مجله مهندسی مکانیک مدرس، مرداد 1395، دوره 16، شماره 5، ص‌ص 145-152

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل شکست نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک‌سرگیردار تک‌جهته از جنس ماده مرکب با طول محدود

امیررضا شاهانی[1*]، راضیه ابوالفتحی تبار[2]

1- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
2- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
* تهران، کدپستی 43344 -19991، shahani@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 13 دی 1394
پذیرش: 17 فروردین 1395
ارائه در سایت: 27 اردیبهشت 1395

کلید واژگان:
جدایش لایه‌ای
نرخ رهایش انرژی کرنشی
نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک سر گیردار
تئوری تیر تیموشنکو
بستر الاستیک

چکیده

نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک سرگیردار تک‌جهته، به صورت دو تیر تیموشنکو با طول محدود در نظر گرفته شده است که از یک سمت در تمام قسمت‌ها به جز در قسمت ترک، بهم چسبیده‌اند. به دلیل تقارن موجود، تنها نیمی از نمونه به صورت تیری شامل یک قسمت آزاد و یک قسمت بر روی بستر الاستیک، در نظر گرفته شده که در انتها تحت تاثیر نیرو قرار دارد. این تیر به صورت تحلیلی بر روی بسترهای الاستیک وینکلر و پاسترناک بررسی شده و مقادیر نرخ رهایش انرژی کرنشی آن در حالت عمومی به‌دست آمده است. در پژوهش‌هایی که پیش از این در رابطه با این نمونه با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو انجام شده، از اثرات طول پیوند بر مقدار نرخ رهایش انرژی صرف نظر شده است. در این پژوهش جواب برای حالت حقیقی طول پیوند محدود به‌دست آمده و تاثیر طول پیوند بر مقدار نرخ رهایش انرژی و نیز حداقل طول پیوند برای مستقل شدن نرخ رهایش انرژی از این طول، ارائه شده است. برای حالت خاص طول پیوند نامحدود، رابطه‌ی بسته‌ای برای نرخ رهایش انرژی کرنشی تیر تیموشنکو بر روی بستر وینکلر ارائه شده است. نتایج حل تحلیلی با نتایج ارائه شده در پژوهش‌های دیگر مقایسه شده و توافق قابل قبولی مشاهده شده است. بر اساس نتایج به‌دست آمده برای نمونه‌ی تک‌جهته، مقادیر نرمی و چقرمگی شکست با استفاده از تحلیل تیر تیموشنکو بر روی بستر وینکلر، نزدیک‌ترین جواب را به جواب‌های تجربی موجود ارائه می‌دهد.

Fracture analysis of a unidirectional composite double cantilever beam specimen with finite length

AmirReza Shahani*, Razieh Abolfathitabar

Department of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.
*P.O.B. 19991-43344, Tehran, Iran, shahani@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 03 January 2016
Accepted 05 April 2016
Available Online 16 May 2016

Keywords:
Delamination
Strain Energy Release Rate
Double Cantilever Beam Specimen
Timoshenko Beam Theory
Elastic Foundation

ABSTRACT

The unidirectional composite DCB specimen is considered as two finite length Timoshenko beams, attached together along a common edge except at the initial delamination length. Because of symmetry, only one half of the specimen is considered, which is partly free and partly resting on an elastic foundation. The problem is analytically solved by considering Timoshenko beam resting on Winkler and Pasternak elastic foundations and fracture toughness is generally derived. In the prior researches on this specimen using Timoshenko beam theory, the effect of the ligament length on the energy release rate was ignored. This research presents the solution for finite ligament length. Besides, the effect of ligament length on energy release rate and its minimum value that makes the energy release rate independent of the ligament length, is presented. For the special case when the ligament is large compared with the beam thickness, a closed form solution is derived for Timoshenko beam resting on Winkler elastic foundation. The analytical results are compared to prior researches on this subject and good agreement is observed. The fracture toughness and compliance obtained by Timoshenko beam resting on Winkler elastic foundation predicts more accurate results with respect to experimental results.

1- مقدمه

به علت نسبت استحکام به وزن و سفتی به وزن بالای مواد مرکب، استفاده از این مواد در سازه‌های مختلف صنعتی روز به روز در حال گسترش است. از این رو تلاش برای درک و پیش‌بینی مکانیزم‌های واماندگی این مواد از جمله واماندگی از نوع جدایش لایه‌ای[1] رو به افزایش است. جدایش لایه‌ای یکی از فراگیرترین مودهای واماندگی در مواد مرکب لایه‌ای می‌باشد. تقویت این مواد به وسیله‌ی الیاف در جهات بخصوصی صورت می‌گیرد و در راستای ضخامت، تقویت شوندگی وجود ندارد، در نتیجه وجود تنش‌های بین لایه‌ای در این

[1] Delamination

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
A. R. Shahani, R. Abolfathitabar, Fracture analysis of a unidirectional composite double cantilever beam specimen with finite length, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 5, pp. 145-152, 2016 (in Persian)

راستا، منجر به بروز جدایش لایه‌ای در این مواد می‌شود. هنگامی‌که نرخ رهایش انرژی در یک لایه‌چینی به مقدار بحرانی یا چقرمگی شکست آن برسد، رشد جدایش لایه‌ای آغاز می‌شود. به منظور تعیین چقرمگی شکست یک لایه‌چینی از جنس مواد مرکب تا به امروز نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک‌سر گیردار[1]، به صورت گسترده‌ای مورد استفاده قرار گرفته است که این نمونه‌ی آزمایش در استانداردهای موجود [1-3] نیز پیشنهاد شده است (شکل 1). در [1]، از نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک‌سرگیردار برای تعیین چقرمگی شکست بین لایه‌ای در مود اول، G_{Ic}، مواد مرکب تقویت شده با الیاف استفاده شده است. برای به‌دست آوردن چقرمگی شکست مواد با استفاده از این نمونه، تحلیل صحیحی از آن مورد نیاز است.

از اولین راه‌های استفاده شده در توصیف نمونه‌ی دوگانه‌ی یک سر گیردار تک‌جهته، تحلیل آن به صورت یک تیر یک سرگیردار تحت خمش است. در این روش فرض می‌شود که تیر در راس ترک، کاملا گیردار است و جابجایی و دورانی در آن‌جا ندارد. نرمی در اثر وارد شدن گشتاور خمشی عبارت است از:

$$C = \frac{8}{E_x b}\left(\frac{a}{h}\right) \tag{1}$$

که E_x، سفتی لایه‌چینی در جهت طولی، b، عرض نمونه‌ی دوگانه‌ی یک سر گیردار، h ضخامت آن و a طول جدایش لایه‌ای می‌باشد. با داشتن رابطه‌ی نرمی بر حسب طول جدایش لایه‌ای، می‌توان نرخ رهایش انرژی بحرانی را بر حسب رابطه‌ی 2 به‌دست آورد [4]:

$$G_{Ic} = \frac{P^2}{2b}\frac{dC}{da} \tag{2}$$

بنابراین نرخ رهایش انرژی کرنشی بحرانی بر اساس روابط 1 و 2 به‌دست می‌آید:

$$G_{Ic} = \frac{12P^2a^2}{E_x b^2 h^3} \tag{3}$$

که در رابطه‌ی 3 به منظور به‌دست آوردن چقرمگی شکست باید به‌جای P، بار بحرانی مربوط به لحظه‌ی آغاز جدایش لایه‌ای و نیز به‌جای a طول ترک اولیه جای‌گذاری شود.

به علت اختلاف زیاد موجود بین نرخ رهایش انرژی به‌دست آمده از رابطه‌ی 3 در مقایسه با مقادیر تجربی، اولسون [5]، به تصحیح برشی تئوری تیر کلاسیک با ضریب تصحیح برشی K پرداخت و نرمی قسمت ترک‌دار نمونه را محاسبه نمود:

$$C = \frac{2}{KbG_{xz}}\left(\frac{a}{h}\right) + \frac{8}{E_x b}\left(\frac{a}{h}\right)^3 \tag{4}$$

بر این اساس، نرخ رهایش انرژی مود اول به‌دست می‌آید:

$$G_I = \frac{12P^2a^2}{E_x b^2 h^3} + \frac{P^2}{KG_{xz}b^2 h} \tag{5}$$

وزربای [6]، یک فنر دورانی با سفتی $k_r = Pa/\theta$ را در نوک ترک قرار داد و به رابطه‌ی 6 برای نرمی دست یافت:

$$C = \frac{8}{E_x b}\left(\frac{E_x}{4KG_{xz}}\left(\frac{a}{h}\right) + \frac{E_x b h^2}{4k_r}\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{a}{h}\right)^3\right) \tag{6}$$

مقدار نرخ رهایش انرژی کرنشی در این حالت عبارت است از:

$$G_I = \frac{12P^2a^2}{E_x b^2 h^3} + \frac{P^2(1+4a)}{KG_{xz}b^2 h} \tag{7}$$

متداول‌ترین راه توصیف نمونه‌ی دوگانه‌ی یک سر گیردار، تحلیل آن به صورت تیری است که قسمتی از آن بر روی بستر الاستیک واقع شده است [7]. معمولا در تحلیل مساله‌ی تیر بر روی بستر الاستیک، سفتی بستر الاستیک پارامتری مستقل بوده و ارتباطی با مشخصات تیر مانند سفتی‌های طولی، عرضی و غیره ندارد، اما در تحلیل این مساله که به علت تقارن موجود، نصف تیر حذف شده است و تنها نصف آن مورد تحلیل قرار می‌گیرد، وجود بستر الاستیک، جایگزین اثرات نیمه‌ی حذف شده بر نیمه‌ی موجود است، به همین دلیل سفتی بستر الاستیک تابعی از پارامترهای مادی نمونه می‌باشد.

کنینن [8]، با استفاده از تئوری تیر اویلر برنولی، به تحلیل نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک سر گیردار همسان‌گرد بر روی بستر وینکلر[2] پرداخت. در ادامه در کار دیگری [9]، اثرات برش را نیز لحاظ کرد و با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو بر روی بستر پاسترناک[3]، به تحلیل نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک سر گیردار همسان‌گرد پرداخت. بستر الاستیک پاسترناک، دو نوع سفتی شامل سفتی جابجایی، k_e و سفتی دورانی، k_r، را برای تیر در نظر می‌گیرد، در حالی‌که بستر الاستیک وینکلر، تنها سفتی جابجایی، k_e، را در نظر می‌گیرد [7]. ویلیامز [10]، روش ارائه شده در [9] را برای تیر اورتوتروپیک توسعه داد. ویتنی [11]، برای تحلیل نمونه‌ی اورتوتروپیک به صورت یک تیر دوگانه‌ی یک‌سرگیردار، از تئوری پوسته مراتب بالاتر استفاده کرد که شامل تغییر شکل برشی عرضی بود. اولسون [5]، مروری بر تحلیل‌های انجام شده، با استفاده از تئوری‌های تیر مختلف، بر روی نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک سر گیردار از جنس کربن- اپاکسی، انجام داد و به این نتیجه رسید که در مقایسه با حل المان محدود، حل ویتنی [11]، صحیح‌ترین حل می‌باشد و حل ویلیامز [10]، سفتی را بیش از اندازه در نظر می‌گیرد. شکریه و همکارانش [12]، مروری بر تحلیل‌های صورت گرفته بر نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک‌سرگیردار چندجهته انجام دادند که این پژوهش به منظور مدل کردن جدایش لایه‌ای مود اول، با استفاده از تئوری‌های تیر مختلف بر روی بسترهای الاستیک انجام گرفت. شکریه و همکارانش [13]، همچنین به بررسی تاثیر انحنای جبهه‌ی جدایش لایه‌ای بر چقرمگی شکست نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک‌سرگیردار چند جهته در مود اول پرداختند و چقرمگی شکست را در نمونه‌های چندجهته علاوه بر لایه‌چینی، به نسبت‌های هندسی چون طول ترک اولیه به عرض نمونه و نیز طول ترک اولیه به ضخامت نمونه، وابسته دانستند. بر این اساس پارامتری تحت عنوان نسبت غیریکنواختی معرفی کردند تا تاثیر این نسبت‌های هندسی بر توزیع نرخ رهایش انرژی در عرض نمونه به صورت همزمان در نظر گرفته شود. کندو [7]، نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک سر گیردار اورتوتروپیک را به صورت تیر تیموشنکو بر روی بستر وینکلر، مدل کرد. وی نتایج کارش را با کارهای مختلفی از جمله حل ویتنی [11]، مقایسه نمود و نتایجی مشابه ویتنی به دست آورد. با توجه به این‌که اولسون [5]، حل ویتنی را صحیح‌ترین حل در مقایسه با حل المان محدود معرفی کرده بود، کندو نتیجه‌گیری نمود که روش حلش به درستی روش حل ویتنی می‌باشد. ازدیل و کارلسون [14]، به بررسی تحلیلی نمونه‌های تک‌جهته و چندجهته‌ی یک سر گیردار با استفاده از تئوری تیر اویلر- برنولی بر روی بستر وینکلر پرداختند. در این کار، آن‌ها ابتدا فرم بسته‌ای برای نرمی بر حسب طول جدایش لایه‌ای و طول پیوند[4] ارائه نمودند و سپس با بی‌نهایت فرض کردن طول پیوند، رابطه‌ی نرمی را اصلاح کرده و نتایج نهایی خود را برای طول پیوند نامحدود ارائه کردند. آن‌ها همچنین آزمایش تعیین چقرمگی شکست را برای همان لایه‌چینی‌ها انجام داده و نتایج تحلیلی خود را با نتایج تجربی به‌دست آمده مقایسه نمودند. بنکس و همکارانش [15]، چقرمگی

[1] DCB (Double Cantilever Beam)

[2] Winkler
[3] Pasternak
[4] Ligament

شکست بین لایه‌ای مواد مرکب بافته شده[1] را اندازه‌گیری کردند. آن‌ها برای انجام این کار، نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک‌سرگیردار را مورد استفاده قرار دادند.

چقرمگی شکست چسب‌ها نیز توسط نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک‌سرگیردار قابل اندازه‌گیری می‌باشد. جیانگ و همکارانش [16]، رفتار شکست مود اول اتصال چسبی شامل لایه‌چینی‌هایی از جنس پلیمر تقویت شده با شیشه و یک لایه‌ی چسبنده را با استفاده از یک نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک‌سرگیردار، مورد مطالعه قرار دادند. چقرمگی شکست مود اول این نمونه با استفاده از روش نرمی در بار بحرانی، محاسبه گردید. مونتیرو و همکارانش [17]، به بررسی خواص مکانیکی و نیز خواص شکست یک نوع چسب اپاکسی جدید پرداختند و برای محاسبه‌ی چقرمگی شکست مود اول آن از نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک‌سرگیردار استفاده کردند.

کنینن [8]، تاثیر طول پیوند بر روی مقدار ضریب شدت تنش محاسبه شده برای $c > 2h$ در یک نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک سر گیردار همسان‌گرد را قابل صرف نظر کردن دانست (c طول پیوند و h ضخامت نمونه می‌باشد). شاهانی و فرقانی [18]، به بررسی مکانیک شکست استاتیکی و دینامیکی نمونه‌ی همسان‌گرد با در نظر گرفتن اثرات برش پرداختند. آن‌ها در این کار، نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک سر گیردار را به صورت یک تیر تیموشنکو بر روی بستر وینکلر در نظر گرفتند و ضمن بررسی سرعت رشد ترک و نرخ رهایش انرژی در حالت رشد ترک دینامیکی، به بررسی اثرات طول پیوند بر روی مقدار ضریب شدت تنش در یک نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک سر گیردار با طول پیوند محدود پرداختند و علاوه بر تایید نظر کنینن [8] در رابطه با نحوه‌ی تاثیر طول پیوند، نتایج کار خود را با روش‌های مختلف مدل‌سازی نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک سر گیردار موجود در مراجع، مقایسه نمودند.

هدف از انجام این کار، تحلیل مکانیک شکست نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک‌سرگیردار از جنس مواد مرکب تک‌جهته با طول پیوند محدود می‌باشد که در آن از نرم‌افزار میپل[2] استفاده شده است. در کارهایی که تا کنون با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو بر روی این نمونه انجام شده، از اثرات طول پیوند بر مقدار نرخ رهایش انرژی صرف نظر شده است. در این‌کار جواب‌ها برای حالت عمومی طول پیوند محدود ارائه شده‌اند و اثر طول پیوند بر مقدار نرخ رهایش انرژی کرنشی، بررسی شده است. به منظور تحلیل نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک سر گیردار، از تئوری تیر تیموشنکو بر روی بسترهای پاسترناک و وینکلر استفاده شده است که نتایج نرخ رهایش انرژی محاسبه شده در تمام موارد، با در نظر گرفتن بستر وینکلر، به نتایج تجربی نزدیک‌تر است.

2- استخراج نرخ رهایش انرژی کرنشی نمونه‌ی آزمایش، مدل شده به صورت تیر تیموشنکو بر روی بستر پاسترناک

2-1- استخراج معادلات تیر

مدل استفاده شده برای نصف نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک‌سرگیردار در شکل 2 نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، بازوی آزاد نمونه‌ی آزمایش، دارای طول a بوده و در سمت چپ خود، تحت تاثیر نیروی P قرار دارد. قسمت پیوند نمونه نیز، به صورت تیری بر روی یک بستر الاستیک مدل شده که سفتی کششی آن k_e و سفتی دورانی آن k_r در نظر گرفته شده است. اثرات ناشی از وجود بستر الاستیک در انتهای بازوی آزاد نمونه، باعث دوران ریشه‌ی بازو (نوک ترک)، در طول کوتاه آن می‌شود، بنابراین با وجودی‌که تیر باریک است، وجود اثرات محلی در ریشه‌ی تیر باعث

[1] Woven
[2] Maple

می‌شود که جهت تحلیل تیر باریک، در نظر گرفتن اثرات برش ضرورت پیدا کند [10]. در این تحلیل، زاویه‌ی دوران سطح مقطع، ψ، متفاوت از زاویه‌ی دوران محور مرکزی، dw/dx، در نظر گرفته می‌شود. گشتاور خمشی M، با تحلیل معمول در تیرها، به صورت معادله‌ی 8 در نظر گرفته می‌شود:

$$M = E_x I \frac{d\Psi}{dx} \tag{8}$$

که E_x مدول طولی و I گشتاور دوم سطح $(bh^3/12)$ می‌باشد.

کرنش برشی به صورت تفاضل زاویه دوران سطح مقطع از زاویه‌ی دوران محور مرکزی، $\frac{dw}{dx} - \psi$ می‌باشد و بر اساس آن تنش برشی به صورت رابطه‌ی 9 در نظر گرفته می‌شود:

$$\tau = G_{xz}\left(\frac{dw}{dx} - \psi\right) \tag{9}$$

که G_{xz} مدول برشی می‌باشد. نیروی برشی Q در تیر نیز $K\tau A$ می‌باشد که در آن $A = bh$، سطح مقطع تیر و K پارامتریست که جهت تصحیح یکنواخت فرض کردن تنش برشی، به کار می‌رود.

بر اساس مرجع [19]، K به این صورت تعریف می‌شود:

$$K = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} \tag{10}$$

که ν ضریب پواسون می‌باشد. نهایتا نیروی برشی عبارت است از:

$$Q = KG_{xz}A\left(\psi - \frac{dw}{dx}\right) \tag{11}$$

روابط تعادل نیز در این مساله عبارت است از:

$$\frac{dM}{dx} - Q = k_r\psi \tag{12 a}$$

$$\frac{dQ}{dx} = -k_e w \tag{12 b}$$

که با جایگذاری گشتاور و نیرو از معادلات 8 و 11 در روابط تعادل 12، معادلات دیفرانسیل حاکم بر قسمت پیوند تیر، $x > a$ به صورت دو معادله و دو مجهول w و ψ، استخراج می‌شود:

$$E_x I\frac{d^2\psi}{dx^2} + KG_{xz}A\left(\frac{dw}{dx} - \psi\right) = k_r\psi \tag{13 a}$$

$$KG_{xz}A\left(\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{d\psi}{dx}\right) = k_e w \tag{13 b}$$

برای $x < a$، $k_r = k_e = 0$ می‌باشد و معادلات حاکم بر نیمه‌ی چپ تیر به این صورت به‌دست می‌آید:

$$E_x I\frac{d^3\psi}{dx^3} = E_x I\frac{d^4w}{dx^4} = 0 \tag{14}$$

بر اساس مرجع [9]، k_e و k_r بر اساس روابط ساده‌ی 15 برآورد می-شود:

$$k_e = \frac{E_z b}{(h/2)} \tag{15 a}$$

$$k_r = KG_{xz}b\left(\frac{h}{2}\right) \tag{15 b}$$

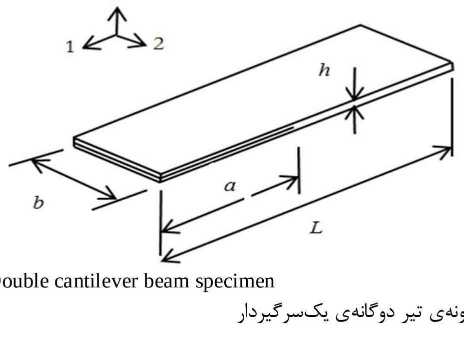

Fig. 1 Double cantilever beam specimen

شکل 1 نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک‌سرگیردار

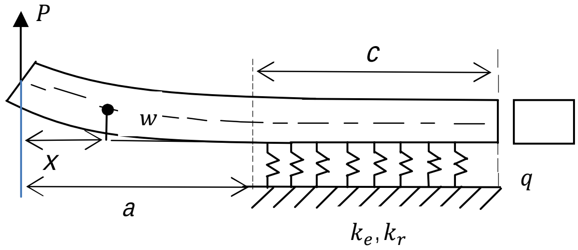

Fig. 2 Model of the half of DCB specimen on elastic foundation

شکل 2 مدل نصف نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک‌سرگیردار بر روی بستر الاستیک

که E_z مدول سفتی عمود بر جهت محوری تیر می‌باشد. این کار بزرگ‌ترین تقریبی است که در این تحلیل در نظر گرفته شده است.

با جایگذاری معادلات 15 در معادلات 13 و مرتب کردن آن‌ها، این معادلات به‌دست می‌آیند:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{3}{2}\psi - h^2\alpha\frac{d^2\psi}{dx^2} \tag{16 a}$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{\beta}{h^2}w \tag{16 b}$$

که در آن $\alpha = \frac{1}{12K}\left(\frac{E_x}{G_{xz}}\right)$ و $\beta = \frac{2}{K}\frac{E_z}{G_{xz}}$ می‌باشد. می‌توان معادلات (16) را ادغام نمود و به معادلات یکتایی برای w و ψ دست یافت، که معادله‌ی تک متغیره‌ی w به صورت معادله دیفرانسیل 17 به‌دست می‌آید:

$$\frac{d^4w}{dx^4} - \left(\beta + \frac{1}{2\alpha}\right)\frac{1}{h^2}\frac{d^2w}{dx^2} + \left(\frac{3\beta}{2\alpha}\right)\frac{1}{h^4}w = 0 \tag{17}$$

2-2- حل معادلات نمونه‌ی آزمایش، مدل شده به‌صورت تیر تیموشنکو بر روی بستر پاسترناک

شرایط مرزی اعمالی برای حل معادلات سمت چپ و راست تیر عبارتند از:

$$M(0) = 0,\quad V(0) = P \tag{18 a}$$

$$M(a+c) = 0,\quad V(a+c) = 0 \tag{18 b}$$

و شرایط پیوستگی در $x = a$، عبارت است از:

$$w_1(a) = w_2(a),\quad \psi_1(a) = \psi_2(a) \tag{19 a}$$

$$M_1(a) = M_2(a),\quad V_1(a) = V_2(a) \tag{19 b}$$

(منظور از 1 و 2 به‌ترتیب سمت چپ و راست تیر می‌باشد)، برای قسمت چپ تیر (بازوی آزاد نمونه)، $0 < x < a$، نیرو و گشتاور عبارت است از:

$$Q = P \tag{20 a}$$

$$M = Px \tag{20 b}$$

با جایگذاری گشتاور و نیرو از روابط (8) و (11) در معادلات 20، w و ψ به این صورت به‌دست می‌آیند:

$$\psi = \frac{P}{E_xI}\frac{x^2}{2} + A_1 \tag{21 a}$$

$$w = \frac{P}{E_xI}\frac{x^3}{6} + \left(A_1 - \frac{P}{KG_{xz}A}\right)x + A_2 \tag{21 b}$$

در صورتی‌که معادله‌ی حاکم بر سمت راست تیر، $a < x < a + c$، حل شده و مقدار جابجایی و شیب در $x = a$ از آن حل، $w = w_0$ و $\frac{dw}{dx} = \acute{w}_0$، در دست باشد، می‌توان با استفاده از شرایط پیوستگی جابجایی و شیب در راس ترک (19 a)، ضرایب A_1 و A_2 از معادلات 21 را به‌دست آورد، در این صورت، اثرات دوران ریشه‌ی تیر در نظر گرفته شده و نزدیک‌ترین حالت به شرایط واقعی مدل می‌شود. با به‌دست آوردن این ضرایب، رفتار جابجایی سمت چپ نمونه مشخص می‌شود و جابجایی انتهای آزاد تیر، در $x = 0$ به‌دست می‌آید:

$$w_1 = \frac{4Pa^3}{bh^3E_x} + w_0 - \acute{w}_0 \tag{22}$$

در عبارت 22، b، عرض نمونه‌ی آزمایش و h ضخامت آن می‌باشد، بنابراین جهت به‌دست آوردن مقدار w_1 مربوط به عبارت 22، باید پاسخ سمت راست تیر (پیوند)، در دست باشد تا w_0 و $\acute{w}_0$ در $x = a$ از آن استخراج شود. بدین منظور لازم است معادله‌ی 17 حل شود. (در صورتی‌که برای به‌دست آوردن ضرایب A_1 و A_2 رابطه‌ی 21، به‌جای شرایط پیوستگی معادلات 19 a، از شرایط مرزی $w = \frac{dw}{dx} = 0$ در $x = a$ در معادله‌ی قسمت چپ تیر استفاده شود، اثرات برش در نظر گرفته نمی‌شود و بستر الاستیک نیز صلب فرض می‌شود و در صورتی‌که از شرایط مرزی $w = 0$ و $\psi = 0$ استفاده شود، اثرات برش در نظر گرفته شده اما همچنان بستر الاستیک صلب فرض می‌شود).

با در نظر گرفتن حل معادله‌ی 17 به صورت $w \propto e^{\mu x}$، معادله‌ای بر حسب μ به‌دست می‌آید:

$$\mu^4 - 2\lambda_1^2\mu^2 + \lambda_2^4 = 0 \tag{23}$$

که در آن $\lambda_1^2 = \frac{1}{2h^2}\left(\beta + \frac{1}{2\alpha}\right)$ و $\lambda_2^4 = \frac{1}{h^4}\frac{3\beta}{2\alpha}$.

برای حل معادله‌ی 23، از شرایط پیوستگی 19 b استفاده می‌شود:

$$M = Pa \tag{24 a}$$

$$Q = P \tag{24 b}$$

همچنین شرایط مرزی 18 b نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد، پس از جایگذاری عبارات مربوط به گشتاور و نیرو از معادلات 8 و 11، معادلات 18 b و نیز معادلات 24 به این صورت بدست می‌آیند:

$$x = a + c \rightarrow E_xI\left(\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{\beta}{h^2}w\right) = 0 \tag{25 a}$$

$$x = a + c \rightarrow KAG_{xz}\frac{\beta}{h^2}\int w dx = 0 \tag{25 b}$$

$$x = a \rightarrow E_xI\left(\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{\beta}{h^2}\right) = Pa \tag{25 c}$$

$$x = a \rightarrow -\frac{\beta}{h^2}KAG_{xz}\int w dx = P \tag{25 d}$$

با در نظر گرفتن حل معادله‌ی 23، حالت کلی جواب معادله‌ی دیفرانسیل (17) عبارت است از:

$$w(x) = \exp(-\bar{\mu}_1x)(C_1\sin(\bar{\mu}_2x) + C_2\cos(\bar{\mu}_2x)) + \exp(\bar{\mu}_1x)(C_3\sin(\bar{\mu}_2x) + C_4\cos(\bar{\mu}_2x)) \tag{26}$$

در حقیقت معادله مشخصه‌ی (23) دارای چهار جواب به فرم $\mu_{1,2}^2 = \lambda_1^2 \pm \sqrt{\lambda_1^4 - \lambda_2^4}$ می‌باشد. در صورتی‌که $\lambda_1^2 < \lambda_2^2$ در نظر گرفته شود، عبارت زیر رادیکال منفی شده و ریشه‌های معادله‌ی مذکور، به صورت چهار ریشه‌ی مزدوج $\mu = \pm\bar{\mu}_1 \pm \bar{\mu}_2 i$ به‌دست می‌آیند. روابط 27 بین قسمت حقیقی و موهومی این ریشه‌ها و λ_1 و λ_2 برقرار است [10]:

$$2\bar{\mu}_1^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \tag{27 a}$$

$$2\bar{\mu}_2^2 = \lambda_2^2 - \lambda_1^2 \tag{27 b}$$

با جایگذاری جابجایی رابطه‌ی 26 در شرایط مرزی 25، ثوابت C_1 تا C_4 به‌دست آمدند که متعاقب آن، تابع جابجایی سمت راست تیر، به فرم معادله‌ی 26 به‌دست آمد.

از طرفی برای به‌دست آوردن جابجایی در انتهای آزاد تیر به وسیله‌ی رابطه‌ی 22، $w = w_0$ و $\frac{dw}{dx} = \acute{w}_0$ راس ترک از تابع جابجایی سمت راست

تیر محاسبه شده و در این رابطه جایگذاری می‌شود.

نرمی نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک‌سرگیردار، به این صورت محاسبه می‌شود:

$$C = \frac{2\delta}{P} = \frac{2w_1}{P} \tag{28}$$

بعد از محاسبه‌ی نرمی، نرخ رهایش انرژی از رابطه‌ی 2 به‌دست می‌آید که در این حالت نرمی، C، تابعی از هر دو پارامتر c و a بوده که از طریق رابطه‌ی $a + c = L$ به هم وابسته‌اند. از این رو برای استخراج نرخ رهایش انرژی کرنشی از رابطه‌ی 29 استفاده می‌شود:

$$G = \frac{P^2}{2b}\left(\frac{\partial C}{\partial a} - \frac{\partial C}{\partial c}\right) \tag{29}$$

به این ترتیب نرخ رهایش انرژی کرنشی بر حسب نیرو، مشخصات هندسی و نیز مشخصات مادی نمونه استخراج می‌شود. به دلیل طولانی بودن عبارات مربوطه در این قسمت از آوردن رابطه‌ی بسته خودداری شده و نتایج مربوطه به صورت نمودارهایی در بخش نتایج، ارائه شده است.

3- استخراج و حل معادلات مربوط به چقرمگی شکست نمونه‌ی آزمایش، مدل شده به صورت تیر تیموشنکو بر روی بستر وینکلر

به منظور استخراج چقرمگی شکست به وسیله‌ی تئوری تیر تیموشنکو بر روی بستر وینکلر، کافیست مدل‌سازی مربوط به تئوری تیر تیموشنکو بر روی بستر پاسترناک که در قسمت قبل ارائه شد، به نحوی تغییر داده شود که به مدل تیر بر روی بستر وینکلر تبدیل شود.

بدین منظور کافیست در معادله‌ی 12 a، سمت راست معادله برابر با صفر قرار داده شود (سفتی دورانی در نظر گرفته نشود) و تغییرات مورد نظر در سایر روابط ارائه شده بر این اساس اعمال گردد. با صفر قرار دادن سفتی دورانی، شرایط مرزی بدون تغییر باقی می‌ماند، اما معادله دیفرانسیل 17 تغییر می‌کند و به صورت رابطه‌ی 30 در می آید:

$$\frac{d^4w}{dx^4} - \frac{\beta}{h^2}\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{\beta}{\alpha h^4}w = 0 \tag{30}$$

برای حل این معادله مجددا پاسخ به فرم $w \propto e^{\mu x}$ در نظر گرفته شده و با جایگذاری آن در معادله‌ی 30، معادله‌ای بر حسب μ به‌دست می‌آید:

$$\mu^4 - \frac{\beta}{h^2}\mu^2 + \frac{\beta}{\alpha h^4} = 0 \tag{31}$$

بر اساس ریشه‌های به‌دست آمده از معادله‌ی 31، حالت کلی جواب معادله‌ی دیفرانسیل 30 مشابه رابطه‌ی 26 بوده و عبارت است از:

$$w(x) = \exp(-\hat{\mu}_1 x)(B_1 \sin(\hat{\mu}_2 x) + B_2 \cos(\hat{\mu}_2 x)) + \exp(\hat{\mu}_1 x)(B_3 \sin(\hat{\mu}_2 x) + B_4 \cos(\hat{\mu}_2 x)) \tag{32}$$

که از قرار دادن عبارت $w(x)$ رابطه‌ی 32 در شرایط مرزی و پیوستگی 25، ثوابت B_1 تا B_4، به‌دست می‌آیند و می‌توان بر اساس روال طی شده در بخش قبل، نرخ رهایش انرژی کرنشی را به‌دست آورد. نتایج این قسمت نیز همراه با نتایج بخش قبل، در قسمت نتایج ارائه شده است.

4- نرخ رهایش انرژی کرنشی برای حالت خاص $c > 2h$

به دلیل حساس نبودن نتایج به پارامتر c/h در حالت $c/h > 2$، مدل تیر را در این حالت می‌توان دارای طول نامحدود فرض کرد، بنابراین به جهت اطمینان از محدود و قابل صرف نظر بودن جابجایی $w(x)$ برای مقادیر بزرگ x، ضرایب مربوط به آن قسمت از عبارت جابجایی تیر که شامل مقادیر مثبت در توان تابع نمایی هستند، صفر در نظر گرفته می‌شود. در این‌صورت حالت کلی جواب 26، به این صورت کاهش می‌یابد:

$$w(x) = \exp(-\bar{\mu}_1 x)(A_1 \sin(\bar{\mu}_2 x) + A_2 \cos(\bar{\mu}_2 x)) \tag{33}$$

با اعمال شرایط پیوستگی 25 c و 25 d به رابطه‌ی 33، در نرم‌افزار میپل، ثوابت A_1 و A_2 به‌دست می‌آیند.

همچنین به وسیله‌ی نرم‌افزار میپل، عبارت به‌دست آمده برای جابجایی و نیز مشتق آن نسبت به متغیر x (w_0 و $\acute{w}_0$) در $x = a$ محاسبه شده و در رابطه‌ی 22 جایگذاری می‌شود تا جابجایی در سر آزاد تیر به‌دست آید. از آن‌جا نرمی تیر از رابطه‌ی 28 به‌دست آمده و از رابطه‌ی 2، نرخ رهایش انرژی بر حسب مشخصات مادی، استخراج می‌شود. نتایج مربوط به این قسمت در بخش نتایج، ارائه شده است.

در صورتی که فرض طول نامحدود به تئوری تیر تیموشنکو بر روی بستر وینکلر اعمال گردد، ضرایب مربوط به آن قسمت از عبارت جابجایی تیر که شامل مقادیر مثبت در توان تابع نمایی هستند، مشابه تیر تیموشنکو بر روی بستر پاسترناک، صفر در نظر گرفته می‌شود. در این صورت حالت کلی جواب 32، به صورت رابطه‌ی 34 کاهش می‌یابد:

$$w(x) = \exp(-\hat{\mu}_1 x)(D_1 \sin(\hat{\mu}_2 x) + D_2 \cos(\hat{\mu}_2 x)) \tag{34}$$

بر این اساس با اعمال شرایط پیوستگی 25 c و 25 d به رابطه‌ی 34، در نرم‌افزار میپل، ضرایب D_1 و D_2 به‌دست می‌آیند.

نرخ رهایش انرژی کرنشی به‌دست آمده عبارت است از:

$$G_I = \frac{12P^2}{E_x b^2 h}\left(\left(\frac{a}{h}\right) + \left(\left(\frac{E_x}{6E_z}\right)^{1/2} + \frac{1}{12}\left(\frac{E_x}{KG_{xz}}\right)\right)^{1/2}\right)^2 \tag{35}$$

که با نرخ رهایش انرژی ارائه شده در مرجع [7] مطابقت دارد.

5- نتایج

5-1- مقایسه و صحت سنجی نتایج

کدنویسی کار در چندین مرحله انجام گرفت که در آن کد میپل مربوط به مواردی از جمله تیر تیموشنکو بر روی بسترهای وینکلر و پاسترناک برای نمونه‌ی تک‌جهته نوشته شد. در مرحله‌ی بعد تبدیل جنس مدل مربوط به تیر تیموشنکو بر روی بستر وینکلر، از حالت همسان‌گرد عرضی (نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک‌سرگیردار تک‌جهته) به حالت همسان‌گرد، به منظور مقایسه با مقاله‌ی شاهانی و فرقانی [18] انجام شد (برای انجام این‌کار، رابطه‌ی معروف مربوط به مواد همسان‌گرد یعنی رابطه‌ی $G = E/2(1 + \nu)$، جایگزین مدول برشی نمونه‌ی لایه‌چینی تک‌جهته شد، همچنین $E_x = E_z = E$، لحاظ گردید، بدین ترتیب 4 ثابت مستقل مورد نیاز مواد همسان‌گرد عرضی یعنی، E_x، E_z، G_{xz} و ν_{xz} به دو ثابت مستقل E و G و یا E و ν در مواد همسان‌گرد، کاهش یافت). نتایج این مرحله چنان‌چه گفته شد با مقاله‌ی شاهانی و فرقانی [18] مقایسه گردید و همان‌طور که در شکل 3 مشاهده می‌شود، مطابقت خوبی بین نتایج وجود دارد، به‌علاوه در مورد تمامی موارد ذکر شده، با تغییر شرایط مرزی، تاثیر طول پیوند نامحدود نیز وارد مدل شد. به منظور صحت سنجی روند کلی کار، مقادیر $1 - \frac{C}{C_0}$ نمونه‌ی تک‌جهته مدل شده به صورت تیر تیموشنکو بر روی بستر پاسترناک با فرض طول نامحدود، با تعدادی از مقادیر ارائه شده در جدول 1 مرجع [10]، مقایسه گردید که در این مرجع C نرمی به‌دست آمده برای نمونه با طول نامحدود، تحلیل شده با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو بر روی بستر پاسترناک بوده و C_0 نرمی به‌دست آمده برای نمونه با در نظر گرفتن آن به صورت یک تیر اویلر برنولی یک‌سرگیردار می‌باشد. پارامتر $1 - \frac{C}{C_0}$ در این مرجع بر حسب مشخصات مادی مختلف، به وسیله‌ی پارامترهای $a_{11} = 1/E_x$، $a_{22} = 1/E_z$ و $a_{66} = 1/G_{xz}$ و برای مقادیر مختلف h/a ارائه شده است؛

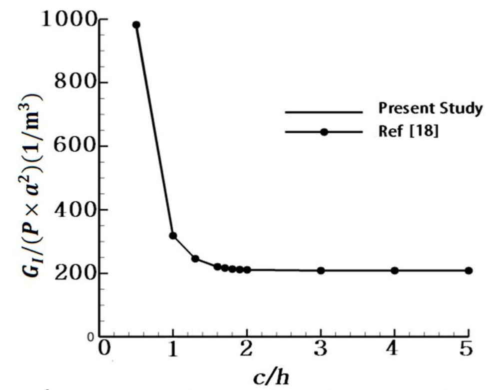

Fig. 3 Verifying present study (Timoshenko beam on Winkler foundation) by comparing with [18]

شکل 3 صحت سنجی حل فعلی از طریق مقایسه با [18] (تیر تیموشنکو بر روی بستر وینکلر)

که از جمله موارد قابل مشاهده در جدول این مرجع، افزایش $1-\frac{C}{C_0}$ در اثر افزایش h/a می‌باشد (با افزایش h/a و ثابت بودن h، C کاهش می‌یابد). مقایسه‌ی بین این نتایج در جدول 1 ارائه شده و انطباق کامل بین نتایج مشاهده می‌شود.

2-5- نمودارهای مربوط به مدل تیر تیموشنکو تک‌جهته بر روی بستر وینکلر

نرخ رهایش انرژی نرمالیزه شده‌ی محاسبه شده برای نمونه‌ی آزمایش تک‌جهته، مدل شده به صورت تیر تیموشنکو بر روی بستر وینکلر، به صورت تابعی از c/h برای مقادیر مختلف a/h، در شکل 4 رسم شده است. مشاهده می‌شود که نرخ رهایش انرژی برای $c > 2h$ مستقل از طول پیوند می‌باشد، اما برای مقادیر کوچک c/h، نرخ رهایش انرژی کرنشی به بی‌نهایت میل می‌کند، چرا که مرز محدود در $x = a + c$، به راس ترک نزدیک می‌شود.

مقایسه‌ای بین نتایج روش حل با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو بر روی بستر وینکلر و حل با استفاده از تئوری تیر اویلر- برنولی بر روی بستر وینکلر، [14]، در شکل 5 نمایش داده شده است. تفاوت این دو حل به دلیل تاثیر تغییر شکل برشی در تئوری تیر تیموشنکو می‌باشد. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود با افزایش a/h، تفاوت بین نرخ رهایش انرژی نرمالیزه شده در دو روش کاهش می‌یابد و این مساله موید این حقیقت است که با افزایش

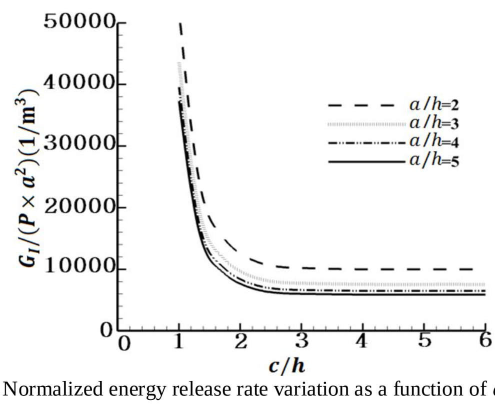

Fig. 4 Normalized energy release rate variation as a function of c/h (Timoshenko beam on Winkler foundation)

شکل 4 تغییرات نرخ رهایش انرژی نرمالیزه شده به صورت تابعی از c/h (تیر تیموشنکو بر روی بستر وینکلر)

طول تیر، اثر برش کاهش می‌یابد. شکل 6 تغییرات نرخ رهایش انرژی نمونه‌ی مذکور را با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو بر روی بستر وینکلر، به صورت تابعی از a/h برای مقادیر مختلف c/h نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نرخ رهایش انرژی بر حسب طول نرمالیزه شده‌ی ترک، به یک تابع درجه 2 نزدیک می‌باشد (رابطه‌ی 3 را مشاهده کنید). همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش طول پیوند، نمودار نرخ رهایش انرژی بر حسب طول نرمالیزه شده‌ی ترک، حساسیت خود را به پارامتر پیوند از دست می‌دهد و نمودارها به هم نزدیک می‌شوند. در این شکل مقایسه‌ای نیز بین نتایج روش حل فعلی (تئوری تیر تیموشنکو بر روی بستر وینکلر) و حل مرجع [14] (تئوری تیر اویلر- برنولی بر روی بستر وینکلر)، نمایش داده شده است. در این شکل جواب حل موجود برای $\frac{c}{h}=5$، بر حل مساله‌ی معادل انجام شده توسط کندو [7] که با فرض طول پیوند نامحدود انجام شده ، $\frac{c}{h}=\infty$، منطبق شده‌اند.

بر اساس شکل‌های 4، 5 و 6، هنگامی‌که $c < 2h$ باشد، تاثیر طول پیوند بر جواب‌ها، بسیار زیاد است، اما هنگامی‌که $c > 2h$ باشد، طول پیوند بر روی نتایج بی‌تاثیر است.

در مورد تحلیل تیر با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو بر روی بستر پاسترناک نیز روندهای مشابهی برای نمودارهای نرخ رهایش انرژی بر حسب طول ترک و یا طول پیوند، مشاهده می‌شود.

جدول 1 مقایسه‌ی شاخصی از نرمی مطالعه‌ی حاضر و مرجع [10]

Table 1 Compliance indicator comparison of present study and ref [10]

پارامترهای موجود	1	2	3	4	5	6
$1000\times(a_{11\,(GPa)}^{-1})$	6.8	6.8	6.8	6.8	13.6	3.4
$1000\times(a_{22\,(GPa)}^{-1})$	128	128	128	128	128	128
$1000\times(a_{66\,(GPa)}^{-1})$	362	362	362	362	362	362
h/a	0.025	0.033	0.05	0.1	0.05	0.05
C/C_0-1 (حل حاضر)	0.169	0.228	0.363	0.83	0.256	0.525
C/C_0-1 ([10])	0.169	0.228	0.363	0.83	0.256	0.525

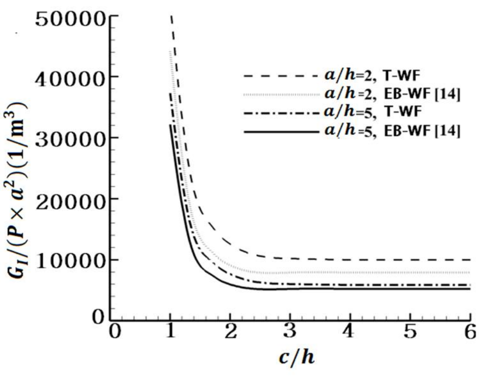

Fig. 5 Comparing present solution (Timoshenko beam on Winkler elastic foundation) and [14]

شکل 5 مقایسه‌ی حل مربوط به مطالعه‌ی حاضر (تیر تیموشنکو بر روی بستر وینکلر) و نتایج [14]

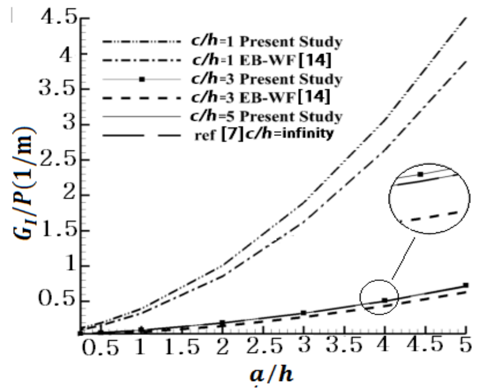

Fig. 6 Comparing normalized energy release rate of the present study (Timoshenko beam on Winkler foundation) with [7] and [14]

شکل 6 مقایسه‌ی نرخ رهایش انرژی نرمالیزه شده‌ی حل کنونی (تیر تیموشنکو بر روی بستر وینکلر) با [7] و [14]

3-5- مقایسه‌ی نتایج تحلیلی به وسیله‌ی تئوری‌های تیر تیموشنکو و اویلر- برنولی بر روی بسترهای الاستیک وینکلر و پاسترناک با نتایج تجربی

به منظور مقایسه‌ی جواب‌های تحلیلی به‌دست آمده و جواب‌های حاصل از آزمایش‌های تجربی، نموداری در شکل 7 ارائه شده است. در این نمودار، چقرمگی شکست به‌دست آمده از تئوری‌های تیر تیموشنکو و اویلر برنولی بر روی بسترهای وینکلر و پاسترناک، با جواب‌های تجربی مرجع [14] مورد مقایسه قرار گرفته است. چنان‌چه از شکل پیداست، جواب‌های به‌دست آمده از تئوری تیر تیموشنکو بر روی بستر وینکلر، نزدیک‌ترین حل به داده‌های تجربی می‌باشد.

شکل 8 به مقایسه‌ی نرمی به‌دست آمده از همین تئوری‌ها با مقادیر نرمی تجربی ارائه شده در مرجع [14] پرداخته است.

چنان‌چه از شکل پیداست، در این مورد هم مقادیر نرمی مربوط به تئوری تیر تیموشنکو بر روی بستر وینکلر، نزدیک‌ترین جواب تحلیلی به نتایج تجربی می‌باشد. همچنین چنان‌چه پیش‌بینی می‌شد نرمی جواب‌های مربوط به تئوری تیر تیموشنکو بیشتر از تئوری تیر اویلر برنولی است که تغییر شکل برشی را در نظر نمی‌گیرد. در بین جواب‌های مربوط به تئوری تیر تیموشنکو نیز، بستر پاسترناک سفتی بیشتری نسبت به بستر وینکلر دارد.

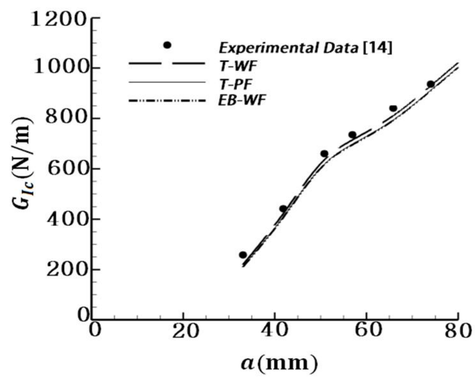

Fig. 7 Comparing energy release rate of different analytical models with ref [14]

شکل 7 مقایسه‌ی نرخ رهایش انرژی محاسبه شده به وسیله‌ی مدل‌های مختلف تحلیلی با مقدار تجربی مرجع [14]

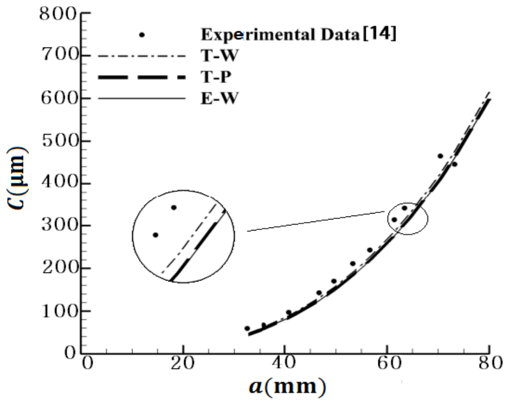

Fig. 8 Comparing compliance of different analytical models with experimental results [14]

شکل 8 مقایسه‌ی مقادیر نرمی محاسبه شده به وسیله‌ی مدل‌های مختلف تحلیلی با نتایج تجربی [14]

6- نتیجه‌گیری

تحلیل نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک سر گیردار از جنس مواد مرکب تک‌جهته با طول محدود با استفاده از تئوری تیر برشی مرتبه‌ی اول، بر روی بسترهای وینکلر و پاسترناک انجام شد و نتایج آن با نتایج تحلیلی و تجربی ارائه شده در مرجع [14] مقایسه گردید. در بررسی‌هایی که تا کنون بر روی نمونه‌ی تیر دوگانه‌ی یک‌سر گیردار تک‌جهته صورت گرفته، از اثرات طول پیوند بر مقدار نرخ رهایش انرژی صرف نظر شده است، در حالی‌که در این پژوهش تاثیر طول پیوند بر مقدار نرخ رهایش انرژی در حالت کلی بررسی شد. از نکات حائز اهمیت در این پژوهش می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- در تشکیل معادلات دیفرانسیل استخراج شده، اثرات برش و همچنین اثرات محلی ناشی از وجود بستر الاستیک در جلوی جدایش لایه‌ای در نظر گرفته شد.
- تاثیر طول پیوند بر مقدار نرخ رهایش انرژی به تفصیل مورد بررسی قرار گرفت و مشخص گردید که در صورتی که طول پیوند بیش از دو برابر ضخامت باشد، می‌توان از اثرات آن بر مقدار نرخ رهایش انرژی، صرف نظر نمود.
- برای حالت خاص طول پیوند نامحدود تیر تیموشنکو بر روی بستر وینکلر، فرم بسته‌ای برای نرخ رهایش انرژی بر حسب مشخصات مادی، نیروی اعمالی و طول جدایش لایه‌ای ارائه گردید.
- بر اساس نتایج به‌دست آمده، نرمی حاصل از تحلیل نمونه‌ی تک‌جهته با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو بیشتر از تئوری تیر اویلر- برنولی مشاهده شد که این امر ناشی از در نظر گرفتن اثرات برش در تئوری تیر تیموشنکو می‌باشد.
- در تحلیل با استفاده از تیر تیموشنکو نیز، نرمی مربوط به در نظر گرفتن بستر وینکلر بیشتر از بستر پاسترناک مشاهده شد.

نتایج حاصل از این پژوهش با استفاده از تئوری‌های تیر تیموشنکو و اویلر- برنولی و نیز در نظر گرفتن بسترهای الاستیک وینکلر و پاسترناک با داده‌های تجربی مرجع [14] مقایسه گردید و مشخص شد که برای نمونه‌ی تک‌جهته مقادیر نرمی و نرخ رهایش انرژی به‌دست آمده با استفاده از تحلیل تیر تیموشنکو بر روی بستر وینکلر، نزدیک‌ترین جواب را به جواب‌های تجربی

ارائه می‌دهند.

7- فهرست علائم

A	سطح مقطع (m^2)
a	طول جدایش لایه‌ای (m)
a_{11}	عکس مدول کششی طولی $\left(\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{N}}\right)$
a_{22}	عکس مدول کششی عرضی $\left(\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{N}}\right)$
a_{66}	عکس مدول کششی برشی $\left(\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{N}}\right)$
b	عرض نمونه (m)
C	نرمی
c	طول پیوند (m)
E_x	مدول کششی طولی$\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right)$
E_z	مدول کششی عرضی$\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right)$
G	نرخ رهایش انرژی $(\mathrm{J/m}^2)$
G_{Ic}	چقرمگی شکست $(\mathrm{J/m}^2)$
G_{xz}	مدول برشی$\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right)$
h	ضخامت نمونه (m)
I	گشتاور اینرسی (m^4)
K	ضریب تصحیح برشی
k_e	سفتی طولی $\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right)$
M	گشتاور $(\mathrm{N.m})$
P	نیرو (N)
Q	نیرو (N)
q_e	نیروی گسترده $(\mathrm{N/m})$
w	جابجایی عرضی تیر (m)

علائم یونانی

ψ	زاویه‌ی دوران سطح مقطع تیر
ν	ضریب پواسون
σ_x	تنش کششی طولی$\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right)$
τ_{xz}	تنش برشی $\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right)$

زیرنویس‌ها

e	کششی
r	دورانی
x	مختصات طولی
z	مختصات عرضی

8- مراجع

[1] A. Standard, D5528, Standard test method for mode I interlaminar fracture toughness of unidirectional fiber-reinforced polymer matrix composites, *ASTM (American society of testing and materials), Philadelphia PA*, 2002.
[2] B. ISO, 15024, Fiber-reinforced plastic composites–determination of mode I interlaminar fracture toughness, HIC for unidirectionally reinforced materials, *British Standards International*, 2001.
[3] K. JIS, 7086: Testing methods for interlaminar fracture toughness of carbon fiber reinforced plastics, *Japanese Standards Association*, 1993.
[4] G. R. I. a. J. A. Kies, Critical energy rate analysis of fracture strength, *Welding Journal Research Supplement*, Vol. 33, pp. 193-198, 1954.
[5] R. Olsson, A simplified improved beam analysis of the DCB specimen, *Composites Science and Technology*, Vol. 43, No. 4, pp. 329-338, 1992.
[6] J. Weatherby, *Evaluation of energy release rates in unidirectional double cantilevered beam fracture specimens*, in: *Mechanics and Materials Report Number MM4665-82-9*, Master's thesis Texas A&M University, 1982.
[7] K. Kondo, Analysis of double cantilever beam specimen, *Advanced Composite Materials*, Vol. 4, No. 4, pp. 355-366, 1995.
[8] M. Kanninen, An augmented double cantilever beam model for studying crack propagation and arrest, *International Journal of fracture*, Vol. 9, No. 1, pp. 83-92, 1973.
[9] M. Kanninen, A dynamic analysis of unstable crack propagation and arrest in the DCB test specimen, *International Journal of Fracture*, Vol. 10, No. 3, pp. 415-430, 1974.
[10] J. Williams, End corrections for orthotropic DCB specimens, *Composites Science and Technology*, Vol. 35, No. 4, pp. 367-376, 1989.
[11] J. Whitney, Stress analysis of the double cantilever beam specimen, *Composites Science and Technology*, Vol. 23, No. 3, pp. 201-219, 1985.
[12] M. M. Shokrieh, M. Heidari-Rarani, A comparative study for beams on elastic foundation models to analysis of mode-I delamination in DCB specimens, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 37, No. 2, pp. 149-162, 2011.
[13] M. Shokrieh, M. Heidari-Rarani, S. Rahimi, Influence of curved delamination front on toughness of multidirectional DCB specimens, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 4, pp. 1359-1365, 2012.
[14] F. Ozdil, L. Carlsson, Beam analysis of angle-ply laminate DCB specimens, *Composites Science and Technology*, Vol. 59, No. 2, pp. 305-315, 1999.
[15] L. Banks-Sills, C. Ishbir, V. Fourman, L. Rogel, R. Eliasi, Interface fracture toughness of a multi-directional woven composite, *International Journal of Fracture*, Vol. 182, No. 2, pp. 187-207, 2013.
[16] Z. Jiang, S. Wan, Z. Zhong, M. Li, K. Shen, Determination of mode-I fracture toughness and non-uniformity for GFRP double cantilever beam specimens with an adhesive layer, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 128, pp. 139-156, 2014.
[17] J. Monteiro, R. Campilho, E. Marques, L. da Silva, Experimental estimation of the mechanical and fracture properties of a new epoxy adhesive, *Applied Adhesion Science*, Vol. 3, No. 1, pp. 1-17, 2015.
[18] A. Shahani, M. Forqani, Static and dynamic fracture mechanics analysis of a DCB specimen considering shear deformation effects, *International journal of solids and structures*, Vol. 41, No. 14, pp. 3793-3807, 2004.
[19] G. Cowper, The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, *Journal of applied mechanics*, Vol. 33, No. 2, pp. 335-340, 1966.