



# بررسی تجربی و تئوری تعیین ضرایب معیارهای تسلیم پیشرفته و نمودار حد شکل دهی آلیاژ آلومینیوم 2024

مهدی ظهور<sup>1\*</sup>، سپیده شاهی<sup>2</sup>، محمد حسین پورگلو<sup>3</sup>

1- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

3- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

\* تهران، صندوق پستی 19395-1999، mzohoor@kntu.ac.ir

## چکیده

## اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 15 مهر 1394

پذیرش: 08 آبان 1394

ارائه در سایت: 16 دی 1394

کلید واژگان:

منحنی حد شکل دهی

معیار تسلیم

مدل MK

تابع خطا

در این مقاله مطالعه‌ی تئوری و تجربی پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی آلیاژ آلومینیوم 2024-O انجام شده است. جهت به‌دست آوردن و کالیبره نمودن ضرایب معیارهای تسلیم پیشرفته‌ی YLD2004-18P، YLD2011-18P، YLD2011-27P و BBC2008-16P تست کشش در 7 راستا نسبت به جهت نورد انجام شد. تنش‌های تسلیم جهت‌ی و ضرایب ناهمسانگردی آلیاژ استخراج گردید؛ سپس تابع خطای مناسب تعریف شده و با استفاده از الگوریتم لونبرگ-مارکوات بهینه‌سازی شد. با در نظر گرفتن 8، 10، 12 و 14 پارامتر ناهمسانگردی، تاثیر تعداد پارامترها بر دقت توابع تسلیم بررسی شد. بهترین حالت و کمترین انحراف مربوط به استفاده از 14 پارامتر ناهمسانگردی در اجرای تابع خطا می‌باشد. به منظور مقایسه‌ی استحکام‌های تسلیم و ضرایب ناهمسانگردی تجربی و محاسبه شده، روش لیکاک به کار برده شد. مشخص شد هر چهار معیار، برای استحکام‌های تسلیم پیش‌بینی نزدیک به مقادیر تجربی ارائه می‌دهند. پیش‌بینی استحکام‌های تسلیم با معیار YLD2011-27P و ضرایب ناهمسانگردی با معیار YLD2004-18P نزدیکی بیشتری با داده‌های تجربی دارد. جهت بدست آوردن نمودار حد شکل‌دهی تجربی، تست ناکازیمما انجام شد. برای شبیه‌سازی پدیده‌ی گلویی شدن و محاسبه‌ی کرنش‌های حدی، مدل اصلاح شده‌ی مارسینیاک-کوزینسکی، قانون سخت‌شوندگی سوئیفت و توابع تسلیم جدید YLD2004-18P، YLD2011-18P، YLD2011-27P و BBC2008-16P به کار برده شد. در سمت راست FLD پیش‌بینی معیارهای YLD2004-18P و YLD2011-27P و در سمت چپ پیش‌بینی معیار YLD2011-27P تطابق بهتری با نتایج تجربی دارد.

## An experimental and theoretical investigation for determination of advanced yield criteria parameters and forming limit diagram of Aluminum alloy 2024

Mehdi Zohoor<sup>1\*</sup>, Sepideh Shahi<sup>2</sup>, Mohammad HoseinpourGollo<sup>3</sup>

1, 2- Faculty of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

3- Department of Mechanical Engineering, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran

\*P. O. B. 19395-1999, Tehran, Iran, mzohoor@kntu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 07 October 2015  
Accepted 29 November 2015  
Available Online 06 January 2016

**Keywords:**  
Forming limit diagram  
yield criteria  
MK model  
error-function

### ABSTRACT

In this article, an experimental and theoretical study on the prediction of forming limit diagram (FLD) for aluminum alloy (2024-O) is developed. To identify and calibrate coefficients of YLD2004-18P, YLD2011-18P, YLD2011-27P and BBC2008-16P advanced yield criteria, tensile tests were performed in seven directions with respect to the rolling direction. Directional yield stresses and anisotropy coefficients were determined. Then, an appropriate error-function was defined and optimized by using Levenberg-Marquardt algorithm. By considering 8, 10, 12 and 14 anisotropy parameters, the effect of number of parameters on the accuracy of yield functions was investigated. The best condition with minimum error can be achieved when 14 anisotropy parameters are used. To compare the calculated yield stresses and r-values with experimental data, a method presented by Leacock was used. The results have shown that all four criteria give predictions of yield stresses which are close to experimental values. The prediction of yield stresses and anisotropy coefficients by means of YLD2011-27P and YLD2004-18P criteria have more correlation and good agreement with the experimental data, respectively. For obtaining experimental FLD Nakazima test was performed. In order to simulate the necking phenomenon and calculate the limit strains, the modified Marciniak-Kuczynski (MK) model, Swift hardening law and some new yield criteria including YLD2004-18P, YLD2011-18P, YLD2011-27P and BBC2008-16P were utilized. At the right hand side of FLD, YLD2004-18P and YLD2011-27P criteria and also at the left hand side YLD2011-27P criterion have shown better conformity with experimental results.

### 1- مقدمه

بر پایه‌ی این ویژگی هاست توصیف می‌شوند: شکل‌پذیری خوب در عین

داشتن استحکام مکانیکی بالا که از طریق آلیاژسازی و عملیات حرارتی

آلیاژهای آلومینیوم توسط چهار ویژگی اصلی که کاربردهای صنعتی آن نیز

Please cite this article using:

M. Zohoor, S. Shahi, M. HoseinpourGollo, An experimental and theoretical investigation for determination of advanced yield criteria parameters and forming limit diagram of Aluminum alloy 2024, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 1, pp.192-202, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

مناسب به دست می‌آید، چگالی کم در حدود  $2.7 \text{ gr/cm}^3$  هدایت حرارتی و الکتریکی بالا و مقاومت نسبتاً بالا به خوردگی. اگرچه آلیاژهای آلومینیوم به علت شکل‌پذیری خوب و استحکام مکانیکی بالا، به طور گسترده در فرآیندهای شکل‌دهی ورق‌های فلزی به کار می‌روند، شکل‌پذیری این ورق‌ها به طور جامع مورد مطالعه قرار نگرفته است. نمودار حد شکل‌دهی (FLD<sup>1</sup>) مفهومی سودمند در توصیف شکل‌پذیری و یک ابزار ایمنی مهم در شبیه‌سازی شکل‌دهی ورق‌های فلزی می‌باشد که با توجه به فاکتورهای مشخص از فرآیندهای شکل‌دهی مثل رفتار ماده، روانکاری، تجهیزات شکل‌دهی و غیره کرنش‌های حدی را مشخص می‌کند. نمودارهای حد شکل‌دهی اولین بار توسط کیلر [1] و گودوین [2] معرفی شدند. هکر [3]، آزرین و بکافن [4] و گاش و هکر [5] به طور تجربی، تحقیق بیشتری درباره‌ی تغییرات نمودار حد شکل‌دهی انجام داده اند.

به منظور محاسبه‌ی کرنش‌های حدی و رسم FLD ورق‌های فلزی، تحقیق‌های زیادی انجام و مدل‌هایی پیشنهاد شده است که مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از: مدل گلوبی پخشی سوئیفت [6]، گلوبی موضعی هیل [7]، مدل مارسینیاک و کوزینسکی (MK) [8] و تئوری استورن و رایس [9].

آنالیز MK که بیشتر از سایر مدل‌ها به کار می‌رود، بر پایه‌ی رشد یک نقص اولیه به عنوان ناهمگنی‌ها به شکل یک نوار باریک بوده و به شکل سطح تسلیم و قانون سخت‌شوندگی به کار برده شده وابسته است [10]. محققان زیادی برای محاسبه‌ی کرنش‌های حدی، توابع تسلیم و قوانین کارسختی متفاوتی را در تئوری MK به کار برده و نمودارهای حد شکل‌دهی مواد مختلف را ارایه کرده‌اند. عاصم‌پور و همکاران [11] نمودارهای حد شکل‌دهی ورق فولادی AK را بر پایه‌ی تنش و کرنش ارایه کردند. مقایسه‌ی بین داده‌های تجربی و نتایج تئوری نشان می‌دهد که FLD و  $\text{FLSD}^2$  پیش‌بینی شده می‌توانند حدود شکل‌دهی ورق فلزی را بخصوص در سمت راست منحنی، به دقت پیش‌بینی کنند. نورچشمه و گرین [12] نشان دادند منحنی حد شکل‌دهی پیش‌بینی شده با استفاده از مدل MK به شکل سطح تسلیم اولیه و تغییر آن در طی کارسختی وابسته است. گنجیانی و همکاران [13] اثر توابع تسلیم هاسفورد و BBC2000 را در مدل MK بررسی کرده و نتیجه گرفتند برای فولاد AK، کرنش‌های حدی پیش‌بینی‌شده توسط معیار تسلیم هاسفورد با توان 6 همخوانی بهتری با نتایج تجربی دارد. آلود و شولر [14]، حدود شکل‌دهی را در فرآیندهای شکل‌دهی فلزات که در آن‌ها بارگذاری تناسبی و شامل همه‌ی 6 مؤلفه‌ی تانسور تنش است، بررسی کردند. آن‌ها روش MK را برای دربرگرفتن این نوع از بارگذاری توسعه داده و برای نمایش کرنش‌های حدی بدست آمده، یک منحنی حد شکل‌دهی تعمیم‌یافته (GFLD<sup>3</sup>) را پیشنهاد کردند. GFLD نشان می‌دهد حدود شکل‌دهی به‌طور قابل توجهی توسط تنش نرمال فشاری و برش ضخامت‌ی افزایش می‌یابد. جانگ بونگ و بارلات [15] با به کار بردن تابع تسلیم YLD2000-2d در مدل‌های MK و  $\text{PMC}^4$  اصلاح شده نمودار حد شکل‌دهی دو ورق فولاد زنگ‌نزن با ضخامت‌های متفاوت را پیش‌بینی کرده و نتیجه گرفتند که برای هر دو ورق نازک و ضخیم FLD پیش‌بینی شده با روش PMC تطابق بهتری با نتایج تجربی دارد. لیانگ زانگ و همکاران [16] برای پیش‌بینی FLD ورق فلزی ناهمسانگرد، فرآیند تغییر شکل و گلوبی موضعی را مدل کرده و یک تئوری بر پایه‌ی انرژی پیشنهاد

کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که نرم شوندگی موضعی در مرحله‌ی مشخصی از تغییر شکل می‌تواند علت اصلی گلوبی موضعی باشد. پانیچ و همکاران [17] نمودار حد شکل‌دهی و نمودار حد تنش شکل‌دهی ورق‌های فولادی پراستحکام DP780 و TRIP780 را با استفاده از مدل MK و معیارهای تسلیم فان میسز، هیل 1948 و YLD2000-2d و مدل‌های سخت‌شوندگی سوئیفت و وس تعیین و با منحنی‌های تجربی مقایسه کردند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد منحنی‌های حد شکل‌دهی به طور قابل توجهی تحت تاثیر معیار تسلیم و مدل سخت‌شوندگی هستند. مسلمی نایینی و همکاران [18] کاربرد معیارهای ناپایداری پلاستیک مختلف را همراه با معیار تسلیم ناهمسانگرد درجه 2 بارلات در فرآیند هیدروفرمینگ لوله‌های آلومینیومی ناهمسانگرد بررسی کرده و نتیجه گرفتند که معیار ناپایداری سوئیفت بهترین پیش‌بینی را برای منحنی حد شکل‌دهی دارد. حسین‌پور و همکاران [19] اثر معیارهای تسلیم ناهمسانگرد هاسفورد، هیل درجه 2 و هیل غیر درجه 2 و پارامترهای موثر ماده بر منحنی‌های حد شکل‌دهی بر اساس مدل MK را مورد مطالعه قرار داده و نشان دادند که انتخاب معیار تسلیم تاثیر زیادی بر منحنی حد شکل‌دهی دارد. عاصم‌پور و همکاران [20] با استفاده از مدل مارسینیاک-کوزینسکی، تاثیر مسیر کرنش، اندازه‌ی دانه، زبری سطح و ضخامت ورق بر پیش‌بینی منحنی حد تنش شکل‌دهی آلیاژ فولاد کم‌کربن ST12 را بررسی کرده و نشان دادند که وابستگی FLSD به مسیر کرنش کم‌تر از FLD است. با کاهش اندازه‌ی دانه و زبری سطح و افزایش ضخامت ورق، تنش‌های حدی افزایش می‌یابند. حسین‌پور و همکاران [21]، اثر توابع تسلیم پیشرفته‌ی BBC2003، BBC2008 و YLD2004 را بر پیش‌بینی حد شکل‌پذیری با مدل‌های مارسینیاک-کوزینسکی، گلوبی پخشی سوئیفت و گلوبی موضعی هیل بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد پیش‌بینی کرنش‌های حدی آلیاژ AA6111-T4 با استفاده از معیار YLD2004 تطابق خوبی با نتایج تجربی دارد و همچنین اثر PLC موجب کاهش شکل‌پذیری ورق می‌شود. میرفلاح نصیری و همکاران [22]، اثر توابع تسلیم سوار 2008، پلانکت 2008، BBC2008 و YLD2011-18p را بر پیش‌بینی منحنی‌های حد شکل‌دهی بررسی کرده و نتیجه گرفتند کرنش‌های حدی پیش‌بینی شده توسط معیار تسلیم YLD2011 و قانون سخت‌شوندگی وس تطابق خوبی با داده‌های تجربی دارد.

در این مقاله، اثر توابع تسلیم پیشرفته‌ی YLD2011-18P، YLD2004-18P، YLD2011-27P، BBC2008-16P و BBC2008-16P به همراه مدل مارسینیاک-کوزینسکی بر پیش‌بینی منحنی حد شکل‌دهی آلیاژ آلومینیوم 2024-O مورد مطالعه قرار گرفته و با داده‌های تجربی تعیین شده توسط تست ناکازیمای مقایسه شده است. ضرایب معیارهای تسلیم به روش کمینه‌سازی تابع خطا و با استفاده از الگوریتم لوببرگ-مارکوات، به کمک نرم افزار متلب<sup>5</sup> محاسبه شده‌اند. برای هر چهار تابع تسلیم، تکنیک انتخاب 14 پارامتر ناهمسانگردی، کمترین انحراف نسبت به داده‌های تجربی را نتیجه داده و برای تعیین ضرایب توابع تسلیم متناظر به کار برده شد. پیش‌بینی کرنش‌های حدی آلیاژ آلومینیوم 2024 در سمت راست منحنی، با معیارهای YLD2004-18P و YLD2011-27P و در سمت چپ با معیار YLD2011-27P تطابق بهتری با FLD تجربی دارد.

## 2- محاسبه‌ی تجربی حد شکل‌دهی

در این مقاله، برای تعیین منحنی حد شکل‌دهی تجربی، نمونه‌های ورق

1- Forming limit diagram  
2- Forming limit stress diagram  
3- Generalised forming limit diagram  
4- Parmar-Mellor-Chakrabarty

5- Matlab

ضریب ناهمسانگردی طبق رابطه‌ی 2 محاسبه می‌شود.

$$r = \frac{\epsilon_w}{\epsilon_t} = -\frac{\epsilon_w}{(\epsilon_w + \epsilon_l)} \quad (2)$$

منحنی‌های تنش- کرنش آلیاژ مورد بررسی در زوایای مختلف نسبت به راستای نورد در شکل 3 آورده شده است.

تنش‌های تسلیم و مقادیر  $r$  تعیین شده (قبل از نقطه‌ی ناپایداری و در کرنش 9%) در 7 جهت در جدول 2 ارائه شده است.

### 2-2- آزمون FLD

برای انجام آزمون از دستگاه تست کشش 10 تن مدل زویک و قالب ناکازیم استفاده و روی سطح همگی نمونه‌ها الگویی با شبکه‌بندی دایروی به قطر 2.5 mm به صورت الکتروشیمیایی اچ شد.

تغییر شکل قطعه‌ها تا زمانی که در قطعه پارگی ایجاد شود ادامه یافت (شکل 4). در طی فرایند شکل‌دهی، دایره‌ها به بیضی‌هایی با اندازه‌های متفاوت تبدیل شدند. قطرهای بزرگ و کوچک بیضی‌ها با استفاده از دستگاه پروفایل پروژکتور و با دقت  $\pm 1 \mu m$  اندازه‌گیری و کرنش‌های اصلی و فرعی محاسبه شدند.

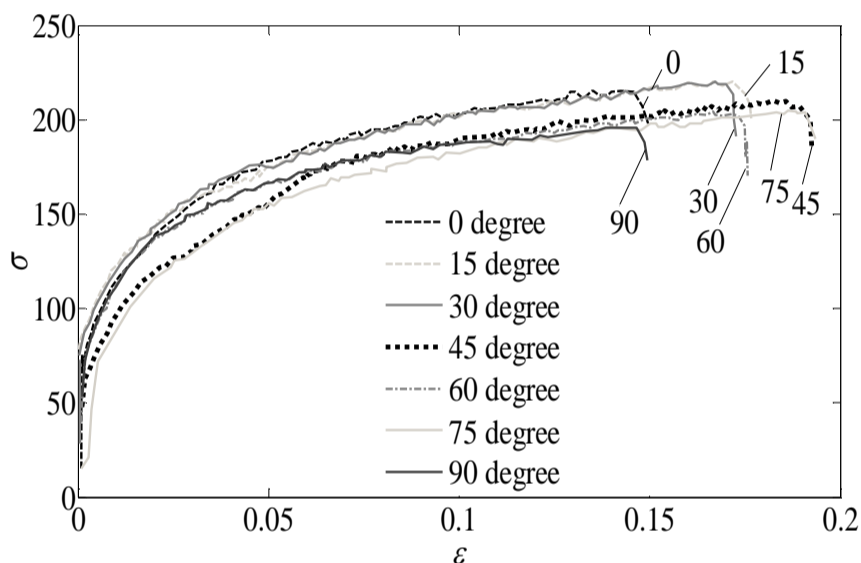


Fig. 3 Experimental stress (MPa)- strain curves of the investigated alloy

شکل 3 منحنی‌های تنش (مگا پاسکال)- کرنش تجربی آلیاژ مورد بررسی

جدول 2 مقادیر تجربی تنش‌های تسلیم و ضرایب ناهمسانگردی آلیاژ آلومینیوم 2024

Table 2 Experimental values of yield stresses and anisotropy coefficients of Aluminum alloy 2024

$\frac{\sigma_0}{\sigma_y}$	$\frac{\sigma_{15}}{\sigma_y}$	$\frac{\sigma_{30}}{\sigma_y}$	$\frac{\sigma_{45}}{\sigma_y}$	$\frac{\sigma_{60}}{\sigma_y}$	$\frac{\sigma_{75}}{\sigma_y}$	$\frac{\sigma_{90}}{\sigma_y}$
1	1.0833	1.0357	1.0238	0.964	0.9047	0.9404
$r_0$	$r_{15}$	$r_{30}$	$r_{45}$	$r_{60}$	$r_{75}$	$r_{90}$
0.71	0.94	0.86	1.14	0.67	0.5	0.66



Fig. 4 The photo of a set of specimens for FLD test

شکل 4 تصویر یک سری از نمونه‌های تست FLD

آلومینیوم 2024-O تمپر شده با ترکیب شیمیایی ارایه شده در جدول 1 استفاده شده است.

### 1-2- آزمون کشش

ابعاد نمونه‌ها جهت تست کشش برای تعیین استحکام‌های تسلیم و ضرایب ناهمسانگردی مطابق استاندارد ASTM E8/E8M استخراج شد (شکل 1).

جمعا 21 نمونه، 3 نمونه در 7 زاویه‌ی متفاوت (0، 15، 30، 45، 60، 75 و 90) نسبت به جهت نورد استفاده شد. پس از آماده سازی نمونه‌ها در 7 راستا، الگویی با شبکه‌بندی دایروی به قطر 2.5 mm به روش الکتروشیمیایی روی نمونه‌ها چاپ شد (شکل 2-الف).

با فرض ثابت بودن حجم، کرنش‌های طولی، عرضی و ضخامتی با استفاده از روابط 1 محاسبه شدند.

$$\begin{aligned} \epsilon_l &= \ln \frac{a}{d_0} \\ \epsilon_w &= \ln \frac{b}{d_0} \\ \epsilon_t &= -(\epsilon_l + \epsilon_w) \end{aligned} \quad (1)$$

در رابطه‌ی 1،  $\epsilon_l$  و  $\epsilon_w$  کرنش‌های حقیقی،  $a$  و  $b$  قطرهای نمونه بعد از کشش (شکل 2-ب) هستند.

جدول 1 ترکیب شیمیایی آلیاژ آلومینیوم 2024 بر حسب درصد وزنی عناصر

Table 1 Chemical composition of Aluminum alloy 2024 (% wt.)

Cu	Mg	Mn	Fe	Si	Zn	Ti	Cr	Ni
4.9	1.651	0.64	0.38	0.14	0.06	0.033	0.03	0.02

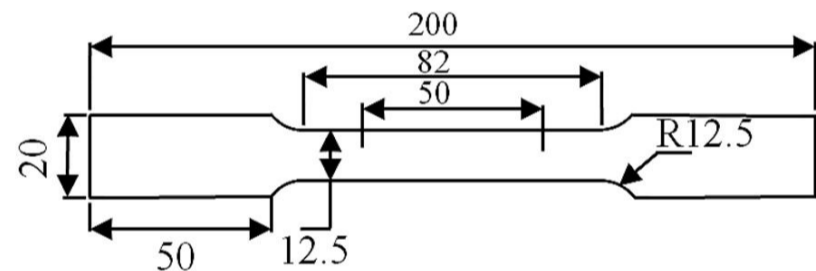
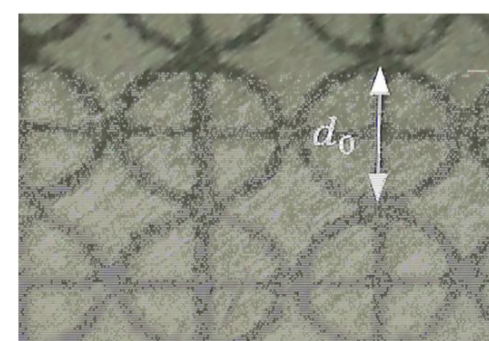


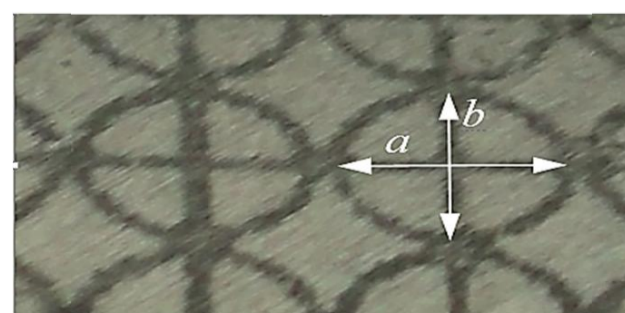
Fig. 1 Dimensions of tensile test specimens (mm)

شکل 1 ابعاد نمونه‌ها جهت انجام آزمون کشش (میلی متر)



(a)

(الف)



(b)

(ب)

Fig. 2 Circle grid pattern etched on the surface of the specimens: (a) before deformation and (b) after deformation

شکل 2 الگوی شبکه‌بندی دایروی اچ شده روی سطح نمونه‌ها- (الف): قبل از تغییر شکل- (ب): بعد از تغییر شکل

جدول 3 ثابت‌های معادله‌ی کار سختی سوئیفت برای آلیاژ آلومینیوم 2024

**Table 3** Swift hardening law constants for the aluminum alloy 2024

$K[\text{MPa}]$	$\varepsilon_0[-]$	$n[-]$	$m[-]$
360	0	0.248	0

جدول 4 ثابت‌های معادله‌ی کار سختی وس برای آلیاژ آلومینیوم 2024

**Table 4** Voce hardening law constants for the aluminum alloy 2024

$A[\text{MPa}]$	$B_0[\text{MPa}]$	$C[-]$
214.5	132.3	25.76

اسکالر  $\xi$  از رابطه‌ی 9 محاسبه می‌شود.

$$\xi = \left(\frac{4}{3}\right)^m + 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^m + 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^m \quad (9)$$

یک بسط از معیار تسلیم YLD2011-18P با استفاده از سومین انتقال خطی حاصل می‌شود. تابع تسلیم حاصل YLD2011-27P نامیده شده و تنش معادل آن از رابطه‌ی 10 محاسبه می‌شود.

$$\bar{\sigma}(\sigma) = \left\{ \frac{1}{\xi} \cdot \left[ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |S'_i - S''_j|^m + \sum_{i=1}^3 |S'''_i|^m \right] \right\}^{\frac{1}{m}} \quad (10)$$

اسکالر  $\xi$  از رابطه‌ی 11 قابل محاسبه است.

$$\xi = \left(\frac{4}{3}\right)^m + 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^m + 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^m \quad (11)$$

انتقال خطی  $s$  و تبدیل‌های خطی تنش‌های انحرافی مشابه روابط 6 و 7 می‌باشد.

### 3-2-3 معیار تسلیم BBC2008

معیار تسلیم BBC2008 برای بیان رفتار پلاستیک ورق‌های فلزی اورتوتروپیک مطابق معادله‌ی 12 ارائه شده است [25].

$$\frac{\bar{\sigma}^{2k}}{w-1} = \sum_{i=1}^s \left\{ w^{i-1} \left\{ [L^{(i)} + M^{(i)}]^{2k} + [L^{(i)} - M^{(i)}]^{2k} \right\} + w^{s-i} \left\{ [M^{(i)} + N^{(i)}]^{2k} + [M^{(i)} - N^{(i)}]^{2k} \right\} \right\} \quad (12)$$

برای فلزات با ساختار BCC،  $k=3$  و برای فلزات FCC،  $k=4$  پیشنهاد شده است و  $L^{(i)}$ ،  $M^{(i)}$  و  $N^{(i)}$  در رابطه‌ی 13 تعریف شده اند:

$$\begin{aligned} L^{(i)} &= l_1^{(i)} \sigma_{11} + l_2^{(i)} \sigma_{22} \\ M^{(i)} &= \sqrt{[m_1^{(i)} \sigma_{11} - m_2^{(i)} \sigma_{22}]^2 + [m_3^{(i)} (\sigma_{12} + \sigma_{21})]^2} \\ N^{(i)} &= \sqrt{[n_1^{(i)} \sigma_{11} - n_2^{(i)} \sigma_{22}]^2 + [n_3^{(i)} (\sigma_{12} + \sigma_{21})]^2} \\ w &= \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{s}} > 1 \end{aligned} \quad (13)$$

که  $l_1^{(i)}$ ،  $l_2^{(i)}$ ،  $m_1^{(i)}$ ،  $m_2^{(i)}$ ،  $m_3^{(i)}$  و  $n_1^{(i)}$ ،  $n_2^{(i)}$ ،  $n_3^{(i)}$  پارامترهای ماده هستند. برای  $s=1$  معیار تسلیم با نماد BBC2008-8P و برای  $s=2$  با نماد BBC2008-16P نمایش داده می‌شود. در این مقاله از معیار BBC2008-16P استفاده شده است.

### 3-3 الگوریتم لونیبرگ-مارکوات

الگوریتم لونیبرگ-مارکوات (LM) [26،27] تکنیکی با رویه‌ی تکراری است برای یافتن مینیمم یک تابع چند متغیره ( $f$ ) که به صورت مجموع مربعات توابع غیرخطی بیان شده است. الگوریتم LM، ترکیبی از روش گرادیان نزولی

### 3- محاسبه‌ی تئوری حد شکل‌دهی

در این تحقیق، شبیه‌سازی ناپایداری پلاستیک با استفاده از آنالیز مارسینیاک-کوزینسکی انجام شده است. بر اساس تئوری MK، لازم است یک تابع تسلیم، قانون سخت‌شوندگی و قانون جریان تعریف شود. همچنین برای به‌کار بردن تابع‌های تسلیم جدید، در ابتدا باید ضرایب معیار تسلیم با استفاده از پارامترهای ناهمسانگردی تجربی، تعیین شود.

### 3-1-1 قانون سخت‌شوندگی

برای تشریح کارسختی ماده، قانون سخت‌شوندگی سوئیفت و وس مطابق روابط 3 و 4 در نظر گرفته شدند.

$$\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}) = K(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon})^n \bar{\varepsilon}^m \quad (3)$$

$$\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}) = A - B_0 e^{-C\bar{\varepsilon}} \quad (4)$$

که  $\bar{\sigma}$ ،  $\bar{\varepsilon}$  و  $\bar{\varepsilon}$  به ترتیب تنش مؤثر، کرنش مؤثر و نرخ کرنش مؤثر هستند.  $\varepsilon_0$  و ضرایب  $K$ ،  $n$ ،  $m$ ،  $A$ ،  $B_0$  و  $C$  ثابت‌های ماده هستند.

ثابت‌های قانون سخت‌شوندگی سوئیفت و وس مربوط به آلیاژ آلومینیوم 2024 در راستای نورد به‌ترتیب در جدول‌های 3 و 4 ارائه شده است.

### 3-2-2 معیارهای تسلیم

در این مقاله معیارهای تسلیم YLD2004-18P، YLD2011-18P و YLD2011-27P و BBC2008 در مدل MK به‌کار گرفته شده‌اند.

### 3-1-2-3 معیار تسلیم YLD2004-18P

تابع تسلیم پیشرفته‌ی YLD2004 توسط بارلات مطابق با معادله‌ی 5 ارائه شده است [23]:

$$\varphi(s_{\alpha\beta}) = \varphi(\tilde{s}'_i, \tilde{s}''_j) = \sum_{i,j}^{1,3} |\tilde{s}'_i - \tilde{s}''_j|^a = 4\bar{\sigma}^a \quad (5)$$

برای فلزات با ساختار BCC،  $a=6$  و برای فلزات FCC،  $a=8$  پیشنهاد شده است. تانسور نشان داده شده با  $\tilde{s}$ ، به‌عنوان انتقال خطی  $s$  در معادله‌ی 6 معرفی شده است.

$$\tilde{s} = cs = cT\sigma \quad (6)$$

تبدیل خطی تنش‌های انحرافی به شکل معادله‌ی 7 می‌باشد.

$$\begin{aligned} c &= \begin{bmatrix} 0 & -c_{12} & -c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{21} & 0 & -c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{31} & -c_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \\ T &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

### 3-2-2-3 معیار تسلیم YLD2011

تابع تسلیم YLD2011-18P یک تابع تسلیم انعطاف پذیر دارای 18 پارامتر ناهمسانگردی است و تنش معادل آن در رابطه 8 آورده شده است [24].

$$\bar{\sigma}(\sigma) = \left\{ \frac{1}{\xi} \cdot \left[ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |S'_i - S''_j|^m \right] \right\}^{\frac{1}{m}} \quad (8)$$

تسهیلات به کار بردن این روش، این است که برای تعیین  $n$  پارامتر مجهول ماده، نیازی به استفاده از  $n$  داده‌ی تجربی نیست. به عبارت دیگر، با استفاده از تعداد متفاوتی از داده‌های تجربی، تعیین تابع خطا و به دست آوردن پارامترهای مجهول ممکن خواهد بود. یک راهبرد مؤثر تعیین پارامترها، اعمال کمینه‌سازی تابع خطای زیر (معادله‌ی 20) است که توسط بانابیک پیشنهاد شده است [28]:

$$\zeta = \left( \frac{\sigma_b - \sigma_b^{\text{exp}}}{\sigma_b^{\text{exp}}} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\bar{\sigma}_{\phi i} - \sigma_{\phi i}^{\text{exp}}}{\sigma_{\phi i}^{\text{exp}}} \right)^2 + (r_b - r_b^{\text{exp}})^2 + \sum_{i=1}^n (r_{\phi i} - r_{\phi i}^{\text{exp}})^2 \quad (20)$$

برای کمینه‌سازی تابع خطا، داده‌های تجربی مطابق جدول 2 در الگوریتم لونیبرگ-مارکوات به کار برده شد. نتایج، در جداول 5-8 ارائه شده است.

**جدول 5** ضرایب محاسبه شده‌ی تابع تسلیم YLD2004-18P برای آلیاژ آلومینیوم 2024

**Table 5** Calculated YLD2004-18P yield function parameters for the Aluminum alloy 2024

$c'_{12}$	$c'_{13}$	$c'_{21}$	$c'_{23}$	$c'_{31}$	$c'_{32}$
0.97927	0.94007	0.93713	1.10289	0.98220	1.06076
$c'_{44}$	$c'_{55}$	$c'_{66}$	$c''_{12}$	$c''_{13}$	$c''_{21}$
1.000	1.000	1.03665	0.97927	0.94007	0.93713
$c''_{23}$	$c''_{31}$	$c''_{32}$	$c''_{44}$	$c''_{55}$	$c''_{66}$
1.10289	0.98220	1.06076	1.000	1.000	1.03665

**جدول 6** ضرایب محاسبه شده‌ی تابع تسلیم YLD2011-18P برای آلیاژ آلومینیوم 2024

**Table 6** Calculated YLD2011-18P yield function parameters for the Aluminum alloy 2024

$c'_{12}$	$c'_{13}$	$c'_{21}$	$c'_{23}$	$c'_{31}$	$c'_{32}$
0.94928	0.89335	0.95388	1.12541	1.25599	0.93314
$c'_{44}$	$c'_{55}$	$c'_{66}$	$c''_{12}$	$c''_{13}$	$c''_{21}$
1.000	1.000	1.01776	0.95181	0.89306	0.95465
$c''_{23}$	$c''_{31}$	$c''_{32}$	$c''_{44}$	$c''_{55}$	$c''_{66}$
1.12428	1.25757	0.93023	1.000	1.000	1.01880

**جدول 7** ضرایب محاسبه شده‌ی تابع تسلیم YLD2011-27P برای آلیاژ آلومینیوم 2024

**Table 7** Calculated YLD2011-18P yield function parameters for the Aluminum alloy 2024

$c'_{12}$	$c'_{13}$	$c'_{21}$	$c'_{23}$	$c'_{31}$	$c'_{32}$
0.93500	0.88470	0	1.12838	1.22986	0.90058
$c'_{44}$	$c'_{55}$	$c'_{66}$	$c''_{12}$	$c''_{13}$	$c''_{21}$
1.000	1.000	1.02199	0.93500	0.88470	0.94340
$c''_{23}$	$c''_{31}$	$c''_{32}$	$c''_{44}$	$c''_{55}$	$c''_{66}$
1.1284	1.2298	0.9	1.000	1.000	1.02199
$c'''_{12}$	$c'''_{13}$	$c'''_{21}$	$c'''_{23}$	$c'''_{31}$	$c'''_{32}$
0.99761	1.00163	0.9999	1.00011	1.00002	0.9999
$c'''_{44}$	$c'''_{55}$	$c'''_{66}$			
1.000	1.000	0.9999			

**جدول 8** ضرایب محاسبه شده‌ی تابع تسلیم BBC2008-16P برای آلیاژ آلومینیوم 2024

**Table 8** Calculated BBC2008-16P yield function parameters for the Aluminum alloy 2024

$l_1^{(1)}$	$l_2^{(1)}$	$m_1^{(1)}$	$m_2^{(1)}$	$m_3^{(1)}$	$n_1^{(1)}$
0.57653	0.71457	0.41943	0.48952	0.21377	0.57326
$n_2^{(1)}$	$n_3^{(1)}$	$l_1^{(2)}$	$l_2^{(2)}$	$m_1^{(2)}$	$m_2^{(2)}$
0.69681	0.60440	0.58931	0.58562	0.38806	0.33127
$m_3^{(3)}$	$n_1^{(2)}$	$n_2^{(2)}$	$n_3^{(2)}$		
0.36578	0.61764	0.59370	0.70767		

و گاوس-نیوتن است. زمانی که حل کنونی، دور از جواب صحیح باشد، الگوریتم مانند روش گرادیان نزولی و زمانی که حل کنونی نزدیک به پاسخ صحیح باشد، مانند روش گاوس-نیوتن عمل می‌کند.

اساس الگوریتم LM یک تخمین خطی برای تابع  $f$  در همسایگی بردار متغیرهای  $p$  است. برای یک  $\|\delta_p\|$  کوچک، بسط سری تیلور تخمین 14 را نتیجه می‌دهد.

$$f(p + \delta_p) = f(p) + J\delta_p \quad (14)$$

که  $J$  ژاکوبین ماتریس  $\frac{\partial f(p)}{\partial p}$  است. برای شروع بهینه‌سازی، کاربر باید یک حدس آغازین برای بردار  $p$  ارائه کند. در بسیاری از موارد یک حدس ناآگاهانه‌ی استاندارد مانند  $p^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$  به خوبی عمل می‌کند. الگوریتم LM یک سری از بردارهای  $p_1, p_2, \dots$  را ایجاد می‌کند که به سمت مینیمم کننده‌ی محلی  $p^+$  برای  $f$  همگرا می‌شوند؛ بنابراین یافتن  $\delta_p$  که در هر گام، رابطه‌ی 15 را مینیمم می‌کند، لازم است.

$$\|x - f(p + \delta_p)\| \approx \|x - f(p) - J\delta_p\| = \|\epsilon - J\delta_p\| \quad (15)$$

جستجوی  $\delta_p$  راه‌حل مسأله‌ی حداقل مربعات است. مینیمم زمانی بدست می‌آید که رابطه‌ی 16 برقرار باشد.

$$J^T(J\delta_p - \epsilon) = 0 \quad (16)$$

با حل معادلات نرمال 17،  $\delta_p$  بدست می‌آید.

$$J^T J \delta_p = J^T \epsilon \quad (17)$$

ماتریس  $J^T J$  در سمت چپ معادله‌ی 17 یک تقریب برای ماتریس مشتقات مرتبه دوم است. الگوریتم LM یک نوسان اندک از رابطه‌ی 17 را حل می‌کند که به عنوان روابط نرمال الحاقی 18 شناخته شده‌اند.

$$N\delta_p = J^T \epsilon \quad (18)$$

مولفه‌های غیر قطری  $N$  برابر هستند با مولفه‌های متناظر  $J^T J$  و مولفه‌های قطری از رابطه‌ی 19 بدست می‌آید.

$$N_{ii} = \mu + [J^T J]_{ii} \quad (19)$$

استراتژی تغییر مولفه‌های قطری  $J^T J$ ، میرایی و  $\mu$  ضریب میرایی نامیده می‌شود.

اگر پارامتر به‌روز رسانی شده‌ی  $p + \delta_p$  (محاسبه شده از رابطه‌ی 18) به کاهش خطا منجر شود، این پارامتر، پذیرفته می‌شود و فرآیند، با ضریب میرایی کاهش یافته، تکرار می‌شود؛ در غیراین‌صورت، ضریب میرایی افزایش داده می‌شود. روابط نرمال الحاقی دوباره حل می‌شوند و فرآیند تکرار می‌شود تا یک مقدار  $\delta_p$  که خطا را کاهش دهد، پیدا شود.

### 3-4- به دست آوردن ضرایب معیار تسلیم

ضرایب تابع‌های تسلیم شرح داده شده، باید بنابر داده‌های ورودی تجربی تعیین شوند. به این منظور، پارامترهای تجربی زیر در نظر گرفته می‌شوند: تنش‌های تسلیم و ضرایب ناهمسانگردی جهتی به دست آمده از تست‌های کشش تک محوره در نمونه‌های ورق با زوایای مختلف نسبت به جهت نورد که با  $\sigma_\phi$  و  $\tau_\phi$  مشخص می‌شوند، تنش تسلیم دوماحوره که توسط تست بالچ به دست آمده و با  $\sigma_b$  مشخص می‌شود و ضریب ناهمسانگردی دو محوره که به صورت نسبت کرنش پلاستیک در جهت عمود بر نورد به کرنش پلاستیک در جهت نورد تعریف می‌شود.

برای تعیین ضرایب تابع تسلیم، دو روش مختلف وجود دارد. یک روش حل دستگاه  $n$  معادله‌ای غیر خطی است که  $n$  به تعداد ضرایب مجهول وابسته است. روش دیگر، کمینه‌سازی تابع خطا می‌باشد که یکی از مهم‌ترین

3-5- آنالیز MK

مدل MK بر مبنای رشد نقص اولیه به شکل یک نوار باریک است که نسبت به محورهای اصلی دارای زاویه‌ی  $\omega$  می‌باشد (شکل 5). حالت صلب-پلاستیک، شرایط تنش صفحه‌ای و کارسختی همسانگرد ماده فرض شده است. محورهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  مربوط به جهت‌های نورد، عمود بر نورد و عمود بر ورق بوده و محورهای 1 و 2 جهت‌های تنش و کرنش اصلی در ناحیه‌ی همگن را نشان می‌دهند. دستگاه مختصات مربوط به شیار، با محورهای  $t$ ،  $n$  و  $z$  نشان داده شده‌اند که  $t$  محور طولی است. با اعمال کشش افزایشی به منطقه‌ی همگن، این دو ناحیه‌ی ماده در معرض تغییر شکل پلاستیک قرار داده می‌شوند. حد شکل‌دهی براساس این معیار زمانی رخ می‌دهد که نسبت نمو کرنش در ناحیه‌ی  $b$  به نمو کرنش در ناحیه‌ی  $a$  از حدی عبور کند. در این حالت مقادیر کرنش در منطقه‌ی سالم ورق ( $\epsilon_{1a}$  و  $\epsilon_{2a}$ )، کرنش‌های حدی و یک نقطه از FLD می‌باشند. فلوجارت تحلیل بدست آوردن کرنش‌های حدی در شکل 6 آورده شده است.

4- نتایج و بحث

4-1- مقایسه‌ی تنش‌های تسلیم و ضرایب ناهمسانگردی تئوری و تجربی

شکل‌های 7 و 8 نتایج بدست آمده از تعیین ضرایب معیارهای تسلیم BBC2008-16P و YLD2011-27P، YLD2011-18P، YLD2004-18P را با استفاده از روش کمینه‌سازی تابع خطا نشان می‌دهند. برای هر چهار معیار تسلیم، روش و تعداد پارامترهای ناهمسانگردی مشابهی استفاده شده است. مشاهده می‌شود که هر چهار معیار، برای استحکام‌های تسلیم نتایجی تقریباً یکسان و نزدیک به مقادیر تجربی ارائه می‌دهند و پیش‌بینی معیارهای BBC2008-16P و YLD2011-27P نسبت به سایر معیارها دقیق‌تر است. پیش‌بینی معیار تسلیم BBC2008-16P و YLD2004-18P از ضرایب ناهمسانگردی نزدیکی بیشتری با داده‌های تجربی دارد.

برای آزمودن دقت معیار تسلیم به کار گرفته شده با روش اصولی‌تر، به کار گیری معیاری کیفی برای آزمون برازش لازم است. اولین بار وکسین [29] روشی برای آزمودن کیفیت برازش مطرح کرد و سپس لیکاک [30] برای محاسبه‌ی دقت معیار تسلیم جدید غیر درجه دو که بر اساس معیار هیل 1990 پیشنهاد شده بود، این روش را به کار برد. انحراف نسبی تنش تسلیم، به شکل رابطه‌ی 21 تعریف شده است.

$$\Delta\sigma = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{[\sigma(e)t - \sigma(\alpha)i]^2}{n}}}{\frac{\sigma_0 + 2\sigma_{45} + \sigma_{90}}{4}} \quad (21)$$

که  $\sigma(e)$  استحکام تسلیم تک‌محوره‌ی تجربی،  $\sigma(\alpha)$  استحکام تسلیم

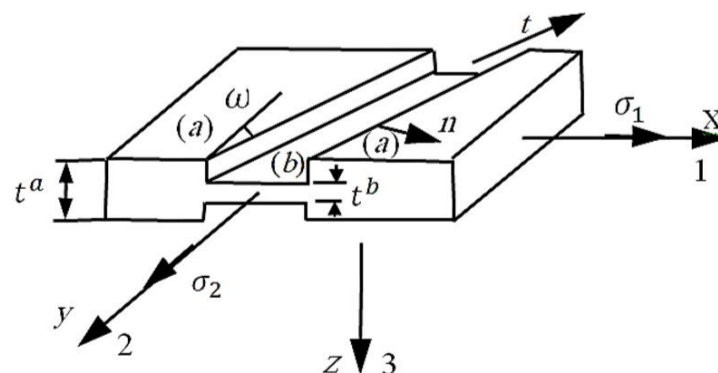


Fig. 5 Geometry of MK model

شکل 5 هندسه‌ی مدل MK

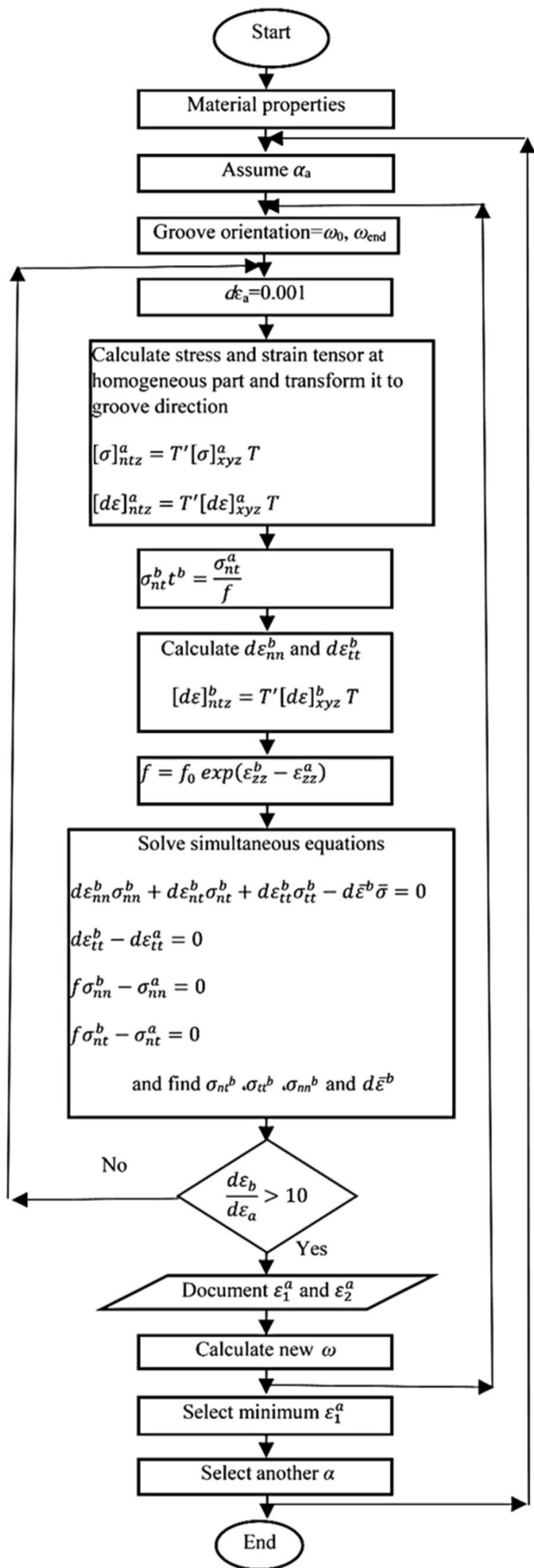


Fig. 6 The flow chart of determining limit strains based on the MK model

شکل 6 فلوجارت تعیین کرنش‌های حدی بر اساس مدل MK

همان‌گونه که مشخص است، مقادیر انحراف نسبی استحکام‌های تسلیم ( $\Delta\sigma$ )، عموماً کمتر از این مقادیر برای ضریب ناهمسانگردی ( $\Delta r$ ) هستند. این به سبب تعریف مقادیر  $r$  و اندازه‌گیری آن‌ها در طی آزمایش است. بر طبق تعریف  $r$ ، برای محاسبه کرنش عمود بر جهت نورد و کرنش ضخامتی، باید جابجایی‌های طولی و عمود بر نورد اندازه‌گیری شوند. در این باره، یک خطای کوچک در اندازه‌گیری این مقادیر می‌تواند به انحراف‌های بزرگ منجر شود. در حالی که برای محاسبه استحکام‌های تسلیم، خطاهایی که در فرآیند تجربی وجود می‌آیند، کم هستند؛ به‌علاوه مقادیر انحراف نسبی استحکام‌های تسلیم پیش‌بینی شده با معیار تسلیم YLD2011-27P و ضرایب ناهمسانگردی با معیار تسلیم YLD2004-18P کم‌تر از همین مقادیر با معیارهای تسلیم دیگر هستند. این، قابلیت اعتماد بیشتر توابع تسلیم YLD2011-27P و YLD2004-18P نسبت به دو مورد دیگر را ثابت می‌کند؛ بنابراین استفاده از این معیارها به همراه مدل MK، نتایجی با دقت بیشتر را پیش‌بینی خواهد کرد.

#### 4-2- دقت روش شناسایی برای تعیین ضرایب تابع تسلیم

برای تعیین اثر تعداد پارامترهای ناهمسانگردی بر دقت رویه‌ی شناسایی ضرایب توابع تسلیم، معیار تسلیم BBC2008-16P با تعداد متفاوت پارامترهای ناهمسانگردی تجربی به کار برده شد. معیار BBC2008 دارای 16 ضریب می‌باشد (بدون در نظر گرفتن توان  $k$  که مربوط به ساختار کریستالی ماده می‌باشد) و برای تعیین این ضرایب با استفاده از روش کمینه‌سازی تابع خطا در انتخاب پارامترهای به کار برده شده، محدودیتی وجود ندارد. در این مورد یک سری از 8، 10، 12 و 14 پارامتر تجربی استفاده شد. روش گزینش تعداد و آرایش پارامترهای ناهمسانگردی در جدول 9 آورده شده است.

برای تخمین تاثیر پارامترهای ناهمسانگردی بر اجرای پروسه‌ی کمینه‌سازی خطا، انحراف‌های نسبی استحکام‌های تسلیم و ضرایب ناهمسانگردی با استفاده از روابط 21 و 22 محاسبه شد. نتایج به شکل ستون‌های دسته‌بندی شده در شکل 10 نشان داده شده است. انحراف‌های نسبی مقادیر  $r$  بزرگتر از این مقدار برای استحکام‌های تسلیم هستند و این می‌تواند حالتی که قبلاً درباره‌ی تاثیر خطاهای بوجود آمده در طی اندازه‌گیری کرنش‌های عمود و ضخامتی ذکر شد را یک بار دیگر ثابت کند؛ به علاوه استفاده از 14 پارامتر تجربی، کمترین خطا را خواهد داد و می‌تواند به خوبی تابعی برای معیار تسلیم BBC2008-16P پیش‌بینی کند. تاثیر

جدول 9 پارامترهای ناهمسانگردی تجربی به کار رفته برای کمینه‌سازی تابع خطا

Table 9 Experimental anisotropy parameters used in minimization of error-function

	S8	S10	S12	S14
$\sigma_0$	*	*	*	*
$\sigma_{15}$	*	*	*	*
$\sigma_{30}$	-	*	-	*
$\sigma_{45}$	*	-	*	*
$\sigma_{60}$	*	-	*	*
$\sigma_{75}$	-	*	*	*
$\sigma_{90}$	*	*	*	*
$r_0$	-	*	-	*
$r_{15}$	*	*	*	*
$r_{30}$	*	-	*	*
$r_{45}$	-	*	*	*
$r_{60}$	-	*	*	*
$r_{75}$	*	*	*	*
$r_{90}$	-	-	*	*

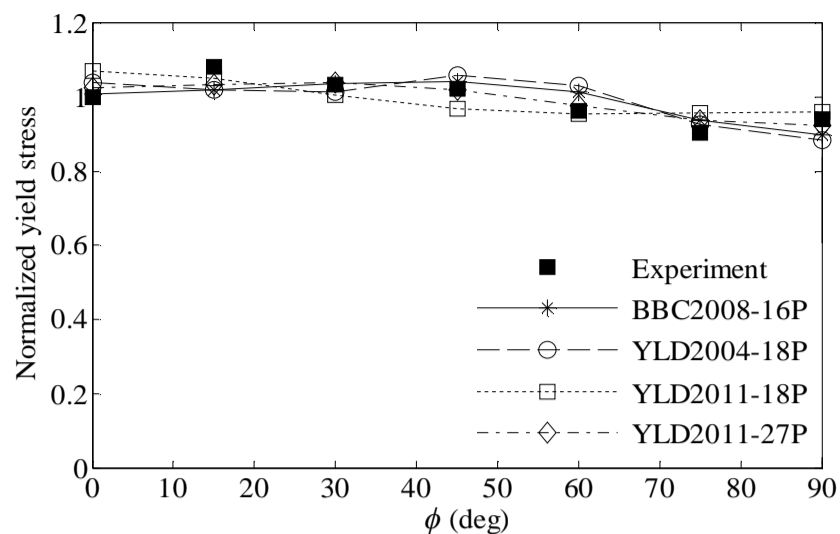


Fig. 7 Comparison of experimental and predicted directional normalized yield stresses

شکل 7 مقایسه‌ی تنش‌های تسلیم نرمالیزه شده‌ی جهت‌ی تجربی و پیش‌بینی شده

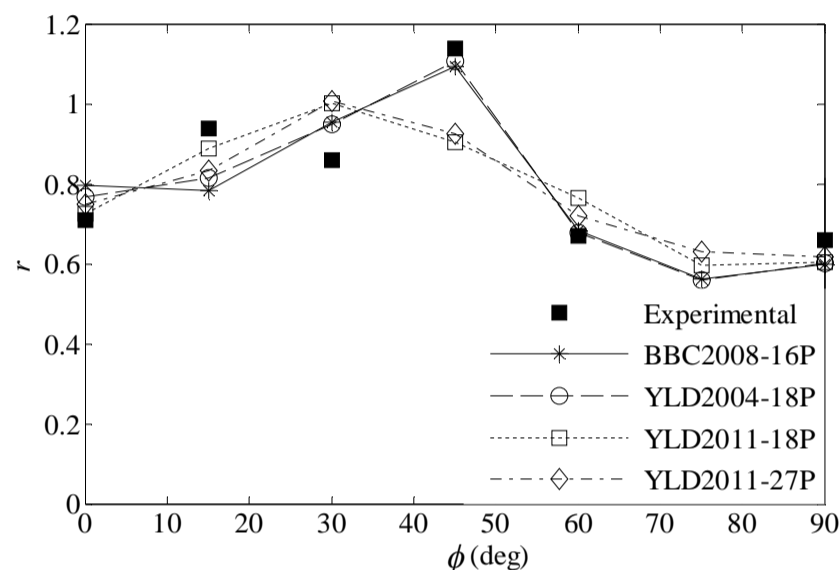


Fig. 8 Comparison of experimental and predicted anisotropy coefficients

شکل 8 مقایسه‌ی ضرایب ناهمسانگردی تجربی و پیش‌بینی شده

تک‌محوره‌ی پیش‌بینی شده‌ی متناظر و  $n$  تعداد داده‌های تجربی می‌باشد. تابع مشابهی برای مقادیر  $r$  تعیین می‌شود (معادله‌ی 22).

$$\Delta r = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{[r(e)_i - r(\alpha)_i]^2}{n}}}{\frac{r_0 + 2r_{45} + r_{90}}{4}} \quad (22)$$

مشابه تابع قبل،  $\Delta r$  انحراف نسبی ضرایب ناهمسانگردی می‌باشد.  $r(e)$  مقادیر ضریب ناهمسانگردی تجربی و  $r(\alpha)$  مقادیر  $r$  پیش‌بینی شده‌ی متناظر هستند. خلاصه‌ای از انحراف‌های نسبی برای استحکام‌های تسلیم و مقادیر  $r$  در شکل 9 نشان داده شده است.

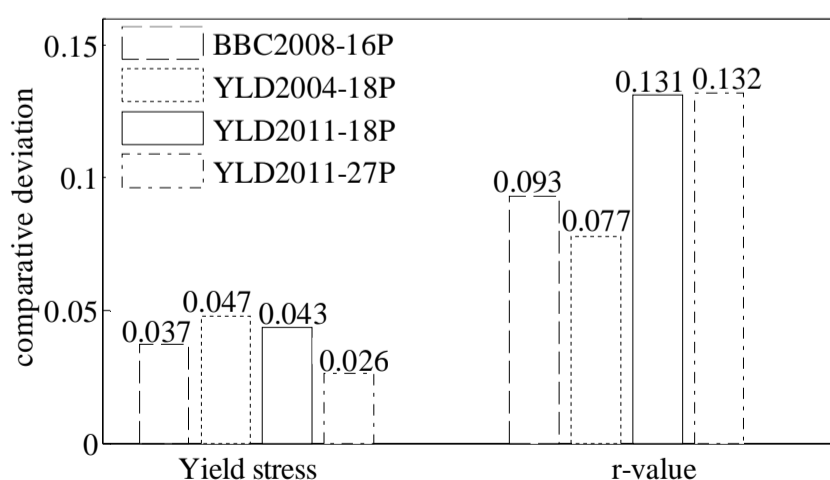
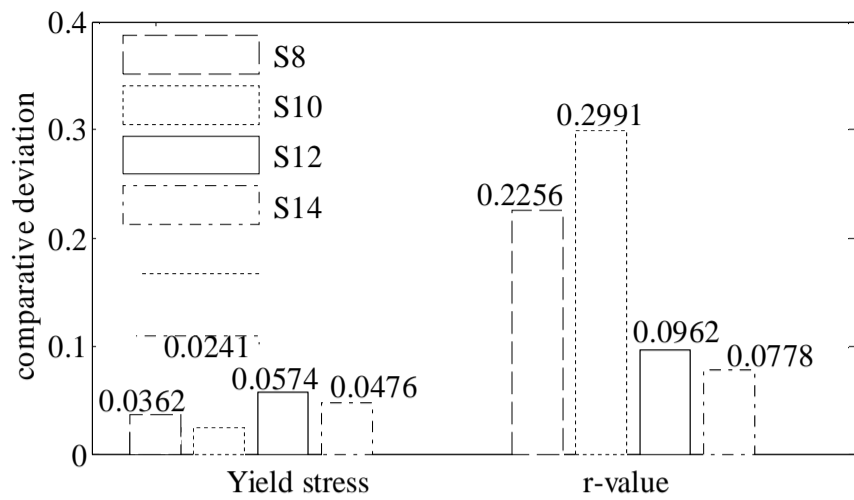


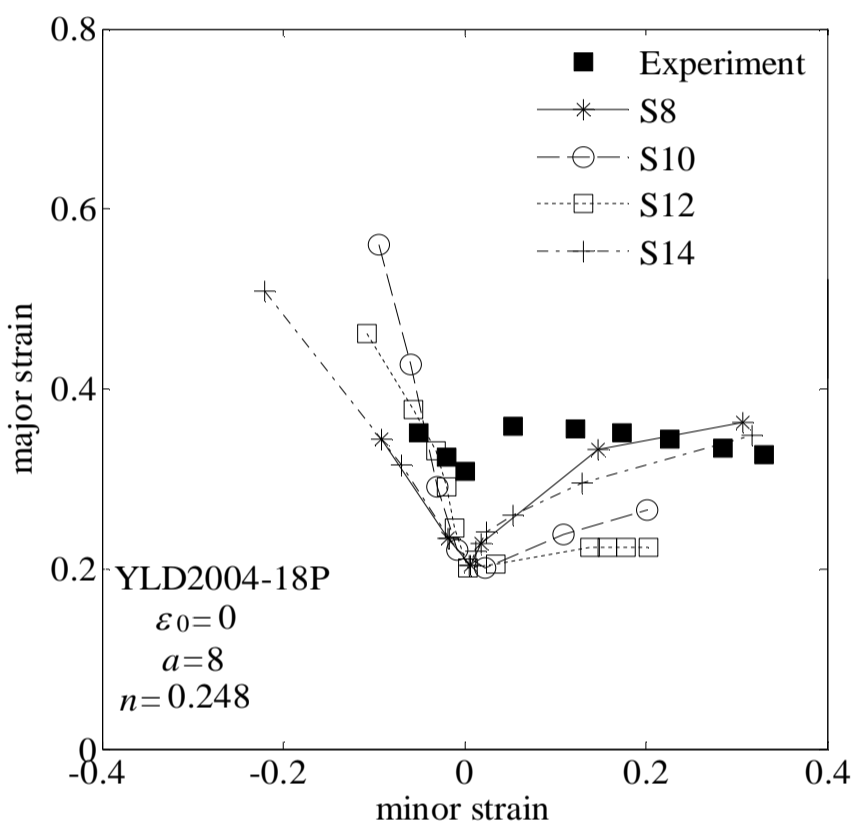
Fig. 9 Yield stress and r-value comparative deviations for different yield criteria

شکل 9 انحراف‌های نسبی مقادیر تنش تسلیم و ضریب ناهمسانگردی برای معیارهای تسلیم مختلف



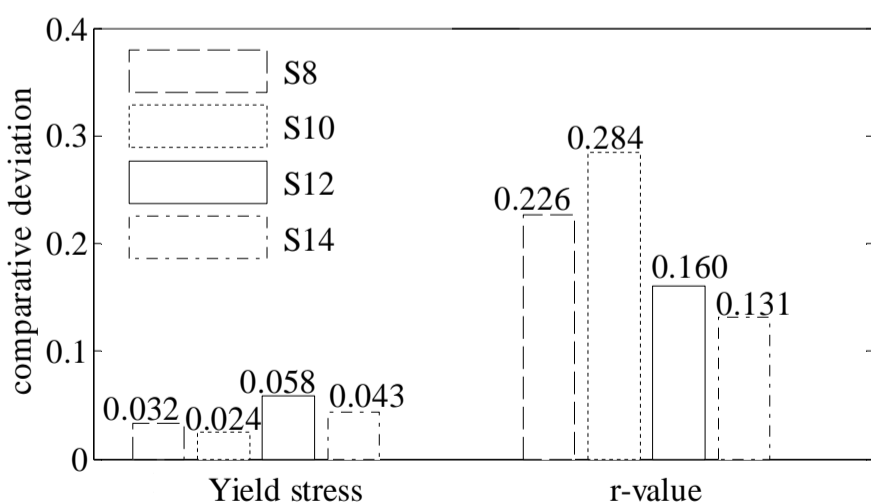
**Fig. 12** Yield stress and anisotropy coefficient comparative deviations for YLD2004-18P yield criterion with different employment of experimental parameters

شکل 12 انحراف‌های نسبی مقادیر تنش تسلیم و ضریب ناهمسانگردی برای معیار تسلیم YLD2004-18P با به‌کارگیری تعداد متفاوت پارامترهای تجربی



**Fig. 13** The effect of order and number of employed experimental parameters on predicted FLDs using YLD2004-18P yield function

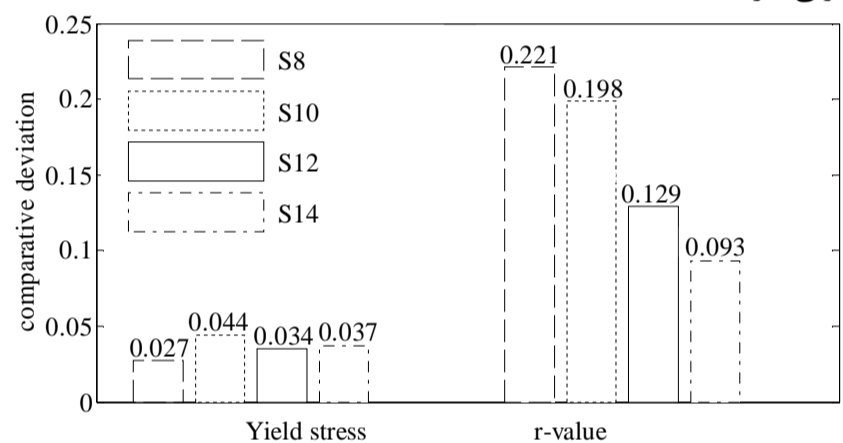
شکل 13 تأثیر آرایش و تعداد پارامترهای تجربی استفاده شده بر پیش‌بینی نمودارهای حد شکل‌دهی با استفاده از تابع تسلیم YLD2004-18P



**Fig. 14** Yield stress and anisotropy coefficient comparative deviations for YLD2011-18P yield criterion with different employment of experimental parameters

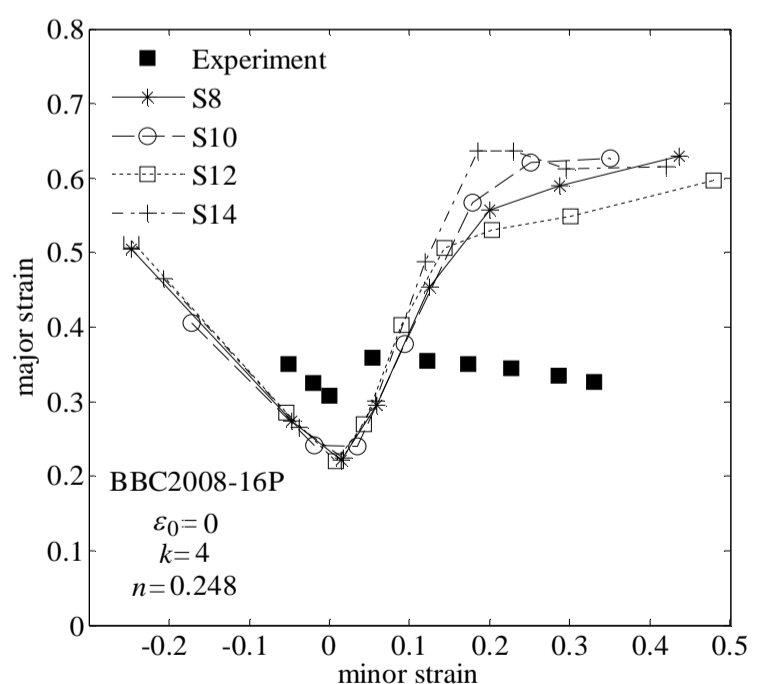
شکل 14 انحراف‌های نسبی مقادیر تنش تسلیم و ضریب ناهمسانگردی برای معیار تسلیم YLD2011-18P با به‌کارگیری تعداد متفاوت پارامترهای تجربی

تعداد پارامترهای تجربی استفاده شده، روی نمودارهای حد شکل‌دهی با استفاده از تابع تسلیم BBC2008-16P و قانون سخت‌شوندگی سوئیفت و روش MK ارزیابی شد و در شکل 11 خروجی‌ها، رسم شده و با FLD تجربی مقایسه شده است. مقدار ضریب ناهمگنی اولیه مربوط به مدل MK برابر 0.996 قرار داده شد. همان‌طور که دیده می‌شود، در سمت چپ، پیش‌بینی همه‌ی نمودارها نزدیک به هم بوده و در سمت راست نمودار S12 پیش‌بینی بهتری انجام داده است. روش مشابهی برای تخمین بهترین شرایط برای معیارهای تسلیم YLD2011-27P و YLD2011-18P، YLD2004-18P به کار برده شده و نتایج به ترتیب در شکل‌های 12 تا 17 ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود برای هر سه تابع تسلیم، تکنیک انتخاب 14 پارامتر ناهمسانگردی، کمترین انحراف در پیش‌بینی استحکام‌های تسلیم و ضرایب ناهمسانگردی را نتیجه داد. پیش‌بینی منحنی حد شکل‌دهی با معیار تسلیم YLD2004-18P در سمت چپ، با منحنی‌های S12 و S14 و در سمت راست با منحنی S14 تطابق بهتری با داده‌های تجربی دارد (شکل 13). طبق شکل 15 معیار YLD2011-18P در سمت راست FLD با منحنی S12 و در سمت چپ با منحنی‌های S12 و S14 پیش‌بینی بهتری ارائه داده است. با توجه به شکل 17 مشخص می‌شود که پیش‌بینی FLD با منحنی S8 در سمت چپ و منحنی S14 در سمت راست، نزدیکی بیشتری با منحنی تجربی دارد.



**Fig. 10** Yield stress and anisotropy coefficient comparative deviations for BBC2008-16P yield criterion with different employment of experimental parameters

شکل 10 انحراف‌های نسبی مقادیر تنش تسلیم و ضریب ناهمسانگردی برای معیار تسلیم BBC2008-16P با به‌کارگیری تعداد متفاوت پارامترهای تجربی



**Fig. 11** The effect of order and number of employed experimental parameters on predicted FLDs using BBC2008-16P yield function

شکل 11 تأثیر آرایش و تعداد پارامترهای تجربی استفاده شده بر پیش‌بینی نمودارهای حد شکل‌دهی با استفاده از تابع تسلیم BBC2008-16P



### 3-4- مقایسه‌ی بین FLD های تجربی و پیش‌بینی شده

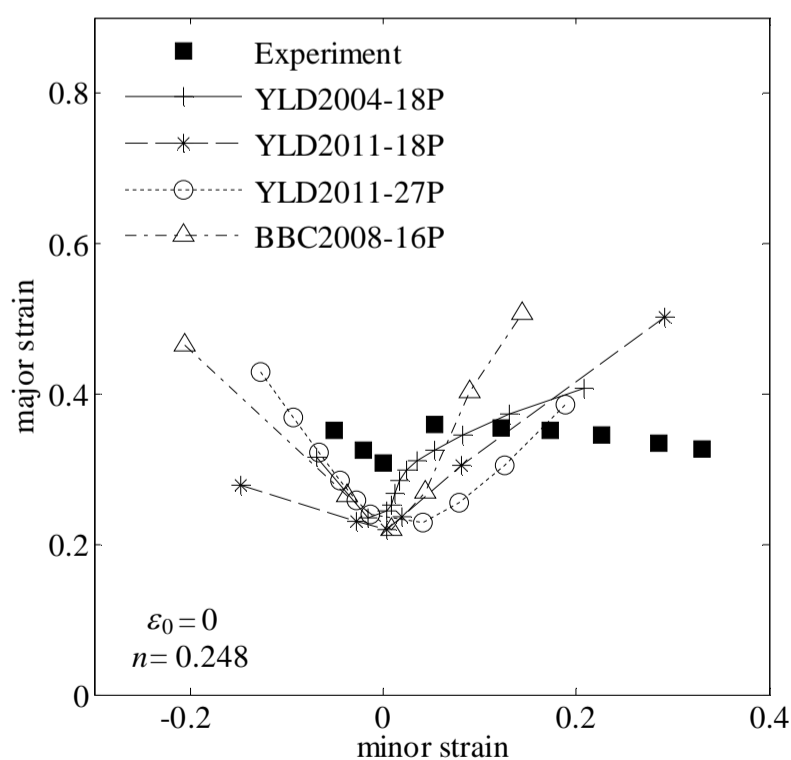
شکل 18، منحنی‌های حد شکل‌دهی تجربی و تئوری محاسبه شده با استفاده از توابع تسلیم YLD2011-27P, YLD2011-18P, YLD2004-18P و BBC2008-16P را نشان می‌دهد. مطابق شکل، پیش‌بینی معیارهای YLD2011-27P و YLD2004-18P مخصوصاً در سمت چپ نمودار تطابق بهتری با داده‌های تجربی دارد؛ اما FLD های پیش‌بینی شده، کرنش‌های حد شکل‌دهی را کم‌تر تخمین می‌زنند که تا اندازه‌ای به مدل ساختاری استفاده شده، وجود اصطکاک در کار تجربی، در نظر نگرفتن اثر تنش نرمال و تنش برشی در جهت ضخامت و وارد نکردن استحکام تسلیم و ضریب ناهمسانگردی دو محوره‌ی یکسان در تابع خطا وابسته است.

### 4-4- تاثیر ارتباط نسبت‌های تنش و کرنش و شکل سطح تسلیم بر پیش‌بینی FLD

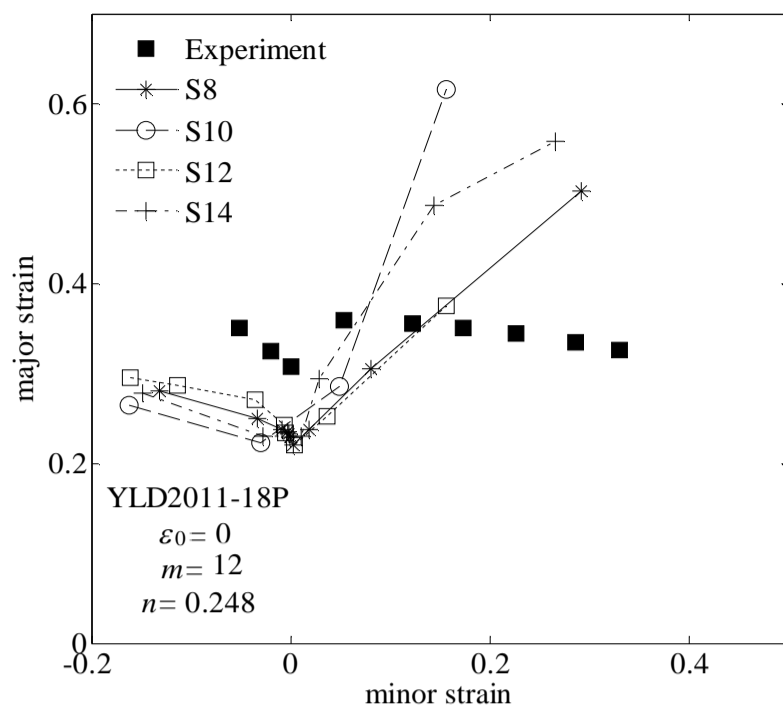
نسبت نموهای کرنش ( $\rho$ ) توسط تابع تسلیم به طور مستقیم با نسبت تنش‌ها ( $\alpha$ ) مرتبط است. به کارگیری توابع تسلیم متفاوت، ارتباط بین این پارامترها را نشان می‌دهد. هم‌چنین با داشتن نمودارهای بر پایه‌ی کرنش، نمایش دادن نمودارهای حد شکل‌دهی بر پایه‌ی تنش امکان‌پذیر است. ارتباط بین نسبت‌های تنش و کرنش برای توابع تسلیم متفاوت در شکل 19 آورده شده است. برای محاسبه‌ی کرنش‌های حدی برای مسیر کرنش‌های متفاوت، در ناحیه‌ی سمت چپ نمودار حد شکل‌دهی بر پایه‌ی کرنش، نقطه‌ی شروع، متناظر  $\alpha=0$  و نقطه‌ی پایان  $\rho=0$  است. برای سمت راست، نقطه‌ی شروع، شرایط کرنش صفحه‌ای  $\rho=0$  و نقطه‌ی پایان،  $\rho=1$  است. سطوح پیش‌بینی شده از مکان هندسی تسلیم در شکل 20 نشان داده شده است.

### 5- نتیجه‌گیری

در این مقاله نمودار حد شکل‌دهی آلیاژ آلومینیوم 2024-O با اجرای تست ناکازیمما به روش تجربی تعیین شد. برای ارزیابی تاثیر تابع تسلیم بر پیش‌بینی نمودارهای حد شکل‌دهی بر پایه‌ی مدل MK چهار معیار تسلیم

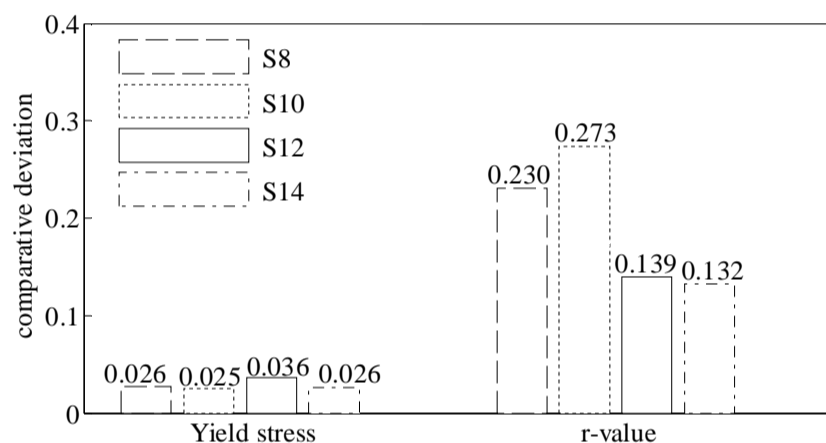


**Fig. 18** Comparison of experimental and theoretical FLDs calculated by using different yield criteria  
شکل 18 مقایسه‌ی داده‌های تجربی و FLD تئوری محاسبه شده با استفاده از معیارهای تسلیم مختلف



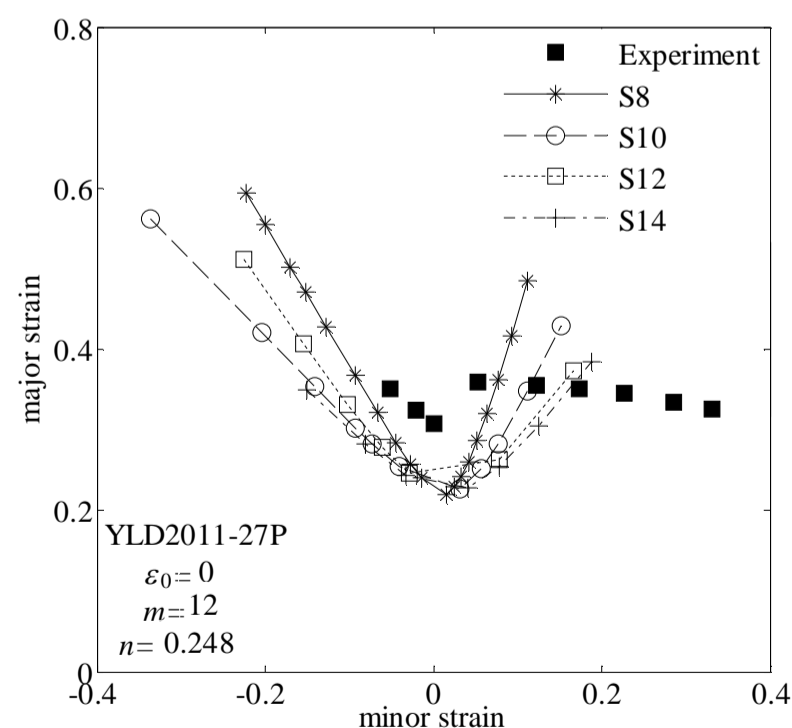
**Fig. 15** The effect of order and number of employed experimental parameters on predicted FLDs using YLD2011-18P yield function

شکل 15 تاثیر آرایش و تعداد پارامترهای تجربی استفاده شده بر پیش‌بینی نمودارهای حد شکل‌دهی با استفاده از تابع تسلیم YLD2011-18P



**Fig. 16** Yield stress and anisotropy coefficient comparative deviations for YLD2011-27P yield criterion with different employment of experimental parameters

شکل 16 انحراف‌های نسبی مقادیر تنش تسلیم و ضریب ناهمسانگردی برای معیار تسلیم YLD2011-27P با به کارگیری تعداد متفاوت پارامترهای تجربی



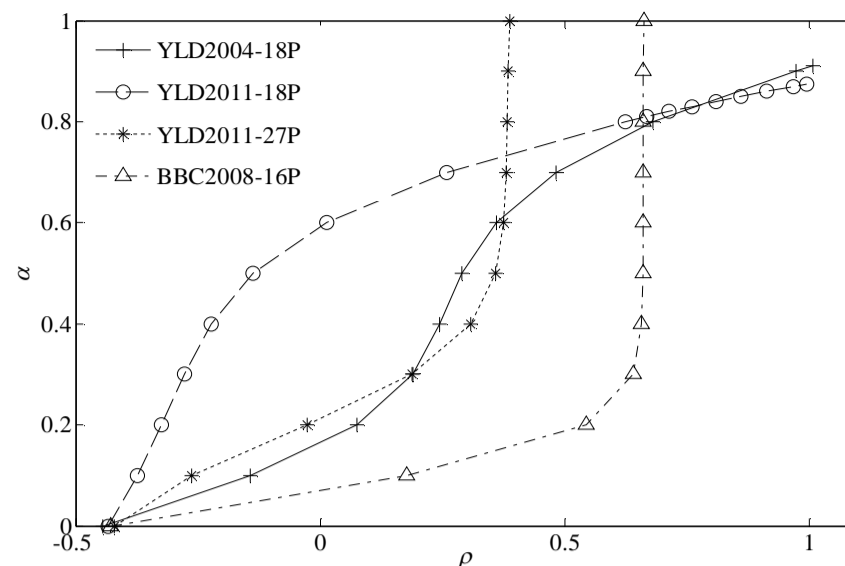
**Fig. 17** The effect of order and number of employed experimental parameters on predicted FLDs using YLD2011-27P yield function

شکل 17 تاثیر آرایش و تعداد پارامترهای تجربی استفاده شده بر پیش‌بینی نمودارهای حد شکل‌دهی با استفاده از تابع تسلیم YLD2011-27P

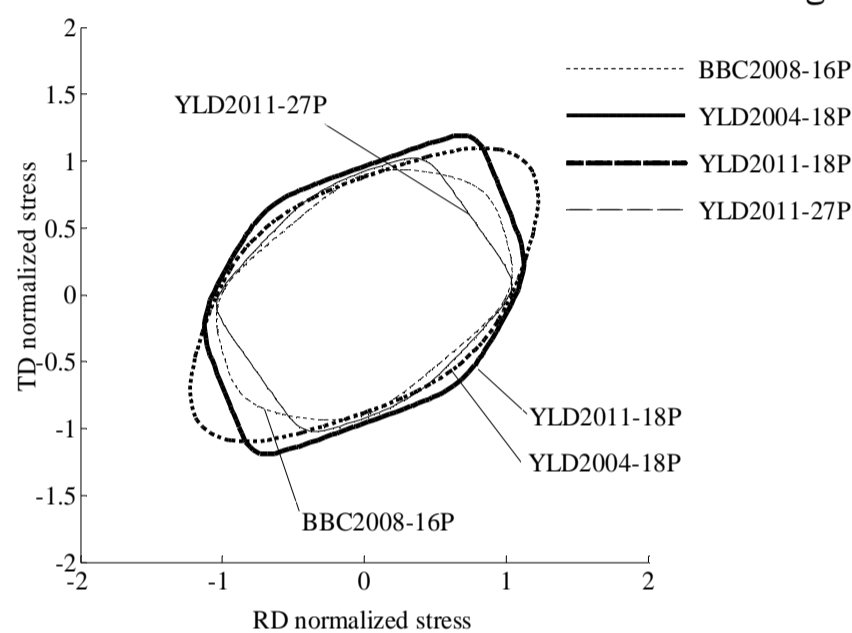
- ترکیب معیارهای تسلیم مختلف به کار برده شده، شکل منحنی حد شکل‌دهی را در حالت‌های کشش تک‌محوره (سمت چپ منحنی) و دومحوره (سمت راست منحنی) تحت تاثیر قرار داد و کم‌ترین کرنش حد شکل‌دهی مربوط به نقطه‌ی کرنش فرعی برابر با صفر است؛ زیرا رشد نقص در ضخامت در نقطه‌ی  $FLD_0$  فقط توسط کرنش‌سختی و در سایر مسیرهای کرنش، توسط کرنش‌سختی و شکل سطح تسلیم، جبران می‌شود.
- با مقایسه‌ی بین نمودارهای حد شکل‌دهی تجربی و تئوری آلیاژ آلومینیوم 2024-O نتیجه گرفته شد که مدل MK در ترکیب با قانون سخت‌شوندگی سوئیفت و معیارهای تسلیم YLD2004-18P و YLD2011-27P مخصوصاً در سمت چپ نمودار پیش‌بینی بهتری ارائه کرده است. اما FLD های پیش‌بینی شده، کرنش‌های حد شکل‌دهی را کم‌تر تخمین می‌زنند که تا اندازه‌ای به مدل ساختاری استفاده شده، وجود اصطکاک در کار تجربی، در نظر نگرفتن اثر تنش نرمال و تنش برشی در جهت ضخامت و وارد نکردن استحکام تسلیم و ضریب ناهمسانگردی دو محوره‌ی یکسان در تابع خطا وابسته است.

### 6- مراجع

- [1] S. P. Keeler, W. A. Backofen, *Plastic instability and fracture in sheets stretched over rigid punches*, ASM Transactions Quarterly, Vol. 56, pp. 25-48, 1963.
- [2] G. M. Goodwin, Application of strain analysis to sheet metal forming problems in the press shop, in *SAE Automotive Engineering Congress*, No. 680093, 1968.
- [3] S. S. Hecker, A Simple Forming Limit Curve Technique and Results on Aluminum Alloys, in *Proceedings of 7th Biennial Congress of the International Deep Drawing Research Group*, Amsterdam, pp. 5.1-5.8, 1972.
- [4] M. Azrin, W. A. Backofen, *The deformation and failure of a biaxially stretched sheet*, Metallurgical Transactions (Physical Metallurgy and Materials Science), Vol 1, pp. 2857-2865, 1970.
- [5] A. K. Ghosh, S. S. Hecker, *Failure in thin sheets stretched over rigid punches*, Metallurgical Transactions A, Vol. 6, pp. 1065-1074, 1975.
- [6] H. W. Swift, Plastic instability under plane stress, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 1, pp. 1-18, 1952.
- [7] R. Hill, On discontinuous plastic states with special reference to localized necking in thin sheets, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 1, No. 1, pp. 19-30, 1952.
- [8] Z. Marciniak, K. Kuczynski, Limit strains in the process of stretch-forming sheet metal, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 9, No. 9, pp. 609-620, 1967.
- [9] S. Stören, J. R. Rice, Localized necking in thin sheets, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 23, No. 6, pp. 421-441, 1975.
- [10] M. C. Butuc, J. J. Gracio, A. Barata da Rocha, A theoretical study on forming limit diagrams prediction, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 142, No. 3, pp. 714-724, 2003.
- [11] A. R. Safikhani, R. Hashemi, A. Assempour, Some numerical aspects of necking solution in prediction of sheet metal forming limits by strain gradient plasticity, *Materials and Design*, Vol. 30, No. 3, pp. 727-740, 2009.
- [12] M. Nurcheshmeh, D. E. Green, Prediction of sheet forming limits with Marciniak and Kuczynski analysis using combined isotropic-nonlinear kinematic hardening, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 53, No. 2, pp. 145-153, 2011.
- [13] M. Ganjiani, A. Assempour, An improved analytical approach for determination of forming limit diagrams considering the effects of yield functions, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 182, No. 1, pp. 598-607, 2007.
- [14] M. Allwood, D. R. Shouler, Generalised forming limit diagrams showing increased forming limits with non-planar stress states,



**Fig. 19** Effect of the ratio of minor to major principal strain increments on the ratio of principal stresses  
 شکل 19 تأثیر نسبت نمو کرنش‌های اصلی کوچک به بزرگ بر نسبت تنش‌های اصلی



**Fig. 20** Predicted yield surface for Aluminum alloy 2024 using different yield functions  
 شکل 20 سطح تسلیم پیش‌بینی شده برای آلومینیوم AA2024 با استفاده از توابع تسلیم مختلف

پیشرفته‌ی YLD2004-18P، YLD2011-18P، YLD2011-27P و BBC2008-16P به همراه قانون سخت‌شوندگی سوئیفت به کار برده شد. برای محاسبه‌ی ضرایب توابع تسلیم جدید، تست کشش در هفت راستا نسبت به جهت نورد انجام شده و استحکام‌های تسلیم و ضرایب ناهمسانگردی در جهات مختلف استخراج و در تابع خطا به کار برده شد. جهت کمینه‌سازی تابع خطا از الگوریتم لونبرگ-مارکوات استفاده شد.

- با در نظر گرفتن 8، 10، 12 و 14 پارامتر ناهمسانگردی، تاثیر تعداد پارامترهای تجربی بر دقت توابع تسلیم بررسی و انتخاب تعداد داده‌های تجربی از میان پارامترهای ناهمسانگردی تحقیق شد. با محاسبه‌ی انحراف نسبی استحکام‌های تسلیم و ضرایب ناهمسانگردی، مشخص شد که با افزایش تعداد داده‌های تجربی از 8 به 14، دقت تابع خطا افزایش می‌یابد.
- هر چهار معیار، برای استحکام‌های تسلیم نتایج تقریباً یکسان و نزدیک به مقادیر تجربی ارائه می‌دهند. پیش‌بینی استحکام تسلیم با معیار YLD2011-27P و ضرایب ناهمسانگردی با معیار تسلیم YLD2004-18P نزدیکی بیشتری با داده‌های تجربی دارد.

- [22] S. M. Mirfalah Nasiri, A. Basti, R. Hashemi, Numerical analysis of the effect of advanced yield criterion on prediction of strains and stresses in anisotropic aluminum sheets, *Modares mechanical engineering*, Vol. 15, No. 8, pp. 393–401, 2015. (in Persian فارسی)
- [23] F. Barlat, H. Aretz, J. W. Yoon, M. E. Karabin, J. C. Brem, R. E. Dick, Linear transformation-based anisotropic yield functions, *International Journal of Plasticity*, Vol. 21, No. 5, pp. 1009–1039, 2005.
- [24] H. Aretz, F. Barlat, New convex yield functions for orthotropic metal plasticity, *International Journal of non-linear mechanics*, Vol. 51, pp. 97–111, 2013.
- [25] D. S. Comsa, D. Banabic, Plane stress yield criterion for highly anisotropic sheet metals, in *The 7th International Conference on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes*, Interlaken, Switzerland, pp. 43–48, 2008.
- [26] K. Levenberg, *A Method for the Solution of Certain Non-linear Problems in Least Squares*, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 2, pp. 164–168, 1944.
- [27] D. W. Marquardt, An Algorithm for the Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 11, No. 2, pp. 431–441, 1963.
- [28] D. Banabic, H. Aretz, D. S. Comsa, L. Paraianu, An improved analytical description of orthotropy in metallic sheets, *International Journal of Plasticity*, Vol. 21, No. 3, pp. 493–512, 2005.
- [29] Z. Wexian, A new non-quadratic orthotropic yield criterion, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 32, No. 6, pp. 513–520, 1990.
- [30] A. G. Leacock, A mathematical description of orthotropy in sheet metals, *Journal of The Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 54, No. 2, pp. 425–444, 2006.
- International Journal of Plasticity*, Vol. 25, No. 7, pp. 1207–1230, 2009.
- [15] H. JongBong, F. Barlat, M. GyuLee, D. C. Ahn, The forming limit diagram of ferritic stainless steel sheets: Experiments and modeling, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 64, No. 1, pp. 1–10, 2012.
- [16] L. Zhang, J. Wang, Modeling the localized necking in anisotropic sheet metals, *International Journal of Plasticity*, Vol. 39, pp. 103–118, 2012.
- [17] S. Panich, F. Barlat, V. Uthaisangsuk, S. Suranuntchai, S. Jirathearanat, Experimental and theoretical formability analysis using strain and stress based forming limit diagram for advanced high strength steels, *Materials and Design*, Vol. 51, pp. 756–766, 2013.
- [18] H. M. Naeini, S. J. Hashemi, G. H. Liaghat, M. Mohammadi, H. Deilami Azodi, analytical prediction of limit strains and limit stresses in hydroforming of anisotropic aluminium tubes, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 2, pp. 133–140, 2014. (in Persian فارسی)
- [19] M. Hosseinpour Gollo, S. M. H. Seyedkashi, N. Valian Iraj, The effect of Hosford, Hill's quadratic and non-quadratic yield criteria on prediction of forming limit diagrams based on M-K model, *Modares mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 5, pp. 137–146, 2013. (in Persian فارسی)
- [20] A. Assempour, R. Hashemi, K. Abrinia, M. Ganjani, E. Masoumi, A methodology for prediction of forming limit stress diagrams considering the strain path effect, *Computational materials science*, Vol. 45, No. 2, pp. 195–204, 2009.
- [21] M. Hoseinpour Gollo, S. M. H. Seyedkashi, S. Shahi, The effect of advanced BBC2003, YLD2004 and BBC2008 yield criteria on FLDs based on M-K, Swift and Hill models, *Modares mechanical engineering*, Vol. 15, No. 1, pp. 141–150, 2015. (in Persian فارسی)