ماهنامه علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
mme.modares.ac.ir

اثر مقیاس کوچک بر روی ناپایداری دینامیکی پولین در نانوعملگرهای پیچشی با استفاده از مدل دو درجه آزادی

سروش ملیحی[1]، یعقوب طادی بنی[2*]

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد
2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد
*شهرکرد، صندوق پستی 115، tadi@eng.sku.ac.ir

اطلاعات مقاله
مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 27 دی 1394
پذیرش: 22 اسفند 1394
ارائه در سایت: 27 اردیبهشت 1395
کلید واژگان:
نانوآینه‌ی الکترواستاتیکی پیچشی
ناپایداری پولین دینامیکی
تئوری تنش کوپل اصلاح شده
منحنی‌های فازی
نقاط تعادل پایدار و ناپایدار

چکیده

بررسی رفتار دینامیکی و استاتیکی سازه‌های در مقیاس میکرو و نانو برای تحلیل و پیش‌بینی عملکرد و دقت آن‌ها از اهمیت بسیار زیادی برخوردار می‌باشد. در مقاله‌ی حاضر اثر اندازه و نیروی بین مولکولی واندروالس بر روی رفتار دینامیکی یک نانوآینه‌ی پیچشی دو درجه آزادی پیچش و خمش با استفاده از تئوری مرتبه بالای تنش کوپل اصلاح شده مورد بررسی قرار گرفته است. در ابتدا با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده و در نظر گرفتن نیروی بین مولکولی واندروالس، معادلات حرکت سیستم استخراج شده، سپس با استفاده از روش رانگ کوتا این معادلات حل شده و عملکرد دینامیکی نانوآینه و منحنی‌های فازی آن بدست آمده است. سپس ارتعاش طبیعی پیچشی و انتقالی سیستم با توجه به ولتاژ اعمالی به سیستم بررسی شده و در ادامه، متغیرهای ناپایداری پولین سیستم مورد بررسی قرار گرفته و وابستگی آن‌ها به نیروی واندروالس و اثرات اندازه نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهند که نقاط تعادل سیستم شامل نقاط سنتر و نقاط پایدار فوکوس هستند که این نقاط در منحنی‌های فازی مسیرهای حلقوی متناوب و حلقه‌های هتروکلینیک را ایجاد خواهند کرد. همچنین اثر اندازه و مدل تنش کوپل اصلاح شده بر دامنه‌ی نوسان و فرکانس ارتعاش سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. مدل ارائه شده در این مقاله قادر است، نتایج تجربی را با دقت بسیار خوبی و بهتر از مدل‌های کلاسیک پیشین پیش‌بینی کند و فاصله‌ی بین تئوری‌های قبلی را با نتایج تجربی کاهش دهد.

Small scale effect on the dynamic pull-in instability of torsional nano-actuators using 2-DOF model

Soroosh Malihi, Yaghoub Tadi Beni*

Faculty of Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran,
* P.O.B. 115, Shahrekord, Iran, tadi@eng.sku.ac.ir

ARTICLE INFORMATION
Original Research Paper
Received 17 January 2016
Accepted 12 March 2016
Available Online 16 May 2016

Keywords:
Torsional electrostatic micromirror
Dynamic pull-in instability
Modified couple stress theory
Phase portraits
Stable and unstable equilibrium points

ABSTRACT

Consideration of dynamic and static behavior of structures in nano and micro scale for analysis and prediction of their performance and accuracy has become more important. In this study, the effect of size and intermolecular van der Waals force on dynamic behavior of torsional nanomirror considering bending-torsion two degree of freedom model using the higher order modified couple stress theory has been investigated. First, by considering the higher order modified couple stress theory and intermolecular van der Waals force, equation of motion of system is developed, afterwards using Runge-Kutta method, this equations is solved and dynamic performance of nanomirror and its phase portraits have been obtained. Also, translational and torsional natural frequencies of system considering applied voltage are investigated. So pull-in instability parameters of system are considered and their dependency upon van der Waals force and size effects are determined. Results demonstrate that equilibrium points of system include center points and focus points and phase portraits related to these points exhibit periodic orbits and heteroclinic orbits. Moreover, size effect and modified couple stress model on amplitude and frequency of vibration of system have been investigated. Proposed model in this study is able to predict experimental results with higher precision than previous classic models and reduce the difference between past theories and empirical results.

1- مقدمه

امروزه سیستم‌های میکرو- نانوالکترومکانیکی برای استفاده در کاربردهای گوناگون و متنوع با سرعت بالا در حال گسترش هستند [1]. با پیشرفت تکنولوژی در تولید نانومحرک‌ها و نانوآینه‌ها، می‌توان اهمیت نقش این سیستم‌ها را در انواع وسایل مختلف با عملکردهای فراوان مشاهده کرد. به‌طور مثال از آن‌ها به‌طور گسترده در صفحات نمایشگرها، میکرواسکنرها، سوییچ‌های نوری و همچنین صنایع فضایی و پزشکی استفاده می‌شود [2-5]. در نانوآینه‌های پیچشی، دوران صفحه‌ی اصلی منجر به بازتاباندن نور می‌شود که این صفحه به کمک دو تیر روی دو پایه نگه داشته شده است و زیر صفحه دو الکترود برای اعمال ولتاژ و نیروی الکتریکی برای دوران تعبیه شده است. در هنگام اعمال ولتاژ، قسمت متحرک همزمان هم می‌چرخد و هم خیز پیدا می‌کند که بعد از حذف ولتاژ این قسمت متحرک به کمک نیروی بازیابنده‌ی

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:
Please cite this article using:
S. Malihi, Y. Tadi Beni, Small scale effect on the dynamic pull-in instability of torsional nano-actuators using 2-DOF model, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 5, pp. 90-100, 2016 (in Persian)

مکانیکی به حالت اولیه‌ی خود بازمی‌گردد. اگر ولتاژ از یک حد بحرانی بیشتر شود، نیروی بازیابنده‌ی مکانیکی دیگر قادر نیست سیستم را به حالت اولیه‌ی خود بازگرداند. با توجه به مطالب بیان شده باید در طراحی نانوآینه‌های پیچشی و بررسی رفتار آن‌ها، پایداری سیستم مورد بررسی قرار گیرد.

محققان بسیاری رفتار استاتیکی و دینامیکی میکرو-نانوآینه‌های پیچشی الکترواستاتیکی را با درنظر گرفتن نیروهای بین مولکولی مورد بررسی قرار داده‌اند. از نیروهای بین مولکولی می‌توان به نیروی کازمیر و نیروی واندروالس اشاره کرد. برهم کنش واندروالس[1] بین دو جسم میکروسکوپی در بیش از نیم قرن به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است [6-7] و می‌تواند نقش بسیار مؤثری در سازه‌های نانو/میکروالکترومکانیکی ایفا می‌کند. به دلیل اهمیت این نیرو در سازه‌های نانو، محققان [8-9] با استفاده از پتانسیل واندروالس مدلی ریاضی برای حل مسائل مربوط به آن ارائه کردند. زمانی که فاصله‌ی صفحه و الکترود به اندازه‌ی کافی کوچک باشد، به خاطر عملکرد پیچش نیروی کازمیر و واندروالس، حتی اگر هیچ گشتاور الکترواستاتیکی وجود نداشته باشد، پولین هنوز می‌تواند با یک انحراف کوچک در زاویه اتفاق بیفتد [10]. معین فرد و همکارانش [11] یک مدل دو درجه آزادی برای نانو-میکروآینه که تحت نیروی واندروالس قرار دارد، ارائه کردند. درویشیان و همکارانش [12] در تحقیقی دیگر مدل دو درجه آزادی از میکروآینه را تحت نیروی مویینگی مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق نیز از روش انرژی برای استخراج معادلات تعادل حاکم بر پیچش و تغییرمکان سیستم استفاده کردند. همچنین معین فرد و همکارانش [13] تأثیر نیروی واندروالس را بر روی رفتار استاتیکی و ناپایداری پولین نانو-میکروآینه تحت نیروی مویینگی بررسی کردند. آن‌ها ابتدا معادله‌ی بی‌بعد حاکم بر رفتار استاتیکی سیستم را بدست آورده و وابستگی زاویه‌ی پیچش بحرانی به پارامترهای هندسی سیستم را مورد بررسی قرار دادند.

مطالعات گسترده‌ای بر روی مدلسازی رفتار میکروآینه‌ها و بررسی ناپایداری کششی در آن‌ها انجام شده است [14]. همچنین تأثیر نیروی کازمیر روی پارامترهای ناپایداری محرک‌های پیچشی نمز ساخته شده از سیلیکون مورد بررسی قرار گرفته است [15]. معین‌فرد و احمدیان [16] تأثیر نیروی واندروالس را بر روی رفتار پولین نانو میکروآینه‌های تحریک شده‌ی الکترواستاتیکی مورد بررسی قرار دادند.

همانطور که بیان شد، در بسیاری از مطالعات انجام شده از مدل یک درجه آزادی پیچش تیر برای بررسی رفتار نانوآینه‌های پیچشی استفاده شده است. نمیروسکی و دگانی [17] یک مدل عمومی برای پدیده‌ی پولین در محرک‌های الکترواستاتیکی با یک درجه آزادی ارائه دادند. گائو و همکارانش [18] نیز مدلی یک درجه آزادی برای بررسی رفتار نانو/میکروآینه‌ها تحت بار مویینگی ارائه کردند. همچنین گائو و ژائو [19] تأثیر نیروی واندروالس را روی پایداری دینامیکی آینه‌های نمز بررسی کردند. آن‌ها معادله‌ی حرکت بی‌بعد میکروآینه را ارائه کرده و به بررسی تحلیل کیفی رفتار دینامیکی آن پرداختند. ژانگ و همکارانش [20] به بررسی و توصیف خصوصیات استاتیکی یک میکروآینه‌ی پیچشی الکترواستاتیکی یک درجه آزادی پرداخته و سپس با ساخت یک میکروآینه‌ی پیچشی شرایط ناپایداری آن را به‌صورت تجربی بررسی کردند.

برخی از محققین رفتار میکروآینه‌ها را با استفاده از یک مدل دو درجه آزادی کوپل شده‌ی خمشی- پیچشی مورد بررسی قرار دادند [21]. هوانگ و همکارانش [22] مقایسه‌ای بین داده‌های تجربی و یک مدل تئوری با استفاده از تأثیر خمش و پیچش کوپل شده ارائه کردند. در تحقیقی دیگر یک مدل تئوری از خصوصیات دینامیکی نانو آینه‌ها با در نظر گرفتن پیچش و خمش همزمان ارائه شده است که در آن محققان پاسخ پله و پاسخ هارمونیک پایدار نانو آینه‌ها را با روش رانگ-کوتا[2] آنالیز کردند [23]. لیم و همکارانش [24] مدل جدیدی از تنش غیرموضعی الاستیک برای تحلیل رفتار دینامیکی پیچشی نانومیله‌های با سطح مقطع دایروی ارائه کردند. در تحقیقی دیگر یک واراکتور[3] ممز با استفاده از تیرهای پیچشی پیشنهاد شد و نتایج تحلیلی برای گشتاور الکترواستاتیک آن استخراج شد [25]. سپس این سیستم با سیستم-های موجود برای محدوده‌ی دینامیکی و ولتاژ تحریک مشخص مقایسه شد. شبانی و همکارانش [26] نیز مدلی تئوری برای مشخه‌های دینامیکی میکروآینه‌های پیچشی با درنظر گرفتن اثر کوپل خمش و پیچش ارائه دادند. خاتمی و رضازاده [27] با استفاده از یک مدل دو درجه آزادی، پاسخ دینامیکی یک میکروآینه به شوک مکانیکی را مورد بحث قرار دادند.

تئوری‌های مرتبه بالای محیط پیوسته با درنظر گرفتن اثر اندازه جواب مناسب‌تری نسبت به تئوری کلاسیک ارائه خواهند داد. بنابراین در بررسی رفتار سیستم‌های در مقیاس میکرو و نانو از تئوریهای مرتبه بالای محیط پیوسته به جای تئوری کلاسیک استفاده می‌شود. طادی و همکارانش [28] ناپایداری پولین نانوآینه‌های پیچشی را با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده مورد بررسی قرار دادند. تسیاتس و کاتسیکادلیس [29] یک مدل جدید از تئوری کوپل تنش اصلاح شده برای مسأله‌ی پیچش سنت ونانت میله‌های میکرو با سطح مقطع دلخواه ارائه کردند. لی و همکارانش [30] رفتار دینامیکی و استاتیکی پیچشی نانو اجسام دایروی از قبیل نانومیله‌ها، نانو شفت‌ها و نانوتیوب‌ها را بر اساس تئوری الاستیک غیرموضعی بررسی کردند. همچنین طادی [31] برای بررسی وابستگی اندازه‌ی ناپایداری پولین محرک-های پیچشی نانو الکترواستاتیکی کوپل شده‌ی پیچش و خمش از تئوری مکانیک پیوسته استفاده کرد. کیوانی و همکارانش [32] ناپایداری دینامیکی یک نانوتیر یک سردرگیر با مقطع دایروی را تحت نیروی کازمیر با درنظر گرفتن تأثیر اندازه و انرژی سطح مورد بررسی قرار دادند. کوچی و همکارانش [33] از تئوری گرادیان کرنش برای بررسی ناپایداری پولین نانو تیر استفاده کردند. آن‌ها در این تحقیق سیستم را تحت تأثیر نیروی کازمیر و سپس نیروی واندروالس درنظر گرفتند. همچنین در تحقیق دیگر صدیقی و همکارانش [34] تئوری تیر اویلر-برنولی را در نظر گرفته و معادلهٔ حرکت سیستم را با استفاده از قانون همیلتون و تئوری گرادیان کرنش بدست آوردند و ناپایداری سیستم را مورد بررسی قرار دادند. کوچی و حسینی [35] از روش مربعات دیفرانسیلی عمومی برای بررسی ناپایداری استاتیکی و دینامیکی پولین نانو سوییچ استفاده کردند. تانگ و همکارانش [36] تأثیرات اندازه را بر روی پیچش تیرهای با مقاطع مختلف بررسی کردند. نتایج نشان می‌دهد، زمانی که اندازه‌ی تیر در مقیاس نانو و میکرو می‌باشد، صلبیت پیچشی آن از حالت مرسوم و ماکرو بیشتر می‌شود.

بنابراین با توجه به مطالب اشاره شده در بالا، درک رفتار دینامیکی یک نانوآینه‌ی پیچشی برای طراحی و کنترل عملکرد آن بسیار مهم می‌باشد. در مقاله‌ی حاضر با در نظر گرفتن تئوری تنش کوپل اصلاح شده و استفاده از روش رانگ کوتا، رفتار غیرخطی دینامیکی نانوآینه‌ی پیچشی که تحت نیروی بین مولکولی واندروالس قرار دارد، مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای مطالعه‌ی

[1] Van der Waals (vdW)
[2] Runge-Kutta method
[3] Varactor

دقیق سیستم از مدل دو درجه آزادی خمشی- پیچشی کوپل شده استفاده می‌شود، پارامترهای پولین در سیستم مورد بررسی قرار گرفته و پایداری دینامیکی نانوآینه با استفاده از منحنی‌های فازی و نیز ارتعاش سیستم مورد مطالعه قرار می‌گیرد، نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که مدل ارائه شده در این تحقیق تطابق بسیار خوبی با نتایج تجربی و آزمایشگاهی دارد.

2-معادلات مقدماتی

شکل 1 یک نانوآینه پیچشی الکترواستاتیک را نشان می‌دهد.

برای استخراج کردن معادلات حاکم بر مسأله، تغییرمکان‌های عمودی و زاویه‌ای نانو تیر پیچشی بسیار کوچک فرض می‌شود تا ناپایداری پولین اتفاق بیفتد، در این مقاله خصوصیات رفتار مواد به صورت خطی در نظر گرفته می‌شود.

در روابط تئوری تنش کوپل اصلاح شده، یک پارامتر طولی مادی و دو پارامتر برای مواد الاستیک خطی ایزوتروپیک وجود دارد. بنابراین بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده ، انرژی کرنش به گرادیان جابجایی نیز وابسته است و طبق رابطه‌ی (1) تعریف می‌شود [29] :

$$U = \frac{1}{2}\int\left(\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij} + m_{ij}^{s}\,\chi_{ij}^{s}\right)\mathrm{d}V \quad (1)$$

که در رابطه‌ی (1)، ε_{ij} تانسور کرنش، χ_{ij}^{s} تانسور گرادیان چرخش متقارن، σ_{ij} تانسور تنش کلاسیک و m_{ij}^{s} تنش مرتبه بالا هستند. مقادیر تانسورها بر حسب جابجایی از روابط (2) بدست می آید:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$
$$\chi_{ij}^{s} = \frac{1}{2}e_{jkq}\,u_{q,ki} \quad (2)$$

همچنین روابط تنش کلاسیک و تنش‌های مرتبه بالا به صورت (3) خواهد بود:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{mm}\delta_{ij}\right)$$
$$m_{ij}^{s} = 2\mu l^{2}\chi_{ij}^{s} \quad (3)$$

که در رابطه‌ی (3)، $\mu=E/(2(1+\nu))$ مدول برشی، E مدول یانگ و ν نسبت پؤاسون است و پارامتر طول مادی l گرادیان‌های چرخشی هستند. پارامتر طول مادی می‌تواند بر اساس صلبیت الاستیک نانوتیر یکسر درگیر در تست خمش بدست بیاید، که برای اینکار بر اساس تئوری تنش کوپل و مدل تیر اویلر، پارامتر طول مادی را می‌توان بر اساس اختلاف بین مدول الاستیک مواد تعیین کرد [37]. همچنین پارامتر طول مادی به روش شبیه‌سازی دینامیک مولکولی یا آزمایش قابل تعیین می‌باشد. اخیرا محققان از شبیه سازی اتمی و دینامیک مولکولی برای تعیین پارامتر اثر اندازه استفاده کرده‌اند [38]. همچنین این پارامتر را می‌توان با تست‌های مکانیکی تعیین کرد. لام و همکارانش [39] با استفاده از تست خمش پارامتر اندازه را برای پلیمر اپوکسی تعیین کردند. بنابراین روش‌هایی از قبیل صلبیت الاستیک نانوتیر یکسر درگیر، روش اتمی و آزمایشگاهی برای تعیین پارامتر طول مادی استفاده می‌شود.

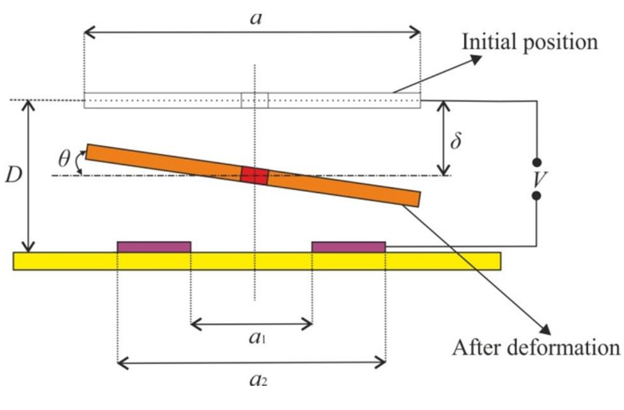

Fig. 1 Electrostatic torsional nano-mirror

شکل 1 نانوآینه‌ی پیچشی

نیروی الکترواستاتیکی وارد بر یک المان دیفرانسیلی از صفحه‌ی نانوآینه از رابطه‌ی (4) بدست می‌آید [27] :

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{elec}} = \frac{\varepsilon V^{2} b}{2(D-\delta-r\sin\theta)^{2}}\mathrm{d}r \quad (4)$$

بنابراین نیروی الکترواستاتیکی کل حول محور پیچشی عبارت است از:

$$F_{\mathrm{elec}} = \int_{a_1}^{a_2}\mathrm{d}F_{\mathrm{elec}} = \frac{\varepsilon V^{2} b}{2\sin\theta}\left(\frac{1}{D-\delta-a_2\sin\theta} - \frac{1}{D-\delta-a_1\sin\theta}\right) \quad (5)$$

که در رابطه (5)، V ولتاژ اعمالی بین صفحه‌ی آینه و الکترود، $\theta_{\max}$ زاویه‌ی ماکزیمم پیچش صفحه‌ی اصلی و پارامترهای بی‌بعد Θ، α و β و Δ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Theta = \frac{\theta}{\theta_{\max}}\ ,\quad \alpha = \frac{a_1}{a}\ ,\quad \beta = \frac{a_2}{a}\ ,\quad \theta_{\max} = \frac{2D}{a}\ ,$$
$$\Delta = \frac{\delta}{D} \quad (6)$$

بنابراین داریم :

$$F_{\mathrm{elec}} = \frac{\varepsilon V^{2} b}{2\,\theta_{\max}\Theta D}\left(\frac{1}{1-\Delta-\beta\,\Theta} - \frac{1}{1-\Delta-\alpha\,\Theta}\right) \quad (7)$$

به‌طور مشابه، گشتاور الکترواستاتیکی نیز برای یک المان دیفرانسیلی از صفحه‌ی نانوآینه از رابطه‌ی (8) بدست می‌آید:

$$\mathrm{d}M_{\mathrm{elec}} = \frac{\varepsilon V^{2} b}{2(D-\delta-r\sin\theta)^{2}}\,r\,\mathrm{d}r \quad (8)$$

بنابراین با انتگرالگیری و در نظر گرفتن زاویه‌ی پیچش کوچک، رابطه‌ی (8) به‌صورت (9) بازنویسی می‌شود:

$$M_{\mathrm{elec}} = \frac{\varepsilon V^{2} b}{2\,\theta_{\max}^{2}\Theta^{2}}\left(\frac{1-\Delta}{1-\Delta-\beta\,\Theta} - \frac{1-\Delta}{1-\Delta-\alpha\,\Theta} + \ln\left(\frac{1-\Delta-\beta\,\Theta}{1-\Delta-\alpha\,\Theta}\right)\right) \quad (9)$$

نیرو و گشتاور واندروالس وارد بر یک المان دیفرانسیلی از رابطه‌ی (10) محاسبه می‌شود که با انتگرال‌گیری از آن مقادیر نیرو و گشتاور واندروالس کل وارد بر سیستم بدست می‌آید [19]:

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{vdW}} = \mathrm{d}F_{\mathrm{vdW}}^{\mathrm{L}} + \mathrm{d}F_{\mathrm{vdW}}^{\mathrm{R}} = \frac{\bar{A}b}{6\,\pi(D-\delta-r\sin\theta)^{3}}\mathrm{d}r + \frac{\bar{A}b}{6\,\pi(D-\delta+r\sin\theta)^{3}}\mathrm{d}r$$
$$= \frac{\bar{A}b}{12\,\pi\sin\theta}\left[\frac{1}{\left(D-\delta-\frac{a}{2}\sin\theta\right)^{2}} - \frac{1}{\left(D-\delta+\frac{a}{2}\sin\theta\right)^{2}}\right]\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}M_{\mathrm{vdW}} = \mathrm{d}M_{\mathrm{vdW}}^{\mathrm{L}} - \mathrm{d}M_{\mathrm{vdW}}^{\mathrm{R}} = \frac{\bar{A}b}{6\,\pi(D-\delta-r\sin\theta)^{3}}r\mathrm{d}r + \frac{\bar{A}b}{6\,\pi(D-\delta+r\sin\theta)^{3}}r\mathrm{d}r$$
$$= \frac{\bar{A}b}{6\pi(\sin\theta)^{2}}\left[\frac{D-\delta}{2\left(D-\delta-\frac{a}{2}\sin\theta\right)^{2}} - \frac{D-\delta}{2\left(D-\delta+\frac{a}{2}\sin\theta\right)^{2}} + \frac{1}{D-\delta+\frac{a}{2}\sin\theta} - \frac{1}{D-\delta-\frac{a}{2}\sin\theta}\right]\mathrm{d}r \quad (10)$$

بنابراین برای زاویه‌ی پیچش کوچک، خواهیم داشت:

$$F_{\mathrm{vdW}} = \int_{0}^{a/2}\mathrm{d}F_{\mathrm{vdW}} = \frac{\bar{A}b}{12\,\pi\theta_{\max}\Theta D^{2}}\left[\frac{1}{(1-\Delta-\Theta)^{2}} - \frac{1}{(1-\Delta+\Theta)^{2}}\right]$$
$$M_{\mathrm{vdW}} = \int_{0}^{a/2}\mathrm{d}M_{\mathrm{vdW}} = \frac{\bar{A}b}{12\,\pi\theta_{\max}^{2}D\Theta^{2}}\left[\frac{\Delta+2\theta-1}{(1-\Delta-\Theta)^{2}} - \frac{\Delta-2\theta-1}{(1-\Delta+\Theta)^{2}}\right] \quad (11)$$

3-معادله‌ی دینامیکی پیچشی تیر

در این قسمت برای استخراج معادلات دینامیکی حاکم سیستم موردنظر با

یک سیستم فنر پیچشی و مستهلک کننده مدل می‌گردد که در آن نیروها و گشتاورهای حاکم بر معادلات حرکت به صورت روابط (12) می‌باشند :

$$\begin{aligned}
&F_{\mathrm{elas}} = K_{\Delta}\delta = \frac{24EI}{L}D\Delta\\
&F_{\mathrm{damp}} = c_{\Delta}\dot{\delta} = c_{\Delta}D\dot{\Delta}\\
&F_{\mathrm{inertia}} = m\ddot{\delta} = mD\ddot{\Delta}\\
&M_{\mathrm{elas}} = K_{\Theta}\theta = 2\frac{(\mu J)_{\mathrm{eff}}}{L}\theta_{\max}\Theta\\
&M_{\mathrm{damp}} = C_{\Theta}\dot{\theta} = C_{\Theta}\theta_{\max}\dot{\Theta}\\
&M_{\mathrm{inertia}} = I_{\mathrm{m}}\ddot{\theta} = I_{\mathrm{m}}\theta_{\max}\ddot{\Theta}
\end{aligned} \qquad (12)$$

که در آن به ترتیب k_{Δ} و K_{Θ} سختی خمشی و سختی پیچشی تیر پیچشی، c_{Δ} و C_{Θ} ضرایب میرایی خمشی و پیچشی، m جرم و I_{m} ممان اینرسی صفحه‌ی اصلی، E و μ مدول یانگ و مدول برشی، I و J_{eff} ممان اینرسی و ممان قطبی معادل سطح مقطع مستطیل شکل تیر پیچشی می‌باشد. مقدار J_{eff} برای مقطع مستطیل شکل تیر با استفاده از ضمیمه‌ی (الف) بدست می‌آید. علامت نقطه بر روی پارامترهای δ، Δ، θ و Θ، مربوط به مشتق نسبت به زمان می‌باشد. با استفاده از روابط (7)، (10)، (11) و همچنین روابط (12)، معادله‌ی حرکت سیستم به صورت رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&I_{\mathrm{m}}\ddot{\Theta} + C_{\Theta}\dot{\Theta} + K_{\Theta}\Theta =\\
&\quad \frac{\varepsilon V^2 b}{2\theta_{\max}^3\Theta^2}\Big(\frac{1-\Delta}{1-\Delta-\beta\Theta} - \frac{1-\Delta}{1-\Delta-\alpha\Theta} + \ln\Big(\frac{1-\Delta-\beta\Theta}{1-\Delta-\alpha\Theta}\Big)\Big)\\
&\quad + \frac{\bar{A}b}{12\pi\theta_{\max}^3 D\Theta^2}\Big(\frac{\Delta+2\Theta-1}{(1-\Delta-\Theta)^2} - \frac{\Delta-2\Theta-1}{(1-\Delta+\Theta)^2}\Big)\\
&m\ddot{\Delta} + c_{\Delta}\dot{\Delta} + k_{\Delta}\Delta =\\
&\quad \frac{\varepsilon V^2 b}{2\theta_{\max}\mathrm{D}^2\Theta}\Big(\frac{1}{1-\Delta-\beta\Theta} - \frac{1}{1-\Delta-\alpha\Theta}\Big)\\
&\quad + \frac{\bar{A}b}{12\pi\theta_{\max}\mathrm{D}^3\Theta}\Big(\frac{1}{(1-\Delta-\Theta)^2} - \frac{1}{(1-\Delta+\Theta)^2}\Big)
\end{aligned} \qquad (13)$$

برای حل معادلات بالا از پارامترهای بی بعد استفاده می گردد که بصورت (14) تعریف می گردد:

$$\begin{aligned}
&\xi_{\Theta} = \frac{C_{\Theta}T}{I_{\mathrm{m}}}, \eta_{\Theta} = \frac{\varepsilon V^2 b}{2\theta_{\max}^3 K_{\Theta}}, T^2 = \frac{I_{\mathrm{m}}}{K_{\Theta}}\\
&\lambda_{\Theta} = \frac{\bar{A}b}{12\pi\theta_{\max}^3 DK_{\Theta}}, \tau = \frac{t}{T}, \xi_{\Delta} = \frac{c_{\Delta}}{m}\sqrt{\frac{I_{\mathrm{m}}}{K_{\Theta}}}\\
&\eta_{\Delta} = \frac{\varepsilon V^2 bI_{\mathrm{m}}}{2\theta_{\max}K_{\Theta}mD^2}, \lambda_{\Delta} = \frac{\bar{A}bI_{\mathrm{m}}}{12\pi\theta_{\max}\mathrm{D}^3K_{\Theta}m}\\
&\omega_{\Theta} = \sqrt{\frac{K_{\Theta}}{I_{\mathrm{m}}}}, \omega_{\Delta} = \sqrt{\frac{k_{\Delta}}{m}}, \omega_0 = \frac{\omega_{\Delta}}{\omega_{\Theta}}
\end{aligned} \qquad (14)$$

که در رابطه (14)، T زمان تناوب سیستم می‌باشد. با بکار بردن پارامترهای بی‌بعد در رابطه (14)، معادلات حرکت سیستم به صورت معادلات بی‌بعد (15) استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\Theta} + \xi_{\Theta}\dot{\Theta} + \Theta =\\
&\quad \frac{\eta_{\Theta}}{\Theta^2}\Big(\frac{1-\Delta}{1-\Delta-\beta\Theta} - \frac{1-\Delta}{1-\Delta-\alpha\Theta} + \ln\Big(\frac{1-\Delta-\beta\Theta}{1-\Delta-\alpha\Theta}\Big)\Big)\\
&\quad + \frac{\lambda_{\Theta}}{\Theta^2}\Big(\frac{\Delta+2\Theta-1}{(1-\Delta-\Theta)^2} - \frac{\Delta-2\Theta-1}{(1-\Delta+\Theta)^2}\Big)\\
&\ddot{\Delta} + \xi_{\Delta}\dot{\Delta} + \omega_0^2\Delta =\\
&\quad \frac{\eta_{\Delta}}{\Theta}\Big(\frac{1}{1-\Delta-\beta\Theta} - \frac{1}{1-\Delta-\alpha\Theta}\Big)\\
&\quad + \frac{\lambda_{\Delta}}{\Theta}\Big(\frac{1}{(1-\Delta-\Theta)^2} - \frac{1}{(1-\Delta+\Theta)^2}\Big)
\end{aligned} \qquad (15)$$

معادلات (15)، دو معادله‌ی دیفرانسیل کوپل شده وابسته به پارامتر زمان است که با روش رانگ کوتا قابل حل می‌باشد. برای استفاده از این روش پارامترهای x_1 و x_2، x_3 و x_4 به صورت روابط (16) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned} x_1 &= \Theta\\ x_2 &= \dot{\Theta}\\ x_3 &= \Delta\\ x_4 &= \dot{\Delta}\end{aligned}\right\} \Rightarrow\\
&\dot{\Theta} = \dot{x_1} = x_2\\
&\ddot{\Theta} = \dot{x_2} = \frac{\eta_{\Theta}}{{x_1}^2}\Big(\frac{1-x_3}{1-x_3-\beta x_1} - \frac{1-x_3}{1-x_3-\alpha x_1}\Big)\\
&\quad + \frac{\eta_{\Theta}}{{x_1}^2}\Big(\ln\Big(\frac{1-x_3-\beta x_1}{1-x_3-\alpha x_1}\Big)\Big) - \xi_{\Theta}x_2 - x_1\\
&\quad + \frac{\lambda_{\Theta}}{{x_1}^2}\Big(\frac{x_3+2x_1-1}{(1-x_3-x_1)^2} - \frac{x_3-2x_1-1}{(1-x_3+x_1)^2}\Big)\\
&\dot{\Delta} = \dot{x_3} = x_4\\
&\ddot{\Delta} = \dot{x_4} = \frac{\eta_{\Delta}}{x_1}\Big(\frac{1}{1-x_3-\beta x_1} - \frac{1}{1-x_3-\alpha x_1}\Big)\\
&\quad + \frac{\lambda_{\Delta}}{x_1}\Big(\frac{1}{(1-x_3-x_1)^2} - \frac{1}{(1-x_3+x_1)^2}\Big)\\
&\quad - \xi_{\Delta}x_4 - {\omega_0}^2x_3
\end{aligned} \qquad (16)$$

نقاط تعادل با برابر صفر قرار دادن سمت راست روابط (16) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&x_2 = 0\\
&\frac{\eta_{\Theta}}{{x_1}^2}\Big(\frac{1-x_3}{1-x_3-\beta x_1} - \frac{1-x_3}{1-x_3-\alpha x_1} + \Big)\\
&\quad + \frac{\eta_{\Theta}}{{x_1}^2}\Big(\ln\Big(\frac{1-x_3-\beta x_1}{1-x_3-\alpha x_1}\Big)\Big)\\
&\quad + \frac{\lambda_{\Theta}}{{x_1}^2}\Big(\frac{x_3+2x_1-1}{(1-x_3-x_1)^2} - \frac{x_3-2x_1-1}{(1-x_3+x_1)^2}\Big) - x_1 = 0\\
&x_4 = 0\\
&\frac{\eta_{\Delta}}{x_1}\Big(\frac{1}{1-x_3-\beta x_1} - \frac{1}{1-x_3-\alpha x_1}\Big)\\
&\quad + \frac{\lambda_{\Delta}}{x_1}\Big(\frac{1}{(1-x_3-x_1)^2} - \frac{1}{(1-x_3+x_1)^2}\Big)\\
&\quad - {\omega_0}^2x_3 = 0
\end{aligned} \qquad (17)$$

با حل کردن معادلات (17) چهار پاسخ فیزیکی بدست می‌آید که شامل دو زاویه‌ی پیچش و دو تغییرمکان است که دو به دو با یکدیگر کوپل شده‌اند، یکی از دو جواب بدست آمده تعادل پایدار و جواب دیگر تعادل ناپایدار خواهد بود. برای بررسی پایداری جواب‌های بدست آمده از ماتریس ژاکوبین سیستم استفاده می‌کنیم.

ماتریس ژاکوبین سیستم به صورت رابطه‌ی (18) است :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ \acute{F}_1(x_1) & -\xi_{\Theta} & \acute{F}_1(x_3) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \acute{F}_2(x_1) & 0 & \acute{F}_2(x_3) & -\xi_{\Delta}\end{bmatrix} \qquad (18)$$

که در آن :

$$\begin{aligned}
&F_1(x_1,x_2,x_3) = \frac{\eta_{\Theta}}{{x_1}^2}\Big(\frac{1-x_3}{1-x_3-\beta x_1} - \frac{1-x_3}{1-x_3-\alpha x_1}\Big)\\
&\quad + \frac{\eta_{\Theta}}{{x_1}^2}\Big(\ln\Big(\frac{1-x_3-\beta x_1}{1-x_3-\alpha x_1}\Big)\Big)\\
&\quad + \frac{\lambda_{\Theta}}{{x_1}^2}\Big(\frac{x_3+2x_1-1}{(1-x_3-x_1)^2} - \frac{x_3-2x_1-1}{(1-x_3+x_1)^2}\Big)\\
&\quad - \xi_{\Theta}x_2 - x_1\\
&F_2(x_1,x_3,x_4) = \frac{\eta_{\Delta}}{x_1}\Big(\frac{1}{1-x_3-\beta x_1} - \frac{1}{1-x_3-\alpha x_1}\Big)\\
&\quad + \frac{\lambda_{\Delta}}{x_1}\Big(\frac{1}{(1-x_3-x_1)^2} - \frac{1}{(1-x_3+x_1)^2}\Big)\\
&\quad - \xi_{\Delta}x_4 - {\omega_0}^2x_3
\end{aligned} \qquad (19)$$

و علامت مشتق نسبت به پارامتر x_1 یا پارامتر x_3 می‌باشد. معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم به صورت معادلهٔ (20) است.

$$|A-\gamma I| = 0 \tag{20}$$

اگر معادله‌ی مشخصه‌ی (20) در نقاط تعادل بدست آمده نوشته شود، یک معادله‌ی درجه 4 بر حسب γ بدست می‌آید که با حل این معادله 4 ریشه بدست می‌آید. این ریشه‌ها دو جفت هستند که هر جفت شامل دو ریشه با مقادیر عددی یکسان ولی علامت‌های مخالف یکدیگر می‌باشد. در ولتاژهای کمتر از ولتاژ پولین، حل بدست آمده‌ی کوچکتر پایدار است که دارای مقادیر ویژه‌ی منفی برای سیستم با مستهلک کننده و یا مقادیر ویژه‌ی موهومی خالص بدون قسمت حقیقی برای سیستم بدون مستهلک کننده است. مقادیر حقیقی مقدار ویژه‌ی هر جفت از جواب‌ها نیز فرکانس طبیعی بی بعد سیستم را مشخص می‌کنند.

4-نتایج و بحث

4-1- اعتبارسنجی مدل حاضر و مقایسهٔ نتایج آن با داده‌های تجربی

مشخصات هندسی سیستم مورد نظر در جدول 1 آمده است [26].

مدول برشی $\mu = 66$ GPa و نسبت پؤاسون $\nu = 0.29$ می‌باشد.

به منظور تصدیق، مدل حاضر که با استفاده از تئوری تنش کوپل درنظر گرفته شده، با نتایج تجربی مقایسه شده و همچنین اختلاف آن با مدل پیچشی کلاسیک بررسی می‌شود. نتایج تئوری تنش کوپل با شرط l/t=0.1 و نتایج تجربی و تفاوت آن‌ها با مدل کلاسیک در شکل‌های 2 و 3 نشان داده شده است.

جدول 1 مشخصات میکروآینه‌ی پیچشی

Table 1 Parameters of torsional micro-mirror

مورد	اندازه (میکرومتر)
طول صفحه‌ی اصلی آینه a	100
عرض صفحه‌ی اصلی آینه b	100
ضخامت صفحه‌ی اصلی آینه t	1.5
طول تیر پیچشی L	65
عرض تیر پیچشی w	1.55
ضخامت تیر پیچشی t	1.5
عرض الکترود a_1	6
عرض الکترود a_2	84
طول گپ بین صفحه و الکترود D	2.75

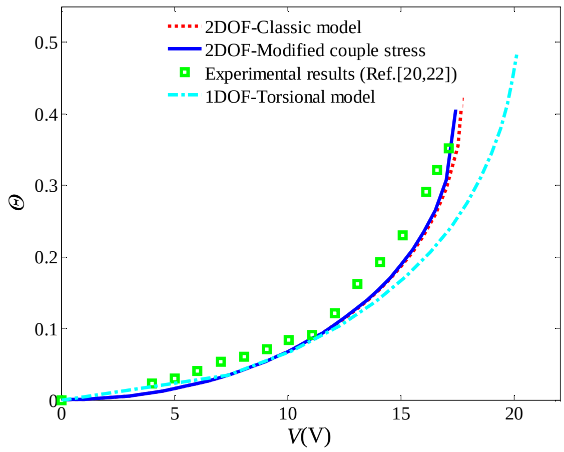

Fig. 2 Comparison of experimental torsion angle changes of micro-mirror versus applied voltage with couple stress and classic model

شکل 2 مقایسه‌ی تغییرات زاویه‌ی پیچش تجربی میکروآینه برحسب ولتاژ اعمالی با مدل تنش کوپل و کلاسیک

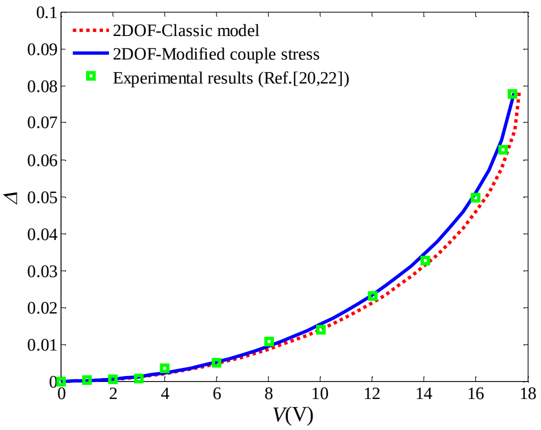

Fig. 3 Comparison of experimental displacement changes of micro-mirror versus applied voltage with couple stress and classic model

شکل 3 مقایسه‌ی تغییرات تغییرمکان تجربی میکروآینه برحسب ولتاژ اعمالی با مدل تنش کوپل و کلاسیک

در حالت ناپایداری پولین، مقدار پارامترهای پولین و درصد خطای آن‌ها نسبت به نتایج تجربی در جدول 2 آورده شده است.

نتایج نشان می‌دهد که پارامترهای پولین بدست آمده با تئوری تنش کوپل برای مدل دو درجه آزادی خمش و پیچش تیر با شرط (l/t=0.1) بسیار نزدیک به مقادیر تجربی بدست آمده است. بنابراین مدل پیشنهادی با دقت بسیار خوبی قادر به پیش‌بینی زاویه، تغییرمکان و ولتاژ پولین سیستم می‌باشد. لذا در اینجا اهمیت در نظر گرفتن اثر اندازه و به عبارتی بکار گرفتن تئوری مرتبه بالاتر همانند تنش کوپل در آنالیز رفتار سازه های نانو کاملا پدیدار می‌گردد. زیرا همانطور که قبلا گفته شد نتایج آزمایشگاهی دیگر وابستگی رفتار مواد در مقیاس نانو به اندازه آن‌ها را به وضوح نشان داده است و در اینجا با بکار گرفتن مدل مناسب در مقیاس نانو پاسخ‌ها با نتایج آزمایشگاهی همگرا می‌شود، در صورتی که مدل‌های کلاسیک محیط پیوسته به خوبی تئوری‌های مرتبه بالا قادر به پیش‌بینی نتایج آزمایشگاهی نیستند.

4-2- بررسی ارتعاش طبیعی نانوآینه‌ی پیچشی با درنظر گرفتن اثر اندازه و نیروی واندروالس

در بررسی رفتار دینامیکی سیستم‌های پیچشی دوبعدی کارهای پیشین از نیروی واندروالس و اثر اندازهٔ صرفنظر شده است. در این بخش رفتار

جدول 2 مقایسه نتایج مدل‌های مختلف با نتایج تجربی در حالت ناپایداری پولین میکروآینه پیچشی

Table 2 Comparison of different models results with experimental results in the pull-in instability for torsional micro-mirror

مدل موردنظر	Θ_{pullin}	درصد خطا زاویه پیچش	V_{pullin}	درصد خطا ولتاژ	Δ_{pullin}	درصد خطا تغییر مکان
تجربی(مرجع [22])	0.4198	-	17.4	-	0.0778	-
کلاسیک خمش پیچش	0.4208	0.2	17.7	1.7	0.0786	1.0
تنش کوپل خمش پیچش	0.4201	0.07	17.5	0.46	0.0780	0.27
مدل پیچشی	0.5236	24.7	20.1	15.5	-	-

دینامیکی سیستم تحت تأثیر نیروی واندروالس و با درنظر گرفتن اثر اندازه مورد بررسی قرار گرفته و فرکانس طبیعی آن بدست می‌آید. برای محاسبه‌ی تغییرات فرکانس طبیعی سیستم لازم است معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم (معادله‌ی (20)) در هر ولتاژ حل شود تا جواب‌های آن بدست آید، بنابراین با جایگذاری هر جواب تعادل پایدار در معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم 4 ریشه‌ی موهومی در آن ولتاژ بدست می‌آید که قسمت‌های حقیقی آن‌ها فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پیچشی و فرکانس انتقالی را می‌دهد. شکل‌های 4 و 5 به ترتیب فرکانس پیچشی و فرکانس انتقالی بی‌بعد را بر حسب ولتاژ نشان می‌دهد.

همانطور که در شکل 4 دیده می‌شود؛ زمانی که ولتاژ اعمالی به سیستم صفر است، فرکانس طبیعی پیچشی سیستم واحد می‌باشد. با اعمال ولتاژ به سیستم و افزایش آن، فرکانس کاهش یافته و زمانی که ولتاژ اعمالی به ولتاژ پولین می‌رسد، فرکانس سیستم صفر خواهد شد. در شکل 5 نیز دیده می‌شود که در ولتاژ پولین فرکانس طبیعی انتقالی سیستم به صفر خواهد رسید.

3-4- بررسی رفتار دینامیکی سیستم بدون مستهلک کننده با درنظر گرفتن اثر اندازه و نیروی واندروالس و در ولتاژ پایینتر از ولتاژ پولین

در این قسمت رفتار دینامیکی سیستم در شرایط بدون مستهلک کننده و با درنظر گرفتن اثر اندازه و نیروی واندروالس و در ولتاژ کمتر از ولتاژ پولین و

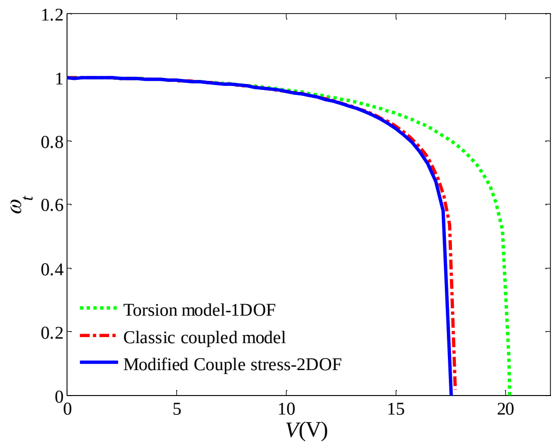

Fig. 4 Variation of torsional natural frequency of system versus voltage for different models

شکل 4 تغییرات فرکانس طبیعی پیچشی سیستم برحسب ولتاژ در مدل‌های مختلف

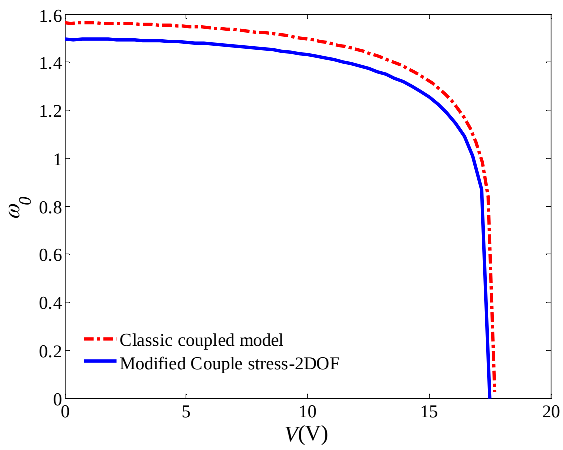

Fig. 5 Variation of translatioal natural frequency of system versus voltage for different models

شکل 5 تغییرات فرکانس طبیعی انتقالی سیستم برحسب ولتاژ در تئوری‌های مختلف

شرایط اولیه‌ی صفر یعنی $[x_1^0, x_2^0] = [0,0]$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. در شکل 6 تأثیر مقدار تغییرمکان عمودی نانوآینه بر روی نقاط تعادل زاویه‌ی پیچش سیستم بدون مستهلک کننده با درنظر گرفتن اثر اندازه و نیروی واندروالس نشان داده شده است. مقدار متغیر Θ بین 0 و 1 تغییر می‌کند و در ولتاژهای کمتر از ولتاژ پولین، نقاط برخورد منحنی با خط $F_1(\Theta) = 0$ دو نقطه Θ_2 و Θ_1 می‌باشد. این نقاط در حقیقت نقاط تعادل سیستم می‌باشند که نقطه‌ی با مقدار کمتر (Θ_1) دارای تعادل پایدار و نقطه‌ی با مقدار بیشتر (Θ_2) دارای تعادل ناپایدار می‌باشد. زمانی که ولتاژ اعمالی به سیستم افزایش می‌یابد، این دو نقطه به یکدیگر نزدیک می‌شوند تا اینکه در یک نقطه بر روی یکدیگر قرار می‌گیرند. این نقطه همان نقطه‌ی Θ_{pullin} سیستم و ولتاژ موردنظر ولتاژ پولین می‌باشد، پس زاویه‌ی پیچش پولین بین این دو نقطه‌ی تعادل قرار دارد. همانطور که شکل 6 نشان می‌دهد، در ولتاژ کمتر از ولتاژ پولین، با افزایش مقدار تغییرمکان سیستم، فاصله‌ی نقطه‌ی زاویه‌ی پیچش تعادل پایدار و نقطه‌ی زاویه‌ی پیچش تعادل ناپایدار کاهش یافته و بدین ترتیب ناحیه‌ی پایداری سیستم نیز کمتر می‌شود.

شکل‌های 7 و 8 به ترتیب منحنی تغییرات بی‌بعد زاویه‌ی پیچش و سرعت دورانی سیستم را بر حسب زمان بی‌بعد برای شرایط ولتاژ کمتر از ولتاژ پولین و در دو تئوری تنش کوپل و کلاسیک نشان می‌دهند.

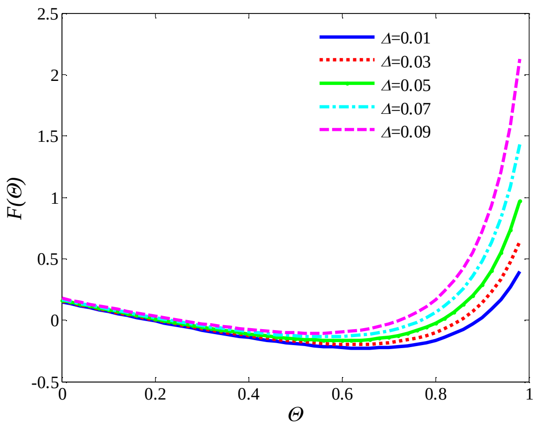

Fig. 6 Variation of stable and instable equilibrium points of torsion angle and effect of vertical displacement of micro-mirror on it for V=10

شکل 6 تغییرات نقاط تعادل پایدار و ناپایدار زاویه‌ی پیچش سیستم و تأثیر مقدار تغییرمکان عمودی میکروآینه بر روی آن در ولتاژ V=10

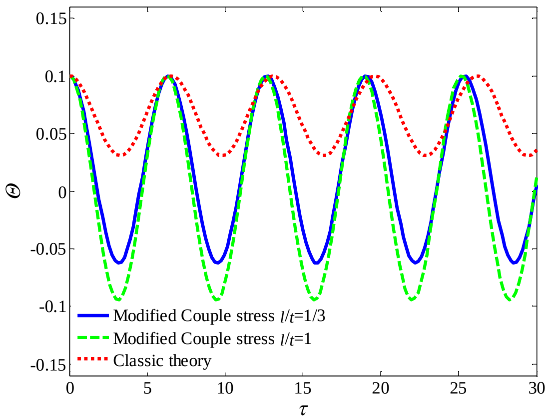

Fig. 7 Variation of torsion angle versus non-dimensional time for torsional micro-mirror without damper and V=10

شکل 7 تغییرات زاویه‌ی پیچش بر حسب زمان بی بعد برای میکروآینه‌ی پیچشی بدون مستهلک کننده و ولتاژ V=10

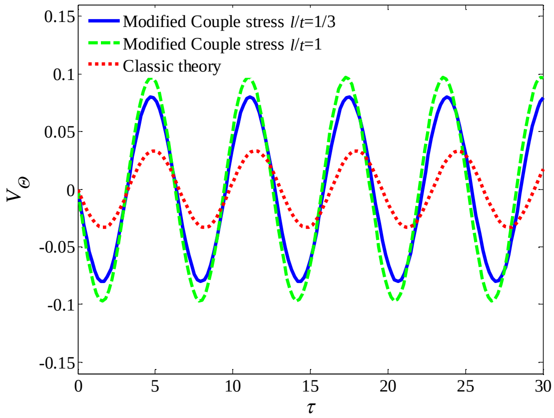

Fig. 8 Variation of velocity of rotation versus non-dimensional time for torsional micro-mirror without damper and V=10

شکل 8 تغییرات سرعت زاویه ای بر حسب زمان بی‌بعد برای میکروآینه‌ی پیچشی بدون مستهلک کننده و ولتاژ V=10

همانطور که در شکل 7 و 8 دیده می‌شود، دامنه‌ی تغییرات زاویه و سرعت دورانی سیستم در مدل تنش کوپل و با لحاظ کردن اثر اندازه نسبت به مدل کلاسیک افزایش یافته است. همچنین دوره تناوب سیستم با در نظر گرفتن اثر اندازه نسبت به مدل کلاسیک کمتر شده است. در شکل 9 نیز تغییرات سرعت خطی عمودی نانوآینه پیچشی برحسب زمان بی‌بعد در شرایط بدون مستهلک کننده و ولتاژ کمتر از ولتاژ پولین ترسیم شده است.

همانطور که شکل نشان می‌دهد شیب منحنی سرعت خطی عمودی نسبت به زمان و مقدار آن در یک زمان معین در مدل ارائه شده با تئوری تنش کوپل به ترتیب کمتر از شیب منحنی و مقدار آن در یک زمان معین در مدل کلاسیک است و با افزایش نسبت l/t در تئوری تنش کوپل شیب منحنی سرعت زاویه‌ای و مقدار آن کمتر می‌شود. بنابراین اثر اندازه باعث کاهش مقدار سرعت خطی عمودی شده است.

در شکل 10 منحنی فازی نقاط تعادل سیستم بدون مستهلک کننده در ولتاژ کمتر از پولین نشان داده شده است. همانطور که شکل می‌دهد نقطه‌ی تعادل پایدار سیستم، نقطه‌ی سنتر[1] است که منحنی فازی آن، منحنی متناوب[2] می‌باشد. اگر شرایط اولیه را در داخل منحنی متناوب انتخاب شود

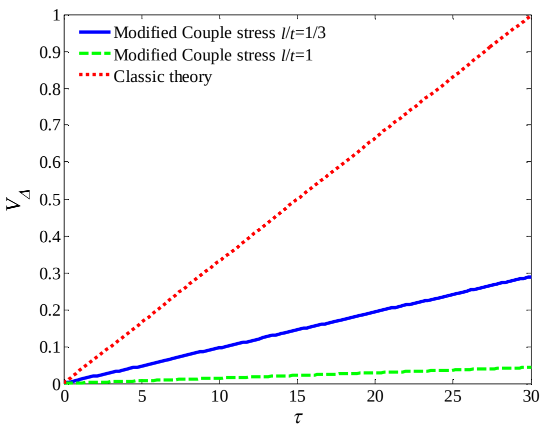

Fig. 9 Variation of linear velocity versus non-dimensional time for torsional micro-mirror without damper and V=10

شکل 9 تغییرات سرعت خطی عمودی بر حسب زمان بی‌بعد برای میکروآینه‌ی پیچشی بدون مستهلک کننده و ولتاژ V=10

[1] Center
[2] Periodic

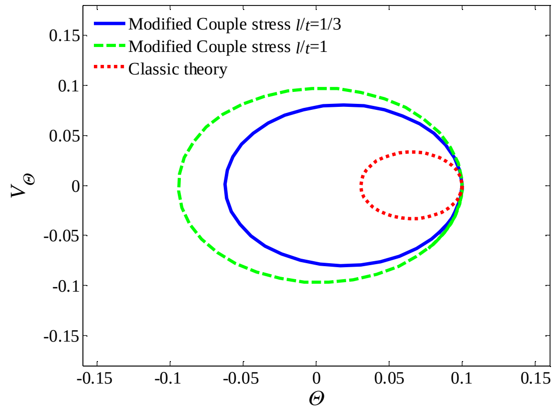

Fig. 10 Phase portraits of torsion angle and velocity of rotation for torsional micro-mirror without damper and V=10

شکل 10 منحنی فازی زاویه‌ی پیچش و سرعت زاویه‌ای میکروآینهٔ پیچشی بدون مستهلک کننده در ولتاژ V=10

سیستم پایدار خواهد بود، اما اگر شرایط اولیه خارج از آن انتخاب شود، سیستم ناپایدار می‌شود و چون منحنی متناوب در مدل تنش کوپل بزرگتر از مدل کلاسیک است. بنابراین انتخاب شرایط اولیه در مدل تنش کوپل برای پایداری سیستم محدوده‌ی وسیعتری را نسبت به مدل کلاسیک در بر می‌گیرد. بنابراین در فضای فازی ناحیه‌ی پایداری سیستم با درنظر گرفتن اثر اندازه و تئوری تنش کوپل بزرگتر از مدل ارائه شده با تئوری کلاسیک است.

4-4- بررسی رفتار دینامیکی سیستم با مستهلک کننده و با درنظر گرفتن اثر اندازه و نیروی واندروالس و در ولتاژ پایینتر از ولتاژ پولین

در این قسمت رفتار دینامیکی میکروآینه‌ی پیچشی با وجود مستهلک کننده و با همان شرایط قسمت (4-3) مورد بررسی قرار می‌گیرد.

شکل 11 منحنی تغییرات بی‌بعد زاویه‌ی پیچش را بر حسب زمان بی‌بعد و شکل 12 منحنی تغییرات بی‌بعد سرعت دورانی سیستم را بر حسب زمان بی‌بعد برای شرایط ولتاژ کمتر از ولتاژ پولین و در دو تئوری تنش کوپل و کلاسیک نشان می‌دهد.

همانطور که در شکل 11 و 12 دیده می‌شود، دامنه‌ی تغییرات زاویه و سرعت دورانی سیستم در مدل تنش کوپل و با لحاظ کردن اثر اندازه نسبت به مدل کلاسیک افزایش یافته است، ولی دوره تناوب سیستم با در نظر گرفتن اثر اندازه نسبت به مدل کلاسیک به مقدار جزیی تغییر کرده است. همچنین همه‌ی منحنی‌ها با وجود مستهلک کننده در نهایت به یک مقدار ثابت خواهند رسید. با توجه به شکل 11، با درنظر گرفتن تئوری تنش کوپل، با افزایش نسبت طول پارامتر مادی به ضخامت تیر پیچشی l/t، مقدار نهایی زاویه‌ی پیچش کاهش یافته تا در $l/t=1$ به مقدار صفر می‌رسد. ولی درمورد سرعت زاویه‌ای سیستم (شکل 12) با درنظر گرفتن هر دو تئوری، این مقدار در نهایت به صفر خواهند رسید.

در شکل 13 نیز تغییرات سرعت خطی عمودی نانوآینه پیچشی برحسب زمان بی‌بعد در شرایط با مستهلک کننده و ولتاژ کمتر از ولتاژ پولین ترسیم شده است.

همانطور که شکل 13 نشان می‌دهد شیب منحنی سرعت زاویه‌ای نسبت به زمان و مقدار آن در یک زمان معین در مدل ارائه شده با تئوری تنش کوپل به ترتیب کمتر از شیب منحنی و مقدار آن در یک زمان معین در مدل کلاسیک است و با افزایش نسبت l/t در تئوری تنش کوپل شیب منحنی

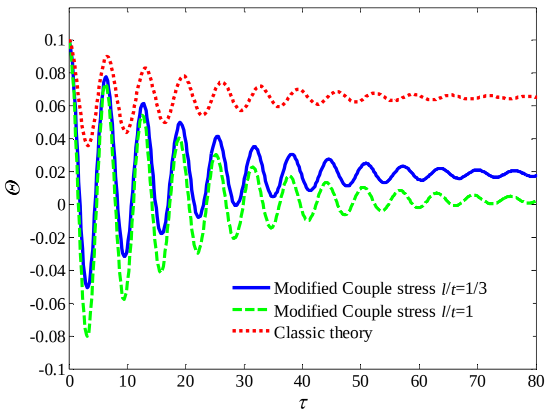

Fig. 11 Variation of torsion angle versus non-dimensional time for torsional micro-mirror with damper and V=10

شکل 11 تغییرات زاویه‌ی پیچش بر حسب زمان بی بعد برای میکروآینه‌ی پیچشی با مستهلک کننده و ولتاژ V=10

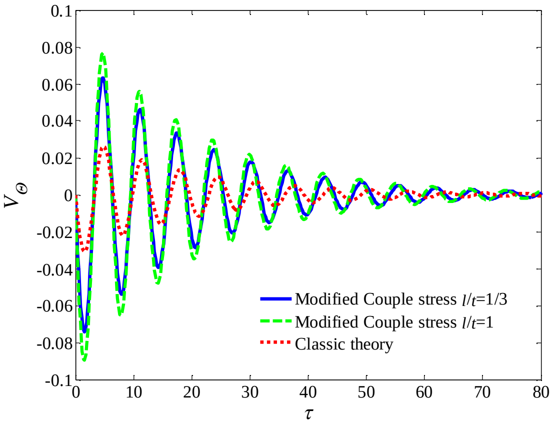

Fig. 12 Variation of velocity of rotation versus non-dimensional time for torsional micro-mirror without damper and V=10

شکل 12 تغییرات سرعت زاویه ای بر حسب زمان بی بعد برای میکروآینه‌ی پیچشی با مستهلک کننده و ولتاژ V=10

سرعت زاویه‌ای و مقدار آن کمتر می‌شود. در کلیه‌ی منحنی‌ها در نهایت مقدار سرعت زاویه‌ای به یک مقدار ثابت می‌رسد. بنابراین اثر اندازه باعث کاهش مقدار سرعت زاویه‌ای شده است.

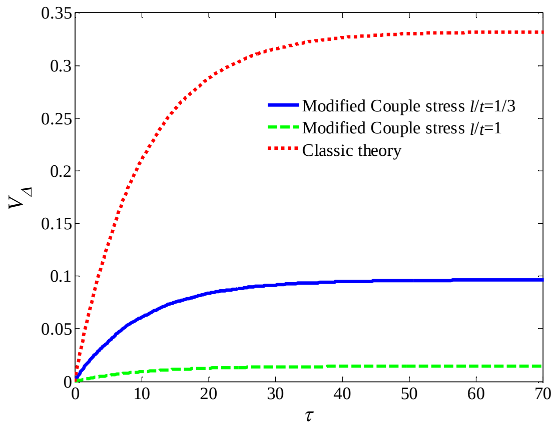

Fig. 13 Variation of linear velocity versus non-dimensional time for torsional micro-mirror with damper and V=10

شکل 13 تغییرات سرعت خطی عمودی بر حسب زمان بی بعد برای میکروآینه‌ی پیچشی با مستهلک کننده و ولتاژ V=10

در شکل 14 منحنی فازی نقاط تعادل سیستم با مستهلک کننده در ولتاژ کمتر از پولین نشان داده شده است. همانطور که شکل می‌دهد نقطه‌ی تعادل پایدار سیستم، نقطه‌ی فوکوس[1] است که منحنی فازی آن، منحنی هتروکلینیک[2] می‌باشد. با توجه به شکل می‌توان دریافت که در فضای فازی چون منحنی هتروکلینیک در مدل تنش کوپل بزرگتر از مدل کلاسیک است بنابراین برای پایداری سیستم در مدل تنش کوپل، انتخاب شرایط اولیه محدوده‌ی وسیعتری را نسبت به مدل کلاسیک دربر می‌گیرد. بنابراین در فضای فازی ناحیه‌ی پایداری سیستم با درنظر گرفتن اثر اندازه و تئوری تنش کوپل بزرگتر از مدل ارائه شده با تئوری کلاسیک است.

5- نتیجه گیری

در این مقاله رفتار دینامیکی و پایداری یک میکروآینه‌ی الکترواستاتیک پیچشی مدل دو درجه آزادی پیچش و خمش کوپل شده با درنظر گرفتن اثر اندازه در مدل تنش کوپل اصلاح شده و همچنین نیروی بین مولکولی واندروالس مورد بررسی قرار گرفته است. ابتدا معادلات حرکت سیستم با استفاده از روش رانگ کوتا حل شده، سپس فرکانس طبیعی پیچشی و انتقالی سیستم بدست آمده و برای بررسی رفتار دینامیکی سیستم منحنی‌های فازی و ارتعاشی آن استخراج می‌شود. نتایج بدست آمده عبارتند از:

1- با بررسی منحنی‌های فرکانس طبیعی بی‌بعد سیستم بر حسب ولتاژ اعمالی می‌توان دریافت که با افزایش ولتاژ فرکانس سیستم کاهش یافته تا در نهایت در ولتاژ پولین به مقدار صفر خواهد رسید. همچنین درنظر گرفتن اثر اندازه باعث کاهش فرکانس طبیعی پیچشی و همچنین انتقالی سیستم نسبت به مدل کلاسیک خواهد شد.

2- در بررسی میکروآینه‌ی الکترواستاتیک پیچشی مدل دو درجه آزادی پیچش و خمش کوپل شده، در ولتاژ کمتر از ولتاژ پولین، اگر مقدار تغییرمکان سیستم افزایش یابد، دو زاویه‌ی پیچش تعادل پایدار و ناپایدار به یکدیگر نزدیک شده و بدین ترتیب ناحیه‌ی پایداری سیستم کمتر می‌شود.

3- اثر اندازه و استفاده از تئوری تنش کوپل باعث کاهش دوره‌ی تناوب سیستم نسبت به مدل کلاسیک می‌شود که این ادعا بخوبی در منحنی‌های تغییرات زاویه‌ی پیچشی و سرعت دورانی نسبت به زمان قابل مشاهده است.

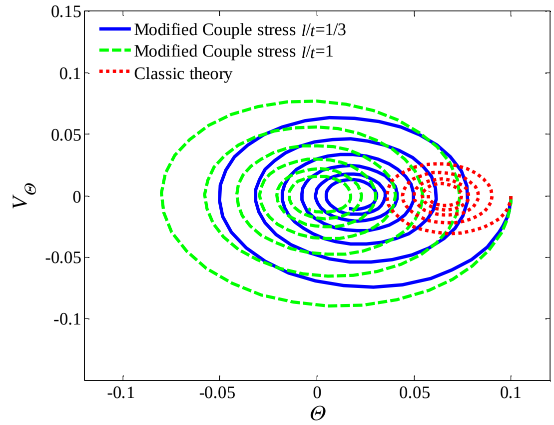

Fig. 14 Phase portraits of torsion angle and velocity of rotation for torsional micro-mirror with damper and V=10

شکل 14 منحنی فازی زاویه‌ی پیچش و سرعت زاویه‌ای میکروآینهٔ پیچشی با مستهلک کننده و ولتاژ V=10

[1] Focus
[2] Heteroclinic

ولی این اثر دامنه و شدت پارامترهای بیان شده را افزایش می‌دهد.

4- با توجه به منحنی‌های فازی زاویه‌ی پیچش و سرعت دورانی، درنظر گرفتن اثر اندازه، باعث افزایش ناحیه‌ی پایداری سیستم می‌شود، همچنین هرچه مقدار پارامتر طولی مادی بزرگتر شود این ناحیه بزرگتر خواهد شد.

5- اثر اندازه باعث کاهش سرعت خطی عمودی میکروآینه می‌شود و هرچه مقدار پارامتر طولی مادی بیشتر شود، سرعت خطی کمتر می‌شود، همچنین با در نظر گرفتن این اثر شتاب خطی سیستم نیز کاهش می‌یابد، درصورتی که سیستم بدون مستهلک کننده باشد، با گذشت زمان، سرعت خطی افزایش می‌یابد ولی با وجود مستهلک کننده در سیستم، سرعت خطی عمودی در نهایت به یک مقدار ثابت می‌رسد.

6- مدل دو درجه آزادی حاضر با لحاظ کردن اثر اندازه و نیروی واندروالس می‌تواند نتایج تجربی را بهتر از مدل کلاسیک پیش‌بینی کند و اختلاف نتایج مدل کلاسیک و نتایج تجربی را به شکل مطلوب‌تری کاهش دهد که این مطلب اهمیت استفاده از این تئوری در مقیاس میکرو و نانو را نشان می دهد.

6- ضمیمه

ضمیمه الف. محاسبه‌ی لنگر پیچشی الاستیک با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده

فرض می‌شود میدان تغییر مکان به صورت (الف-1) باشد :

$$u_1 = -\Omega YZ \ , \ u_2 = -\Omega XZ \ , \ u_3 = \Omega\Psi(X,Y) \qquad \text{(الف-1)}$$

که در آن u_1 ، u_2 و u_3 به ترتیب تغییرمکان در راستای X، Y و Z هستند، تابع $\psi(X,Y)$ نیز تابع اعوجاج است که تنها به X و Y وابسته است و Ω زاویه‌ی دوران در واحد طول میله می‌باشد که بسیار کوچک است.

میدان تغییرمکان پیشنهاد شده در معادله‌ی (الف-1) معادلات تعادل را در جهات X و Y ارضا می‌کند [33]، می‌توان نشان داد که با استفاده از رابطه‌ی (الف-1) و جایگذاری مؤلفه‌های تنش، معادله‌ی حاکم بر میله پیچشی به‌صورت (الف-2) بدست می‌آید :

$$\nabla^2\left[\Psi - \left(\frac{l^2}{4}\right)\nabla^2\Psi\right] = 0 \qquad \text{(الف-2)}$$

و شرایط مرزی سیستم عبارت است از :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n} - \left(\frac{l^2}{4}\right)\nabla^2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right) - \left(\frac{l^2}{2}\right)\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial n\partial t}\right) = n_X Y - n_Y X$$
$$\left(\frac{l^2}{4}\right)\nabla^2\Psi - l^2\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\right) = 0 \qquad \text{(الف-3)}$$

که در آن n مختصات در جهت عمودی و t مختصات در جهت مماسی سطح میله است، با استفاده از روابط (الف-3) بردار تنش و مقادیر گشتاور در واحد سطح به ترتیب، به صورت (الف-4) تعریف می شود :

$$\sigma_{31} - \frac{1}{2}\left[m^s_{12,1} + (m^s_{22} - m^s_{33})_{,2}\right] - 2\tau^{(1)}_{311,1}$$
$$-2\tau^{(1)}_{312,1} = \mu\Omega\left[\Psi_{,1} - Y - \left(\frac{l^2}{4}\right)^2\nabla^2\Psi_{,1}\right]$$
$$\sigma_{32} - \frac{1}{2}\left[-m^s_{12,2} + (m^s_{33} - m^s_{11})_{,1}\right] - 2\tau^{(1)}_{312,1}$$
$$-2\tau^{(1)}_{322,2} = \mu\Omega\left[\Psi_{,2} + X - \left(\frac{l^2}{4}\right)^2\nabla^2\Psi_{,2}\right] \qquad \text{(الف-4)}$$

با در نظر گرفتن سطح مقطع مستطیلی به ابعاد $t \times w$ و قرار دادن مرکز مختصات وسط سطح مقطع تیر، گشتاور کل اعمالی بر روی سطح مقطع از رابطه‌ی (الف-5) زیر تعیین می‌شود :

$$M_{\mathrm{elas}} = \mu\Omega\int\left(X^2 + Y^2 + X\frac{\partial\Psi}{\partial Y} - Y\frac{\partial\Psi}{\partial X}\right)\mathrm{d}A$$
$$+3Al^2\mu\Omega = \mu\frac{\theta}{L}\left(J + \int\left(X\frac{\partial\Psi}{\partial Y} - Y\frac{\partial\Psi}{\partial X}\right)\mathrm{d}A + 3Al^2\right)$$
$$J_{\mathrm{c}} = \int\left(X\frac{\partial\Psi}{\partial Y} - Y\frac{\partial\Psi}{\partial X}\right)\mathrm{d}A + 3Al^2 \qquad \text{(الف-5)}$$

در رابطه‌ی (الف-5)، A مساحت سطح مقطع تیر و J ممان اینرسی قطبی سطح مقطع تیر مستطیل شکل است و J_{c} ممان اینرسی قطبی اصلاح شده می‌باشد. بنابراین گشتاور الاستیک تیر از رابطه‌ی (الف-6) بدست می‌آید :

$$\mathrm{M_{elas}} = \frac{\mu\theta}{\mathrm{L}}(\mathrm{J} + \mathrm{J_c}) = \frac{\mu\theta}{\mathrm{L}}\mathrm{J_{eff}} \qquad \text{(الف-6)}$$

که در رابطه‌ی (الف-6) J ممان اینرسی قطبی سطح مقطع و J_{c} ممان اینرسی قطبی اصلاح شده به صورت (الف-7) و (الف-8) می‌باشند :

$$J = \frac{tw^3}{3}\left[1 - \frac{192w}{\pi^5 t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^5}\tanh\left(\frac{(2n-1)\pi t}{2w}\right)\right] \qquad \text{(الف-7)}$$

$$J_{\mathrm{c}} = 16t^4\sum_{k=0}^{\infty}B_k\{[\frac{w(\varepsilon_1^2 - \varepsilon^2)}{\varepsilon(t^2 + \varepsilon^2 p_k^2)} - \frac{2\varepsilon_1^2\tanh\left(p_k\frac{w}{t}\right)}{t\varepsilon p_k}] \times$$
$$\frac{t\sqrt{t^2 + \varepsilon^2 p_k^2}\coth(\frac{w}{\varepsilon}\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 p_k^2}{t^2}})}{t^2 + \varepsilon_1^2 p_k^2} + \frac{1}{p_k^2}$$
$$+ \frac{t^2}{t^2 + \varepsilon^2 p_k^2}\}$$
$$-4w^4\sum_{k=0}^{\infty}b_k\{[\frac{t(\varepsilon_1^2 - \varepsilon^2)}{\varepsilon(w^2 + \varepsilon^2 p_k^2)} - \frac{2\varepsilon_1^2\tanh\left(p_k\frac{t}{w}\right)}{w\varepsilon p_k}]$$
$$\times\frac{w\sqrt{w^2 + \varepsilon^2 p_k^2}\coth(\frac{t}{\varepsilon}\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 p_k^2}{w^2}})}{w^2 + \varepsilon_1^2 p_k^2} + \frac{1}{p_k^2} \qquad \text{(الف-8)}$$
$$+ \frac{w^2}{w^2 + \varepsilon^2 p_k^2}\} + 3Al^2$$

که در آن :

$$\varepsilon^2 = \frac{l^2}{4} \quad , \quad \varepsilon_1^2 = \frac{l^2}{2}$$

در روابط (الف-8) w و t عرض و ضخامت سطح مقطع هستند، همچنین مقادیر p_k ، B_k و b_k از روش سری پیشنهادی در منبع [33] تعیین می‌شوند، مشخص است که J_{c} تابعی از پارامترهای طول مادی l که در تئوری تنش کوپل ظاهر می‌شوند، می‌باشد.

بر طبق روش منبع [33]، برای بدست آوردن A_k ، a_k ، B_k و b_k می‌توان از حل جبری روابط (الف-9) استفاده کرد.

$$A_k + F_k\left(\frac{t}{2},\frac{w}{2}\right)B_k = 0$$
$$I_k\left(\frac{t}{2},\frac{w}{2}\right)B_k + \sum_{n=0}^{\infty}\left[J_{k,n}\left(\frac{t}{2},\frac{w}{2}\right)a_n + H_{k,n}\left(\frac{t}{2},\frac{w}{2}\right)b_n\right]$$
$$= P_k\left(\frac{t}{2},\frac{w}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}T_{k,n}\left(\frac{t}{2},\frac{w}{2}\right)$$
$$a_k - F_k\left(\frac{w}{2},\frac{t}{2}\right)b_k = 0$$
$$I_k\left(\frac{w}{2},\frac{t}{2}\right)b_k$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left[-J_{k,n}\left(\frac{w}{2},\frac{t}{2}\right)A_n+H_{k,n}\left(\frac{w}{2},\frac{t}{2}\right)B_n\right] = -P_k\left(\frac{w}{2},\frac{t}{2}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}T_{k,n}\left(\frac{w}{2},\frac{t}{2}\right) \quad \text{(الف-9)}$$

که در آن :

$$F_k\left(\frac{t}{2},\frac{w}{2}\right) = \frac{\varepsilon_1^2\frac{t}{2}p_k}{\varepsilon\left(\frac{t^2}{4}+\varepsilon_1^2p_k^2\right)}\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2p_k^2}{\frac{t^2}{4}}}\coth\left(\frac{\frac{w}{2}}{\varepsilon}\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2p_k^2}{\frac{t^2}{4}}}\right)$$

$$H_{k,n}\left(\frac{t}{2},\frac{w}{2}\right) = 2\frac{\frac{tw}{4}}{\varepsilon}\left[1-\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon^2}\left(1+\frac{\varepsilon^2p_n^2}{\frac{t^2}{4}}\right)\right]\times \frac{\sqrt{\frac{w^2}{4}+\varepsilon^2p_n^2}}{\frac{t^2}{w^2}p_n^2+p_k^2+\frac{t^2}{4\varepsilon^2}}\coth\left(\frac{\frac{t}{2}}{\varepsilon}\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2p_n^2}{\frac{w^2}{4}}}\right)\sin(p_n)\sin(p_k)$$

$$I_k\left(\frac{t}{2},\frac{w}{2}\right) = \frac{t^2}{4}+\varepsilon_1^2p_k^2\times\left(1-p_k\frac{\varepsilon_1^2\sqrt{\frac{t^2}{4}+\varepsilon^2p_k^2}}{\varepsilon\left(\frac{t^2}{4}+\varepsilon_1^2p_k^2\right)} \times\coth\left(\frac{\frac{w}{2}}{\varepsilon}\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2p_k^2}{\frac{t^2}{4}}}\right)\tanh\left(p_k\frac{w}{t}\right)\right)$$

$$J_{k,n}\left(\frac{t}{2},\frac{w}{2}\right) = 2\frac{\frac{tw}{4}\varepsilon_1^2p_n^3}{p_n^2\frac{t^2}{4}+p_k^2\frac{w^2}{4}}\sin(p_k)\sin(p_n)$$

$$P_k\left(\frac{t}{2},\frac{w}{2}\right) = 2\frac{\varepsilon_1^2}{p_k}\tanh\left(p_k\frac{t}{w}\right) \quad \text{(الف-10)}$$

$$T_{k,n}\left(\frac{t}{2},\frac{w}{2}\right) = \frac{tw\varepsilon_1^2}{p_n^2\frac{t^2}{4}+p_k^2\frac{w^2}{4}}\sin(p_k)\sin(p_n)$$

$$p_k = \frac{k\pi}{L}$$

برای میله با سطح مقطع مربع ($t=w$) ، خواهیم داشت $A_k = a_k$ و $B_k = b_k$

7- فهرست علایم

$\bar{A}$ ثابت هاماکر (J)

a عرض صفحه‌ی اصلی (μm)

a_1 فاصله‌ی داخلی بین دو الکترود (μm)

a_2 فاصله‌ی خارجی بین دو الکترود (μm)

b طول صفحه‌ی اصلی (μm)

c سرعت نور (ms^{-1})

D طول شکاف بین صفحه‌ی اصلی و الکترود (μm)

E مدول یانگ تیر پیچشی (GPa)

I ممان اینرسی سطح مقطع تیر پیچشی $(\mu m)^4$

J ممان قطبی سطح مقطع تیر پیچشی $(\mu m)^4$

K نسبت کوپلینگ خمشی به پیچشی تیر

L نصف طول تیر پیچشی (μm)

V ولتاژ اعمالی بین الکترود و صفحه‌ی اصلی (V)

$\bar{V}$ ولتاژ اعمالی بی بعد شده

علایم یونانی

Δ تغییرمکان بی بعد شده

δ تغییر مکان عمودی صفحهٔ اصلی (μm)

ε ثابت دی الکتریک خلا ($C^2N^{-1}m^{-2}$)

Θ زاویه‌ی بی بعد شده

θ زاویه‌ی پیچش صفحهٔ اصلی

μ مدول برشی تیر پیچشی (GPa)

υ نسبت پواسون تیر پیچشی

زیرنویس‌ها

damp استهلاک

elas الاستیک

elec الکترواستاتیک

inertia اینرسی

PI پولین

vdW وندروالس

8- مراجع

[1] N. Maluf, *An introduction to microelectromechanical systems engineering*, Second Edittion, pp. 1-9, Artech House: Boston, 2000.

[2] H. Toshiyoshi, H. Fujita, Electrostatic micro torsion mirrors for an optical switch matrix, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 5, No. 4, pp. 231-237, 1996.

[3] M. Elwenspoek, R. J. Wiegerink, *Mechanical microsensors*, pp. 5-23, Berlin: Springer, 2001.

[4] J. E. Ford, V. A. Aksyuk, D. J. Bishop, J. A. Walker, Wavelength add-drop switching using tilting micromirrors, *Journal of Lightwave Technology*, Vol. 17, No. 5, pp. 904-11, 1999.

[5] D. L. Dickensheets, R. G. Kino, Silicon-micromachined scanning confocal optical microscope, *Journal of Microelectromechnical Systems*, Vol. 7, No. 1, pp. 38-47, 1998.

[6] E. M. Lifshitz, The theory of molecular attractive forces between solids, *Soviet Physics JETP*, Vol. 2, No. 1, pp. 73-83, 1956.

[7] V. A. Kirsch, Calculation of the van der Waals force between a spherical particle and an infinite cylinder, *Advances in Colloid and Interface Science*, Vol. 104, No. 1, pp. 311-324, 2003.

[8] M. Ashhab, M. V. Salapaka, M. Dahleh, I. Mezić, Dynamical analysis and control of microcantilevers, *Automatica*, Vol. 35, No. 10, pp. 1663-1670, 1999.

[9] S. I. Lee, S. W. Howell, A. Raman, R. Reifenberger, Nonlinear dynamics of microcantilevers in tapping mode atomic force microscopy: A comparison between theory and experiment, *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics*, Vol. 66, No. 1, pp. 11540901-11540910, 2002.

[10] J. G. Guo, Y. P. Zhao, Influence of van der Waals and Casimir forces on electrostatic torsional actuators, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 13, No. 6, pp. 1027-1035, 2004.

[11] H. Moeenfard, A. Darvishian, M. T. Ahmadian, A coupled two degree of freedom model for nano/micromirrors under vander Waals force, *Proceedings of the ASME 2012 international design engineering technical conferences & computers and information in engineering conference*, Chicago, IL, USA, August 12-15, 2012.

[12] A. Darvishian, H. Moeenfard, M. T. Ahmadian, A coupled two degree of freedom pull-in model for micromirrors under capillary force, *Acta Mechanica*, Vol.223, No. 2, pp. 387-394, 2012.

[13] H. Moeenfard, A. Darvishian, H. Zohoor, M. T. Ahmadian, Influence of van der waals force on static behavior of nano/micromirrors under capillary force, *International Journal of Modern Physics B*, Vol. 26, No. 7, pp. 1250056(12 pages), 2012.

[14] O. Degani, E. Socher, A. Lipson, T. Leitner, D. J. Setter, S. Kaldor, and Y. Nemirovsky, Pull-in study of an electrostatic torsion microactuator, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 7, No. 4, pp. 373-378, 1998.

[15] A. Gusso, G. J. Delben, Influence of the Casimir force on the pull-in parameters of silicon based electrostatic torsional actuators, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 135, No. 2, pp. 792-800, 2007.

[16] H. Moeenfard, M. T. Ahmadian, Analytical modeling of static behavior of electrostatically actuated nano/micromirrors considering van der Waals forces, *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 28,

[29] G. C. Tsiatas, J. T. Katsikadelis, A new microstructure-dependent SainteVenant torsion model based on a modified couple stress theory, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 30, No. 5, pp. 741-747, 2011.

[30] Ch. Li, C. W. Lim, J. Yu, Twisting statics and dynamics for circular elastic nanosolids by nonlocal elasticity theory, *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 24, No. 6, pp. 484-494, 2011.

[31] Y. Tadi-Beni, Use of augmented continuum theory for modeling the size dependent material behavior of nano-actuators, *Iranian Journal of Science and Technology Transactions of Mechanical Engineering*, Vol. 36, No. M1, pp. 41-52, 2012.

[32] M. Keivani, M. Mardaneh, A. Koochi, M. Rezaei, M. Abadyan, On the dynamic instability of nanowire-fabricated electromechanical actuators in the Casimir regime: Coupled effects of surface energy and size dependency, *Physica E*, Vol. 76, No. 1, pp. 60-69, 2016.

[33] A. Koochi, H. M. Sedighi, M. Abadyan, Modeling the size dependent pull-in instability of beam-type NEMS using strain gradient theory, *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 11, No. 10, pp. 1806-1829, 2014.

[34] H. Sedighi, A. Koochi, M. Abadyan, Modeling the size dependent static and dynamic pull-in instability of cantilever nanoactuator based on strain gradient theory, *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 6, No. 5, pp. 1450055(21 pages), 2014.

[35] A. Koochi, H. Hosseini-Toudeshky, Coupled effect of surface energy and size effect on the static and dynamic pull-in instability of narrow nano-switches, *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 7, No. 4, pp. 1550064(24 pages), 2015.

[36] P. Tong, F. Yang, D. C. C. Lam, J. Wang, Size effects of hair-sized structures -Torsion, *Key Engineering Materials*, Vol. 261, No. 1, pp. 11-22, 2004.

[37] S. Park, X. Gao, Bernoulli–Euler beam model based on a modified couple stress theory, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 16, No. 11, pp. 2355-2359, 2006.

[38] R. Maranganti, P. Sharma, A novel atomistic approach to determine strain-gradient elasticity constants: Tabulation and comparison for various metals, semiconductors, silica, polymers and the (Ir) relevance for nanotechnologies, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 55, No. 9, pp. 1823-1852, 2007.

[39] D. C. C. Lam, F. Yang, A. C. M. Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol.51, No. 8, pp. 1477-1508, 2003.

No. 3, pp. 729-736, 2012.

[17] Y. Nemirovsky, O. Bochobza-Degani, A Methodology and Model for the Pull-In Parameters of Electrostatic Actuators, *Journal of microelectromechanical systems*, Vol. 10, No. 4, pp. 601-615, 2001.

[18] J. G. Guo ,L. J. Zhou, Y. P. Zhao, Instability analysis of torsional MEMS/NEMS actuators under capillary force, *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol. 331, No. 2, pp. 458-462, 2009.

[19] J. G. Guo, Y .P. Zhao, Dynamic stability of electrostatic torsional actuators with van der Waals effect, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 3, pp. 675-685, 2006.

[20] X. M. Zhang, F. S. Chau, C. Quan, Y. L. Lam, A. Q. Liu, A study of the static characteristics of a torsional micromirror, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 90, No. 1, pp. 73-81, 2001.

[21] O. Bochobza-Degani ,Y. Nemirovsky, Modeling the pull-in parameters of electrostatic actuators with a novel lumped two degrees of freedom pull-in model, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 97-98, No. 1, pp. 569-578, 2002.

[22] J. M. Huang, A. Q. Liu, Z. L. Deng, Q. X. Zhang, J. Ahn, A. Asundi, An approach to the coupling effect between torsion and bending for electrostatic torsional micromirrors, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 115, No. 1, pp. 159-167, 2004.

[23] J. P. Zhao, H. L. Chen, J. M. Huang, A. Q. Liu, A study of dynamic characteristics and simulation of MEMS torsional micromirrors, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol 120, No. 1, pp. 199-210, 2005.

[24] C. W. Lim, C. Li, J. L. Yu, Free torsional vibration of nanotubes based on nonlocal stress theory, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, No. 12, pp. 2798-2808, 2012.

[25] C. Venkatesh, Sh. Pati, N. Bhat, R. Pratap, A torsional MEMS varactor with wide dynamic range and low actuation voltage, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 121, No. 2, pp. 480-487, 2005.

[26] R. Shabani, S. Tariverdilo, G. Rezazadeh, A. P. Agdam, Nonlinear vibrations and chaos in electrostatic torsional actuators, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 12, No. 6, pp. 3572-3584, 2011.

[27] F. Khatami, G. Rezazadeh, Dynamic response of a torsional micromirror to electrostatic force and mechanical shock, *Microsystem Technologies*, Vol. 15, No. 4, pp. 535-545, 2009.

[28] Y. Tadi-Beni, A. Koochi, M. Abadyan, Using modified couple stress theory for modeling the size dependent pull in instability of torsional nano-mirror under Casimir force, *International Journal of Optomechatronics*, Vol. 8, No. 1, pp. 47-71, 2013.