ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

مدل‌سازی دینامیکی ربات‌های زمینی و فضایی در حالت زنجیرباز براساس فرمی از معادلات بولتزمان - هامل

عبدالمجید خوشنود[1*]، اسحاق آزاد[2]، سید محمدامین رضوی[3]

1- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا دینامیک پرواز و کنترل، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
3- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا دینامیک پرواز و کنترل، دانشگاه شهید بهشتی، تهران
* تهران، صندوق پستی 16569-83911، khoshnood@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 19 دی 1394
پذیرش: 05 فروردین 1395
ارائه در سایت: 30 خرداد 1395

کلید واژگان:
معادلات بولتزمان- هامل
شبه مختصات
ربات‌های زنجیرباز
ربات‌های فضایی
ربات‌های زمینی

چکیده

در این مقاله، فرمی متفاوت از فرم متداول معادلات بولتزمان-هامل (معادلات لاگرانژ برحسب شبه مختصات) استخراج گردیده و براساس آن الگوریتمی جامع جهت مدل‌سازی دینامیکی ربات‌های زمینی و فضایی، با تعداد دلخواه عضو صلب در حالت زنجیر باز، ارائه شده است. این فرم از معادلات بولتزمان- هامل، در عین پرهیز از پیچیدگی‌های فرم متداول، دارای مزایای قابل‌توجهی است که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به عدم نیاز به تشکیل انرژی جنبشی به‌صورت تابعی از مختصات تعمیم‌یافته و شبه سرعت‌ها، بیان نیروهای تعمیم‌یافته برحسب بردارهای پایه‌ی بدنی اجزای سیستم و ارائه‌ی تصویری واضح از دینامیک سیستم اشاره نمود. در مسیر استخراج الگوریتم مذکور، معادلات حرکت یک جسم صلب یک‌بار با استفاده از فرم ارائه شده و بار دیگر با استفاده از فرم متداول معادلات بولتزمان- هامل به‌دست آمده که از مقایسه‌ی آن‌ها سه اتحاد سینماتیکی کاربردی اثبات گردیده و از آن‌ها در مدل‌سازی دینامیکی استفاده شده است. به‌منظور آشنایی با نحوه‌ی استفاده از الگوریتم ارائه شده، مدل دینامیکی یک ربات دو لینکی زمینی به‌صورت گام‌به‌گام به‌دست آمده است. در نهایت نتایج شبیه‌سازی ربات دو لینکی در نرم‌افزار متلب، به ازای مقادیر عددی، با نتایج به‌دست‌آمده از مدل سیستم در نرم‌افزار آدامز، مقایسه و صحت آن محرز گردیده است.

Dynamics modeling of open-chain terrestrial and space robots using a form of Boltzmann-Hamel equations

Abdol Majid Khoshnood[1*], Es'hagh Azad[1], Seyed Mohammad Amin Razavi[2]

1- Faculty of Aerospace Engineering, Khaje Nasir Toosi University, Tehran, Iran
2- Faculty of New Technologies Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran
*P.O.B. 16569-83911, Tehran, Iran, khoshnood@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 09 January 2016
Accepted 24 March 2016
Available Online 19 June 2016

Keywords:
Boltzmann-Hamel equations
Quasi-coordinates
open-chain robots
space robots
terrestrial robots

ABSTRACT

In this article, a form of Boltzmann-Hamel equations (Lagrange's equations in terms of quasi-coordinates), different from the latter's standard form and avoiding its structurally inherent complexity, is derived based on which a general algorithm for the dynamics modeling of open-chain terrestrial and space robots with an arbitrary number of rigid elements is presented. This form of Boltzmann-Hamel equations is shown to be particularly advantageous in terms of not requiring the determination of the kinetic energy as a function of generalized coordinates and quasi-velocities, representing generalized forces in terms of body basis vectors and offering a panoramic view of the dynamics of the systems. In the act of developing the algorithm, three highly useful kinematic identities are derived via comparison between the single rigid body equations derived from both the standard and the proposed form of Boltzmann-Hamel equations. These identities are then used to considerably simplify the final dynamics model of both systems. Finally, the equations of motion for a two-link terrestrial robot is derived using the proposed algorithm and simulation results in MATLAB are compared with the model of the system in ADAMS to validate the model.

1- مقدمه

از جمله چالش برانگیزترین مسائل در مدل‌سازی سیستم‌های مکانیکی پیچیده، با استفاده از روش‌های معمول همچون معادلات نیوتن-اویلر و معادلات استاندارد لاگرانژ، حجم محاسباتی است که با افزایش درجات آزادی سیستم، به یک‌روند طاقت‌فرسا می‌انجامد؛ به‌طوری‌که پی‌ریزی یک الگوریتم جامع برای مدل‌سازی یک سیستم مکانیکی با درجه‌ی آزادی دلخواه و آرایش هندسی معلوم، نسبت به روش‌های پیشرفته‌تر مدل‌سازی با سختی بیشتری همراه خواهد بود. برای نمونه، در مدل‌سازی با استفاده از معادلات نیوتن-اویلر، به‌علت احتساب نیروهای قیدی و نیروهای داخلی بین اجزای سیستم، تعداد مجهولات و تبعا تعداد معادلات حرکت از تعداد درجات آزادی سیستم

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:
Please cite this article using:
A. M. Khoshnood, E. Azad, S. M. A. Razavi, Dynamics modeling of open-chain terrestrial and space robots using a form of Boltzmann-Hamel equations, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 16, No. 6, pp. 127-137, 2016 (in Persian)

بیشتر خواهد بود. در چنین شرایطی مسئله‌ی حذف جبری این نیروها اجتناب‌ناپذیر بوده و حل معادلات نهایی را پیچیده می‌کند. از طرف دیگر، فرم استاندارد معادلات لاگرانژ که در مورد سیستم‌های غیر هولونومیک[1] و در حالت مختصات تعمیم‌یافته‌ی مستقل به‌کار گرفته می‌شود، نیروهای قیدی و نیروهای داخلی (در حالتی که جابه‌جایی آن‌ها روی دو جسم یکسان باشد) را در مدل‌سازی دینامیکی وارد نمی‌کند و لذا از این حیث نسبت به معادلات نیوتن-اویلر ارجحیت دارد. با این وجود، معادلات لاگرانژ نیز دارای معایبی هستند که به‌طور خاص با افزایش درجات آزادی سیستم آشکار می‌شوند. در چنین شرایطی انرژی جنبشی که بایستی به‌صورت تابعی از مختصات تعمیم‌یافته و سرعت‌های تعمیم‌یافته به‌دست آید به طرز کنترل نشده‌ای بزرگ می‌شود و لذا مشتق‌گیری‌های جزئی و زمانی به محاسباتی الگو ناپذیر و طاقت‌فرسا منتهی می‌گردد. به‌علاوه، نیروهای تعمیم‌یافته با پیچیده شدن سیستم به‌سختی محاسبه می‌شوند. در این میان، معادلات بولتزمان-هامل با پرهیز از معایب روش‌های نیوتن-اویلر و لاگرانژ به‌طور هم‌زمان، ابزار قدرتمندی در مدل‌سازی دینامیکی سیستم‌های پیچیده به‌حساب می‌آید. ایده‌ی اساسی این معادلات بر مفاهیم شبه مختصات[2] و شبه سرعت‌ها[3] استوار است. با استفاده از این مفاهیم، انرژی جنبشی برخلاف روش لاگرانژ برحسب مختصات تعمیم‌یافته و شبه سرعت‌ها به‌دست‌آمده و نیاز به محاسبه‌ی مشتق انرژی جنبشی نسبت به سرعت‌های تعمیم‌یافته به‌کلی از میان برداشته می‌شود. به‌علاوه، نیروهای تعمیم‌یافته برحسب ترکیبی از نیروها، گشتاورها و ماتریس‌های دوران در پایه‌ی بدنی اجزای سیستم به‌دست می‌آیند و لذا از مسئله‌ی بیان بردارها در پایه‌ی اینرسی و همچنین محاسبه مشتقات جزئی اجتناب می‌شود. با این وجود، بدیهی به نظر می‌رسد که معادلات بولتزمان-هامل نیز همچون سایر روش‌های مدل‌سازی دینامیکی نمی‌تواند از هر نظر ایده‌آل به‌حساب آید. برای نمونه، بهره‌مندی حداکثری از مزایای قابل‌توجه معادلات بولتزمان- هامل وابستگی فراوانی به استخراج اتحادهای سینماتیکی متنوع دارد که نمونه‌های معدودی از آن در کار پژوهشی کویین [1] به دست آمده و در مدل‌سازی دینامیکی مورد استفاده قرار گرفته است. به‌علاوه ساختار عمومی این معادلات آن‌گونه که در مراجع گرین‌وود [2] و میرووچ [3] آورده شده است در مقایسه با معادلات نیوتن- اویلر و معادلات لاگرانژ دارای پیچیدگی‌ها و جزئیاتی است که بایستی مورد توجه قرار گیرند. در این مقاله به منظور پرهیز از پیچیدگی‌های مذکور و نیز عدم نیاز به تشکیل انرژی جنبشی برحسب مختصات تعمیم‌یافته و شبه‌سرعت‌ها، فرمی متفاوت از فرم متداول معادلات بولتزمان- هامل استخراج گردیده و کارایی آن در قالب استخراج معادلات حرکت ربات‌های زمینی و فضایی با تعداد دلخواه عضو صلب در حالت زنجیرباز نشان داده شده است. در این راستا، سه اتحاد سینماتیکی نیز اثبات گردیده و در حل مسئله مورد استفاده قرار گرفته است.

در کار پژوهشی حبیب نژاد کورایم و شافعی [4]، فرمولاسیونی بازگشتی مبتنی بر روش گیبس- اپل جهت استخراج معادلات حرکت بازوهای رباتیک ویسکوالاستیک براساس تئوری تیر تیموشنکو ارائه گردید.

در مرجع [5]، علیپور و همکاران مدلی تحلیلی برای ربات‌های متحرک چرخ‌دار با تعلیق انعطاف‌پذیر براساس روش نیوتن-اویلر استخراج نموده و برای صحت‌سنجی مدل از نرم‌افزار آدامز استفاده نموده‌اند.

مسئله‌ی مدل‌سازی دینامیکی سیستم فرمان و هندلینگ خودرو با استفاده از معادلات بولتزمان-هامل در اثر پژوهشی جهرمی [6] انجام شده است.

کمرون و بوک [7]، با استفاده از معادلات بولتزمان-هامل، نحوه‌ی استخراج مدل دینامیکی مکانیزم‌ها با مفاصل غیرهولونومیک را از طریق حل چند مثال نشان داده‌اند. در این مقاله ثابت شده است که برخلاف معادلات لاگرانژ که در آن مسئله‌ی ظاهر شدن و سپس حذف ضرایب لاگرانژ به وجود می‌آید، استفاده از معادلات بولتزمان-هامل به‌طور خودکار از وارد شدن مجهولات اضافی در معادلات نهایی حرکت جلوگیری می‌کند.

در مرجع [8]، ترنر در مسئله‌ی شبیه‌سازی وسایط نقلیه‌ی زمینی با سرعت زیاد از معادلات بولتزمان-هامل استفاده نموده است.

سیبیلسکی و زیلوک [9]، روند مدل‌سازی وسایط نقلیه‌ی هوایی و به‌طور خاص هواپیما و هلیکوپتر را با استفاده از روش‌های دینامیک چندجسمی ازجمله معادلات بولتزمان-هامل شرح داده و مزایا و معایب انواع روش‌ها را بررسی نموده است.

در مرجع [10]، تالاموچی مسئله‌ی تأثیر انواع انتخاب‌های ممکن از شبه سرعت‌ها در مدل‌سازی دینامیکی سیستم‌های غیرهولونومیک با استفاده از معادلات بولتزمان-هامل را مورد بررسی قرار داده و با ابداع و اعمال یک روش جبری، تأثیر انتخاب مناسب شبه‌سرعت‌ها در ساده‌سازی ریاضیات مرتبط با مدل‌سازی دینامیکی را نشان داده است.

خوشنود و مرادی [11]، با استفاده از ترکیبی از معادلات استاندارد لاگرانژ و معادلات لاگرانژ برحسب شبه مختصات، معادلات حرکت یک ماهواره شامل یک قسمت صلب مکعب شکل و دو صفحه‌ی خورشیدی انعطاف‌پذیر را استخراج و براساس آن یک کنترلر برای کاهش دامنه‌ی ارتعاشات اجزای انعطاف‌پذیر طراحی نموده‌اند.

در مرجع [12]، ماروسکین و بلاخ فرم خاصی از معادلات بولتزمان-هامل را استخراج نموده و از آن در طراحی کنترل بهینه‌ی سینماتیکی و دینامیکی سیستم‌های مکانیکی با قیود غیرهولونومیک استفاده نموده‌اند.

مینگلو و همکاران [13]، با استفاده از روش کین[4] معادلات حرکت یک سیستم مکانیکی صفحه‌ای شامل تعداد دلخواه میله‌ی صلب در حالت زنجیرباز را استخراج نمودند.

2- استخراج معادلات بولتزمان- هامل از معادلات لاگرانژ به کمک حساب دیفرانسیل ماتریسی

در مراجع [3,2]، فرم عمومی و به نسبت پیچیده‌ی معادلات بولتزمان- هامل به صورت مؤلفه به مؤلفه (جبر اسکالر و حساب دیفرانسیل چند متغیره) استخراج و سپس به‌صورت یک معادله‌ی ماتریسی بیان شده است. با این وجود، استفاده از ایده‌ی اولیه‌ی معادلات بولتزمان-هامل موسوم به مفهوم شبه‌مختصات و شبه‌سرعت‌ها و تلاش در استخراج دوباره‌ی آن، صرفا به فرم ماتریسی، به معادله‌ای منجر خواهد شد که در این مقاله از آن استفاده شده است. در ادامه، نشان خواهیم داد که حداقل در مورد سیستم‌های دینامیکی مورد بررسی در این مقاله، این فرم از معادلات بولتزمان- هامل نسبت به فرم متداول آن به روند مناسب‌تری در مدل‌سازی دینامیکی می‌انجامد و لذا نه تنها نیازی به پرداختن به جزئیات فرم متداول وجود ندارد بلکه از پیچیدگی‌های غیرضروری آن نیز پرهیز می‌شود. معادلات لاگرانژ برای یک سیستم مکانیکی m درجه آزادی و به‌ازای مختصات تعمیم‌یافته‌ی مستقل (فاقد قیود جبری و دیفرانسیلی بین مختصات) عبارت است از:

[1] Nonholonomic Systems
[2] Quasi-Coordinates
[3] Quasi-Velocities
[4] Kane's Method

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\{\dot{q}\}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\{q\}}=\{Q\} \quad (1)$$

حال فرض کنیم انرژی جنبشی به‌جای $T(\{q\},\{\dot{q}\})$ به‌صورت $\bar{T}(\{q\},\{\lambda\})$ نوشته شود و داشته باشیم:

$$\{\lambda\}=[S]\{\dot{q}\} \quad (2)$$

که در آن، $[S]$ یک ماتریس مربعی $m\times m$ و تابعی از $\{q\}$ است. درایه‌های ماتریس ستونی $\{\lambda\}$ را شبه سرعت‌ها می‌نامیم. تنها محدودیتی که در انتخاب شبه‌سرعت‌ها وجود دارد استقلال آن‌ها از یکدیگر است [2].

به‌عبارت‌دیگر، در تئوری معادلات بولتزمان-هامل، وجود هیچ رابطه‌ی سینماتیکی میان هر دو عضو دلخواه از $\{\lambda\}$ مجاز نیست. با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای در حساب دیفرانسیل ماتریسی و همچنین با توجه به تساوی $T=\bar{T}(\{q\},\{\lambda\}(\{q\},\{\dot{q}\}))$ داریم:

$$\frac{\partial T}{\partial\{q\}}=\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{q\}}+\frac{\partial\{\lambda\}}{\partial\{q\}}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\lambda\}} \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial\{\dot{q}\}}=\frac{\partial\{\lambda\}}{\partial\{\dot{q}\}}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\lambda\}}=\frac{\partial[S]\{\dot{q}\}}{\partial\{\dot{q}\}}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\lambda\}}=[S]^T\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\lambda\}} \quad (4)$$

با جای‌گذاری طرف راست روابط (3) و (4) در رابطه‌ی (1)، مرتب‌سازی عبارت‌ها و سپس ضرب طرفین در $[S]^{-\mathrm{T}}$، معادله‌ای به‌صورت رابطه (5) حاصل می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\lambda\}}\right)+[S]^{-T}\left([\dot{S}]^T-\frac{\partial\{\lambda\}}{\partial\{q\}}\right)\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\lambda\}}-[S]^{-T}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{q\}}=\{\Phi\} \quad (5)$$

که در آن $\{\Phi\}$ را شبه نیرو نامیده و به‌صورت $\{\Phi\}\stackrel{\text{def}}{=}[S]^{-\mathrm{T}}\{Q\}$ تعریف می‌کنیم. معادله‌ی فوق همان فرمی از معادلات بولتزمان-هامل است که در مدل‌سازی دینامیکی سیستم‌های مورد مطالعه در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است. روند مدل‌سازی دینامیکی با استفاده از معادله‌ی (5) می‌تواند طبق مراحل زیر انجام شود:

(الف) انتخاب مختصات تعمیم یافته‌ی مستقل ($\{q\}$): با توجه به این‌که معادله‌ی (5) از معادله‌ی لاگرانژ در حالت مختصات تعمیم‌یافته‌ی مستقل به دست آمد، درایه‌های ماتریس ستونی $\{q\}$ الزاما می‌بایستی مستقل انتخاب شوند. (ب) انتخاب شبه‌سرعت‌های مستقل ($\{\lambda\}$)، (ج) انجام تحلیل سینماتیکی برحسب شبه‌سرعت‌های انتخاب شده (د) استخراج ماتریس مربعی $[S]$: پس از معرفی ماتریس‌های ستونی $\{q\}$ و $\{\lambda\}$، ماتریس مربعی $[S]$ از رابطه‌ی (2) استخراج می‌شود، (ه) محاسبه‌ی عبارت $[S]^{-T}\left([\dot{S}]^T-\frac{\partial\{\lambda\}}{\partial\{q\}}\right)$ (و) محاسبه‌ی $\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\lambda\}}$، (ز) محاسبه‌ی $\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{q\}}$، (ح) محاسبه‌ی شبه نیرو $\{\Phi\}$.

3- مدل‌سازی دینامیکی ربات زمینی و فضایی

در این قسمت با اعمال مراحل مذکور، به مدل‌سازی دینامیکی ربات زمینی و فضایی پرداخته خواهد شد. آرایش هندسی این دو سیستم به همراه نمادگذاری بردارهای مکان لازم برای تحلیل سینماتیکی در "شکل 1" نشان داده شده است.

3-1- انتخاب مختصات تعمیم‌یافته‌ی مستقل

در حالت کلی که حرکت اجزای ربات زمینی و فضایی نسبت به هم سه‌بعدی است، مختصات تعمیم‌یافته‌ی مستقل می‌توانند به‌صورت بردارهای ستونی زیر در حالت بلوک‌بندی[1] شده انتخاب شوند:

[1] Block Matrices

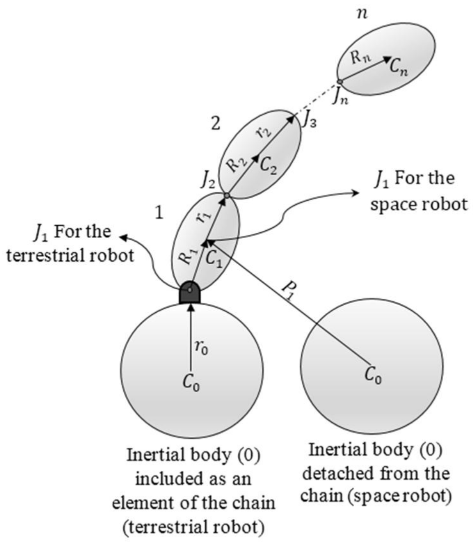

Fig. 1 Numbering the elements of terrestrial and space robots and assigning symbols to quantities and points

شکل 1 شماره‌گذاری اجزای ربات‌های زمینی و فضایی به همراه نمادگذاری کمیت‌ها و نقاط در هریک از آن‌ها

$$\{q_t\}=\{\{\alpha_1\}^T\ \{\alpha_2\}^T\ \cdots\cdots\ \{\alpha_n\}^T\}^T \quad \text{(6-الف)}$$

$$\{q_s\}=\{\{p_1\}^{\mathrm{T}}\ \{\alpha_1\}^{\mathrm{T}}\ \{\alpha_2\}^{\mathrm{T}}\ \cdots\cdots\ \{\alpha_n\}^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}} \quad \text{(6-ب)}$$

در دو معادله‌ی اخیر اندیس t برای ربات زمینی و s برای ربات فضایی در نظر گرفته شده است. همچنین $\{p_1\}$ ماتریس ستونی حاصل از تجزیه‌ی بردار مکان مرکز جرم جسم 1 در پایه‌ی اینرسی و $\{\alpha_i\}$ ماتریس ستونی حاوی زوایای وضعیت جسم iام نسبت به جسم $(i-1)$ام هستند به‌طوری‌که:

$$\{q_t\}=\{\{\alpha_1\}^T\ \{\alpha_2\}^T\ \cdots\cdots\ \{\alpha_n\}^T\}^T \quad \text{(7-الف)}$$

$$\{\alpha_i\}=\{\psi_i\quad\theta_i\quad\phi_i\}^T \quad \text{(7-ب)}$$

که در آن الزامی در تعریف زوایای ψ_i، θ_i و ϕ_i وجود ندارد. به‌عبارت دیگر، هر ترکیبی از زوایا که بتواند وضعیت جسم iام نسبت به جسم $(i-1)$ام را به‌طور کامل معلوم کند مجاز بوده و لذا هر 12 ترتیب زوایای اویلر تنها حالت خاصی از آن به‌حساب می‌آید.

2-3- انتخاب شبه سرعت‌های مستقل

فرض کنیم $\left\{b_1^{(i)},b_2^{(i)},b_3^{(i)}\right\}$ یک مجموعه‌ی سه‌تایی از بردارهای یکه، دوبه‌دو متعامد و ساکن در عضو دلخواه iام باشد. این مجموعه را پایه[2]ی بدنی عضو iام (یا به‌اختصار پایه‌ی iام) می‌نامیم. حال یک ماتریس ستونی به‌صورت $\{b_i\}=\left\{b_1^{(i)}\quad b_2^{(i)}\quad b_3^{(i)}\right\}^T$ تعریف می‌کنیم. اگر ω_i بردار سرعت زاویه‌ای جسم iام نسبت به جسم $(i-1)$ام و $\{\omega_i\}$ ماتریس ستونی حاوی مؤلفه‌های ω_i در پایه‌ی بدنی عضو iام باشند آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$\omega_i=\{b_i\}^{\mathrm{T}}\{\omega_i\} \quad (8)$$

به‌علاوه از مرجع [1] داریم:

$$\{\omega_i\}=[D_i]\{\dot{\alpha}_i\} \quad (9)$$

که در آن $[D_i]$ یک ماتریس 3×3 و تابعی از $\{\alpha_i\}$ است. با استفاده از این معادله می‌توان گفت که چون $\{\alpha_i\}$ ها از نظر سینماتیکی مستقل از یکدیگرند، $\{\omega_i\}$ ها نیز به هم وابسته نیستند و لذا می‌توانند به‌عنوان شبه‌سرعت‌ها انتخاب شوند. بدین ترتیب در مورد ربات زمینی می‌توان نوشت:

[2] Basis

$$\{\lambda_t\} = \{\{\omega_1\}^T \ \{\omega_2\}^T \ \cdots\cdots \ \{\omega_n\}^T\}^T \tag{10}$$

که ابعاد آن با تعداد درجات آزادی ربات زمینی ($3n$) برابر است. این در حالی است که ربات فضایی، سه درجه‌ی آزادی بیش از ربات زمینی دارد، بنابراین برای ربات فضایی یک ماتریس ستونی سه مؤلفه‌ای غیر از $\{\omega_i\}$ ها موردنیاز است. یک انتخاب می‌تواند ماتریس ستونی سرعت مرکز جرم جسم 1 در پایه‌ی اینرسی یعنی $\{\dot{p}_1\} = \{\dot{x}_1 \ \ \dot{y}_1 \ \ \dot{z}_1\}^T$ باشد. با این وجود، همان‌طور که در ادامه خواهیم دید، انتخاب ماتریس ستونی سرعت مرکز جرم جسم 1 در پایه‌ی بدنی همان جسم به روابط سینماتیکی منظم‌تری می‌انجامد و لذا انتخاب مناسب‌تر است. اگر این کمیت را با $\{V_1\}$ نمایش دهیم آنگاه شبه سرعت برای ربات فضایی عبارت خواهد بود از:

$$\{\lambda_s\} = \{\{V_1\}^{\mathrm{T}} \ \{\Omega_1\}^{\mathrm{T}} \ \{\omega_2\}^{\mathrm{T}} \ \cdots\cdots \ \{\omega_n\}^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

با توجه به این‌که در ربات فضایی، برخلاف ربات زمینی، چارچوب مرجع اینرسی عضوی از زنجیره نیست، $\{\omega_1\}$ در مورد آن معنا ندارد و لذا از $\{\Omega_1\}$ به‌جای $\{\omega_1\}$ استفاده شده است که بیانگر ماتریس ستونی مؤلفه‌های بردار سرعت زاویه‌ای جسم 1 نسبت به چارچوب مرجع اینرسی در پایه‌ی بدنی همان جسم است.

4- تحلیل سینماتیکی

4-1- تحلیل سینماتیکی برداری

اگر فرض کنیم Ω_k بردار سرعت زاویه‌ای جسم k ام نسبت به جسم صفرم (چارچوب مرجع اینرسی) باشد، آنگاه با استفاده از قضیه‌ی جمع سرعت‌های زاویه‌ای خواهیم داشت:

$$\Omega_k = \Omega_{k-1} + \omega_k \tag{12}$$

همچنین با استفاده از نمادگذاری‌های انجام شده در "شکل 1" داریم:

$$V_k = {}^0\frac{d}{dt}(P_0P_k) = {}^0\frac{d}{dt}(P_0P_{k-1}) + \frac{{}^0dr_{k-1}}{dt} + \frac{{}^0dR_k}{dt} \tag{13}$$

که در آن ${}^0\frac{d}{dt}$ بیانگر مشتق‌گیری از کمیت برداری نسبت به چارچوب مرجع اینرسی (0) است. حال با توجه به این‌که $V_{k-1} = {}^0\frac{d}{dt}(C_0C_{k-1})$ و با اعمال قضیه‌ی انتقال نرخ تغییرات یک بردار میان دو چارچوب مرجع، معادله‌ی (13)می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$V_k = V_{k-1} + \Omega_{k-1} \times r_{k-1} + \Omega_k \times R_k \tag{14}$$

روابط (12) و (14) در ربات زمینی به ازای $k = 1,2,\cdots,n$ و در ربات فضایی به ازای $k = 2,\cdots,n$ برقرار هستند.

4-2- تحلیل سینماتیکی ماتریسی

با توجه به رابطه‌ی انرژی جنبشی برای یک جسم صلب، انرژی جنبشی برای ربات زمینی می‌تواند به‌صورت رابطه (15) نوشته شود:

$$\bar{T} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(m_iV_i \cdot V_i + \Omega_i \cdot I_i \cdot \Omega_i) \tag{15}$$

که در آن تانسور اینرسی عضو i ام نسبت به مرکز جرم آن با I_i نمایش داده شده است. واضح است که بردارهای V_i، Ω_i و تانسور مرتبه‌ی دوم I_i می‌توانند در هر پایه‌ی دلخواهی تجزیه شوند. با این وجود، تجزیه‌ی I_i فقط در پایه‌ی i ام به ماتریس اینرسی با درایه‌های نامتغیر با زمان منتهی می‌گردد و لذا مناسب است هر دو کمیت Ω_i و I_i در پایه‌ی i ام تجزیه گردند. در چنین شرایطی هیچ دلیل منطقی در تجزیه‌ی V_i در پایه‌ای غیر از پایه‌ی i ام وجود ندارد. لذا منظور از $\{V_i\}$، $\{\Omega_i\}$ و $[I_i]$ ماتریس‌هایی است که مؤلفه‌های V_i، Ω_i و I_i در پایه‌ی i ام را در خود جای‌داده‌اند. بر این اساس بیان ماتریسی انرژی جنبشی برحسب این سه کمیت ماتریسی عبارت است از:

$$\bar{T} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(m_i\{V_i\}^T\{V_i\} + \{\Omega_i\}^T[I_i]\{\Omega_i\}) \tag{16}$$

در تبدیل روابط (12) و (14) از فرم برداری به فرم ماتریسی هر کمیت برداری در پایه‌ی متناظر با اندیس آن کمیت تجزیه می‌شود. لذا خواهیم داشت:

$$\{b_k\}^T\{\Omega_k\} = \{b_{k-1}\}^T\{\Omega_{k-1}\} + \{b_k\}^T\{\omega_k\} \tag{17-الف}$$

$$\begin{aligned}\{b_k\}^T\{V_k\} = \{b_{k-1}\}^T\{V_{k-1}\} &+ \{b_{k-1}\}^T\{\Omega_{k-1}\} \\ &\times \{b_{k-1}\}^T\{r_{k-1}\} \\ &+ \{b_k\}^T\{\Omega_k\} \times \{b_k\}^T\{R_k\}\end{aligned} \tag{17-ب}$$

حال طبق تعریف ماتریس دوران داریم:

$$\{b_{k-1}\}^T = \{b_k\}^T[C_{k-1}^k] \tag{18}$$

که در آن $[C_{k-1}^k]$ ماتریس دوران از پایه‌ی $(k-1)$ ام به پایه‌ی k ام می‌باشد، همچنین می‌توان ثابت نمود که:

$$\begin{aligned}\{b_{k-1}\}^T\{\Omega_{k-1}\} \times \{b_{k-1}\}^T\{r_{k-1}\} \\ = \{b_{k-1}\}^T[r_{k-1}^\times]^T\{\Omega_{k-1}\}\end{aligned} \tag{19-الف}$$

$$\{b_k\}^T\{\Omega_k\} \times \{b_k\}^T\{R_k\} = \{b_k\}^T[R_k^\times]^T\{\Omega_k\} \tag{19-ب}$$

که در آن به ازای هر بردار ستونی سه مؤلفه‌ای به فرم $\{x\} = \{x_1 \ \ x_2 \ \ x_3\}^T$، ماتریس کراس[1] با خاصیت پادتقارن به‌صورت رابطه (20) تعریف می‌شود [3]:

$$[x^\times] = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

با جای‌گذاری معادلات (18) و (19) در معادلات (17) و سپس حذف $\{b_k\}^T$ از طرفین، فرم ماتریسی روابط سینماتیکی به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\{\Omega_k\} = [C_{k-1}^k]\{\Omega_{k-1}\} + \{\omega_k\} \tag{21-الف}$$

$$\begin{aligned}[C_{k-1}^k]\{V_{k-1}\} + [C_{k-1}^k][r_{k-1}^\times]^T\{\Omega_{k-1}\} \\ + [R_k^\times]^T\{\Omega_k\}\end{aligned} \tag{21-ب}$$

از این دو رابطه نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial\{\Omega_k\}}{\partial\{\Omega_{k-1}\}} = \frac{\partial\{V_k\}}{\partial\{V_{k-1}\}} = [C_{k-1}^k]^T \tag{22-الف}$$

$$\frac{\partial\{\Omega_k\}}{\partial\{\omega_k\}} = [U] \ \ , \ \ [U] \stackrel{\text{def}}{=} Identity\ matrix \tag{22-ب}$$

$$\frac{\partial\{V_k\}}{\partial\{\Omega_k\}} = [R_k^\times] \tag{22-ج}$$

$$\frac{\partial\{V_k\}}{\partial\{\Omega_{k-1}\}} = [r_{k-1}^\times][C_{k-1}^k]^T \tag{22-د}$$

4-3- استخراج ماتریس‌های [S]

در مورد بردار سرعت مرکز جرم جسم 1 می‌توان نوشت:

$$V_1 = \{b_0\}^T\{\dot{p}_1\} = \{b_1\}^T\{V_1\} \tag{23}$$

حال اگر ماتریس دوران از پایه‌ی $\{b_0\}$ به پایه‌ی $\{b_1\}$ را با $[C_0^1]$ نمایش دهیم آنگاه طبق تعریف خواهیم داشت:

$$\{b_0\}^T = \{b_1\}^T[C_0^1] \tag{24}$$

از دو معادله‌ی اخیر نتیجه می‌شود:

$$\{V_1\} = [C_0^1]\{\dot{p}_1\} \tag{25}$$

از ترکیب روابط (2)، (6-الف)، (9) و (10) برای ربات زمینی و روابط (2)، (6-ب)، (9)، (11) و (25) برای ربات فضایی، ماتریس‌های $[S]$ برای هر یک به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

[1] Cross Matrix

$$[S_s] = diag([C_0^1], [D_1], [D_2], \cdots\cdots, [D_n]) \quad (26\text{-الف})$$

$$[S_s] = diag([C_0^1], [D_1], [D_2], \cdots\cdots, [D_n]) \quad (26\text{-ب})$$

4-4- محاسبه‌ی عبارت $[\mathrm{S}]^{-\mathrm{T}}\left([\dot{\mathrm{S}}]^{\mathrm{T}} - \frac{\partial\{\lambda\}}{\partial\{q\}}\right)$

ماتریس‌های $[S_t]$ و $[S_s]$ هردو قطری بلوکی[1] هستند و لذا همان‌طور که در مرجع [14] آمده است، محاسبه‌ی $[S_t]^{-T}$، $[S_s]^{-T}$، $[\dot{S}_t]^T$ و $[\dot{S}_s]^T$ به‌سادگی از اعمال $[\ ]^{-T}$ و $[\dot{\ }]^T$ روی درایه‌های قطر اصلی انجام می‌شود. بدین ترتیب تنها جمله‌ای که از عبارت $[S]^{-T}\left([\dot{S}]^T - \frac{\partial\{\lambda\}}{\partial\{q\}}\right)$ باقی می‌ماند، $\frac{\partial\{\lambda\}}{\partial\{q\}}$ خواهد بود. به‌کمک روابط (9) و (25) نتیجه می‌گیریم که:

$$\forall\, i \neq 1:\ \frac{\partial\{V_1\}}{\partial\{\alpha_i\}} = [0] \quad (27\text{-الف})$$

$$\forall\, i \in \{1,2,\dots,n\}:\ \frac{\partial\{\omega_i\}}{\partial\{p_1\}} = [0] \quad (27\text{-ب})$$

$$\frac{\partial\{V_1\}}{\partial\{p_1\}} = [0] \quad (27\text{-ج})$$

$$\forall\, i \neq j:\ \frac{\partial\{\omega_i\}}{\partial\{\alpha_j\}} = [0] \quad (27\text{-د})$$

$$\forall\, j \neq 1:\ \frac{\partial\{\Omega_1\}}{\partial\{\alpha_j\}} = [0] \quad (27\text{-ه})$$

و لذا خواهیم داشت:

$$\frac{\partial\{\lambda_t\}}{\partial\{q_t\}} = diag\left(\frac{\partial\{\omega_1\}}{\partial\{\alpha_1\}}, \frac{\partial\{\omega_2\}}{\partial\{\alpha_2\}}, \dots\dots, \frac{\partial\{\omega_n\}}{\partial\{\alpha_n\}}\right) \quad (28\text{-الف})$$

$$\frac{\partial\{\lambda_s\}}{\partial\{q_s\}} = \left(\frac{\partial\{V_1\}}{\partial\{\alpha_1\}}\right)_{21} + diag\left([0], \frac{\partial\{\Omega_1\}}{\partial\{\alpha_1\}}, \frac{\partial\{\omega_2\}}{\partial\{\alpha_2\}}, \dots\dots, \frac{\partial\{\omega_n\}}{\partial\{\alpha_n\}}\right) \quad (28\text{-ب})$$

که در آن $\left(\frac{\partial\{V_1\}}{\partial\{\alpha_1\}}\right)_{21}$ ماتریسی مربعی با بلوک‌های 3×3 است که ماتریس $\frac{\partial\{V_1\}}{\partial\{\alpha_1\}}$ بلوک سطر دوم و ستون اول آن را تشکیل می‌دهد و سایر بلوک‌ها صفرند. در نهایت عبارت‌های $[S]^{-T}\left([\dot{S}]^T - \frac{\partial\{\lambda\}}{\partial\{q\}}\right)$ به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$[S_t]^{-\mathrm{T}}\left([\dot{S}_t]^{\mathrm{T}} - \frac{\partial\{\lambda_t\}}{\partial\{q_t\}}\right) = \mathrm{diag}\left([D_1]^{-\mathrm{T}}\left([\dot{D}_1]^{\mathrm{T}} - \frac{\partial\{\omega_1\}}{\partial\{\alpha_1\}}\right), \dots\dots, [D_n]^{-\mathrm{T}}\left([\dot{D}_n]^{\mathrm{T}} - \frac{\partial\{\omega_n\}}{\partial\{\alpha_n\}}\right)\right) \quad (29\text{-الف})$$

$$[S_s]^{-\mathrm{T}}\left([\dot{S}_s]^{\mathrm{T}} - \frac{\partial\{\lambda_s\}}{\partial\{q_s\}}\right) = \left(-[C_0^1]^{-\mathrm{T}}\frac{\partial\{V_1\}}{\partial\{\alpha_1\}}\right)_{21} + \mathrm{diag}\left([C_0^1]^{-\mathrm{T}}[\dot{C}_0^1]^{\mathrm{T}}, [D_1]^{-\mathrm{T}}\left([\dot{D}_1]^{\mathrm{T}} - \frac{\partial\{\omega_1\}}{\partial\{\alpha_1\}}\right), \dots\dots, [D_n]^{-\mathrm{T}}\left([\dot{D}_n]^{\mathrm{T}} - \frac{\partial\{\omega_n\}}{\partial\{\alpha_n\}}\right)\right) \quad (29\text{-ب})$$

عبارت‌هایی به فرم $[D_i]^{-T}\left([\dot{D}_i]^T - \frac{\partial\{\omega_i\}}{\partial\{\alpha_i\}}\right)$ ، $[C_0^1]^{-T}[\dot{C}_0^1]^T$ و $-[C_0^1]^{-T}\frac{\partial\{V_1\}}{\partial\{\alpha_1\}}$ در دو رابطه‌ی اخیر مشاهده می‌شود که بایستی روابطی برای آن‌ها به دست آید. در مرجع [1] آمده است که:

$$[\dot{C}_{k-1}^k] = [\omega_k^\times][C_{k-1}^k] \quad (30)$$

که در آن ماتریس کراس به‌صورت ترانهاده‌ی رابطه‌ی (30) تعریف شده است. لذا با توجه به تعریف ارائه شده از ماتریس کراس در این مقاله خواهیم داشت:

$$[\dot{C}_{k-1}^k] = [\omega_k^\times]^T[C_{k-1}^k] \quad (31)$$

بدین ترتیب داریم:

$$[\dot{C}_0^1]^T = [C_0^1]^T[\Omega_1^\times] \quad (32)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$[C_0^1]^{-T}[\dot{C}_0^1]^T = [\Omega_1^\times] \quad (33)$$

برای استخراج دو عبارت باقیمانده، مدل‌سازی دینامیکی برای سیستم یک جسمی ($n = 1$)، یک‌بار با استفاده از فرم متداول معادلات بولتزمان-هامل که در مرجع [3] آورده شده و یک‌بار با استفاده از فرم پیشنهاد شده در این مقاله انجام می‌شود. این دو معادله با وجود این‌که ظاهر متفاوتی دارند، دینامیک سیستم یکسانی را توصیف می‌کنند و لذا معادل‌اند. از معادل بودن این دو معادله روابطی برای دو عبارت باقیمانده به دست می‌آید که فرم رابطه‌ی (5) را به ازای سیستم‌های دینامیکی موردمطالعه در این مقاله بسیار ساده‌تر می‌کند.

در مرجع [2]، معادله‌ی گشتاور نیرو حول مرکز جرم برای جسم صلب از فرم عمومی معادله‌ی بولتزمان-هامل و به‌صورت رابطه (34) به دست آمده است:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\Omega_1\}}\right) + [\Omega_1^\times]\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\Omega_1\}} + [V_1^\times]\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{V_1\}} = \{M^{\mathcal{F}/C}\} \quad (34)$$

که در آن $M^{\mathcal{F}/C}$ بردار گشتاور سیستم نیرویی وارد بر جسم نسبت به نقطه‌ی مرکز جرم و $\{M^{\mathcal{F}/C}\}$ ماتریس‌های ستونی حاصل از تجزیه‌ی این بردار در پایه‌ی بدنی جسم است. برای این مسئله‌ی خاص، داریم:

$$\{q_s\} = \{\{p_1\}^T\ \ \{\alpha_1\}^T\}^T \quad (35\text{-الف})$$

$$\{\lambda_s\} = \{\{V_1\}^T\ \ \{\Omega_1\}^T\}^T \quad (35\text{-ب})$$

$$[S_s] = diag([C_0^1], [D_1]) \quad (35\text{-ج})$$

$$[S_s]^{-T}\left([\dot{S}_s]^T - \frac{\partial\{\lambda_s\}}{\partial\{q_s\}}\right) = \begin{bmatrix} [\Omega_1^\times] & [0] \\ -[D_1]^{-T}\frac{\partial\{V_1\}}{\partial\{\alpha_1\}} & [D_1]^{-T}\left([\dot{D}_1]^T - \frac{\partial\{\Omega_1\}}{\partial\{\alpha_1\}}\right) \end{bmatrix} \quad (35\text{-د})$$

از طرفی انرژی جنبشی برحسب $\{q_s\}$ و $\{\lambda_s\}$ عبارت است از:

$$\bar{T} = \frac{1}{2}m_1\{V_1\}^T\{V_1\} + \frac{1}{2}\{\Omega_1\}^T[I_1]\{\Omega_1\} \quad (36)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{q_s\}} = \{0\} \quad (37)$$

با جای‌گذاری روابط اخیر در رابطه‌ی (5) و بسط سطر دوم آن خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\Omega_1\}}\right)$$

---
[1] Block Diagonal

$$+ [D_1]^{-T}\left(\left[\dot{D}_1\right]^T - \frac{\partial\{\Omega_1\}}{\partial\{\alpha_1\}}\right)\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\Omega_1\}} - [D_1]^{-T}\frac{\partial\{V_1\}}{\partial\{\alpha_1\}}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{V_1\}} = [D_1]^{-T}\{Q_{\alpha_1}\} \qquad (38)$$

حال با کم کردن رابطه‌ی (38) از رابطه‌ی (34) خواهیم داشت:

$$\left([\Omega_1^\times] - [D_1]^{-T}\left(\left[\dot{D}_1\right]^T - \frac{\partial\{\Omega_1\}}{\partial\{\alpha_1\}}\right)\right)\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\Omega_1\}} + \left([V_1^\times] + [D_1]^{-T}\frac{\partial\{V_1\}}{\partial\{\alpha_1\}}\right)\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{V_1\}} = \{M^{F/C}\} - [D_1]^{-T}\{Q_{\alpha_1}\} \qquad (39)$$

طی روندی طولانی اثبات نموده‌ایم که ضرایب مومنتوم های خطی و زاویه‌ای در معادله‌ی (39) هر دو صفرند و لذا دو اتحاد سینماتیکی به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$[\Omega_1^\times] - [D_1]^{-T}\left(\left[\dot{D}_1\right]^T - \frac{\partial\{\Omega_1\}}{\partial\{\alpha_1\}}\right) = [0] \qquad \text{(40-الف)}$$

$$[V_1^\times] + [D_1]^{-T}\frac{\partial\{V_1\}}{\partial\{\alpha_1\}} = [0] \qquad \text{(40-ب)}$$

به همین ترتیب از صفر بودن طرف راست معادله‌ی (39) ثابت می‌کنیم که:

$$[x^\times] - [D_i]^{-T}\frac{\partial[C_{i-1}^i]^T\{x\}}{\partial\{\alpha_i\}}[C_{i-1}^i]^T = [0] \qquad \text{(40-ج)}$$

که در آن $\{x\}$ هر برداری است که به $\{\alpha_1\}$ بستگی نداشته باشد. روابط (40) صرفا بیانگر ارتباط میان انواع کمیت‌های سینماتیکی هستند و لذا به اندیس وابستگی ندارند (به ازای سایر اندیس‌ها نیز صحیح‌اند). با استفاده از این واقعیت و نیز جای‌گذاری از رابطه‌ی (25) خواهیم داشت:

$$[\omega_i^\times] - [D_i]^{-T}\left(\left[\dot{D}_i\right]^T - \frac{\partial\{\omega_i\}}{\partial\{\alpha_i\}}\right) = [0] \qquad \text{(41-الف)}$$

$$[([C_{i-1}^i]\{x\})^\times] + [D_i]^{-T}\frac{\partial[C_{i-1}^i]\{x\}}{\partial\{\alpha_i\}} = [0] \qquad \text{(41-ب)}$$

$$[x^\times] - [D_i]^{-T}\frac{\partial[C_{i-1}^i]^T\{x\}}{\partial\{\alpha_i\}}[C_{i-1}^i]^T = [0] \qquad \text{(41-ج)}$$

که در آن برای ربات زمینی $i = 1,2,\cdots,n$ و برای ربات فضایی $i = 2,\cdots,n$ خواهد بود.

حال با جای‌گذاری رابطه‌ی (41- الف) در روابط (29) نتایج زیر حاصل خواهند شد:

$$[\lambda_t^\times] \stackrel{\text{def}}{=} [S_t]^{-T}\left([\dot{S}_t]^T - \frac{\partial\{\lambda_t\}}{\partial\{q_t\}}\right) = diag([\omega_1^\times],[\omega_2^\times],\ldots\ldots,[\omega_n^\times]) \qquad \text{(42-الف)}$$

$$[\lambda_s^\times] \stackrel{\text{def}}{=} [S_s]^{-T}\left([\dot{S}_s]^T - \frac{\partial\{\lambda_s\}}{\partial\{q_s\}}\right) = ([V_1^\times])_{21} + diag([\Omega_1^\times],[\Omega_1^\times],[\omega_2^\times],\ldots\ldots,[\omega_n^\times]) \qquad \text{(42-ب)}$$

که در آن دو ماتریس $[\lambda_t^\times]$ و $[\lambda_s^\times]$ تعریف شده‌اند. با استفاده از رابطه‌ی (11) و طبق تعاریف حساب دیفرانسیل ماتریسی داریم:

$$\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\lambda_s\}} = \left\{\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{V_1\}}\right)^T \left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\Omega_1\}}\right)^T \left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\omega_2\}}\right)^T \cdots\cdots \left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\omega_n\}}\right)^T\right\}^T \qquad (43)$$

از رابطه‌ی (22-ب) داریم:

$$\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\omega_i\}} = \frac{\partial\{\Omega_i\}}{\partial\{\omega_i\}}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\Omega_i\}} = \frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\Omega_i\}} \qquad (44)$$

حال تعریف می‌کنیم:

$$\{\Lambda_s\} = \{\{V_1\}^T\,\{\Omega_1\}^T\,\{\Omega_2\}^T\,\cdots\cdots\,\{\Omega_n\}^T\}^T \qquad (45)$$

از ترکیب روابط (44)، (45) و (46) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\lambda_s\}} = \frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\Lambda_s\}} \qquad (46)$$

رابطه‌ی اخیر در مورد ربات زمینی نیز صدق می‌کند. به عبارت دیگر داریم:

$$\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\lambda_t\}} = \frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\Lambda_t\}} \qquad (47)$$

که در آن:

$$\{\Lambda_t\} = \{\{\Omega_1\}^T\,\{\Omega_2\}^T\,\cdots\cdots\,\{\Omega_n\}^T\}^T \qquad (48)$$

با توجه به آنچه بیان گردید، معادله‌ی (5) برای ربات زمینی و فضایی به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\Lambda_t\}}\right) + [\lambda_t^\times]\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\Lambda_t\}}\right) - [S_t]^{-T}\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{q_t\}}\right) = \{\Phi_t\} \qquad \text{(49-الف)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\Lambda_s\}}\right) + [\lambda_s^\times]\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\Lambda_s\}}\right) - [S_s]^{-T}\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{q_s\}}\right) = \{\Phi_s\} \qquad \text{(49-ب)}$$

4-5- محاسبه‌ی $\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\lambda_s\}}$ برای ربات فضایی

در محاسبه‌ی $\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\Lambda_s\}}$ به درک نحوه‌ی ارتباط میان کمیت‌های سینماتیکی (روابط 21) نیاز داریم. یک راه‌کار بسیار مناسب در دست‌یابی به این هدف رسم گرافی است که تصویر واضحی از نقش تک‌تک کمیت های سینماتیکی در تشکیل انرژی جنبشی را در اختیار گذارد. گراف متناظر با روابط سینماتیکی (21-الف) و (21-ب) می‌تواند به صورت "شکل 2" نمایش داده شود.

در گراف فوق A و B به ترتیب انرژی جنبشی انتقالی و دورانی کل سیستم و A_i و B_i به ترتیب انرژی جنبشی انتقالی و دورانی جزء iام هستند. به عبارت دیگر داریم:

$$A_i = \frac{1}{2}m_i\{V_i\}^T\{V_i\} \qquad \text{(50-الف)}$$

$$B_i = \frac{1}{2}\{\Omega_i\}^T[I_i]\{\Omega_i\} \qquad \text{(50-ب)}$$

از روابط اخیر خواهیم داشت:

$$\frac{\partial A_i}{\partial\{V_i\}} = m_i\{V_i\} \qquad \text{(51-الف)}$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial\{\Omega_i\}} = [I_i]\{\Omega_i\} \qquad \text{(51-ب)}$$

نحوه‌ی استفاده از این گراف در محاسبه‌ی درایه‌های $\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\Lambda_s\}}$ به این صورت است که در گام اول تمام مسیرهای آغاز شده از کمیت داخل کروشه تا $\bar{T}$ شناسایی می‌شوند. در گام دوم به ازای هر یک از پاره‌خط‌های جهت‌دار در یک مسیر دلخواه از کمیت انتهای پاره‌خط جهت‌دار نسبت به کمیت حاضر در ابتدای آن، گرادیان ماتریسی گرفته می‌شود. در گام سوم همه‌ی گرادیان‌ها از پاره‌خط جهت‌دار اول تا آخر در هم ضرب می‌شوند. با به دست آمدن این حاصل‌ضرب‌ها برای تمامی مسیرها، آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم. در نهایت حاصل این جمع همان $\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\Lambda_s\}}$ خواهد بود.

$$\frac{\partial\bar{T}}{\partial\{V_1\}} = \sum_{k=1}^{n}[C_1^k]^T m_k\{V_k\} \qquad \text{(52- الف)}$$

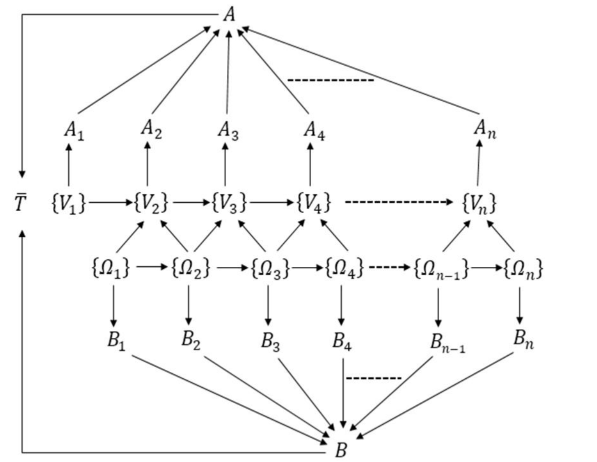

Fig. 2 The role of each kinematic quantity in forming the total kinetic energy of the system

شکل 2 نحوه‌ی تشکیل انرژی جنبشی کل توسط کمیت‌های سینماتیکی

با انجام روند مذکور به ازای تک تک درایه‌های $\{\Lambda_s\}$ و بهره‌گیری از روابط (51) نتایج عمومی زیر حاصل می‌شوند:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial\{\Omega_i\}} = \sum_{k=i}^{n}[C_i^k]^T[I_k]\{\Omega_k\} + \sum_{k=i}^{n}\left(\sum_{j=i}^{k}\left(\left[C_i^j\right]^T[L(j,k)]\left[C_j^k\right]^T\right)\right)m_k\{V_k\}$$
$$i = 1,2,\dots,n \qquad \text{(52-ب)}$$

که در آن:

$$[R_1^{\times}] = [0] \quad , \quad [L(j,k)] = \begin{cases}[R_j^{\times}] & j = k \\ [R_j^{\times}] + [r_j^{\times}] & j \neq k\end{cases} \qquad \text{(52-ج)}$$

6-4- محاسبه‌ی $\frac{\partial \bar{T}}{\partial\{\lambda_t\}}$ برای ربات زمینی

گراف شکل 2 برای ربات زمینی نیز قابل استفاده است با این تفاوت که بایستی یک پاره‌خط جهت‌دار از سمت $\{\Omega_1\}$ به $\{V_1\}$ نیز رسم شود تا وابستگی آن‌ها در ربات زمینی نشان داده شود. با استفاده از این گراف، روابطی به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial\{\Omega_i\}} = \sum_{k=i}^{n}[C_i^k]^{\mathrm{T}}[I_k]\{\Omega_k\} + \sum_{k=i}^{n}\left(\sum_{j=i}^{k}\left(\left[C_i^j\right]^{\mathrm{T}}[\mathrm{L}(j,k)]\left[C_j^k\right]^{\mathrm{T}}\right)\right)m_k\{V_k\}$$
$$i = 1,2,\dots,n \qquad (53)$$

این رابطه با رابطه‌ی (50-ب) یکسان است با این تفاوت که با توجه به "شکل 2"، $[R_1^{\times}]$ صفر نیست.

7-4- محاسبه‌ی $\frac{\partial \bar{T}}{\partial\{q_s\}}$ برای ربات فضایی

از رابطه‌ی (6-ب) داریم:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial\{q_s\}} = \left\{\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial\{p_1\}}\right)^T \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial\{\alpha_1\}}\right)^T \dots\dots \dots\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial\{\alpha_n\}}\right)^T\right\}^T \qquad (54)$$

از روابط (21) نتیجه می‌گیریم که درایه‌های ماتریس ستونی $\{p_1\}$ و ماتریس مربعی $[C_0^1(\alpha_1)]$ در تابع انرژی جنبشی حضور ندارند، لذا می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial\{p_1\}} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial\{\alpha_1\}} = \{0\} \qquad (55)$$

حال به ازای $i = 2,3,\dots,n$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial\{\alpha_i\}} = \frac{\partial}{\partial\{\alpha_i\}}\sum_{j=1}^{i-1}\bar{T}_j + \frac{\partial}{\partial\{\alpha_i\}}\sum_{j=i}^{n}\bar{T}_j \qquad (56)$$

واضح است که $\bar{T}_j$ به ازای $j = 1,2,3,\dots,i-1$ تابعی از $[C_{i-1}^i]$ نبوده و لذا تابعی از $\{\alpha_i\}$ نیز نخواهد بود، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial\{\alpha_i\}} = \sum_{j=i}^{n}\frac{\partial \bar{T}_j}{\partial\{\alpha_i\}} \qquad (57)$$

از طرفی داریم:

$$\bar{T}_j = \bar{T}_j\left(\{V_j\}(\{\alpha_i\}),\{\Omega_j\}(\{\alpha_i\})\right) \qquad (58)$$

با گرادیان‌گیری از طرفین نسبت به $\{\alpha_i\}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \bar{T}_j}{\partial\{\alpha_i\}} = \frac{\partial\{V_j\}}{\partial\{\alpha_i\}}\frac{\partial \bar{T}_j}{\partial\{V_j\}} + \frac{\partial\{\Omega_j\}}{\partial\{\alpha_i\}}\frac{\partial \bar{T}_j}{\partial\{\Omega_j\}} = \frac{\partial\{V_j\}}{\partial\{\alpha_i\}}m_j\{V_j\} + \frac{\partial\{\Omega_j\}}{\partial\{\alpha_i\}}[I_j]\{\Omega_j\} \qquad (59)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی اخیر در رابطه‌ی (57) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial\{\alpha_i\}} = \sum_{j=i}^{n}\left(\frac{\partial\{V_j\}}{\partial\{\alpha_i\}}m_j\{V_j\} + \frac{\partial\{\Omega_j\}}{\partial\{\alpha_i\}}[I_j]\{\Omega_j\}\right) \qquad (60)$$

گام بعدی محاسبه‌ی $\frac{\partial\{\Omega_j\}}{\partial\{\alpha_i\}}$ و $\frac{\partial\{V_j\}}{\partial\{\alpha_i\}}$ خواهد بود، برای این منظور داریم:

$$\frac{\partial\{\Omega_j\}}{\partial\{\alpha_i\}} = \frac{\partial\{\Omega_i\}}{\partial\{\alpha_i\}}\frac{\partial\{\Omega_j\}}{\partial\{\Omega_i\}} \qquad (61)$$

از ترکیب روابط (21-الف)، (41-ب) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\partial\{\Omega_i\}}{\partial\{\alpha_i\}} = -[D_i]^T[C_{i-1}^i][\Omega_{i-1}^{\times}][C_{i-1}^i]^T \qquad (62)$$

به علاوه از قاعده‌ی زنجیره‌ای خواهیم داشت:

$$\frac{\partial\{\Omega_j\}}{\partial\{\Omega_i\}} = \frac{\partial\{\Omega_{i+1}\}}{\partial\{\Omega_i\}}\frac{\partial\{\Omega_{i+2}\}}{\partial\{\Omega_{i+1}\}}\dots\frac{\partial\{\Omega_j\}}{\partial\{\Omega_{j-1}\}} \qquad (63)$$

حال با استفاده از رابطه‌ی (22-الف) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial\{\Omega_j\}}{\partial\{\Omega_i\}} = [C_i^{i+1}]^T[C_{i+1}^{i+2}]^T\dots\left[C_{j-1}^j\right]^T = \left[C_i^j\right]^T \qquad (64)$$

از ترکیب روابط (61)، (62) و (64) نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial\{\Omega_j\}}{\partial\{\alpha_i\}} = -[D_i]^T[C_{i-1}^i][\Omega_{i-1}^{\times}]\left[C_{i-1}^j\right]^T \qquad (65)$$

برای محاسبه‌ی $\frac{\partial\{V_j\}}{\partial\{\alpha_i\}}$ با استفاده از رابطه‌ی (21) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial\{V_j\}}{\partial\{\alpha_i\}} = \frac{\partial\{V_{j-1}\}}{\partial\{\alpha_i\}}\left[C_{j-1}^j\right]^T + \frac{\partial\{\Omega_{j-1}\}}{\partial\{\alpha_i\}}\left(\left[r_{j-1}^{\times}\right]\left[C_{j-1}^j\right]^T + \left[C_{j-1}^j\right]^T\left[R_j^{\times}\right]\right) \qquad (66)$$

در رابطه‌ی اخیر، $\frac{\partial\{\Omega_{j-1}\}}{\partial\{\alpha_i\}}$ از رابطه‌ی (65) به دست می‌آید. به علاوه از روابط (21) و (41-ب) داریم:

$$\frac{\partial\{V_i\}}{\partial\{\alpha_i\}} = -[D_i]^T[C_{i-1}^i][V_{J_i}^{\times}][C_{i-1}^i]^T + \frac{\partial\{\Omega_j\}}{\partial\{\alpha_i\}}[R_i^{\times}] \qquad (67)$$

که در آن:

$$\{V_{J_i}\} = \{V_{i-1}\} + [r_{i-1}^{\times}]^T\{\Omega_{i-1}\} \tag{68}$$

با استفاده از رابطه‌ی (67)، مقادیر $\frac{\partial\{V_j\}}{\partial\{\alpha_i\}}$ به ازای $j = i+1, \dots, n$ به صورت بازگشتی به دست می‌آیند.

4-8- محاسبه‌ی $\frac{\partial \bar{T}}{\partial\{q_t\}}$ برای ربات زمینی

روابط (59) تا (68) در مورد ربات زمینی نیز صدق می‌کنند با این تفاوت که داریم:

$$\{V_{J_2}\} = [(R_1 + r_1)^{\times}]^{\mathrm{T}}\{\omega_1\} \tag{69}$$

5- محاسبه‌ی شبه‌نیروها

فرض کنیم F نیرویی دلخواه، اعمال شده بر عضوی دلخواه باشد. بردار مکان متناظر با محل اعمال این نیرو می‌تواند به دو قسمت P_1 (بردار مکان مرکز جرم جسم اول) و u تقسیم شود که در آن u برداری است که از مرکز جرم جسم اول آغاز و به محل اعمال نیرو منتهی می‌شود. لذا می‌توان نوشت:

$$Q_x = \sum_{\mathrm{sys}} F \cdot \frac{\partial(P_1 + u)}{\partial x} \tag{70}$$

واضح است که بردار u به x بستگی ندارد و لذا $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ خواهد بود. به علاوه داریم:

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x b_1^{(0)} + y b_2^{(0)} + z b_3^{(0)}\right) = b_1^{(0)} \tag{71}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$Q_x = \left(\sum_{\mathrm{sys}} F\right) \cdot b_1^{(0)} \tag{72}$$

بدین ترتیب $\{Q_{P_1}\}$ به صورت رابطه (73) به دست می‌آید:

$$\{Q_{P_1}\} = \left\{\left(\sum_{sys} F\right) \cdot b_1^{(0)} \quad \left(\sum_{sys} F\right) \cdot b_2^{(0)} \quad \left(\sum_{sys} F\right) . b_3^{(0)}\right\}^T \tag{73}$$

از معادله‌ی اخیر معلوم می‌گردد که $\{Q_{P_1}\}$، همان ماتریس ستونی حاوی مؤلفه‌های نیروی برایند وارد بر کل سیستم در پایه‌ی اینرسی است.

ماتریس دوران $[C_{i-1}^i]$ به عنوان تابعی از ماتریس ستونی $\{\alpha_i\}$، در بردارهای مکان مستقر در جسم i ام به بعد حضور دارد. لذا در محاسبه‌ی Q_{ψ_i} با زنجیره‌ای از اعضا متشکل از جسم i ام تا جسم n ام مواجه خواهیم بود. لذا می‌توان نوشت:

$$Q_{\psi_i} = \sum_k F_k \cdot \frac{\partial u_{ik}}{\partial \psi_i} \tag{74}$$

که در آن F_k نیروی k ام وارد بر سیستم متشکل از جسم i ام تا جسم n ام و u_{ik} بردار مکان از J_i به محل اعمال F_k هستند.

رابطه‌ی اخیر را می‌توان طبق روند زیر برحسب پایه‌ی اینرسی بیان نمود:

$$\begin{aligned} Q_{\psi_i} &= \sum_k \{b_0\}^T\{F_k\}_0 \cdot \frac{\partial\{b_0\}^T\{u_{ik}\}_0}{\partial\psi_i} \\ &= \sum_k \{b_0\}^T\{F_k\}_0 \cdot \{b_0\}^T\left(\frac{\partial\{u_{ik}\}_0}{\partial\psi_i}\right)^T \\ &= \sum_k \frac{\partial\{u_{ik}\}_0}{\partial\psi_i}\{F_k\}_0 \end{aligned} \tag{75}$$

که در آن اندیس صفر به این معناست که هر دو ماتریس‌های ستونی، حاصل تجزیه‌ی بردارهای داخل کروشه در پایه‌ی اینرسی هستند. از رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت:

$$\{Q_{\alpha_i}\} = \sum_k \frac{\partial\{u_{ik}\}_0}{\partial\{\alpha_i\}}\{F_k\}_0 \tag{76}$$

حال اگر رابطه‌ی اخیر را برحسب $\{u_{ik}\}_i$ بنویسیم رابطه‌ی (77) حاصل می‌شود:

$$\{Q_{\alpha_i}\} = \sum_k \frac{\partial\left[C_0^i\right]^T\{u_{ik}\}_i}{\partial\{\alpha_i\}}\{F_k\}_0 \tag{77}$$

از طرفی داریم:

$$\frac{\partial\left[C_0^i\right]^T\{u_{ik}\}_i}{\partial\{\alpha_i\}} = \frac{\partial\left[C_0^{i-1}\right]^T\left[C_{i-1}^i\right]^T\{u_{ik}\}_i}{\partial\{\alpha_i\}} \tag{78}$$

با استفاده از رابطه‌ی (41-ج) و اعمال قاعده‌ی زنجیره‌ای خواهیم داشت:

$$\frac{\partial\left[C_0^i\right]^T\{u_{ik}\}_i}{\partial\{\alpha_i\}} = [D_i]^T[u_{ik}^{\times}]_i\left[C_0^i\right] \tag{79}$$

که جای‌گذاری آن در رابطه‌ی (77) به معادله‌ی (80) منتج می‌گردد:

$$\begin{aligned} \{Q_{\alpha_i}\} &= [D_i]^T\sum_k [u_{ik}^{\times}]_i\left[C_0^i\right]\{F_k\}_0 \\ &= [D_i]^T\sum_k [u_{ik}^{\times}]_i\{F_k\}_i \end{aligned} \tag{80}$$

نهایتا از ضرب $[S]^{-T}$ در $\{Q\}$ شبه نیروها به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\{\Phi\} = \left\{\{\Phi_{P_1}\}^T \; \{\Phi_{\alpha_1}\}^T \dots \{\Phi_{\alpha_n}\}^T\right\}^T \tag{81}$$

که در آن:

$$\{\Phi_{P_1}\} = [C_0^1]\{Q_{P_1}\} \tag{82}$$

و:

$$\{\Phi_{\alpha_i}\} = [D_i]^{-T}\{Q_{\alpha_i}\} = \sum_k [u_{ik}^{\times}]_i\{F_k\}_i \tag{83}$$

1-5- محاسبه‌ی شبه نیروها برای ربات زمینی

رابطه‌ی (83) در مورد هر دو ربات صحیح است با این تفاوت که J_1 برای ربات زمینی، مفصل آن با زمین و برای ربات فضایی، نقطه‌ی مرکز جرم جسم اول هستند (شکل1).

6- مدل‌سازی دینامیکی یک ربات دو لینکی زمینی

در این قسمت قصد داریم با استفاده از الگوریتم ارائه شده مدل دینامیکی یک ربات دو لینکی زمینی در حالت صفحه‌ای را به دست آوریم (شکل 3). در مورد این سیستم داریم:

$$\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} \frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\Omega_1\}} \\ \frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\Omega_2\}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\omega_1^{\times}] & [0] \\ [0] & [\omega_2^{\times}] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\Omega_1\}} \\ \frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\Omega_2\}} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [D_1]^{-T} & [0] \\ [0] & [D_2]^{-T} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\alpha_1\}} \\ \frac{\partial\bar{T}}{\partial\{\alpha_2\}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\Phi_{\alpha_1}\} \\ \{\Phi_{\alpha_2}\} \end{Bmatrix} \tag{84}$$

$$[C_1^2] = \begin{bmatrix} cos\psi_2 & sin\psi_2 & 0 \\ -sin\psi_2 & cos\psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{85}$$

حال فرض می‌کنیم لینک‌ها، میله‌هایی باریک و همسان باشند و نیروها همواره عمود بر میله‌ها باقی بمانند. بر این اساس داریم:

$$m_1 = m_2 = m \tag{86-الف}$$

$$[I_1] = [I_2] = [I] = \frac{1}{3}ml^2\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{86-ب}$$

$$\{R_1\} = \{r_1\} = \{R_2\} = \{R\} = \{l, 0,0\}^T \tag{86-ج}$$

$$\{F_1\} = \{0, f_1, 0\}^T \tag{86-د}$$

$$\{F_2\} = \{0, f_2, 0\}^T \tag{86-ه}$$

با در نظر گرفتن ساده سازی های اخیر و استفاده از روابط (53)، (60)، (62) و (67) داریم:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial\{\Omega_1\}} = [I]\{\Omega_1\} + [C_1^2]^T[I]\{\Omega_2\} + [R^\times]m\{V_1\} + (2[R^\times][C_1^2]^T + [C_1^2]^T[R^\times])m\{V_2\} \tag{87-الف}$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial\{\Omega_2\}} = [I]\{\Omega_2\} + [R^\times]m\{V_2\} \tag{87-ب}$$

$$-[D_1]^{-T}\frac{\partial \bar{T}}{\partial\{\alpha_1\}} = \{0\} \tag{87-ج}$$

$$-[D_2]^{-T}\frac{\partial \bar{T}}{\partial\{\alpha_2\}} = [C_1^2]\big(2[V_1{}^\times][C_1^2]^T m\{V_2\} + [\Omega_1^\times][C_1^2]^T([I]\{\Omega_2\} + [R^\times]m\{V_2\})\big) \tag{87-د}$$

از طرفی از روابط سینماتیکی (21) داریم:

$$\{\Omega_1\} = \{\omega_1\} = \{0,0,\dot{\psi}_1\}^T \tag{88-الف}$$

$$\{\Omega_2\} = \{0,0,\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2\}^T \tag{88-ب}$$

$$\{V_1\} = \{0, l\dot{\psi}_1, 0\}^T \tag{88-ج}$$

$$\{V_2\} = \begin{Bmatrix} 2l\dot{\psi}_1 sin\psi_2 \\ 2l\dot{\psi}_1 cos\psi_2 + l(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{88-د}$$

حال با جای‌گذاری از روابط (88) در روابط (53)، (60)، (62) و (67) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial\{\Omega_1\}} = \Big\{0\,,0\,,\frac{2}{3}ml^2\,\big(\dot{\psi}_1(5 + 3\cos\psi_2) + \dot{\psi}_2(2 + 3\cos\psi_2)\big)\Big\}^{\mathrm{T}} \tag{89-الف}$$

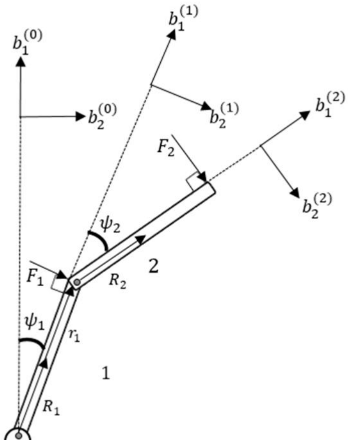

Fig. 3 A terrestrial two-link planar robot

شکل 3 یک ربات دو لینکی زمینی در حالت صفحه‌ای

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial\{\Omega_2\}} = \Big\{0\,,0\,,\frac{2}{3}ml^2\big(\dot{\psi}_1(2 + 3\cos\psi_2) + 2\dot{\psi}_2\big)\Big\}^{\mathrm{T}} \tag{89-ب}$$

$$-[D_2]^{-\mathrm{T}}\frac{\partial \bar{T}}{\partial\{\alpha_2\}} = \{0\,,0\,,2ml^2\dot{\psi}_1(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)\sin\psi_2\} \tag{89-ج}$$

$$\begin{bmatrix}[\omega_1^\times] & [0]\\ [0] & [\omega_2^\times]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial \bar{T}}{\partial\{\Omega_1\}}\\ \dfrac{\partial \bar{T}}{\partial\{\Omega_2\}}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\{0\}\\ \{0\}\end{Bmatrix} \tag{89-د}$$

6-1- محاسبه ی شبه نیروها برای ربات دو لینکی زمینی

با توجه به "شکل 3" و روابط (86) داریم:

$$\{\Phi_{\alpha_1}\} = 2[R^\times]\{F_1\} + 2([R^\times] + [([C_1^2]^T\{R\})^\times])\{F_2\} = \{0\,,0\,,2l\big(f_1 + f_2(1 + cos\psi_2)\big)\}^T \tag{90-الف}$$

$$\{\Phi_{\alpha_2}\} = 2[R^\times]\{F_2\} = \{0\,,0\,,2lf_2\}^T \tag{90-ب}$$

در نهایت، با جای‌گذاری روابط (89) و (90) در رابطه‌ی (84)، معادلات حرکت به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$2l\big(f_1 + f_2(1 + cos\psi_2)\big) = \frac{2}{3}ml^2\big[2(5 + 3cos\psi_2)\ddot{\psi}_1 + (2 + 3cos\psi_2)\ddot{\psi}_2 - 3\dot{\psi}_2(2\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)sin\psi_2\big] \tag{91-الف}$$

$$2lf_2 = \frac{2}{3}ml^2\big[2\ddot{\psi}_2 + (2 + 3cos\psi_2)\ddot{\psi}_1 + 3\dot{\psi}_1^2 sin\psi_2\big] \tag{91-ب}$$

7- نتایج شبیه‌سازی

در این قسمت نتایج شبیه‌سازی و صحت‌سنجی مدل در نرم‌افزار آدامز به ازای شرایط اولیه‌ی صفر، $m = 3\,kg$، $I_{xx} = 1$، $I_{yy} = I_{zz} = 0.2$، طول لینک $2m$ و تحریک $f_1 = f_2 = 0.1sint\,N$ به‌دست آمده و همان‌طور که در شکل‌های 4، 5، 6 و 7 مشاهده می‌شود، نمودارهای حاصل از شبیه‌سازی توسط الگوریتم ارائه شده با مدل نرم‌افزار آدامز به‌طور کامل مطابقت دارد.

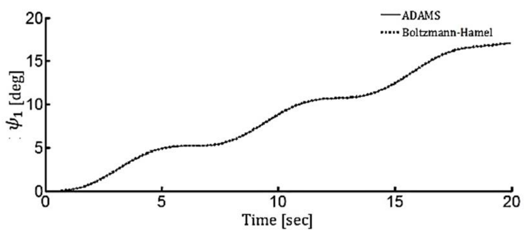

Fig. 4 Validation of the first generalized coordinate

شکل 4 صحت‌سنجی اولین مختصه‌ی تعمیم یافته

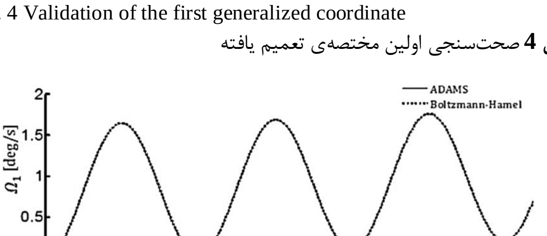

Fig. 5 Validation of the first quasi-velocity

شکل 5 صحت سنجی شبه‌سرعت اول

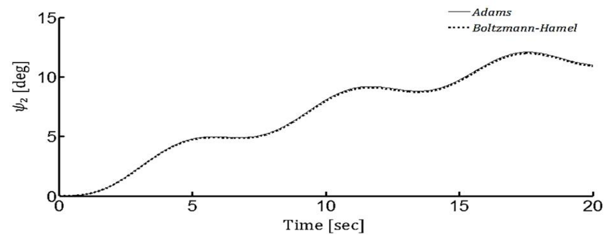

Fig. 6 Validation of the first generalized coordinate

شکل 6 صحت سنجی مختصه تعمیم یافته اول

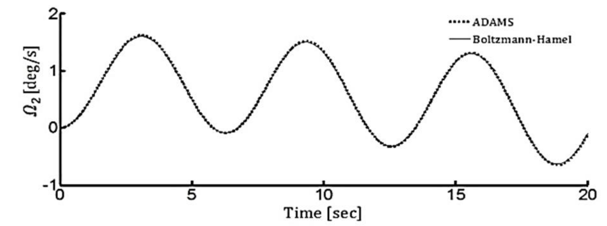

Fig. 7 Validation of the second quasi-velocity

شکل 7 صحت سنجی شبه‌سرعت دوم

8- نتیجه‌گیری

در این مقاله، الگوریتمی جهت استخراج معادلات حرکت ربات‌های زمینی و فضایی با تعداد دلخواه عضو صلب در حالت زنجیرباز ارائه گردید. با توجه به معایب روش‌های نیوتن- اویلر و لاگرانژ و نیز مزایای قابل‌توجه مفهوم شبه مختصات و شبه‌سرعت‌ها، از فرمی از معادلات مبتنی بر معادلات بولتزمان- هامل که مفاهیم مذکور در آن حضور دارند، جهت مدل‌سازی دینامیکی استفاده گردید. به‌طور خاص، مشاهده گردید که این رویکرد در مدل‌سازی دینامیکی، با از میان برداشتن معایب روش‌های نیوتن-اویلر و لاگرانژ (نیاز به تشکیل انرژی جنبشی و احتساب نیروهای داخلی بین اجزای سیستم)، امکان استخراج معادلات این سیستم‌ها را در حالت عمومی فراهم آورده و بدین جهت می‌تواند روشی مطلوب در ارائه الگوریتم‌های عمومی تشکیل معادلات به‌شمار آید. همچنین نقش کلیدی استخراج اتحادهای سینماتیکی در ساده‌سازی معادلات بولتزمان- هامل، از طریق اثبات سه رابطه‌ی کاربردی نشان داده شده و مورد استفاده قرار گرفت. در ادامه، نحوه‌ی استفاده از الگوریتم ارائه شده، از طریق حل یک مثال نشان داده شد و نهایتا صحت مدل به‌وسیله‌ی مقایسه‌ی نمودارهای حاصل از شبیه‌سازی یک ربات دو لینکی دو درجه آزادی و نمودارهای به‌دست‌آمده از مدل ربات در نرم‌افزار آدامز تأیید گردید.

9- فهرست علائم

A_i	انرژی جنبشی انتقالی عضو i ام
B_i	انرژی جنبشی دورانی عضو i ام
$\{b_i\}$	ماتریس ستونی حاوی بردارهای پایه‌ی بدنی عضو i ام
C_i	نقطه‌ی مرکز جرم عضو i ام
$[C_i^j]$	ماتریس دوران از پایه‌ی i ام به پایه‌ی j ام
$[D_i]$	ماتریس تبدیل از مشتق زوایای عضو i ام به سرعت‌های زاویه‌ای همان عضو
F	بردار نیروی دلخواه وارد شده بر عضو دلخواهی از سیستم
F_i	بردار نیروی دلخواه واردشده بر عضو i ام
$[I_i]$	ماتریس اینرسی عضو i ام نسبت به مرکز جرم آن بیان شده در پایه‌ی بدنی همان عضو
J_i	مفصل بین عضو i ام و عضو $i-1$ ام
p_1	بردار مکان مرکز جرم عضو اول نسبت به نقطه‌ای ساکن در چارچوب مرجع اینرسی
$\{q\}$	ماتریس ستونی مختصات تعمیم‌یافته
R_i	بردار مکان مرکز جرم عضو i ام نسبت به مفصل J_i
r_i	بردار مکان مفصل J_{i+1} نسبت به مرکز جرم عضو i ام
$[S]$	ماتریس تبدیل از سرعت‌های تعمیم‌یافته به شبه‌سرعت‌ها
T	انرژی جنبشی کل سیستم برحسب مختصات تعمیم‌یافته و سرعت‌های تعمیم‌یافته و شبه‌سرعت‌ها
u	بردار مکان متناظر با محل اعمال نیروی دلخواه F نسبت به مرکز جرم عضو اول در ربات فضایی
u_{ik}	بردار مکان متناظر با محل اعمال نیروی دلخواه F_k نسبت به مفصل J_i
V_i	بردار سرعت مرکز جرم عضو i ام

علائم یونانی

$\{\alpha_i\}$	ماتریس ستونی حاوی زوایای وضعیت عضو i ام نسبت به عضو $i-1$ ام
$\{\lambda\}$	ماتریس ستونی شبه‌سرعت‌ها
$\{\Omega_i\}$	ماتریس ستونی حاوی مؤلفه‌های بردار سرعت زاویه‌ای عضو i ام نسبت به چارچوب مرجع اینرسی بیان‌شده در پایه‌ی i ام
$\{\omega_i\}$	ماتریس ستونی حاوی مؤلفه‌های بردار سرعت زاویه‌ای عضو i ام نسبت به عضو $i-1$ ام بیان شده در پایه‌ی i ام

بالانویس‌ها

$\times$	اپراتور تبدیل از ماتریس ستونی به ماتریس کراس
T	ترانهاده‌ی ماتریس
$-\mathrm{T}$	معکوس ترانهاده‌ی ماتریس

زیرنویس‌ها

s	ربات فضایی
t	ربات زمینی

10- مراجع

[1] R. D. Quinn, Equations of motion for structures in terms of quasi-coordinates, *Journal Of Applied Mechanics*, Vol. 57, No. 3, pp. 745-749, 1990.

[2] D. T. Greenwood, *Advanced dynamics*, pp.226-305, Cambridge: Cambridge University Press , 2003.

[3] Leonard Meirovitch, *Methods of analytical dynamics*, pp. 157-164, New York: McGraw-Hill, 1970.

[4] M. Korayem, A. Shafei, Application of recursive gibbs–appell formulation in deriving the Equations of motion of N-viscoelastic robotic manipulators in 3D space using Timoshenko beam theory, *Acta Astronautica*, Vol. 83, No. 4 pp. 273-294, 2013.

[5] Alipour, K., Moosavian, S.A.A. and Bahramzadeh, Y., Dynamics of wheeled mobile robots with flexible suspension: analytical modelling and verification. *International Journal of Robotics & Automation*, Vol. 23, No. 4, pp. 242, 2008.

[6] A. F. Jahromi, R. B. Bhat,W. F. Xieintegrate, Integrated ride and handling vehicle model using lagrangian quasi-coordinates, *International Journal of Automotive Technology*, Vol. 16, No. 2, pp 239-251, 2014.

[7] J. M. Cameron, W. J. Book, Modeling mechanisms with nonholonomic joints using the Boltzmann-Hamel equations, *International Journal On Robotics Research*, Vol. 16, No. 1, pp. 47-59, 1997.

[8] J. D. Turner, Symbolic Equation of motion and linear algebra models for high-speed ground vehicle simulations, *Journal Of Guidance And Control* , Vol. 10, No. 5, pp. 8-18, 2001.

[9] K. Sibilski, A. Zyluk, Generation of equations of motion of flying vehicles as multi-body systems - general remarks, *guidance, Navigation And Control and Co-located Conferences*, , Vol. 56 No. 4, pp. 10-13, 2009.

[10] F. Talamucci, An algebraic procedure for reducing the Boltzmann–Hamel

equations in nonholonomic systems, *Advances In Theoretical And Applied Mechanics*, Vol. 8, No. 1, pp. 7 – 26, 2015.

[11] A. Khoshnood, H. M. Maryamnegari, Dynamics modeling and active vibration control of a Satellite with flexible solar panels, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 16, pp. 57-66, 2015. (in Persian فارسی)

[12] J. M. Maruskin, A. M. Bloch, The Boltzmann–Hamel equations for the optimal control of mechanical systems with nonholonomic constraints, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 21, No. 4, pp. 373-386, 2011.

[13] M. Lu, W. Gu, J. Liu, Z. Wang, Z. Jing, G. Qin, S. Tu, Recursive dynamic algorithm of open-chain multibody system, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 14, No. 2, pp. 194–197, 2014.

[14] J. R. Magnus, H. Neudecker, *Matrix Differential Calculus With Applications in Statistics and Econometrics*, Second Edition, pp.226-305, New York: Wiley, 1999.