ماهنامه علمى پژوهشى



مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

# ییشنهاد روابط تحلیلی جهت بر آورد طول ابر کاواک طبیعی بر اساس عدد کاواک و عدد رينولدز

مهدى معرفت<sup>11</sup>، سهراب طهماسيي <sup>2</sup>، محمدرضا انصارى<sup>3</sup>

حكيده

استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- دانشجوی دکتری،مهندسی مکانیک،دانشگاه تربیت مدرس،تهران

3- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

" تهران، صندوق يستى، maerefat@modares.ac.ir، 14115-111

# اطلاعات مقاله

د شرایطی که ابرکاواک تشکیل میگردد، محاسبه طول کاواک طبیعی حائز اهمیت می باشد. طول کاواک تابع عدد کاواک بوده و با استفاده از	مقاله پژوهشی کامل
روابط ناشی از نتایج تجربی محاسبه می شود، که روابط متفاوتی میباشند و مبنای تحلیلی ندارند. همچنین در پیشینه تحقیقات روابطی وجود	دريافت: 13 بهمن 1394 : 120 بند 1394
ندارد که بتوان طول کاواک را بر حسب عدد رینولدز بدست آورد و ارتباط بین عدد کاواک و عدد رینولدز را نشان دهد. در این تحقیق جهت	پدیرس. ۱۵ اسفند ۲۵ ارد. ارائه در سایت: 27 اردیبهشت 1395
بدست أوردن روابط تحلیلی مربوط به محاسبه طول کاواک طبیعی، با توجه به مدل انتقال جرم، معادله پیوستگی و معادله مومنتوم، براساس روش	کلید واژگان:
مرتبه بزرگی متغیرها ، سه رابطه بدست آمده، رابطه تحلیلی اول مربوط به محاسبه نسبت طول کاواک به قطر جسم نسبت به عدد کاواک می	طول کاواک
باشد، که در آن نسبت طول کاواک به قطر جسم نسبت معکوس با ریشه عدد کاواک دارد. رابطه تحلیلی دوم مربوط به محاسبه نسبت طول	عدد کاواک
کاواک به قطر جسم نسبت به عدد رینولدز می باشد، که در آن نسبت طول کاواک به قطر جسم نسبت مستقیم با ریشه عدد رینولدز دارد، رابطه	مرتبه بزرگی متغیرها
تحلیلی سوم مربوط به محاسبه عدد کاواک نسبت به عدد رینولدز می باشد، که در آن عدد کاواک نسبت معکوس با عدد رینولدز دارد. با تطبیق	
نتایج کار حاضر با نتایج تجربی، ضرایب مجهول مربوط به روابط تحلیلی حاصل میشوند. نتایج نشان میدهد که روابط تحلیلی بدست آمده	
جایگزین مناسبی برای روابط تجربی میباشند. این روابط طول کاواک را بر حسب عدد کاواک و عدد رینولدز محاسبه و ارائه میدهند.	

# Analytical approach to estimate supercavity length based on Cavity and **Reynolds Numbers**

# Mehdi Maerefat\*, Sohrab Tahmasbi, Mohammad Reza Ansari

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran \*P.O.Box 14115-111, Tehran, Iran, maerefat@modares.ac.ir

#### **ARTICLE INFORMATION**

Original Research Paper Received 02 February 2016 Accepted 09 March 2016 Available Online 16 May 2016

Keywords: Cavity Length Cavity Number Order of Magnitude Method

### ABSTRACT

Cavity length estimation is important as supercavity condition is generated. The natural cavity length is function of cavity number and is calculated by relations deduced from experimental results which are different from each other and are not driven from analytical approaches. Literature survey shows that correlations based on cavity length in relation with Reynolds and cavity numbers have not been attempted. The purpose of the present work is to estimate analytical based relations for cavity length with respect to mass transfer, continuity and momentum conservation equations. This attempt, which was conducted by order of magnitude method resulted in three relations. The first analytical based relation calculates cavity length versus cavity number. The obtained relation shows that cavity length is proportional to the inverse square root of cavity number. The second analytical relation calculates cavity length with respect to Reynolds number. It shows cavity length has a proportional relation to Reynolds square root. The third analytical relation considers cavity number with respect to Reynolds number. The third relation shows that cavity number has inverse relation to Reynolds number. Unknown coefficients values of the relations are obtained through comparison with the already existed experimental results. These analytical relations which are an appropriate alternative to experimental based relations estimate cavity length with respect to cavity and Reynolds number.

یدیده باعث سایش، خوردگی روی سطح و ایجاد ارتعاش و نویز در سیستم

در کاربردهای دریایی و نظامی این پدیده بسیار مفید است و با تشکیل ابر کاواک می توان یسای اصطکاکی روی بدنه روندههای تند رو زیر سطحی را شديدا كاهش داد. وقتى اين پديده شكل مى گيرد، اطراف بدنه رونده توسط

1 - مقدمه کاواک یک پدیده فیزیکی است که در آن فشار سیال تا حد فشار بخار اشباع کاهش یافته و بخار آب حاصل می گردد. این پدیده در بسیاری از تجهیزات مکانیکی مانند پمپها، توربینها، نازلها و پروانههای دریایی اتفاق میافتد و اثر نامطلوبی بر روی کارایی تجهیزات فوق اعمال میکند. از طرف دیگر این

Please cite this article using: M. Maerefat, S. Tahmasbi, M. R. Ansari, Analytical approach to estimate supercavity length based on Cavity and Reynolds Numbers, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 5, U pp. 153-159, 2016 (in Persian)

غلافی از بخار و هوا پوشیده میشود و تماس بدنه با جریان آب از بین می ود. از کاویتاتور جهت دمش هوا وایجاد غلاف کاواک در حالت دمشی استفاده می شود. لذا برای استفاده از این پدیده، آگاهی از فیزیک و پیش بینی رفتار آن بسیار ضروری است. باتوجه به اهمیت موضوع در سال های اخیر به واسطه توسعه روش های دینامیک محاسباتی، مطالعات عددی بر روی شبیه سازی فیزیکی پدیده به صورت قابل توجه ای امکان پذیر گشته است .

بطور کلی در شبیهسازی مدلهای مختلف از دو دیدگاه زیر استفاده می شود [1] :

1) مدل لاگرانژای (روش حبابهای مجزا)

2) مدل اويلري (روش پيوسته)

در دیدگاه لاگرا نژای رفتار حبابها بطور مجزا مدنظر قرار میگیرند و از معادلات دینامیک حبابها استفاده می شود. در دیدگاه اویلری جریان به صورت یک مخلوط تقریب زده می شود. برای هر فاز یک معادله پیوستگی بطور مجزا منظور می گردد. در این مدل معادلات بقای جرم هرفاز توسط پارامتر کسر حجمی بیان می گردند. در حقیقت پارامترهای تأثیر گذار بر تشکیل کاواک بر اساس فرایندهای فیزیکی پیچیده ی میباشند. اشنبرگ [2] خلاصهای از دینامیک تشکیل کاواک را ارائه نمود. در عمل شروع کاواک با رشد حبابها آغاز می گردد. این حبابها دارای مخلوطی از بخار آب و گازهای غیر محلول میباشند. وقتی که فشار محلی تا حد فشار بخار کاهش مییابد حبابها تا حد انفجار رشد مىكنند و زمانيكه حبابها به ناحيه پر فشار منتقل می گردند دچار فرو ریختگی می شوند. دینامیک فروریختگی، پیچیده بوده و وابسته به پارامترهای متعددی از قبیل کشش سطحی، تأثیر لزجت و میزان گازهای غیر محلول دارد. در حال حاضر مدل انتقال جرمی در کاواک وجود ندارد که کلیه پارامترهای فوق را در بر بگیرد. مدلهای موجود نشأت گرفته از معادله دینامیک حباب، رایلی-پلیست<sup>1</sup> [3] میباشند. این معادله معرف رشد و فرو ریختگی حباب متقارنی است که در میدان فشار واقع می-باشد. تعدادی از مدل های انتقال جرم در کاواک عبارتند از: مدل سینگهال<sup>°</sup>، مدل اشنر و ساور<sup>3</sup>، مدل زوارت - گربر -بلامری<sup>4</sup>.

جزئیات مربوط به مدلهای انتقال جرم، مختلف میباشند؛ اما در همه مدلها از معادله پیوستگی همراه با ترم چشمه استفاده گردیده است [4]. در ترم چشمه از معادله دینامیک حباب رایلی-پلیست استفاده میشود.

ساوچنکو و همکاران [5] نتایج تجربی بر روی پرتابههای زیرآبی در تونل آب استخراج نمودند و بر اساس نتایج، روابط تجربی جهت محاسبه طول و قطر حباب کاواک در حالت تقارن محوری ارائه نمودند. پینگ و همکاران [6] شکل حباب کاواک دمشی و نیروی پسا حاصل از آن را بهصورت عددی شبیهسازی نمودند و رابطه بین شکل حباب کاواک دمشی و نرخ دمش گاز را بهصورت تجربی ارائه کردند. ژانگ و همکاران [7] مجموعهای از پرتابههای زیرآبی را در تونل آب مداربسته بهصورت تجربی موردمطالعه قراردادند و نمودند. وانگ و همکاران [8] نرخ گاز دمشی در حباب کاواک را موردبررسی مشخصات مربوط به شکل حباب کاواک را بهصورت طبیعی و دمشی استخراج زیرآبی را در تونل آب مداربسته بهصورت تربی موردمطالعه قراردادند و نمودند. وانگ و همکاران [8] نرخ گاز دمشی در حباب کاواک را موردبررسی آزمایشگاهی مقایسه نمودند. بین و همکاران [9] حباب کاواک را به شکل طبیعی و دمشی با استفاده از یک مدل سهبعدی وبر اساس معادله انتقال جرم شبیهسازی نموده و تطابق بین نتایج تجربی و نتایج شبیهسازی را نشان

در معادله دینامیک حباب، تغییرات شعاع حباب نسبت به زمان، فقط تابعی از تغییرات فشار داخل و خارج حباب می باشد و از ترم مشتق دوم تغییرات شعاع حباب، ترم کشش سطحی و ترم دمپینگ لزج صرفنظر گردیده است [13]. بدلیل اینکه تدوین و استخراج مدل های انتقال جرم از معادله پیوستگی به همراه ترم چشمه بطور کامل در پیشینه تحقیقات، بحث وبررسی نشده است، لذا مراحل استخراج مدل ها و فرضیات بکار رفته، با توضیحات لازم و کافی ارائه می شود.

با توجه به اینکه در کارهای گذشته و مطالعات انجام شده، مطالعه و تحقیقی بر روی محاسبه طول کاواک بر مبنای تحلیلی انجام نشده است. در شرایطی که پدیده ابر کاواک<sup>5</sup> تشکیل میگردد، طول کاواک با استفاده از روابط ناشی از نتایج تجربی محاسبه میشود، که مبنای تحلیلی ندارند و روابط متفاوتی میباشند. در این تحقیق جهت بدست آوردن روابط تحلیلی مربوط به محاسبه طول کاواک، با توجه به مدل انتقال جرم، معادله پیوستگی و معادله مومنتوم، براساس روش بزرگی مرتبه متغیرها<sup>6</sup>، سه رابطه تحلیلی بدست آمده، رابطه تحلیلی اول مربوط به محاسبه نسبت طول کاواک به قطر جسم نسبت به عدد کاواک میباشد. رابطه تحلیلی دوم مربوط به محاسبه نسبت به عدد کاواک میباشد. رابطه تحلیلی دوم مربوط به محاسبه نسبت طول کاواک به قطرجسم نسبت به عدد رینولدز میباشد، توسط دو رابطه فوق می توان در محیط جریان، طول کاواک را بر حسب عدد کاواک نسبت به عدد رینولدز میباشد، توسط این رابطه می توان تغییرات عدد کاواک را بر نسبت به عدد رینولدز پیشبینی کرد. ضرایب مجهول مربوط به روابط تحلیلی، در تطبیق نسبت به ندر رینولدز پیشبینی کرد. ضرایب مجهول مربوط به روابط تحلیلی، در تطبیق با نتایج تجربی، حاصل میشوند. میزان خطای روابط تحلیلی بدست آمده نسبت به نتایج تجربی محاسبه شده است.

## 2-روابط حاكم

جریان حاکم بر پدیده مخلوط<sup>7</sup> دو فازی میباشد. در این حالت جرم حجمی، مخلوطی از فاز بخار، فاز مایع وگازهای غیرمحلول میباشد و توسط پارامترکسر حجمی، میزان فازها تعیین میگردد. معادلات پیوستگی و مومنتوم بصورت مخلوط حل میشود. برای هر فاز یک معادله پیوستگی بطور مجزا منظور میگردد. وقتی که جریان بصورت مخلوط در نظر گرفته میشود رابطه (1) معادله پیوستگی جریان مخلوط، رابطه (2) معادله پیوستگی فاز بخار و رابطه (3) معادله پیوستگی فاز مایع را نشان می دهد.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho) + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = \mathbf{0}$$
<sup>(1)</sup>

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha \rho_v) + \nabla \cdot (\alpha \rho_v \vec{V}) = R$$
<sup>(2)</sup>

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( (\mathbf{1} - \alpha) \rho_l \right) + \nabla \cdot \left( (\mathbf{1} - \alpha) \rho_l \vec{V} \right) = -R$$
(3)

که در روابط (1) تا (3)، R نرخ تغییر فاز خالص از مایع به بخار و بخار به

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Rayleigh-Plesset

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Singhal

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Schnerr-Sauer <sup>4</sup> Zwart-Gerber-Blamri

دادند. چانسون [10] مکانیزم پراکندگی گاز دمشی که بهواسطه گرادیان فشار و تنش برشی هست را نشان دادند. وانگ و همکاران [11] روابط بین شکل کاواک و پارامترهای هندسی مربوط به کاواک زا را بهصورت عددی بررسی کردند و فرمولهای تجربی جهت محاسبه طول و قطر حباب کاواک بر روی پرتابههای تحت تأثیر کاواک طبیعی ارائه نمودند. معرفت و همکاران [12] کاواک طبیعی را بر روی سه هندسه متفاوت شبیهسازی کردند و روابط مربوط به محاسبه طول کاواک سه هندسه را پس از شبیهسازی و صحه سنجی ارائه نمودند.

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> Super cavitation

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Order of magnitude

<sup>7</sup> mixture

با توجه به رابطهی (10)، رابطهی (19) بدست می آید.  

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\rho R}{\rho_{\nu} \rho_{l}}$$
(19)

$$R = (n4\pi)^{\frac{1}{2}} (3\alpha)^{\frac{1}{2}} \frac{\rho_l}{\rho_l} \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\rho_l}{\rho_l}}$$
(22) (20) (21) (22) (23)

$$n = \frac{c_{\alpha}}{4\pi R_B^3} \tag{21}$$

$$R = \frac{3\alpha}{R_B} \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{P_B - P}{\rho_l}}$$
(22)

چنانچه فرض کنیم، انتقال جرم بفرم تبخیر باشد، در رابطه (23) فشار داخل حباب، فشار تبخیر خواهد بود و P<sub>B</sub> = P<sub>v</sub> می باشد.

$$R_{\text{evap}} = \frac{3\alpha}{R_B} \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{P_v - P}{\rho_l}}$$
(23)

زمانی که حباب به حداکثر قطر خود برسد، بین نیروی پسا و نیروی کشش رمانی که حباب به حداکثر قطر خود برسد، بین نیروی پسا و نیروی کشش سطحی تعادل برقرار میشود که توسط عدد وبر در رابطه (24) ارائه میگردد.  $\mathbf{W}_{e} = \frac{\rho_{l}R_{B}\nu_{rel}^{2}}{S}$ 

که در آن *S* نیروی کشش سطحی و *v*<sub>rel</sub> سرعت نسبی بین فاز بخار و مایع میباشد. با جایگذاری رابطهی (24) در رابطهی (23)، رابطهی (25) حاصل می گردد.

$$R_{\text{evap}} = \frac{3\alpha \rho_l v_{\text{rel}}^2}{\mathbf{W}_{\text{e}} S} \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{P_v - P}{\rho_l}}$$
(25)  

$$P_r = \frac{3}{\mathbf{W}_{\text{e}}} \sum_{\mathbf{w}_{\text{e}}} \frac{2}{\mathbf{w}_{\text{e}}} \sum_{\mathbf{w}_{\text{e}}}$$

$$R_{\text{evap}} = C \frac{\alpha \rho_l V_{\text{ch}}}{S} \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{P_v - P}{\rho_l}}$$
(26)  

$$f \text{ jrow for example, in the second state of the second$$

$$\alpha = f \frac{\rho_v}{\rho_v}$$

$$(1 - \alpha) = (1 - f) \frac{\rho}{\rho}$$
(28)

با جایگذاری رابطهی (28) در رابطهی (26)، روابط (29) و (30) بدست می آید.

$$P \leq P_v$$
 اگر

$$R_{\text{evap}} = C_e \frac{V_{\text{ch}}}{S} \rho_v \rho_l \sqrt{\frac{2}{3} \frac{P_v - P}{\rho_l}} (1 - f)$$

$$P > P_v S$$
(29)

$$R_{\text{cond}} = C_c \frac{V_{\text{ch}}}{S} \rho_l \rho_l \sqrt{\frac{\frac{2}{3}P - P_v}{\beta_l}} f$$
(30)

سرعت نسبی بین دو فاز معمولا 1 الی 10 درصد سرعت اصلی جریان در نظر گرفته میشود، در جریانهای مغشوش نیز نوسانات سرعت محلی نیز از همین مرتبه میباشد، بنابراین می توان  $V_{\rm ch}$  را با  $\overline{Vk}$  جایگزین نمود که  $\overline{Vk}$ مربوط به انرژی جنبشی جریان مغشوش می باشد [13].

در روابط (30) و (29)، 0/01 = c<sub>c</sub> و 0/02 = c<sub>e</sub> می باشد که بروش تجربی استخراج گردیده است.

مايع مى باشد. از بسط رابطه (2) و (3) رابطه (4) و (5) بدست مى آيد  

$$\frac{\mathbf{D}\alpha}{\mathbf{D}a} + \alpha \left[ \alpha \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) \right] + \alpha \frac{\mathbf{D}\rho_v}{\mathbf{D}a} = R$$
(4)

$$\sum_{v} \frac{\mathbf{D}\alpha}{\mathbf{D}t} + \alpha \left[ \rho_v \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) \right] + \alpha \frac{\mathbf{D}\alpha}{\mathbf{D}t} = R$$

$$\sum_{v} \rho_l \frac{\mathbf{D}\alpha}{\mathbf{D}t} + (\mathbf{1} - \alpha) \left[ \rho_l \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \gamma} \right) \right] + (\mathbf{1} - \alpha) \frac{\mathbf{D}\rho_l}{\mathbf{D}t} = -R$$
(5)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = \mathbf{0}$$
(6)

که p معرف چگالی مخلوط در مرز مشترک میباشند. در مرز مشترک p بعنوان یک مقدار ثابت فرض میشود.

$$\rho_{v} \frac{\mathbf{D}\alpha}{\mathbf{D}t} + \alpha \left[ \rho_{v} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = R \tag{7}$$

$$\rho_l \frac{-\alpha}{\mathbf{D}t} + (\mathbf{1} - \alpha) \left[ \rho_l \left( \frac{\alpha}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = -R \tag{8}$$

$$(\rho_v - \rho_l) \frac{\mathbf{D}\alpha}{\mathbf{D}t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \mathbf{0}$$
<sup>(9)</sup>

چگالی مخلوط توسط رابطه (10) بیان میگردد.  
(10) 
$$\rho = \alpha \rho_v + (1 - \alpha) \rho_l$$

ز بسط رابطهی (1)، رابطهی (11) بدست می آید.  
(11) جا (
$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

از ترکیب رابطه (9) و (11) رابطه (12) بدست می آید.  

$$\frac{D\rho}{Dt} = -(\rho_l - \rho_\nu) \frac{D\alpha}{Dt}$$
(12)

$$\alpha = n \left(\frac{4}{3} \pi R_B^3\right) \tag{13}$$

که *n* تعدادحباب در واحد حجم و  $R_B$  شعاع حباب می باشد. با جایگذاری رابطهی (13) در رابطهی (12)، رابطهی (14) بدست می آید.  $\frac{\mathsf{D}\rho}{\mathsf{D}t} = -(\rho_l - \rho_v) \frac{\mathsf{4}}{\mathsf{3}} \pi n (\mathsf{3} R_B^2) \frac{\mathsf{D} R_B}{\mathsf{D}t}$  (14)

رابطه (14) را می توان بفرم رابطه (15) نوشت.  

$$\frac{D\rho}{Dt} = -(\rho_l - \rho_v)(n4\pi)^{\frac{1}{3}} (3\alpha)^{\frac{2}{3}} \frac{DR_B}{Dt}$$
(15)

معادله دینامیک حباب (رایلی – پلیسیت) بفرم رابطه (16) می باشد.  

$$R_B \frac{\mathbf{D}^2 R_B}{\mathbf{D} t^2} + \frac{\mathbf{3}}{2} (\frac{\mathbf{D} R_B}{\mathbf{D} t})^2 = \frac{P_B - P}{\rho_l} - \frac{4 \vartheta_l}{R_B} \dot{R_B} - \frac{2S}{\rho_l R_B}$$
(16)

معادله دینامیک حباب یک معادله دیفرانسیلی غیرخطی میباشد، لذا با توجه به مفروضاتی که لحاظ میشود، از ترم مشتق دوم یا شتاب مربوط به شعاع حباب در سمت چپ، و ترم دمپینگ لزج با فرض غیر لزج بودن سیال و ترم مربوط به کشش سطحی، ترمهای دوم و سوم سمت راست صرفنظر می گردد. رابطه (17) بدست می آید. (17)

$$\frac{\mathbf{D}R_B}{\mathbf{D}t} = \sqrt{\frac{\mathbf{2}P_B - P}{\mathbf{3}\rho_l}} \tag{17}$$

-1-2 مدل سینگهال با جایگذاری رابطهی (9) در رابطهی (7)، رابطهی (18) حاصل می گردد.  $\frac{D\alpha}{Dt} (1 - \frac{\alpha(\rho_v - \rho_l)}{\rho}) = \frac{R}{\rho_v}$  (18)

🕧 مېندسي مکانيک مدرس، مرداد 1395، دوره 16، شماره 5

#### پیشنهاد روابط تحلیلی جهت برآورد طول ابر کاواک طبیعی بر اساس عدد کاواک و عدد رینولدز

فشار بخار با توجه به نوسانات فشار جریان مغشوش از رابطه (31) و (32) بدست می آید.

$$P_{\nu} = (P_{\text{sat}} + \frac{P'_{\text{turb}}}{2})$$
(31)

$$P'_{\rm turb} = 0.39 \rho k$$
 (32)

با توجه به اینکه جریان اصلی مخلوطی از مایع، بخار مایع و گازهای غیر محلول می باشد، لذا چگالی جریان مخلوط را میتوان بشکل رابطه (33) برحسب کسر حجمی نوشت و بر اساس آن رابطه (34) را بصورت کسر جرمی نوشت.

$$\alpha_v + \alpha_g + (\mathbf{1} - \alpha_v - \alpha_g) = \mathbf{1}$$
(33)

$$\frac{1}{a} = \frac{f_v}{a} + \frac{f_g}{a} + \frac{1 - f_v - f_g}{a}$$
(34)

$$\rho_g = \frac{WP}{RT} \tag{35}$$

W وزن مولکولی گاز، R ثابت گازها، T و P دما و فشار گاز می باشد.

گازهای غیرمحلول در مخلوط جریان ناشی از دمش گاز درون محلول نیز میباشد. مقدار اندک این گاز میتواند، تأثیر گذار باشد، بطوریکه در فشار کم انبساط گاز حاصل شده و کسر حجمی گاز را افزایش میدهد و روی چگالی تأثیر میگذارد، همچنین باعث تغییر آستانه فشار در تغییر فاز میگردد.

$$R_{\text{evap}} = C_e \frac{\sqrt{k}}{S} \rho_v \rho_l \sqrt{\frac{2}{3} \frac{P_v - P}{\rho_l}} (1 - f_v - f_g)$$
(36)

$$R_{\text{cond}} = C_c \frac{\sqrt{k}}{S} \rho_l \rho_l \sqrt{\frac{2}{3} \frac{P - P_v}{\rho_l}} f_v$$
(37)

### 2-2- مدل زوارت -گربر -بلامری

با توجه به رابطهی (7)، ترم دوم را بواسطه پیوستگی، معادل صفر در نظر گرفته و رابطه (38) حاصل میگردد.

$$\rho_v \frac{\mathbf{D}\alpha}{\mathbf{D}t} = R \tag{38}$$

از روابط (13) و (17)، رابطهی (39) بدست می آید.  
(39) 
$$R_{\rm evap} = \frac{3 \alpha \rho_v}{R_B} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{P_v - P}{\rho_l}}$$

با توجه به اینکه فشار محیط کوچکتر و یا بزرگتر از فشار بخار باشد، رابطه (40) ارائه میشود [14] .

$$R_{\text{evap}} = F \frac{3\alpha \rho_{\nu}}{R_B} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{P_{\nu} - P}{\rho_l}} \operatorname{sign}(P_B - P)$$
(40)

F یک ضریب تجربی است، رابطه (40) برای حالت تقطیر مناسب است ولی برای حالت تبخیر بطور فیزیکی ناصحیح و بطور عددی ناپایدار است، دلیل آن اینست که در مراحل اولیه، تشکیل کاواک از مراکز هسته رشد میکند و همچنانکه کسر حجمی بخار افزایش مییابد، چگالی مراکز هسته ای بایستی کاهش یابد. برای تصحیح مدل بجای  $\alpha$  از  $(\alpha - 1)$  ستفاده میگردد. مدل انتقال جرم زوارت -گربر -بلامری [14] در روابط (41) و (42) ارائه می گردد.

$$P \leq P_v$$
 گر

$$R_{\text{evap}} = F_{\text{vap}} \frac{3\alpha_{\text{nuc}}(1-\alpha)\rho_{\nu}}{R_{B}} \sqrt{\frac{2}{3}\frac{P_{\nu}-P}{\rho_{l}}}$$
(41)

$$R_{\text{cond}} = F_{\text{cond}} \frac{3\alpha \rho_v}{R_B} \sqrt{\frac{2P - P_v}{3\rho_l}}$$
(42)

 $\alpha_{\rm nuc} = 5x \, 10^{-4}$  و  $R_B = 1x \, 10^{-6} \, {\rm m}$  (42) و (41) و  $\alpha_{\rm nuc} = 5x \, 10^{-4}$  و  $R_B = 1x \, 10^{-6} \, {\rm m}$  (42) و  $F_{\rm cond} = 0.01$  و  $F_{\rm vap} = 50$ 

### 3-2- مدل اشنر – ساور

ה ה בו

در این مدل طبق رابطه (43) کسر حجمی بخار به تعداد حبابها در واحد حجم مایع ارتباط داده شده است

$$\alpha = \frac{\frac{V_{\nu}}{V_l}}{1 + \frac{V_{\nu}}{V_l}} = \frac{n_3^4 \pi R_B^3}{1 + n_3^4 \pi R_B^3}$$
(43)

که در آن شعاع حباب طبق رابطه (44) است.  

$$R_B = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \frac{3}{4\pi} \frac{1}{n}$$
(44)

در این مدل نرخ انتقال جرم وابسته به  $(\alpha - 1)^{\alpha}$  میباشد، اگر  $0 = \alpha$  ویا  $\alpha = 1$  باشد، انتقال جرم به سمت صفر میل می کند. تعداد حبابها بر واحد حجم مایع مهم میباشد. انتقال جرم در مدل اشنر -ساور [15] از روابط (45) و (46) بدست می آید. اگر q = 2

$$R_{\text{evap}} = \frac{\rho_{\nu}\rho_l}{\rho} \alpha (1 - \alpha) \frac{3}{R_B} \sqrt{\frac{2P_{\nu} - P}{3\rho_l}}$$
(45)

$$R_{\text{cond}} = \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \alpha (1 - \alpha) \frac{\mathbf{3}}{R_B} \sqrt{\frac{\mathbf{2} P - P_v}{\mathbf{3} \rho_l}}$$

## 4-2 -مدل انتقال جرم با احتساب ترم کشش سطحی

شروع کاواک الزاما در فشار بخار اتفاق نمیافتد و در یک فشار بحرانی که کمتر از فشار بخار میباشد، شکل می گیرد. این تأخیر در شروع کاواک بواسطه کشش سطحی میباشد. بعبارت دیگر کشش سطحی باعث میگردد که تأخیری در آغاز و شروع کاواک بوجود آورد. در بخشی از فرایند که شعاع حبابها کوچک میباشد، تأثیرات چشمگیر است و با رشد حبابها وافزایش شعاع حباب این ترم کاهش مییابد. بنابر این برای زمانی که حبابها ریز می باشند، اثر کشش سطحی قابل ملاحظه می باشد. مراحل رشد و متلاشی شدن حبابها در شعاعهای مختلف و با احتساب کشش سطحی نشان می-دهد که با افزایش کشش سطحی زمان متلاشی شدن و فرو ریختن حبابها کاهش مییابد. تأثیر این موضوع برای حبابهای با شعاع کوچکتر قابل ملاحظه میباشد [16]. مشاهده شد که در رابطه (16) از ترم کشش سطحی صرفنظر گردید. با توجه به اینکه شعاع حبابها در زمان تشکیل حباب کاواک در محدوده 4<sup>-1</sup>0 – 10<sup>-2</sup> میلیمتر است و شعاع حباب در مخرج کسر بوده بنابراین در مراحل تشکیل وشکل گیری کاواک تأثیر گذار میباشد. نرخ انتقال جرم با توجه به رابطه (47) تابعیت پارامترهای زیر است.  $R = f(\rho_{\nu}, \rho_{\nu}, \rho_{l}, \alpha, R_{B}, P, P_{\nu}, n)$ (47)

اگردر رابطه (16) از ترم کشش سطحی صرفنظر نشود و در رابطه (48) این ترم منظور گردد، داریم:

جهت محاسبه نسبت طول كاواك از آنها استفاده مىشود، رابطه گارابديان <sup>1</sup> (61)، ریچارد<sup>2</sup> (62) ، واید<sup>3</sup> (63)، [17] است. روابط (61) تا (63) نشان مىدهد كه نسبت طول كاواك به قطر جسم، فقط تابع عدد كاواك مي باشد.  $\frac{L_c}{d} = \frac{\sqrt{0.827(1 + \sigma)}}{1 + \sigma}$ 1 (61) d σ σ **+ 0.008**  $\frac{L_c}{c} = \frac{1}{c}$ (62) σ(0.066 + 1.7σ) d  $\frac{L_c}{J} = \frac{1}{\sigma^{1.118}}$ (63) دد کاواک، d قطر جسم،  $\sigma$  عدد کاواک می باشد.  $L_c$ با توجه به رابطه تناسب (60) و نتايج تجربي [17] كه در شكل 1، نشانداده شده است رابطه تحليلی (64) بدست می آيد.

$$\frac{L_c}{d} = \frac{3.33}{\sqrt{\sigma} - 0.125} - 3.5 \tag{6}$$

نسبت طول کاواک به قطر آن فقط تابعی از عدد کاواک میباشد، در شکل 1 نتايج حاصل از رابطه (64) با نتايج حاصل از [7] صحتسنجي گرديد.

## 2-3-رابطه بين عدد رينولدز و طول كاواك طبيعي

(67)

u

1,2

از هم مرتبه بودن ترمهای لزجت و اینرسی در رابطهی (56)، روابط (65) و (66) بدست مي آيد.

$$\frac{u_{\omega}^{2}}{L_{c}} \sim \vartheta \frac{u_{\omega}}{d^{2}} \rightarrow \frac{L_{c}^{2}}{d^{2}} \sim \frac{u_{\omega}L_{c}}{\vartheta} \sim \mathbf{R}_{e}$$

$$(65)$$

$$\frac{a_c}{d} \sim \sqrt{\mathbf{R}_e} \tag{66}$$

با توجه به رابطهی تناسب (66) و نتایج تجربی [17] که در شکل 2 ، نشان داده شده است. رابطه تحليلي (67) بدست مي آيد.

$$\frac{L_c}{d} = 3.58\sqrt{R_e x 10^{-6}} - 3$$

از عدد رینولدز **10<sup>7</sup> × 7** به بعد انحرافی بین نتایج تجربی و رابطه پیشنهادی، ساهده می شود. این میزان انحراف تا عدد رینولدز **10<sup>7</sup> × 7.74** که متناسب با عدد کاواک 0.05 است، معادل 5% میباشد. در شکل 2 نتایج حاصل از رابطه (67) با نتایج حاصل از [7] صحت سنجی گردید.





<sup>1</sup>Garabedian

<sup>2</sup> Richard <sup>3</sup> Waid

$$\frac{\mathbf{D}R_B}{\mathbf{D}t} = \sqrt{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\frac{P_v - P}{\rho_l} - \frac{\mathbf{4}S}{\mathbf{3}\rho_l R_B}}$$
(48)

مقدار S = 0.072 N/m مقدار آب میباشد. با جایگذاری در رابطه (45)، روابط (49) و (50) حاصل می گردد .  $P \leq P_v$  |

$$R_{\text{evap}} = \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \alpha (1 - \alpha) \frac{\mathbf{3}}{R_B} \sqrt{\frac{\mathbf{2} P_v - P}{\mathbf{3} \rho_l} - \frac{\mathbf{4}S}{\mathbf{3} \rho_l R_B}}$$
(49)

 $P \ge P_v$  اگر

$$R_{\rm cond} = \frac{\rho_{\nu}\rho_l}{\rho} \alpha (1 - \alpha) \frac{\mathbf{3}}{R_B} \sqrt{\frac{\mathbf{2} P - P_{\nu}}{\mathbf{3} \rho_l} - \frac{\mathbf{4}S}{\mathbf{3} \rho_l R_B}}$$
(50)

روابط (49) و (50)، بر اساس معادلات انتقال جرم می باشد که در آن ها نقش کشش سطحی آب در معادله دینامیک حباب نیز لحاظ گردیده است.

با توجه به معادلات پیوستگی، مومنتوم و با استفاده از روش مرتبه متغیرها می توان ترمهای موجود در معادلات را که در حال حاضر نمی توان آنها را بصورت تحلیلی حل کرد، ارزیابی نمود. لذا با این روش ترمهای کم اهمیت تر را ميتوان حذف و معادلات باقيمانده را حل نمود.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \mathbf{0}$$
(51)

با توجه به تراکم ناپذیری و دائم بودن جریان رابطهی (52) داریم.  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \mathbf{0}$ (52)

مرتبه متغیر 
$$u$$
 را معادل  $u_\infty$  و  $x$  را معادل  $L_c$  (طول کاواک) و  $y$  را معادا  $d$  (طول کاواک) و  $y$  را معادا  $d$  (قطر جسم) در نظر می گیریم. رابطهی (53) داریم.

$$\frac{u_{\infty}}{L_c} \sim \frac{v}{d} \rightarrow v \sim \frac{u_{\infty}d}{L_c}$$
(53)

رابطه (54) و (55) معادلات مومنتوم در جهت x,y را نشان می دهد.  

$$\frac{\partial u}{\partial x} + n \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\mathbf{1}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \vartheta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g$$
(55)

$$\frac{u_{\infty}}{L_c}, \frac{u_{\infty}v}{d} \sim -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{L_c}, \vartheta \frac{u_{\infty}}{L_c^2}, \vartheta \frac{u_{\infty}}{d^2}, g$$
(56)

$$\frac{u_{\infty}v}{L_c}, \frac{v^2}{d} \sim -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{d}, \vartheta \frac{v}{L_c^2}, \vartheta \frac{v}{d^2}, g$$
(57)

$$\frac{d_{\infty}}{L_c^2} \ll \frac{d_{\infty}}{d^2} \Rightarrow \frac{v}{L_c^2} \ll \frac{v}{d^2}$$
(58)

بنابراین از ترمهای دوم سمت راست روابط (56) و (57) در مقابل ترمهای سوم صرفنظر می گردد. با توجه به رابطه (57) و هم مرتبه بودن ترم فشار و ترم اينرسي روابط (59) و (60) بدست مي آيد.

$$\frac{u_{\infty}v}{L_c} \sim \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{d} , \frac{u_{\infty}^2 d}{L_c^2} \sim \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{d} \rightarrow \left(\frac{d}{L_c}\right)^2 \sim \frac{\Delta p}{\rho u_{\infty}^2} \sim \sigma$$
(59)

$$\frac{d}{d} \sim \sqrt{\sigma} \tag{60}$$

رابطه (60) نشان میدهد که بطور تحلیلی نسبت طول کاواک به قطر جسم، متناسب باعکس ریشه عدد کاواک می باشد و افزایش نسبت طول کاواک به قطر جسم، رابطه مستقيم با كاهش عدد كاواك دارد. روابط تجربي متفاوتي كه



Fig. 2 Variation cavitation length with Reynolds number شکل 2 تغییر طول کاواک نسبت به عدد رینولدز

جسم و عدد رینولدز ارائه نشده و مبنای همه روابط عدد کاواک میباشد، با توجه به رابطه تحلیلی (68) در حالتی که کاواک تشکیل میگردد، میتوان نسبت طول کاواک به قطر جسم را بر اساس عدد رینولدز محاسبه نمود

#### 3-3 رابطه بین عدد کاواک و عدد رینولدز

با توجه به رابطهی عدد کاواک- طول کاواک طبیعی و عدد رینولدز- طول کاواک طبیعی، میتوان ارتباط بین عدد کاواک و عدد رینولدز را بفرم رابطه (68) نشان داد.

$$\frac{c}{l} \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sim \sqrt{\mathbf{R}_{\rm e}} \rightarrow \sigma \sim \frac{1}{\mathbf{R}_{\rm e}} \tag{68}$$

با توجه به رابطه تناسب (68) و نتایج تجربی [17] که در شکل 3 ، نشان داده شده است. رابطه تحلیلی (69) بدست می آید.

$$\sigma = \frac{1.3}{R_0 \times 10^{-6} + 0.94} + 0.05 \tag{69}$$

خطای بین رابطه پیشنهادی و مقادیر تجربی در اعداد کاواک کمتر از 0.1. معادل 1.6% می باشد.



Fig. 3 Variation cavitation number with Reynolds number شکل3 تغییر عدد کاواک نسبت به عدد رینولدز

رابطه (69) نشان میدهد که عدد کاواک و عدد رینولدز معکوس یکدیگر هستند.

#### 4-نتيجه گيري

در محیط ابرکاواک، محاسبه طول کاواک طبیعی حائز اهمیت میباشد بر اساس تحقيقاتي كه تاكنون صورت گرفته، طول كاواك طبيعي تابع عدد كاواك بوده و با استفاده از روابط ناشی از نتایج تجربی محاسبه شده، که مبنای تحلیلی ندارند. این روابط توابع مختلفی میباشند. در این تحقیق جهت بدست آوردن روابط تحليلي مربوط به محاسبه طول كاواك طبيعي، براساس روش مرتبه بزرگي متغيرها و با استفاده از مدل انتقال جرم، معادلات پیوستگی و مومنتوم، سه رابطه تحلیلی بدست آمده است. رابطه تحليلي اول مربوط به محاسبه نسبت طول كاواك به قطر جسم نسبت به عدد کاواک می باشد. رابطه فوق نشان میدهد، که نسبت طول کاواک به قطر جسم فقط تابعی از عدد کاواک میباشد و با عکس ریشه آن ارتباط دارد، لذا نسبت طول كاواك به قطر جسم با كاهش عدد كاواك افزايش مى يابد. رابطه تحليلى دوم مربوط به محاسبه نسبت طول كاواك به قطر جسم نسبت به عدد رينولدز مى باشد، این رابطه نشان میدهد که نسبت طول کاواک به قطر جسم با ریشه عدد رينولدز رابطه مستقيم دارد و با افزايش عدد رينولدز نسبت طول كاواك به قطر جسم نیز افزایش می یابد. خطای این رابطه تحلیلی نسبت به نتایج تجربی، تا عدد کاواک 0.05 كمتر از 5 درصد است. این خطا قابل اغماض بوده و می توان بر اساس این رابطه تحلیلی، در محیط ابر کاواک نسبت طول کاواک به قطر جسم را متناسب با افزایش عدد رینولدز محاسبه نمود. رابطهی تحلیلی سوم مربوط به محاسبه عدد كاواك نسبت به عدد رينولدز مىباشد، اين رابطه نشان مىدهد كه مطابق با نتايج تجربی، عدد کاواک و عدد رینولدز معکوس یکدیگر میباشند و با افزایش عدد رینولدز، عدد کاواک کاهش مییابد. خطای این رابطه نسبت به نتایج تجربی کمتر از 2 درصد می باشد. نتایج حاصل از روابط بدست آمده، منطبق با نتایج تجربی و فیزیک پدیده ابرکاواک میباشند. روابط تحلیلی بدست آمده جایگزین مناسبی برای روابط تجربی میباشند و بوسیله این روابط می وان در محاسبات تجربی و عددی طول کاواک را بر حسب عدد کاواک و عدد رینولدز پیش بینی نمود.





- [2] P. Eisenberg, Cavitation. Handbook of Fluid Mechanics, McGraw Hill. 1961.
- [3] C. E. Brennen, Cavitation and Bubble Dynamics, pp. 48-67, London: Oxford University Press, 1995.
- [4] I. Senocak, W. Shyy, Evaluation of cavitation models for Navier-Stokes computations, ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, 2002.
- [5] Y.N. Savchenko, Y.D. Vlanesko, V.N. Semenenko, Experimental study of high-speed cavitated flows, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 26, No. 3, pp. 365-374, 1999.
- [6] J. Li-ping, W. Cong, W. Ying-jie et al, Numerical simulation of artificial ventilated cavity, Journal of Hydrodynamics, Vol. 18, No. 3, pp. 273-279, 2006.
- [7] W.W. Zhang, Y.J. Wei, J.Z. Zhang, C. Wang, K.P. Yu, Experimental research on the shape characters of natural and ventilated supercavitation, Journal of Hydrodynamics, Vol. B 19, No. 5, pp. 564-571, 2007.
- [8] Z. Wang, K.P. Yu, X.H. Wan, Research on the gas-leakage rate of unsteady ventilated supercavity, Journal of Hydrodynamics, Vol. 22, No. 5, pp. 778-783, 2010.
- [9] J. Bin, L. Xian, P.Xiao, Z. Yao, Numerical investigation of the ventilated cavitating flow around an under-water vehicle based on a three-component cavitation model, Journal of Hydrodynamics, Vol. 22, No. 6, pp. 753-759, 2010.
- [10] H. Chanson, Air bubble entrainment in free-surface turbulent shear flows, pp. 127-135, London, Uk: Academic Press, 1997.
- [11] H.B. Wang, J.Z. Zhang, Y.J. Wei, Study on relations between cavity form and typical cavitator parameters, Journal of Hydrodynamics, Vol. 20, No. 2, pp. 251-257, 2005.
- [12] M. Maerefat, S. Tahmasebi, M. R. Ansari, Numerical simulation of super-cavitating flow and calculation of cavity length around a submersible vehicle, Modares Mechanical Engineering, Vol. 15, No. 8, pp. 187-196, 2015. (in Persian فارسى)
- [13] A. K. Singhal, H. Li, M. Athavale, Mathematical Basis and Validation of the Full Cavitation Model, Journal of Fluids Engineering, Vol. 124, No. 3, pp. 617-624, 2002.
- [14] P. J. Zwart, A. G. Gerber, T. Belamri, A Two-Phase Flow Model for Predicting Cavitation Dynamics, Proceedings of The 5th International Conference on Multiphase Flow, Yokohama, Japan, 2004.
- [15] G. H. Schnerr, J. Sauer, Physical and numerical modelling of The unsteady cavitation dynamics, Proceedings of International Conference on Multiphase Flow, 2001.
- Ehsan Samiei, M. Shams, A novel numerical scheme for the [16] investigation of surface tension effects on growth and collapse stages of cavitation bubbles, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 30, No. 1, pp. 41-50, 2011.
- [17] T. J. Schauer, An Experimental study of a ventilated supercavitating vehicle, MS thesis in aerospace engineering, university of minnesota, 2003.

- (kg/s) نرخ انتقال جرم بفرم تقطیر R<sub>cond</sub>
  - R عدد رینولدز
  - ترم چشمه (kg/m<sup>3</sup>) R
    - (m) شعاع حباب  $R_B$
  - کشش سطحی (N/m<sup>2</sup>) S
    - زمان (s) t
    - مولفه سرعت (m/s) u
  - سرعت جریان آزاد (m/s)  $u_{\alpha}$
  - بردار سرعت (m/s)  $\vec{V}$ 
    - سرعت مشخصه (m/s)  $V_{\rm ch}$ 
      - حجم بخار (m<sup>3</sup>)  $V_{\nu}$
      - حجم مايع (m<sup>3</sup>)
    - $V_l$
    - مولفه سرعت (m/s) v

W. عدد وبر

#### علائم يونان

- $\alpha_{\nu}$
- کسر حجمی گاز
  - عدد کاواک σ
- لزجت جريان آرام (kg/ms)
- لزجت جريان مغشوش (kg/ms)  $\mu_t$ 
  - جرم حجمی (kg/m<sup>3</sup>)
  - جرم حجمی بخار (kg/m<sup>3</sup>)
  - جرم حجمی گاز (kg/m<sup>3</sup>)
  - جرم حجمی سیال (kg/m<sup>3</sup>)
  - کسر حجمی گاز محلول در آب
- $(m^2/s^3)$  نرخ اتلاف انرژی مغشوش (m^2/s^3)
  - کسر جرمی
  - کسر جرمی بخار  $f_v$

6-مراجع [1] J. Franc, J. Michel, Fundamentals of cavitation, pp. 98-124, Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2005.