal of Recent Trends in Mechanical Engineering,* Vol. 2, No. 1, pp. 1-8, 2014.

[14] I. Jadlovska, Application of Lambert W function in oscilation theory, *Acta Electrotechnica et Informatica,* Vol. 14, No. 1, pp. 9-17, 2014.

[15] S. Yi, P.W. Nelson, A.G. Ulsoy, Controllability and observability of systems of linear delay differential equations via the matrix Lambert W function, *IEEE Transactions on Automatic Control,* Vol. 53, No. 3, pp. 854–860, 2008.

[16] S. Yi, P.W. Nelson, A.G. Ulsoy, *Time delay systems analysis and control using the Lambert W function,* World Scientific Publishing Co, 2010.

[17] S. Yi, P.W. Nelson, A.G. Ulsoy, Analysis and control of time delayed systems via the Lambert W function, *17th World Congress The International Federation of Automatic Control,* Seoul, Korea, 2008.

[18] S. Yi, P.W. Nelson, A.G. Ulsoy, Delay differential equations via the matrix Lambert W function and bifurcation analysis: Applocation to machnie tool chatter, *Mathematical Biosciences and Engineering,* Vol. 4, No. 2, pp. 355–368, 2007.

[19] F.M. Asl, A.G. Ulsoy, Analytical solution of a system of homogeneous delay differential equations via the Lambert function, *In Proceeding of the American Control Conference,* Chicago, IL, USA, pp. 2496–2500, 2000.

[20] S. Yi, A.G. Ulsoy, Solution of a system of linear delay differential equations using the matrix Lambert function, *American Control Conference,* pp. 2433-2438, 2006.

[21] J. Forde, P. W. Nelson, Application of sturm sequences to bifurcation analysis of delay differential equation models, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* Vol. 300, pp. 273-284, 2004.

[22] Y. Xiaodan, J. Hongjie, W. Chengshan, J. Yilang, A method to determine oscillation emergence bifurcationin time-delayed LTI system with single lag, *Journal of Applied Mathematics,* Vol. 14, pp. 1-12, 2014.

[23] G. Stepan, L. Kollar, Balancing with reflex delay, *Mathematical and Computer Modeling,* Vol. 30, pp. 199-205, 2000.

[24] F.M. Atay, Balancing the inverted pendulum using position feedback, *Applied Mathematics Letters,* Vol. 12, pp. 51–56, 1999.

[25] K. Gu, V.L. Kharitonov, J. Chen, *Stability of time-delay systems* , Control Engineering Practice, 2003.

[26] G. Stepan, *Retarded dynamical systems,* Longman, Harlow, UK, 1989.

[27] M. Malek-Zavarei, M. Jamshidi, *Time-delay systems analysis, optimization and applications,* Elsevier Science Publisher, 1987.

[28] Z. Dombovari, D.A.W. Barton, R.E. Wilson, G. Stepan, On the global dynamics of chatter in the orthogonal cutting model, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Vol. 46, No. 1, pp. 330-338, 2011.

[29] C.C. Ozoegwu, S.N. Omenyi, C.H. Achebe, C.F. Uzoh, Effect of modal parameters on both delay-independent and global stability of turning process, *Journal of Mechanical Engineering and Automation,* Vol. 2, No. 6, pp. 159-168, 2012.

[30] T. Inspergera, D.A.W. Bartonb, G. Stepan, Criticality of Hopf bifurcation in state-dependent delay model of turning processes, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Vol. 43, No. 2, pp. 140–149, 2008.

[31] T. Insperger, *Stability analysis of periodic delay-differential equations modeling machine tool chatter*, Ph.D Thesis, Budapest University of Technology and Economics, 2002.

[32] S.G. Chen, A. G. Ulsoy, Y. Koren, Computational stability analysis of chatter in turning, *Journal of Manufacturing Science and Engineering,* Vol. 119, No. 4, pp. 457–460, 1997.

[33] G. Stepan, Modeling nonlinear regenerative effects in metal cutting, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London,* Vol. 359, pp. 739–757, 2000.

[34] R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare, D.J. Jefrey, Lambert's W function in Maple, *Maple Technical Newsletter,* Vol. 9, pp. 12–22, 1993.

[35] R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare, D.J. Jefrey, D.E. Knuth, On the Lambert W function, *Advances in Computational Mathematics,* Vol. 5, No. 1, pp. 329-359, 1996.

[36] R.M. Corless, D.J. Jefrey, D.E. Knuth, A sequence of series for the Lambert W function, *Proceedings ISSAC '97,* Maui, USA, pp. 197–204, 1997.

[37] V. Kolmanovskii, A. Myshkis, *Applied theory of functional differential equations,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1992.

[38] O. Diekmann, S.A. Van Gils, S.M. Verduyn Lunel, H.O. Walther, *Delay equations: complex, functional, and nonlinear analysis,* Springer-Verlag, New York, 1995.

[39] H. Shinozaki, *Robust stability analysis of linear time-delay systems by Lambert W function,* Master Thesis, Department of Electronic and Information Science, Kyoto Institute of Technology, Kyoto, Japan, 2003.