مجله مهندسی مکانیک مدرس، شهریور 1395، دوره 16، شماره 6، ص‌ص 101-107

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

مقایسه دو شیوه برای حل معادله غیرخطی حاکم برای ارتعاشات میکرو حسگرهای الکترواستاتیکی

محمد فتحعلی‌لو[1*]، مجتبی رضایی[2]

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه
2- محقق، پژوهشکده علوم و فناوری دفاعی شمال‌غرب، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، ارومیه
* ارومیه، صندوق پستی 5756151818، m.fathalilou@urmia.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 11 بهمن 1394
پذیرش: 02 اردیبهشت 1395
ارائه در سایت: 25 خرداد 1395

کلید واژگان:
میکرو حسگر
الکترواستاتیک
حل عددی
پولین
نقاط تعادلی

چکیده

میکرو حسگرهای الکترواستاتیکی به عنوان بخشی از سیستم‌های میکروالکترومکانیکی دارای جایگاه ویژه‌ای در تکنولوژی پیشرفته می‌باشند. از همین رو مدل‌سازی دقیق و ارائه روش‌های مناسب برای حل معادلات حاکم بر رفتار مکانیکی و ارتعاشی آن‌ها از اهمیت بالایی برخوردار است. با توجه به ماهیت غیرخطی تحریک الکترواستاتیکی از روش‌های عددی برای حل معادلات استفاده می‌شود. در این مقاله یک مقایسه تحلیلی بین دو شیوه برای اعمال روش گالرکین جهت حل معادله دیفرانسیل ارتعاشی انجام شده است. در شیوه اول که در بیشتر تحقیقات گذشته از آن استفاده شده است، ابتدا دو طرف معادله دیفرانسیلی حاکم در معکوس نیروی الکترواستاتیکی ضرب شده و سپس روش گالرکین اعمال می‌شود، در حالی که در شیوه دوم که در کار حاضر ارائه می‌شود روش گالرکین به‌طور مستقیم بر روی معادله دیفرانسیل حاکم اعمال می‌شود. به‌عنوان مطالعه موردی از تئوری غیرموضعی برای استخراج معادله حاکم استفاده شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهند که برای یک میکروتیر داده شده، اگرچه در بیشتر موارد هر دو شیوه مقدار یکسانی برای ولتاژ پولین محاسبه می‌کنند ولی شیوه اول در برخی موارد قادر به شناسایی نقطه پولین و نیز برخی نقاط تعادلی نمی‌باشد. بنابراین نمودارهای تعادلی و صفحات فازی کیفیت متفاوتی با استفاده از دو شیوه خواهند داشت. هم چنین نتایج نشان می‌دهند که نقطه تکین به عنوان موقعیت صفحه پایینی به صورت یک جاذب قوی در نمودارهای فازی عمل می‌کند که البته شیوه اول بر خلاف شیوه دوم قادر به شناسایی این نقطه نیز نیست.

A comparison between two approaches for solving the governing nonlinear equation of vibrations of electrostatic micro-sensors

Mohammad Fathalilou[1*], Mojtaba Rezaee[2]

1- Mechanical Engineering Department, Urmia University, Urmia, Iran
2- Sciences and Technology Research Center of North-West, Urmia, Iran
* P.O.B. 5756151818, Urmia, Iran, m.fathalilou@urmia.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 31 January 2016
Accepted 21 April 2016
Available Online 14 June 2016

Keywords:
Micro Sensor
Electrostatic
Numerical Solution
Pull-in
Fixed Points

ABSTRACT

Electrostatic micro-sensors as a part of microelectromechanical systems (MEMS) play an important role in modern technology. So, precise modeling and suitable solutions for solving the governing mechanical and vibrational equations of them are of great importance. Due to the nonlinear nature of the electrostatic excitation, numerical methods are used to solve the governing equations. This paper presents a comparison between two Galerkin-based approaches to solve them. In the first approach, as used by many researchers in the literature, both sides of the equations are multiplied with the denominator of the electrical force term and then the Galerkin method is applied, whereas in the second approach, we apply direct Galerkin method to solve the equation. As a case study the nonlocal elasticity theory has been used to obtain the governing equation. The results show that for a given beam, although the both approaches predict same pull-in voltage in most cases, but the first approach cannot predict the pull-in instability in some cases and also misses some fixed points. So, the bifurcation diagrams and phase portraits have different quality in the two approaches. Also, the results show that the singular point which is the position of the substrate plate, acts as a strong attractor in the phase diagrams which the first approach is unable to predict it.

1- مقدمه

در سال‌های اخیر میکروحسگرها به‌عنوان بخشی از سیستم‌های میکروالکترومکانیکی (ممز[1]) اهمیت بسیار بالایی در تکنولوژی مدرن پیدا کرده‌اند. این سیستم‌ها تاثیر روزافزونی بر روی اکثر جنبه‌های تکنولوژی پیشرفته از هوا

[1] MEMS

Please cite this article using:
برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:
M. Fathalilou, M. Rezaee, A comparison between two approaches for solving the governing nonlinear equation of vibrations of electrostatic micro-sensors, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 6, pp. 101-107, 2016 (in Persian)

فضا تا بیوتکنولوژی گذاشته‌اند [1-3]. این به‌دلیل توانایی ممز در کوچکی ابعاد، کاهش قیمت و مصرف انرژی پایین است. میکروتیرهای با تحریک الکترواستاتیکی از جمله پرکاربردترین میکروحسگرها هستند. هنگامی که یک میکروتیر بین نیروی الکترواستاتیکی و نیروی الاستیک سازه در حال تعادل قرار می‌گیرد، با افزایش ولتاژ اعمالی، هر دو نیرو افزایش می‌یابند. هنگامی که ولتاژ به یک مقدار بحرانی می‌رسد، ناپایداری پولین[1] اتفاق می‌افتد. پولین نقطه‌ایست که در آن نیروی الاستیک دیگر نمی‌تواند نیروی الکترواستاتیکی را بالانس نماید. افزایش بیشتر ولتاژ باعث جهش ناگهانی تیر متحرک و چسبیدن آن به تیر ثابت پایینی می‌شود. از نقطه نظر دینامیکی، پولین یک ناپایداری از نوع سدل-نود می‌باشد[2] [3]. محققین زیادی نشان داده‌اند که مدل‌سازی میکروسیستم‌های الکترواستاتیکی به‌دلیل وجود رفتارهای غیرخطی در مواجهه با چالش‌های فراوانی قرار دارد [3]. یکی از منابع اصلی این رفتار طبیعت غیرخطی نیروی تحریک الکترواستاتیکی در کنار ترم‌های غیرخطی ناشی از کشش صفحه میانی، میرایی فیلم فشرده سیال و غیره می‌باشد. برخی از محققین روش‌های مختلفی برای مواجهه با نیروی غیرخطی الکترواستاتیکی در این گونه سازه‌ها ارائه نموده‌اند [5,4]. عبدالرحمن و همکارانش [6] از ترکیب روش پرتابی با مسئله مقدار مرزی غیرخطی برای حل معادله استاتیکی غیرخطی حاکم بر تغییر شکل میکروتیر خازنی استفاده کرده‌اند. تیلمانز و لکتنبرگ [7] برای حل همان مسئله از روش ریلی ریتز استفاده کرده‌اند. آن‌ها این فرمولاسیون را برای استخراج یک عبارت تحلیلی برای ولتاژ پولین براساس روش‌های انرژی به‌کار بسته‌اند. اینتما و تیلمانز [8] از الگوریتم پسرونده اولر برای حل معادله استاتیکی حاکم بر تغییر شکل میکروتیرها استفاده کرده‌اند.

عملگرهای ریاضی مانند آنالیز متغیر حالت و روش‌های بسط توابع پایه نیز معمولا برای تبدیل معادلات دیفرانسیل جزئی به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مورد استفاده قرار گرفته است که به‌عنوان روش‌های کاهش مرتبه شناخته می‌شوند [4]. یونس و همکارانش [9] و نایفه و همکارانش [4] برای حل معادله غیرخطی حاکم بر میکروتیرهای الکترواستاتیکی روش مدل کاهش مرتبه مبتنی بر روش گالرکین را اعمال کرده‌اند. آن‌ها قبل از اعمال این روش ابتدا دو طرف معادله حاکم را در معکوس نیروی الکترواستاتیکی ضرب نموده‌اند تا غیرخطی بودن ترم نیرویی را از بین ببرند. با پیروی از آن‌ها برخی محققین دیگر نیز از همین دیدگاه برای برخورد با ترم غیرخطی نیروی الکترواستاتیکی استفاده نموده‌اند [11,10].

رئود و همکارانش [12] قبل از اعمال روش گالرکین از تخمین ترم نیرویی با بسط به چند ترم محدود از سری تیلور استفاده نموده‌اند. روزیکونی و همکارانش [13] یک روش کاهش مرتبه به‌صورت ترکیبی از روش گالرکین و تخمین پد[3] برای حل معادله در نظر گرفته‌اند. دوریئو و همکارانش [14] مدل کاهش مرتبه‌ای معرفی کرده‌اند که در آن از تخمین چند جمله‌ای در کنار تخمین پد برای برخورد با غیرخطی بودن ترم نیروی الکترواستاتیکی استفاده نموده‌اند.

تاکنون چندین مقاله مروری از محققین منتشر شده است که به بررسی روش‌های مختلف ارائه شده جهت مدل‌سازی، حل عددی و به‌ویژه نحوه برخورد با ترم غیرخطی نیروی الکترواستاتیکی در میکروتیرهای الکترواستاتیکی پرداخته‌اند [17-15,12,4].

از نقطه نظر الاستیسیته محققین زیادی نشان دادند که برای سازه‌هایی در ابعاد میکرونی و زیر میکرونی مواد رفتار وابسته به اندازه در تغییر شکل‌شان از خود بروز می‌دهند [18-21]. در برخی از مواد اختلاف قابل توجهی بین نتایج تجربی و نتایج تئوری حاصل از الاستیسیته کلاسیک مشاهد شده است. این اختلاف عمدتا به دلیل غلبه ساختار اتمی مواد است که در الاست

یسیته کلاسیک نادیده گرفته می‌شود. بنابراین ممکن است رفتار استاتیکی و دینامیکی میکروسازه‌ها را نتوان با الاستیسیته کلاسیک مدل‌سازی کرد و باید از تئوری‌های غیرکلاسیک الاستیسیته استفاده نمود. یکی از این تئوری‌های غیرکلاسیک تئوری غیرموضعی می‌باشد که در سال 1972 توسط ارینگن [21] مطرح شد. در این تئوری فرض بر این است که در یک جسم تحت تنش، تنش در یک نقطه نه تنها تابعی از کرنش در همان نقطه، بلکه کرنش در تمامی نقاط جسم است. این فرض منجر به در نظر گرفتن نیروهای بین اتمی و در نتیجه پارامتر مشخصه طولی[4] در معادلات متشکله[5] می‌شود. تاکنون محققین زیادی مانند وانگ و همکارانش [22]، ردی و پانگ [20]، ولیلو و همکارانش [23] از این تئوری برای مدل‌سازی رفتار مکانیکی میکروتیرها استفاده نموده‌اند.

هدف از این مقاله ارائه گزارشی است که نشان می‌دهد ضرب طرفین معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار ارتعاشی میکروحسگرهای مبتنی بر میکروتیرهای الکترواستاتیکی جهت از بین بردن غیرخطی بودن ترم نیرویی، که قبلا توسط برخی محققین ارائه شده است، ممکن است در برخی موارد قابل استفاده نباشد. در ابتدا به مدل‌سازی رفتار ارتعاشی میکروتیر خازنی با استفاده از تئوری غیرموضعی پرداخته شده و سپس معادله دیفرانسیل حاکم با استفاده از روش گالرکین و با در نظر گرفتن دو شیوه حل شده است. در شیوه اول دو طرف معادله حاکم در معکوس نیروی الکترواستاتیکی ضرب شده و سپس روش گالرکین اعمال شده است. در شیوه دوم روش گالرکین مستقیما بر روی معادله حاکم اعمال شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهند که در برخی موارد شیوه اول نمی‌تواند تعداد و نوع نقاط تعادلی را به درستی پیش‌بینی کند در حالی که شیوه دوم چنین نقصی ندارد. هم چنین نشان داده شده است که صفحه ثابت پایینی در میکروساختارهای خازنی به عنوان یک جاذب قوی در صفحه فازی عمل می‌کند که البته شیوه اول قادر به شناسایی موقعیت آن نیز نمی‌باشد.

2- مدل‌سازی ریاضی میکروتیر الکترواستاتیکی

"شکل 1" شماتیکی از یک میکروحسگر الکترواستاتیکی را نشان می‌دهد که از دو الکترود موازی تشکیل شده است. هنگامی که ولتاژ الکترواستاتیکی بین دو الکترود اعمال می‌شود، الکترود (میکروتیر) متحرک دوسرگیردار بالایی به سمت صفحه ساکن پایینی کشیده می‌شود.

حال معادلات حاکم بر رفتار استاتیکی و دینامیکی میکروتیر با در نظر گرفتن تئوری غیرموضعی ارائه می‌شوند. با استفاده از سیستم مختصات معرفی شده در "شکل 1"، مولفه‌های بردار جابه جایی با فرضیات اولر- برنولی به فرم معادله (1) نوشته می‌شود:

$$u = u_0 - z\frac{\partial w}{\partial x}, v = v_0, w = w_0 = w(x,t) \tag{1}$$

که در این رابطه u، v و w به‌ترتیب مولفه‌های بردار جابه جایی در

[1] Pull-in
[2] Saddle-node
[3] Padé approximation
[4] Length scale parameter
[5] Constitutive equations

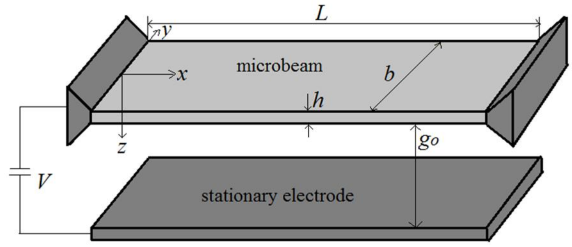

Fig. 1 Electrostatically-actuated clamped-clamped microbeam

شکل 1 میکروتیر دوسرگیردار با تحریک الکترواستاتیکی

راستای محورهای x، y و z می‌باشند. اندیس صفر در روابط بالا نشان دهنده مقادیر جابه جایی صفحه میانی در راستاهای نشان داده شده است. رابطه متشکله برای تیرها با استفاده از تئوری غیرموضعی به فرم معادله (2) نوشته می‌شود [23]:

$$\sigma_{xx} - \mu\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2} = E\varepsilon_{xx} \quad , \quad \varepsilon_{xx} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \rightarrow \sigma_{xx} - \mu\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2} = -Ez\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (2)$$

که در این رابطه ε و σ به ترتیب تانسورهای کرنش و تنش می‌باشند. E مدول الاستیسیته ماده و μ پارامتر غیرموضعی می‌باشد. لازم به ذکر است که به ازای $\mu = 0$، معادله (2) رابطه متشکله معمولی برای تیر اولر- برنولی با در نظر گرفتن تئوری کلاسیک الاستیسیته می‌باشد. با استفاده از اصل همیلتون و در نظر گرفتن ترم نیروی الکترواستاتیکی $q = \varepsilon_0 bv^2/2(g_0 - w)^2$، معادله حاکم بر ارتعاشات عرضی میکروتیر با در نظر گرفتن تئوری غیرموضعی به فرم معادله (3) نوشته می‌شود [23]:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu\left[\frac{3\varepsilon_0 bV^2}{(g_0-w)^4}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\varepsilon_0 bV^2}{(g_0-w)^3}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho A\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}\right] - \frac{\varepsilon_0 bV^2}{2(g_0-w)^2} = 0 \qquad (3)$$

که در این رابطه $A = bh$ مساحت سطح مقطع تیر و b، h و g_0 به ترتیب عرض، ضخامت و فاصله اولیه بین دو صفحه را نشان می‌دهند.

برای راحتی آنالیز معادله (3) می‌تواند به فرم بی بعد نوشته شود. بنابراین پارامترهای بی بعد به شکل معادله (4) تعریف می‌شوند [4]:

$$\hat{w} = \frac{w}{g_0}\ , \hat{x} = \frac{x}{L}\ , \hat{t} = t\left(\frac{\rho AL^4}{EI}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (4)$$

با جای‌گذاری این متغیرها در معادله (3) معادله بی‌بعد حاکم به فرم معادله (5) نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial\hat{x}^4} + \frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{t}^2} + D_1\left[\frac{V^2}{(1-\hat{w})^4}\left(\frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{x}}\right)^2 + D_2\frac{V^2}{(1-\hat{w})^3}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}^2} + D_3\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial\hat{x}^2\partial\hat{t}^2}\right] = D_4\frac{V^2}{(1-\hat{w})^2} \qquad (5)$$

معادله استاتیکی حاکم نیز با حذف ترم‌های وابسته به زمان از این معادله به شکل معادله (6) استخراج می‌شود:

$$\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial\hat{x}^4} + D_1\frac{V^2}{(1-\hat{w})^4}\left(\frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{x}}\right)^2 + D_2\frac{V^2}{(1-\hat{w})^3}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}^2} = D_4\frac{V^2}{(1-\hat{w})^2} \qquad (6)$$

که در این روابط:

$$D_1 = \frac{3\mu\varepsilon_0 bL^2}{EIg_0^3}, D_2 = \frac{\mu\varepsilon_0 bL^2}{EIg_0^3}, D_3 = \frac{-\mu}{L^2}, D_4 = \frac{\varepsilon_0 bL^4}{2EIg_0^3} \qquad (7)$$

حال با حل این معادلات می‌توان نقاط تعادلی و پایداری آن‌ها را مورد بررسی قرار داد.

لازم به ذکر است که با قرار دادن $\mu = 0$ در این معادلات به معادلات حاکم بر رفتار دینامیکی و استاتیکی میکروتیر با استفاده از تئوری کلاسیک الاستیسیته خواهیم رسید.

3- آنالیز عددی

برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی تیر نیاز به حل مسئله مقدار ویژه خواهیم داشت. به همین منظور ارتعاشات آزاد میکروتیر (با حذف ترم نیرویی از معادله (5) را در نظر می‌گیریم. ابتدا با جای‌گذاری $\hat{w}(\hat{x},\hat{t}) = \varphi(\hat{x})e^{j\hat{\omega}\hat{t}}$ در معادله (5) خواهیم داشت:

$$\varphi^{iv} - D_3\hat{\omega}^2\varphi'' - \hat{\omega}^2\varphi = 0 \qquad (8)$$

بنابراین معادله مشخصه به فرم معادله (9) نوشته خواهد شد:

$$r^4 - D_3\hat{\omega}^2 - \hat{\omega}^2 = 0 \qquad (9)$$

حل این معادله منجر به چهار مقدار ویژه به فرم معادله (10) خواهد شد:

$$r = \begin{cases} \pm\left(\dfrac{D_3\hat{\omega}^2 + (D_3^2\hat{\omega}^4 + 4\hat{\omega}^2)^{0.5}}{2}\right)^{0.5} = \pm p \\ \pm\left(\dfrac{-D_3\hat{\omega}^2 + (D_3^2\hat{\omega}^4 + 4\hat{\omega}^2)^{0.5}}{2}\right)^{0.5} = \pm iq \end{cases} \qquad (10)$$

با لحاظ کردن این مقادیر ویژه شکل مودهای طبیعی تیر به شکل معادله (11) نوشته می‌شوند:

$$\varphi(\hat{x}) = A\sin(q\hat{x}) + B\cos(q\hat{x}) + C\sinh(p\hat{x}) + D\cosh(p\hat{x}) \qquad (11)$$

ارضاء شرایط مرزی دو سرگیردار برای میکروتیر ارائه شده منجر به معادله (12) خواهد شد:

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ q & 0 & p & 0 \\ \sin q & \cos q & \sinh p & \cosh p \\ q\cos q & -q\sin q & p\cosh p & p\sinh p \end{bmatrix} = 0 \qquad (12)$$

که از حل آن فرکانس‌های طبیعی تیر و متعاقب آن شکل مودهای ارتعاشی به دست خواهند آمد.

به منظور آنالیز رفتار تعادلی استاتیکی میکروتیر از دو شیوه استفاده می‌کنیم: در شیوه اول که توسط برخی محققین ارائه شده است [9,6,4] ابتدا دو طرف معادله در $(1-\hat{w})^4$ ضرب می‌شود تا معادله (13) حاصل شود:

$$(1-\hat{w})^4\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial\hat{x}^4} + D_1V^2\left(\frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{x}}\right)^2 + D_2V^2(1-\hat{w})\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}^2} = D_4V^2(1-\hat{w})^2 \qquad (13)$$

سپس با فرض $\hat{w}(\hat{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_j\varphi_j(\hat{x})$، در نظر گرفتن اولین جمله از این سری، جای‌گذاری در معادله (13)، ضرب طرفین در $\varphi(\hat{x})$ (مود اول) و انتگرال گیری از صفر تا یک معادله جبری (14) حاصل می‌شود:

$$c_1a^5 + c_2a^4 + c_3a^3 + c_4a^2 + c_5a + c_6 = 0 \qquad (14)$$

که در آن:

$$c_1 = \int_0^1 \varphi^5\varphi^{iv}d\hat{x}\ , c_2 = \int_0^1 4\varphi^4\varphi^{iv}d\hat{x}\ ,$$

$$c_3 = \int_0^1 6\varphi^3\varphi^{iv}d\hat{x}\ ,$$

$$c_4 = \int_0^1 \varphi\left[4\varphi\varphi^{iv} + D_1V^2\varphi'^2 + D_2V^2\varphi\varphi'' - D_4V^2\varphi^2\right]d\hat{x}$$

$$c_5 = \int_0^1 \varphi\left[\varphi^{iv} + D_2V^2\varphi'' - 2D_4V^2\varphi\right]d\hat{x}\ ,\ \ c_6 = -\int_0^1 D_4V^2\varphi d\hat{x} \qquad (15)$$

با حل این معادله جبری، ریشه‌های به دست آمده در $\varphi(\hat{x})$ ضرب می‌شوند تا خیز استاتیکی تیر حاصل شود.

در شیوه دوم (شیوه ارائه شده)، روش گالرکین به‌طور مستقیم بر روی معادله (6) اعمال می‌شود. دوباره فرض می‌کنیم $\hat{w}(\hat{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_j\varphi_j(\hat{x})$ و با انتخاب جمله اول از این سری، ضرب دو طرف معادله (6) در $\varphi(\hat{x})$ و

انتگرال گیری از صفر تا یک معادله (16) زیر حاصل می‌شود:

$$V = \left(\frac{-a\int_0^1 \varphi\varphi^{iv} d\hat{x}}{\int_0^1 \varphi \left[\frac{D_1}{(1-a\varphi)^4} a^2 \acute{\varphi}^2 + \frac{D_2}{(1-a\varphi)^3} a\acute{\varphi} - \frac{D_4}{(1-a\varphi)^2}\right] d\hat{x}} \right)^{0.5} \qquad (16)$$

حال می‌توان تغییرات ولتاژ اعمالی را با تغییر دادن ضریب a و متعاقب آن خیز استاتیکی تیر $\hat{w}(\hat{x})$ به دست آورد.

به‌منظور حل دینامیکی معادله حاکم و تحقیق روی پایداری نقاط تعادلی به‌دست آمده، از مدل کاهش مرتبه مبتنی بر روش گالرکین استفاده می‌شود [4]. در این‌جا نیز دو شیوه مورد استفاده در حل استاتیکی مجددا مدنظر قرار می‌گیرند. در شیوه اول، با ضرب طرفین معادله (5) در $(1-\hat{w})^4$ به معادله (17) خواهیم رسید:

$$(1-\hat{w})^4 \frac{\partial^4\hat{w}}{\partial\hat{x}^4} + (1-\hat{w})^4 \frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{t}^2} + D_1V^2\left(\frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{x}}\right)^2 + D_2V^2(1-\hat{w})\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}^2} + D_3(1-\hat{w})^4\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial\hat{x}^2\partial\hat{t}^2} = D_4V^2(1-\hat{w})^2 \qquad (17)$$

سپس برای ایجاد مدل کاهش مرتبه یافته با در نظر گرفتن $\hat{w}(\hat{x},\hat{t}) = \sum_{j=1}^{n}\varphi_j(\hat{x})T_j(\hat{t})$، و جای‌گذاری آن در معادله (17)، ضرب طرفین معادله در $\varphi_i(\hat{x})$ به عنوان تابع وزنی در روش گالرکین و انتگرال‌گیری از صفر تا یک خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\ddot{T}_j(\hat{t}) + \sum_{j=1}^{n} K_{ij}T_{ij}(\hat{t}) = F_i \qquad (18)$$

که در آن M و K به ترتیب بیانگر ماتریس‌های جرم و سفتی می‌باشند، همچنین F بردار نیرویی می‌باشد، ماتریس‌ها و بردار اشاره شده به شکل معادله (19) تعریف می‌شوند:

$$M_{ij} = \int_0^1 \varphi_i \left(1-\sum_{j=1}^{n}\varphi_jT_j\right)^4 (\varphi_j + D_3\acute{\varphi}_j)d\hat{x}$$

$$K_{ij} = \int_0^1 \varphi_i \left[\left(1-\sum_{j=1}^{n}\varphi_jT_j\right)^4\varphi_j^{iv} + D_2V^2\left(1-\sum_{j=1}^{n}\varphi_jT_j\right)\acute{\varphi}_j\right]d\hat{x}$$

$$F_i = \int_0^1 \varphi_i \left[-D_1V^2\left(\sum_{j=1}^{n}\acute{\varphi}_j\,T_j\right)^2 + D_4V^2\left(1-\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\,T_j\right)^2\right]d\hat{x} \qquad (19)$$

حال این معادله می‌تواند به روش‌های مختلف مانند روش رانگ-کوتا بر روی زمان انتگرال‌گیری شود.

در شیوه دوم روش گالرکین به‌طور مستقیم بر روی معادله (5) اعمال می‌شود و در نتیجه ماتریس‌های جرم، سفتی و نیرو فرم معادله (20) را به خود خواهند گرفت:

$$M_{ij} = \int_0^1 \varphi_i\left(\varphi_j + D_3\acute{\varphi}_j\right)d\hat{x}$$

$$K_{ij} = \int_0^1 \varphi_i \left[\varphi_j^{iv} + D_2\frac{V^2}{\left(1-\sum_{j=1}^{n}\varphi_jT_j\right)^3}\acute{\varphi}_j\right]d\hat{x}$$

$$F_i = \int_0^1 \varphi_i \left[-D_1\frac{V^2}{\left(1-\sum_{j=1}^{n}\varphi_jT_j\right)^4}\left(\sum_{j=1}^{n}\acute{\varphi}_j\,T_j\right)^2 + D_4\frac{V^2}{\left(1-\sum_{j=1}^{n}\varphi_jT_j\right)^2}\right]d\hat{x} \qquad (20)$$

روش رانگ-کوتا در این حالت نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

4- نتایج عددی

قبل از ارائه نتایج و تحلیل آن‌ها، ابتدا به صحت‌سنجی روش‌های عددی ارائه شده می‌پردازیم. برای این منظور یک میکروتیر سیلیکونی دوسرگیردار با h = 3μm و g_0 = 1μm را در نظر می‌گیریم [24]. در جدول 1 مقایسه ولتاژ پولین محاسبه شده در این مقاله با استفاده از تئوری کلاسیک و در نظر گرفتن هر دو شیوه ارائه شده برای حل عددی با نتایج موجود در کارهای گذشته ارائه شده است. همان‌گونه که در جدول نیز مشخص است تطابق بسیار خوبی بین نتایج وجود دارد.

حال به تحلیل رفتار دوشاخگی، نقاط تعادلی و پایداری آن‌ها برای میکروتیر ارائه شده در "شکل 1" با در نظر گرفتن تئوری غیرموضعی می‌پردازیم. به همین منظور میکروتیری با مشخصات فیزیکی و هندسی ارائه شده در جدول 2 در نظر می‌گیریم.

موقعیت نقاط تعادلی در صفحه کنترل حالت برحسب ولتاژ داده شده در نمودارهای 2-الف و 2-ب نشان داده شده است. این نمودارها برای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی (μ) رسم شده‌اند. "شکل 2-الف" دیاگرام‌های رسم شده با استفاده از شیوه اول را به‌ازای $\mu = (0.02L)^2$ ، $(0.04L)^2$ و $(0.1L)^2$ نشان می‌دهد. همان‌گونه که در شکل مشخص است به ازای $\mu = (0.02L)^2$ پنج محدوده مشخص برای ولتاژ وجود دارد. در بازه‌های اول و پنجم به ازای ولتاژ داده شده فقط یک نقطه تعادلی وجود دارد، در بازه‌های دوم و چهارم سه نقطه و در بازه سوم پنج نقطه تعادلی وجود دارد. هم چنین برای $\mu = (0.04L)^2$ در بازه‌های اول و سوم فقط یک نقطه تعادلی وجود دارد در حالی که در محدوده دوم سه نقطه تعادلی در بالای الکترود ساکن وجود دارد. از سوی دیگر برای $\mu = (0.1L)^2$ به ازای هر ولتاژ داده شده فقط یک نقطه تعادلی در صفحه کنترلی مشاهده می‌شود. انتظار می‌رود برای مقادیر μ بالاتر از $(0.1L)^2$ نیز چنین حالتی وجود داشته باشد. همان‌گونه که در "شکل 2-الف" مشاهده می‌شود به ازای $\mu = (0.02L)^2$ و $(0.04L)^2$ دو شاخه پایدار و ناپایدار در نقطه پولین به همدیگر می‌رسند ولی به‌ازای $\mu = (0.1L)^2$ چنین نقطه و موقعیتی مشاهده نمی‌شود و فقط یک شاخه پایدار در صفحه مشاهده می‌شود. بنابراین در این حالت شیوه اول قادر به شناسایی نقطه پولین نمی‌باشد. "شکل 2-ب" نمودارهای تعادلی رسم شده با استفاده از شیوه دوم را برای مقادیر ذکر شده پارامتر غیرموضعی نشان می‌دهد. همان‌گونه که در شکل مشخص است برای

جدول 1 مقایسه ولتاژ پولین محاسبه شده با نتایج قبلی

Table 1 Comparison of the calculated pull-in voltage with previous results

طول	شیوه اول	شیوه دوم	روش انرژی [24]	[24] MEMCAD
350 μm	20.1V	20.1V	20.1V	20.3V
250 μm	39.5 V	39.5 V	39.5 V	40.1 V

جدول 2 مشخصات فیزیکی و هندسی میکروتیر

Table 2 Physical and geometrical properties of the microbeam

متغیر طراحی	مقدار
b	10 μm
h	1 μm
g_0	1 μm
E	98.5 GPa
ρ	19300 kg/m^3
ε_0	8.85 PF/m
ν	0.44

ولتاژهای کمتر از ولتاژ پولین دو نقطه تعادلی در صفحه وجود دارد، همچنین افزایش مقدار پارامتر غیرموضعی ولتاژ پولین سیستم را کاهش داده است. از سوی دیگر موقعیت نقطه پولین بر روی نمودار به ازای تمامی مقادیر پارامتر غیرموضعی قابل شناسایی است. لازم به ذکر است که در تمامی نمودارهای تعادلی خطوط پیوسته و خط چین به ترتیب شاخه‌های پایدار و ناپایدار را نشان می‌دهند. برای تعیین پایداری نقاط تعادلی نمودارهای فازی با استفاده از شیوه‌های اول و دوم رسم و تحلیل می‌شوند. "شکل 3" نمودار فازی را به ازای $\mu = (0.02L)^2$ و مقادیر مختلف ولتاژ اعمالی نشان می‌دهد. این نمودار با استفاده از شیوه اول رسم شده است. با توجه به این نمودار و در نظر گرفتن نقاط پایدار سنتر[1] و ناپایدار سدل[2] روی آن می‌توان شاخه‌های پایدار و ناپایدار نمودارهای "شکل 2-الف" را تشخیص داد. همان‌گونه که در "شکل 3" نیز مشخص است شیوه اول نمی‌تواند نقطه تکین (موقعیت صفحه ساکن پایینی) را تشخیص دهد. این نقطه برای ساختارهای خازنی موقعی اتفاق می‌افتد که تیر متحرک بالایی با سرعت بی‌نهایت به‌سمت صفحه پایینی کشیده می‌شود.

"شکل 4" نشان می‌دهد که به ازای $\mu = (0.1L)^2$ در تمامی ولتاژهای داده شده فقط یک نقطه پایدار سنتر وجود خواهد داشت. با در نظر گرفتن

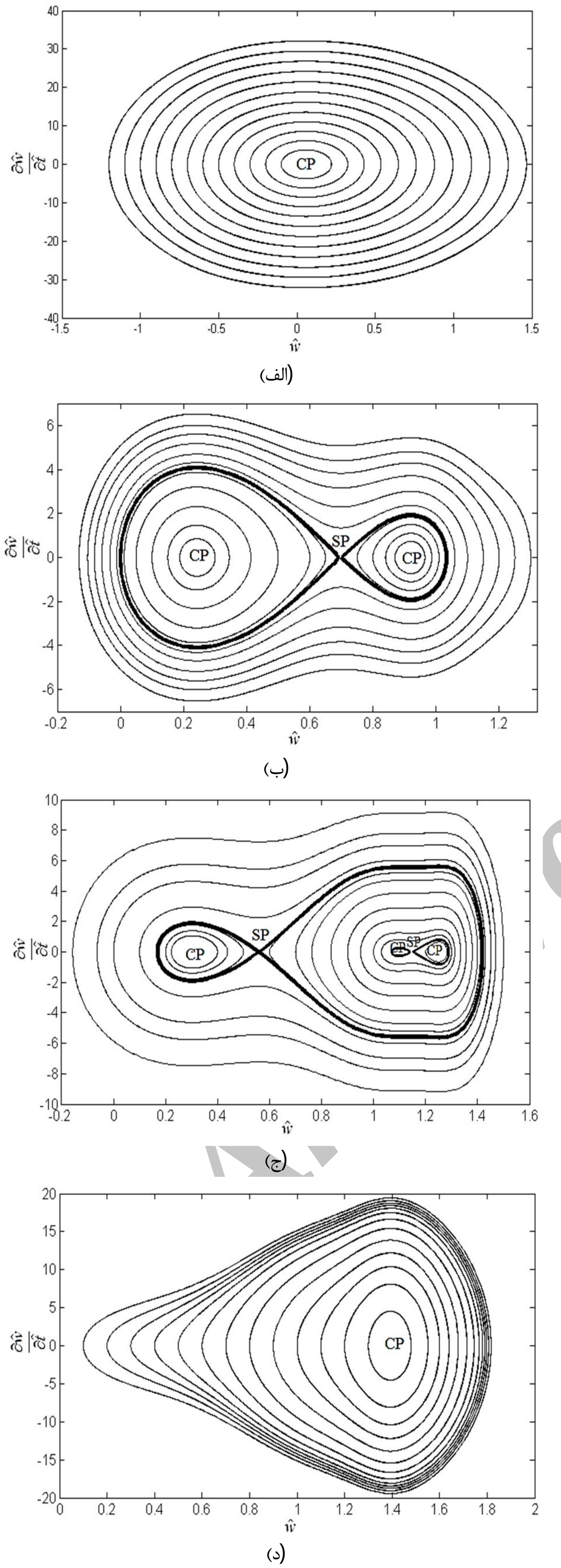

Fig. 3 Phase portraits using first approach for $\mu = (0.02L)^2$, a) $V = 6\text{V}$, b) $V = 9\text{V}$, c) $V = 9.4\text{V}$, d) $V = 11\text{V}$

شکل 3 نمودارهای فازی با استفاده از شیوه اول برای $\mu = (0.02L)^2$
الف) $V = 6\text{V}$ ب) $V = 9\text{V}$ ج) $V = 9.4\text{V}$ د) $V = 11\text{V}$

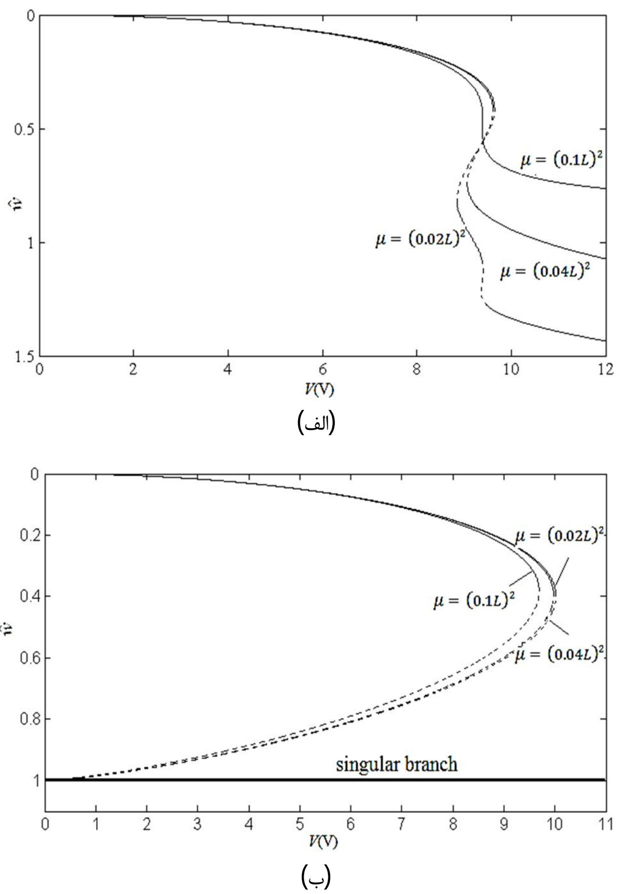

Fig.2 Fixed points of the microbeam for $\mu = (0.02L)^2, (0.04L)^2, (0.1L)^2$, a)first approach, b)second approach

شکل 2 نمودارهای تعادلی برای میکروتیر به‌ازای $\mu = (0.02L)^2, (0.04L)^2, (0.1L)^2$ الف) شیوه اول ب) شیوه دوم

---
[1] Center point (CP)
[2] Saddle point (SP)

"شکل 2-الف" می‌توان انتظار داشت که برای مقادیر بالاتر پارامتر غیرموضعی نیز نتیجه مشابهی حاصل خواهد شد. از سوی دیگر دوباره مشخص می‌شود که شیوه اول به ازای یک محدوده‌ای از مقادیر پارامتر غیرموضعی قادر به پیش بینی ناپایداری پولین نیست.

از آن‌جایی‌که کیفیت نمودارهای تعادلی منتجه از شیوه دوم با تغییر پارامتر غیرموضعی تغییر نمی‌کند، نمودارهای فازی فقط برای $\mu = (0.1L)^2$ رسم شده و در "شکل 5" نشان داده شده است. برای $V = 8\text{V}$ (ولتاژ کمتر از ولتاژ پولین) یک نقطه سنتر و یک نقطه سدل در نمودار 5-الف قابل تشخیص است. همچنین برای $V = 10\text{V}$ (ولتاژ بیشتر از ولتاژ پولین) هیچ نقطه تعادلی در نمودار فازی مشاهده نمی‌شود. لازم به ذکر است که برخلاف شیوه اول، شیوه دوم توانست موقعیت نقطه تکین را که در $\hat{w} = 1$ اتفاق می‌افتد شناسایی کند. این نوع از نقاط تکین که در واقع همان موقعیت صفحه ساکن پایینی است به‌عنوان یک جاذب می‌تواند معرفی شود زیرا هر حرکتی که در همسایگی این نقطه شروع می‌شود با سرعت بی‌نهایت به سمت آن جذب می‌شود. لازم به ذکر است که نقاط تکین می‌توانند جاذب قوی‌تری نسبت به نقاط سنتر باشند، زیرا همان‌گونه که در "شکل 5" نشان داده شده است حوضه جذب نقطه تکین بزرگ‌تر از نقطه سنتر است. به عبارت دیگر تنها حرکت‌هایی که در همسایگی محدود نقطه سنتر شروع می‌شوند به دور آن جذب می‌شوند در حالی‌که حرکت‌هایی که در هر نقطه دیگر از صفحه فازی شروع می‌شود به سمت نقطه تکین جذب می‌شوند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که حوضه جذب نقطه تکین یک محدوده بی‌نهایت است.

5- نتیجه‌گیری

در مقاله ارائه شده رفتار مکانیکی یک میکروتیر حسگر الکترواستاتیکی با استفاده از تئوری غیرموضعی الاستیسیته مدل‌سازی شد. برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم از دو شیوه مبتنی بر روش گالرکین استفاده شد. در شیوه اول که توسط برخی محققین مورد استفاده قرار گرفته است، دو طرف معادله حاکم در معکوس نیروی تحریک الکترواستاتیکی ضرب شده و سپس روش

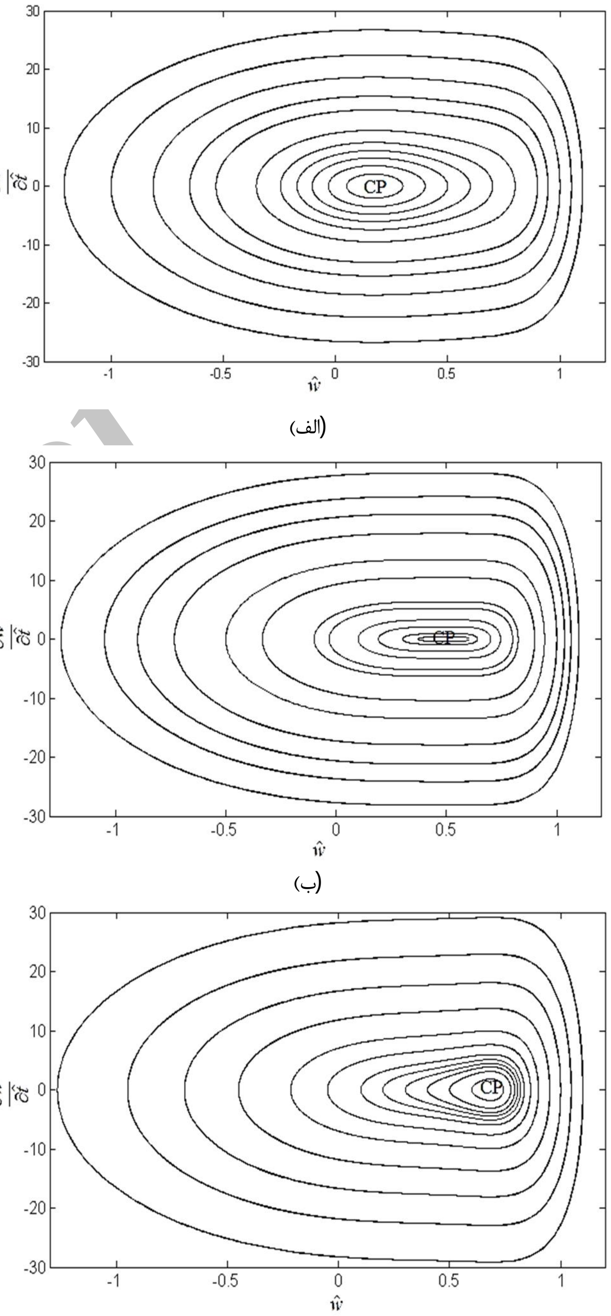

Fig. 4 Phase portraits using first approach for $\mu = (0.1L)^2$, a) $V = 8\text{V}$, b) $V = 9.4\text{V}$, c) $V = 10\text{V}$

شکل 4 نمودارهای فازی با استفاده از شیوه اول برای $\mu = (0.1L)^2$
الف) $V = 8\text{V}$ ب) $V = 9.4\text{V}$ ج) $V = 10\text{V}$

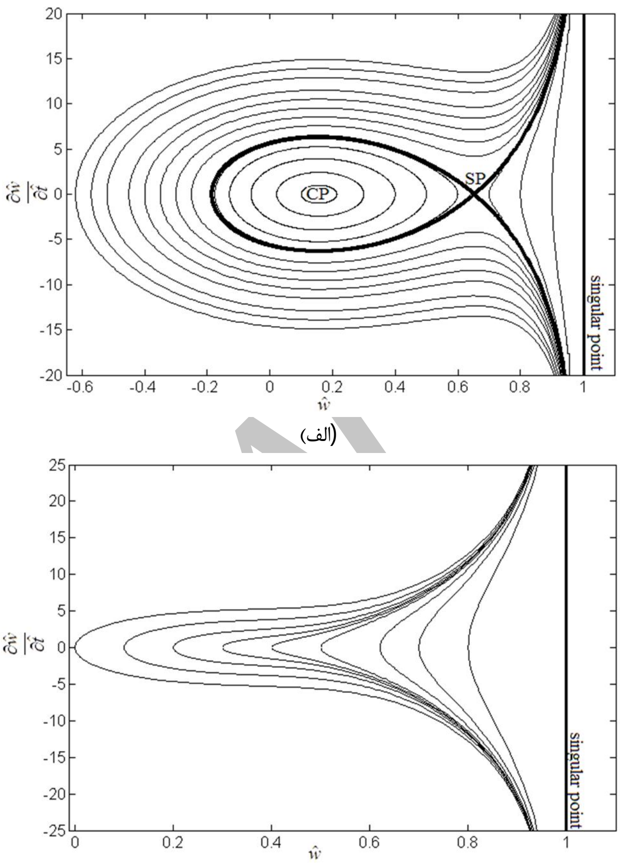

Fig. 5 Phase portraits using second approach for $\mu = (0.1L)^2$, a) $V = 8\text{V}$, b) $V = 10\text{V}$

شکل 5 نمودارهای فازی با استفاده از شیوه دوم برای $\mu = (0.1L)^2$، الف) $V = 8\text{V}$ ب) $V = 10\text{V}$

گالرکین برای کاهش مرتبه اعمال شد. در شیوه دوم ارائه شده در این مقاله روش گالرکین مستقیما بر روی معادله اعمال می‌شود. نتایج نشان دادند که تفاوت کیفی بین نمودارهای بدست آمده ار دو شیوه وجود دارد. استفاده از شیوه اول قادر به شناسایی برخی نقاط تعادلی نبود، همچنین این شیوه نتوانست نقطه تکین را در نمودارهای فازی شناسایی کند که البته توسط شیوه دوم به‌راحتی شناسایی می‌شود. نتیجه شاخص دیگر این بود که شیوه اول برخلاف شیوه دوم نمی‌تواند برای برخی از مقادیر پارامتر غیرموضعی ناپایداری پولین، به‌عنوان یک پارامتر مهم در طراحی میکروحسگرهای الکترواستاتیکی، در سیستم ارائه شده را شناسایی کند.

6- مراجع

[1] J. M. Sallese, W. Grabinski, V. Meyer, C. Bassin, P. Fazan, Electrical modeling of a pressure sensor MOSFET, *Sensors and Actuators A. Physics*, Vol. 94, pp. 53-58, 2001.

[2] G. Rezazadeh, M. Fathalilou, R. Shabani, S. Tarverdilou, S. Talebian, Dynamic characteristics and forced response of an electrostatically actuated Micro-beam subjected to fluid loading, *Microsystem Technologies*, Vol. 15, pp. 1355-1363, 2009.

[3] M. Sadeghi, M. Fathalilou, Gh. Rezazadeh, Study on the size dependent behavior of a micro-beam subjected to a nonlinear electrostatic pressure, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 137-144, 2015 (in Persian فارسی).

[4] A. H. Nayfeh, M.I. Younis, E. M. Abdel-Rahman, Reduced-order models for MEMS applications, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 41, pp. 211-236, 2005.

[5] J. F. Rhoads, S. W. Shaw and K. L. Turner, The nonlinear response of resonant microbeam systems with purely-parametric electrostatic actuation, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 16, pp. 890–899, 2006.

[6] E. M. Abdel-Rahman, and A. H. Nayfeh, Characterization of the mechanical behavior of an electrically actuated microbeam, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 12, pp.759–766, 2002.

[7] H. A. C. Tilmans and R. Legtenberg, Electrostatically driven vacuum-encapsulated polysilicon resonators part ii. Theory and performance, *Sensors and Actuators A. Physics*, Vol. 45, pp. 67-84, 1994.

[8] D. J. Ijntema and H. A. C. Tilmans, Static and dynamic aspects of an air-gap capacitor, *Sensors and Actuators A. Physics*, Vol. 35, pp. 121-128, 1992.

[9] M. I. Younis, E. M. Abdel-Rahman and A. H. Nayfeh, A reduced-order model for electrically actuated microbeam-based MEMS, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 12, pp. 672-680, 2003.

[10] D. I, Caruntu, I. Martinez, M. W. Knecht, Reduced order model analysis of frequency response of alternating current near half natural frequency electrostatically actuated MEMS cantilevers, *Journal of Computational Nonlinear Dynamics*, Vol. 8, Article ID 031011, 2013.

[11] M. G. Snow, A. K. Bajaj, Comprehensive reduced-order models of electrostatically actuated MEMS switches and their dynamics including impact and bounce, *Proceedings of the ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*, Montreal, Quebec, Canada, 2010.

[12] J. F. Rhoads, S. W. Shaw and K. L. Turner, The nonlinear response of resonant microbeam systems with purely-parametric electrostatic actuation, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 16, pp. 890–899, 2006.

[13] L. Ruzziconi, M.I. Younis, S. Lenci, An efficient reduced-order model to investigate the behavior of an imperfect Micro-beam under axial load and electric excitation, *Journal of Computational Nonlinear Dynamics*, Vol. 8, Article ID 011014, 2012.

[14] F. Durieu, O. Bruls, V. Rochus, G. Serandour, J. C. Golinval, Reduced order modeling of electrostatically actuated microbeams, *ENOC 2008*, Saint Petersburg, Russia, 2008.

[15] M. A. Fargas, C. R. Costa, A. M. Shkel, Modeling the electrostatic actuation of MEMS: State of the art 2005, *Institute of Industrial and Control Engineering*, Barcelona, Spain, 2005.

[16] R.C. Batra, M. Porfiri, D. Spinello, Review of modeling electrostatically actuated microelectromechanical systems, *Smart Materials and Structures*, Vol. 16, pp. 23-31, 2007.

[17] W. Ch. Chuang, H. L. Lee., P. Z. Chang., and Y. Ch. Hu, Review on the Modeling of Electrostatic MEMS, *Sensors*, Vol. 10, pp.6149-6171, 2010.

[18] M. Asghari, M.T. Ahmadian, M.H. Kahrobaiyan, M. Rahaeifard, On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams, *Materials and Design*, Vol. 31, pp. 2324–2329, 2010.

[19] M. Fathalilou, M. Sadeghi, G. Rezazadeh, M. Jalilpour, A. Naghiloo, S. Ahouighazvin, Study on the pull-in instability of gold micro-switches using variable length scale parameter, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 3, pp. 114-123, 2011.

[20] J. N. Reddy, S. D. Pang, Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes, *Journal of Applied Physics*, Vol. 103, Article ID 023511, 2008.

[21] A.C. Eringen and D.G.B. Edelen, On nonlocal elasticity, *International Journal of Engineering Sciences*, Vol. 10, pp. 233–248, 1972.

[22] Q. Wang and V.K. Varadan, Vibration of carbon nanotubes studied using nonlocal continuum mechanics, *Smart Materials and Structures*, Vol. 15, pp. 659–666, 2006.

[23] Sh. Valilou, G. Rezazadeh, R. Shabani, M. Fathalilou, Bifurcation analysis of a capacitive micro-resonator considering non-local elasticity theory, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, Vol. 15, pp. 241-249. 2014.

[24] P. M. Osterberg, S. D. Senturia, M-TEST: a test chip for MEMS material property measurement using electrostatically actuated test structures, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 6, pp. 107-118, 1997.