ماهنامه علمى پژوهشى





mme.modares.ac.ir

مدلسازی دینامیکی رباتهای زمینی و فضایی در حالت زنجیرباز براساس فرمی از معادلات بولتزمان - هامل

عبدالمجيد خوشينود¹*، استحاق آزاد²، سيد محمدامين رضيوي³

1 - استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا دینامیک پرواز و کنترل، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

3- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا دینامیک پرواز و کنترل، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

* تهران، صندوق يستى khoshnood@kntu.ac.ir ،83911-16569

چکیدہ	اطلاعات مقاله
در این مقاله. فرمی متفاوت از فرم متداول معادلات بولتزمان-هامل (معادلات لاگرانژ برحسب شبه مختصات) استخراج گردیده و براساس آن الگوریتمی جامع جهت مدلسازی دینامیکی رباتهای زمینی و فضایی، با تعداد دلخواه عضو صلب در حالت زنجیر باز، ارائه شده است. این فرم از معادلات بولتزمان- هامل، در عین پرهیز از پیچیدگیهای فرم متداول، دارای مزایای قابل توجهی است که از جملهی آنها میتوان به عدم نیاز	مقاله پژوهشی کامل دریافت: 19 دی 1394 پذیرش: 05 فروردین 1395 ارائه در سایت: 30 خرداد 1395
— به تشکیل انرژی جنبشی بهصورت تابعی از مختصات تعمیمیافته و شبه سرعتها، بیان نیروهای تعمیمیافته برحسب بردارهای پایهی بدنی	كليد واژگان:
اجزای سیستم و ارائهی تصویری واضح از دینامیک سیستم اشاره نمود. در مسیر استخراج الگوریتم مذکور، معادلات حرکت یک جسم صلب	معادلات بولتزمان - هامل
یکبار با استفاده از فرم ارائه شده و بار دیگر با استفاده از فرم متداول معادلات بولتزمان- هامل بهدست آمده که از مقایسهی آنها سه اتحاد	شبه مختصات
سینماتیکی کاربردی اثبات گردیده و از آنها در مدل سازی دینامیکی استفاده شده است. بهمنظور آشنایی با نحوهی استفاده از الگوریتم ارائه شده،	رباتهای زنجیرباز
مدار دینامیکی یک ربات دو لینگی زمینی بهصورت گاویه گاو بهدست آمده است. در زمایت نتایج شبیه سازی ربات دو لینگی در نروافار متلب، به	رباتهای فضایی
ازای مقادیر عددی، با نتایج به دستآمده از مدل سیستم در نرمافزار آدامز، مقایسه و صحت آن محرز گردیده است.	رباتهای زمینی

Dynamics modeling of open-chain terrestrial and space robots using a form of **Boltzmann-Hamel equations**

Abdol Majid Khoshnood^{1*}, Es'hagh Azad¹, Seyed Mohammad Amin Razavi²

1- Faculty of Aerospace Engineering, Khaje Nasir Toosi University, Tehran, Iran 2- Faculty of New Technologies Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

*P.O.B. 16569-83911, Tehran, Iran, khoshnood@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper Received 09 January 2016 Accepted 24 March 2016 Available Online 19 June 2016

Keywords: Boltzmann-Hamel equations Quasi-coordinates open-chain robots space robots terrestrial robots

ABSTRACT

In this article, a form of Boltzmann-Hamel equations (Lagrange's equations in terms of quasicoordinates), different from the latter's standard form and avoiding its structurally inherent complexity, is derived based on which a general algorithm for the dynamics modeling of open-chain terrestrial and space robots with an arbitrary number of rigid elements is presented. This form of Boltzmann-Hamel equations is shown to be particularly advantageous in terms of not requiring the determination of the kinetic energy as a function of generalized coordinates and quasi-velocities, representing generalized forces in terms of body basis vectors and offering a panoramic view of the dynamics of the systems. In the act of developing the algorithm, three highly useful kinematic identities are derived via comparison between the single rigid body equations derived from both the standard and the proposed form of Boltzmann-Hamel equations. These identities are then used to considerably simplify the final dynamics model of both systems. Finally, the equations of motion for a two-link terrestrial robot is derived using the proposed algorithm and simulation results in MATLAB are compared with the model of the system in ADAMS to validate the model.

1 - مقدمه

جامع برای مدل سازی یک سیستم مکانیکی با درجهی آزادی دلخواه و آرایش هندسی معلوم، نسبت به روشهای پیشرفتهتر مدلسازی با سختی بیشتری همراه خواهد بود. برای نمونه، در مدلسازی با استفاده از معادلات نیوتن-اویلر، بهعلت احتساب نیروهای قیدی و نیروهای داخلی بین اجزای سیستم، تعداد مجهولات و تبعا تعداد معادلات حرکت از تعداد درجات آزادی سیستم

از جمله چالش برانگیزترین مسائل در مدلسازی سیستمهای مکانیکی پیچیده، با استفاده از روشهای معمول همچون معادلات نیوتن-اویلر و معادلات استاندارد لاگرانژ، حجم محاسباتی است که با افزایش درجات آزادی سیستم، به یکروند طاقتفرسا میانجامد؛ بهطوری که پیریزی یک الگوریتم

Please cite this article using: A. M. Khoshnood, E. Azad, S. M. A. Razavi, Dynamics modeling of open-chain terrestrial and space robots using a form of Boltzmann-Hamel equations, *Modares Mechanical Dur* Engineering, Vol. 16, No. 6, pp. 127-137, 2016 (in Persian)

بیشتر خواهد بود. در چنین شرایطی مسئلهی حذف جبری این نیروها اجتنابناپذیر بوده و حل معادلات نهایی را پیچیده میکند. از طرف دیگر، فرم استاندارد معادلات لاگرانژ که در مورد سیستمهای غیر هولونومیک و در حالت مختصات تعمیمیافتهی مستقل به کار گرفته می شود، نیروهای قیدی و نیروهای داخلی (در حالتی که جابهجایی آنها روی دو جسم یکسان باشد) را در مدلسازی دینامیکی وارد نمیکند و لذا از این حیث نسبت به معادلات نيوتن اويلر ارجحيت دارد. با اين وجود، معادلات لاگرانژ نيز داراي معايبي هستند که بهطور خاص با افزایش درجات آزادی سیستم آشکار میشوند. در چنین شرایطی انرژی جنبشی که بایستی بهصورت تابعی از مختصات تعمیمیافته و سرعتهای تعمیمیافته بهدست آید به طرز کنترل نشدهای بزرگ می شود و لذا مشتق گیری های جزئی و زمانی به محاسباتی الگو ناپذیر و طاقتفرسا منتهی می گردد. به علاوه، نیروهای تعمیم یافته با پیچیده شدن سیستم به سختی محاسبه می شوند. در این میان، معادلات بولتزمان -هامل با پرهیز از معایب روشهای نیوتن-اویلر و لاگرانژ بهطور همزمان، ابزار قدرتمندی در مدلسازی دینامیکی سیستمهای پیچیده به حساب میآید. ایدهی اساسی این معادلات بر مفاهیم شبه مختصات² و شبه سرعتها³ استوار است. با استفاده از این مفاهیم، انرژی جنبشی برخلاف روش لاگرانژ برحسب مختصات تعمیمیافته و شبه سرعتها بهدست آمده و نیاز به محاسبهی مشتق انرژی جنبشی نسبت به سرعتهای تعمیمیافته به کلی از میان برداشته می شود. به علاوه، نیروهای تعمیم یافته بر حسب ترکیبی از نیروها، گشتاورها و ماتریسهای دوران در پایهی بدنی اجزای سیستم بهدست میآیند و لذا از مسئلهی بیان بردارها در پایهی اینرسی و همچنین محاسبه مشتقات جزئی اجتناب می شود. با این وجود، بدیهی به نظر می رسد که معادلات بولتزمان -هامل نیز همچون سایر روشهای مدلسازی دینامیکی نمیتواند از هر نظر ایدهآل بهحساب آید. برای نمونه، بهرهمندی حداکثری از مزایای قابلتوجه معادلات بولتزمان - هامل وابستگی فراوانی به استخراج اتحادهای سینماتیکی متنوع دارد که نمونههای معدودی از آن در کار پژوهشی کویین [1] به دست آمده و در مدلسازی دینامیکی مورد استفاده قرار گرفته است. بهعلاوه ساختار عمومی این معادلات آن گونه که در مراجع گرینوود [2] و میروویچ [3] آورده شده است در مقایسه با معادلات نیوتن- اویلر و معادلات لاگرانژ دارای پیچیدگیها و جزئیاتی است که بایستی مورد توجه قرار گیرند. در این مقاله به منظور پرهیز از پیچیدگیهای مذکور و نیز عدم نیاز به تشکیل انرژی جنبشى برحسب مختصات تعميميافته و شبهسرعتها، فرمى متفاوت از فرم متداول معادلات بولتزمان- هامل استخراج گردیده و کارایی آن در قالب استخراج معادلات حرکت رباتهای زمینی و فضایی با تعداد دلخواه عضو صلب در حالت زنجیرباز نشان داده شده است. در این راستا، سه اتحاد سينماتيكي نيز اثبات گرديده و در حل مسئله مورد استفاده قرار گرفته است. در کار پژوهشی حبیب نژاد کورایم و شافعی [4]، فرمولاسیونی بازگشتی

مبتنی بر روش گیبس - اپل جهت استخراج معادلات حرکت بازوهای رباتیک ويسكوالاستيك براساس تئوري تير تيموشنكو ارائه گرديد.

در مرجع [5]، عليپور و همكاران مدلى تحليلي براى رباتهاى متحرك چرخدار با تعليق انعطافپذير براساس روش نيوتن-اويلر استخراج نموده و برای صحتسنجی مدل از نرمافزار آدامز استفاده نمودهاند.

مسئلهی مدلسازی دینامیکی سیستم فرمان و هندلینگ خودرو با

استفاده از معادلات بولتزمان-هامل در اثر پژوهشی جهرمی [6] انجام شده است.

كمرون و بوك [7]، با استفاده از معادلات بولتزمان-هامل، نحوهي استخراج مدل دینامیکی مکانیزمها با مفاصل غیرهولونومیک را از طریق حل چند مثال نشان دادهاند. در این مقاله ثابت شده است که برخلاف معادلات لاگرانژ که در آن مسئلهی ظاهر شدن و سپس حذف ضرایب لاگرانژ به وجود می آید، استفاده از معادلات بولتزمان-هامل بهطور خودکار از وارد شدن مجهولات اضافی در معادلات نهایی حرکت جلوگیری میکند.

در مرجع [8]، ترنر در مسئلهی شبیه سازی وسایط نقلیهی زمینی با سرعت زیاد از معادلات بولتزمان -هامل استفاده نموده است.

سیبیلسکی و زیلوک [9]، روند مدلسازی وسایط نقلیهی هوایی و بهطور خاص هواپیما و هلیکوپتر را با استفاده از روشهای دینامیک چندجسمی ازجمله معادلات بولتزمان-هامل شرح داده و مزايا و معايب انواع روشها را بررسی نموده است.

در مرجع [10]، تالاموچی مسئلهی تأثیر انواع انتخابهای ممکن از شبه سرعتها در مدلسازی دینامیکی سیستمهای غیرهولونومیک با استفاده از معادلات بولتزمان -هامل را مورد بررسی قرار داده و با ابداع و اعمال یک روش جبری، تأثیر انتخاب مناسب شبهسرعتها در سادهسازی ریاضیات مرتبط با مدلسازی دینامیکی را نشان داده است.

خوشنود و مرادی [11]، با استفاده از ترکیبی از معادلات استاندارد لاگرانژ و معادلات لاگرانژ برحسب شبه مختصات، معادلات حرکت یک ماهواره شامل یک قسمت صلب مکعب شکل و دو صفحهی خورشیدی انعطافپذیر را استخراج و براساس آن یک کنترلر برای کاهش دامنهی ارتعاشات اجزاى انعطاف پذير طراحي نمودهاند.

در مرجع [12]، ماروسكين و بلاخ فرم خاصى از معادلات بولتزمان -هامل را استخراج نموده و از آن در طراحی کنترل بهینهی سینماتیکی و دینامیکی سیستمهای مکانیکی با قیود غیرهولونومیک استفاده نمودهاند.

مینگلو و همکاران [13]، با استفاده از روش کین 4 معادلات حرکت یک سیستم مکانیکی صفحهای شامل تعداد دلخواه میلهی صلب در حالت زنجيرباز را استخراج نمودند.

2- استخراج معادلات بولتزمان - هامل از معادلات لا گرانژ به كمك حساب ديفرانسيل ماتريسي

در مراجع [3,2]، فرم عمومي و به نسبت پیچیدهی معادلات بولتزمان - هامل به صورت مؤلفه به مؤلفه (جبر اسكالر و حساب ديفرانسيل چند متغيره) استخراج و سپس بهصورت یک معادلهی ماتریسی بیان شده است. با این وجود، استفاده از ایدهی اولیهی معادلات بولتزمان-هامل موسوم به مفهوم شبهمختصات و شبهسرعتها و تلاش در استخراج دوبارهی آن، صرفا به فرم ماتریسی، به معادلهای منجر خواهد شد که در این مقاله از آن استفاده شده است. در ادامه، نشان خواهیم داد که حداقل در مورد سیستمهای دینامیکی مورد بررسی در این مقاله، این فرم از معادلات بولتزمان - هامل نسبت به فرم متداول آن به روند مناسبتری در مدلسازی دینامیکی میانجامد و لذا نه تنها نیازی به پرداختن به جزئیات فرم متداول وجود ندارد بلکه از پیچیدگیهای غیرضروری آن نیز پرهیز میشود. معادلات لاگرانژ برای یک سیستم مکانیکی m درجه آزادی و بهازای مختصات تعمیمیافتهی مستقل (فاقد قیود جبری و دیفرانسیلی بین مختصات) عبارت است از:

Nonholonomic Systems

Ouasi-Coordinates ³ Quasi-Velocities

⁴ Kane's Method

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial (q)} \right) - \frac{\partial T}{\partial (q)} = \{Q\}$ (1)حال فرض كنيم انرژى جنبشى بهجاى ((q),(q) بهصورت

نوشته شود و داشته باشیم: $\overline{T}(\{q\},\{\lambda\})$

(2)

$\{\lambda\} = [S]\{\dot{q}\}$

که در آن، [S] یک ماتریس مربعی m × m و تابعی از (q) است. درایههای ماتریس ستونی (۸) را شبه سرعتها مینامیم. تنها محدودیتی که در انتخاب شبه سرعت ها وجود دارد استقلال آن ها از یکدیگر است [2].

بهعبارتدیگر، در تئوری معادلات بولتزمان-هامل، وجود هیچ رابطهی سینماتیکی میان هر دو عضو دلخواه از (۸) مجاز نیست. با استفاده از قاعدهی زنجیرهای در حساب دیفرانسیل ماتریسی و همچنین با توجه به تساوی :داریم: $T = \overline{T}(\{q\}, \{\lambda\}(\{q\}, \{\dot{q}\}))$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial (\lambda)}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial t}$$
(3)

$$\frac{\partial T}{\partial (q)} = \frac{\partial (\lambda)}{\partial (q)} \frac{\partial \bar{T}}{\partial (\lambda)} = \frac{\partial [S](q)}{\partial (q)} \frac{\partial \bar{T}}{\partial (\lambda)} = [S]^T \frac{\partial \bar{T}}{\partial (\lambda)}$$
(4)

با جای گذاری طرف راست روابط (3) و (4) در رابطهی (1)، مرتبسازی عبارت ها و سپس ضرب طرفین در T-[S]، معادله ای به صورت رابطه (5) حاصل میشود:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial (\lambda)}\right) + [S]^{-T}\left([S]^{T} - \frac{\partial (\lambda)}{\partial (q)}\right)\frac{\partial \bar{T}}{\partial (\lambda)} - [S]^{-T}\frac{\partial \bar{T}}{\partial (q)} = \{\phi\}$$
(5)

که در آن{�} طلاح الله الله نیرو نامیده و به صورت {Q] ^T [3] الله تعریف (ه) تعریف میکنیم. معادلهی فوق همان فرمی از معادلات بولتزمان-هامل است که در مدلسازی دینامیکی سیستمهای مورد مطالعه در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است. روند مدلسازی دینامیکی با استفاده از معادلهی (5) میتواند طبق مراحل زير انجام شود:

(الف) انتخاب مختصات تعميم يافتهى مستقل ((q)): با توجه به اين كه معادلهی (5) از معادلهی لاگرانژ در حالت مختصات تعمیمیافتهی مستقل به دست آمد، درایههای ماتریس ستونی (q) الزاما میبایستی مستقل انتخاب شوند. (ب) انتخاب شبه سرعت های مستقل ($\{\lambda\}$). (ج) انجام تحلیل سینماتیکی برحسب شبهسرعتهای انتخاب شده (د) استخراج ماتریس مربعی [S]: پس از معرفی ماتریسهای ستونی (q) و (la)، ماتریس مربعی [S] از رابطهی (2) استخراج می شود. (ه) محاسبه ی عبارت $[S]^{T}$ نیرو $\frac{\partial \overline{T}}{\partial \partial \partial \theta}$ (و) محاسبه (ز) محاسبه (ز) محاسبه (ز) محاسبه (ز) محاسبه (ز) محاسبه (ز) (($\frac{\partial \overline{T}}{\partial \partial \theta})$.{Φ}

3- مدلسازي ديناميكي ربات زميني و فضايي

در این قسمت با اعمال مراحل مذکور، به مدلسازی دینامیکی ربات زمینی و فضایی پرداخته خواهد شد. آرایش هندسی این دو سیستم به همراه نمادگذاری بردارهای مکان لازم برای تحلیل سینماتیکی در "شکل 1" نشان داده شده است.

1-3- انتخاب مختصات تعميم يافتهى مستقل

در حالت کلی که حرکت اجزای ربات زمینی و فضایی نسبت به هم سهبعدی است، مختصات تعمیمیافتهی مستقل میتوانند بهصورت بردارهای ستونی زیر در حالت بلوکبندی¹ شده انتخاب شوند:



Fig. 1 Numbering the elements of terrestrial and space robots and assigning symbols to quantities and points

شکل 1 شماره گذاری اجزای رباتهای زمینی و فضایی به همراه نمادگذاری کمیتها و نقاط در هریک از آنها

در دو معادلهی اخیر اندیس t برای ربات زمینی و s برای ربات فضایی در نظر گرفته شده است. همچنین $\{p_1\}$ ماتریس ستونی حاصل از تجزیهی بردار مکان مرکز جرم جسم 1 در پایهی اینرسی و $\{\alpha_i\}$ ماتریس ستونی حاوی زوایای وضعیت جسم i ام نسبت به جسم (i - 1) ام هستند بەطورى كە:

(7-الف) $\{q_t\} = \{\{\alpha_1\}^T \ \{\alpha_2\}^T \ \cdots \ \{\alpha_n\}^T\}^T$ $\{\alpha_i\} = \{\psi_i \quad \theta_i \quad \phi_i\}^T$

که در آن الزامی در تعریف زوایای $heta_i$ $heta_i$ و ϕ_i وجود ندارد. بهعبارت

ديگر، هر تركيبي از زوايا كه بتواند وضعيت جسم i ام نسبت به جسم ام را به طور کامل معلوم کند مجاز بوده و لذا هر 12 ترتیب زوایای (i - 1) اويلر تنها حالت خاصى از آن به حساب مى آيد.

2-3- انتخاب شبه سرعتهای مستقل

(-7)

(9)

،فرض کنیم $\left\{ b_{1}^{(i)}, b_{2}^{(i)}, b_{3}^{(i)} \right\}$ یک مجموعه یسه تایی از بردارهای یکه، دوبهدو متعامد و ساکن در عضو دلخواه i ام باشد. این مجموعه را پایه 2 ی بدنی عضو i ام (یا بهاختصار پایهی i ام) مینامیم. حال یک ماتریس ستونی بهصورت $(b_i) = \{b_i\} = \{b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, b_3^{(0)}\}^T$ بهصورت $(b_i) = \{b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, b_3^{(0)}\}^T$ زاویهای جسم i ام نسبت به جسم (i - 1) ام و (ω_i) ماتریس ستونی حاوی زاویه مؤلفههای w_i در پایهی بدنی عضو i ام باشند آنگاه میتوان نوشت: w_i $\omega_i = \{b_i\}^{\mathrm{T}} \{\omega_i\}$ (8)بهعلاوه از مرجع [1] داريم:

$$\{\omega_i\} = [D_i]\{\dot{\alpha}_i\}$$

که در آن $[D_i]$ یک ماتریس **3 × 3** و تابعی از $\{\alpha_i\}$ است. با استفاده از این معادله میتوان گفت که چون $\{\alpha_i\}$ ها از نظر سینماتیکی مستقل از یکدیگرند، $\{\omega_i\}$ ها نیز به هم وابسته نیستند و لذا میتوانند بهعنوان شبهسرعتها انتخاب شوند. بدین ترتیب در مورد ربات زمینی میتوان نوشت:

² Basis

 $\{\lambda_t\} = \{\{\omega_1\}^T \ \{\omega_2\}^T \ \cdots \ \{\omega_n\}^T\}^T$ (10)که ابعاد آن با تعداد درجات آزادی ربات زمینی **(3***n*) برابر است. این در حالی است که ربات فضایی، سه درجهی آزادی بیش از ربات زمینی دارد. بنابراین برای ربات فضایی یک ماتریس ستونی سه مؤلفهای غیر از $\{\omega_i\}$ ها موردنیاز است. یک انتخاب میتواند ماتریس ستونی سرعت مرکز جرم جسم ، در پايه اينرسي يعني $(\dot{p}_1) = (\dot{x}_1 \ \dot{y}_1 \ \dot{z}_1)^T$ در پايه اينرسي اينرسي در اين وجود همان طور که در ادامه خواهیم دید، انتخاب ماتریس ستونی سرعت مرکز جرم جسم 1 در پایهی بدنی همان جسم به روابط سینماتیکی منظمتری می انجامد و لذا انتخاب مناسب تر است. اگر این کمیت را با (۷۱) نمایش دهیم آنگاه شبه سرعت برای ربات فضایی عبارت خواهد بود از:

 $\{\lambda_s\} = \{\{V_1\}^T \ \{\Omega_1\}^T \ \{\omega_2\}^T \ \cdots \ \{\omega_n\}^T\}^T$ (11)با توجه به این که در ربات فضایی، برخلاف ربات زمینی، چارچوب مرجع اینرسی عضوی از زنجیره نیست، (ω_1) در مورد آن معنا ندارد و لذا از (Ω_1) بهجای (۵٫) استفاده شده است که بیانگر ماتریس ستونی مؤلفههای بردار سرعت زاویهای جسم 1 نسبت به چارچوب مرجع اینرسی در پایهی بدنی همان جسم است.

4- تحليل سينماتيكي

1-4- تحليل سينماتيكي برداري

اگر فرض کنیم Ω_k بردار سرعت زاویهای جسم k ام نسبت به ج (چارچوب مرجع اینرسی) باشد، آنگاه با استفاده از قضیهی جمع سرعتهای زاویهای خواهیم داشت:

$$\Omega_k = \Omega_{k-1} + \omega_k \tag{12}$$

$$V_{k} = \frac{^{0}d}{^{0}}(P_{0}P_{k}) = \frac{^{0}d}{^{0}}(P_{0}P_{k-1}) + \frac{^{0}dr_{k-1}}{^{0}} + \frac{^{0}dR_{k}}{^{0}}$$
(13)

$$at$$
 که در آن $\frac{a}{dt}^{0}$ بیانگر مشتق گیری از کمیت برداری نسبت به چارچوب
مرجع اینرسی (**0**) است. حال با توجه به این که $V_{k-1} = \frac{^{0}d}{dt} (C_{0}C_{k-1})$ و با
اعمال قضیهی انتقال نرخ تغییرات یک بردار میان دو چارچوب مرجع،
معادلهی (13)میتواند به صورت زیر نوشته شود:

(14) $V_k = V_{k-1} + \Omega_{k-1} \times r_{k-1} + \Omega_k \times R_k$ روابط (12) و (14) در ربات زمینی به ازای k = 1,2,...,n و در ربات فضایی به ازای n **, ... , k = 2, ... , n** برقرار هستند.

4-2- تحليل سينماتيكي ماتريسي

با توجه به رابطهی انرژی جنبشی برای یک جسم صلب، انرژی جنبشی برای ربات زمینی می تواند به صورت رابطه (15) نوشته شود:

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (m_i V_i \cdot V_i + \Omega_i \cdot I_i \cdot \Omega_i)$$
(15)

که در آن تانسور اینرسی عضو i ام نسبت به مرکز جرم آن با I_i نمایش I_i داده شده است. واضح است که بردارهای Ω_i ، V_i و تانسور مرتبهی دوم می توانند در هر پایه ی دلخواهی تجزیه شوند. با این وجود، تجزیه I_i فقط در پایهی *i* ام به ماتریس اینرسی با درایههای نامتغیر با زمان منتهی می گردد و لذا مناسب است هر دو کمیت Ω_i و I_i در پایه i ام تجزیه گردند. در جنین شرایطی هیچ دلیل منطقی در تجزیه ی V_i در پایه ای غیر از پایه i ام وجود ندارد. لذا منظور از $\{V_i\}$ ، $\{\Omega_i\}$ و $[I_i]$ ماتریس هایی است که مؤلفه های و I_i در پایه i ام را در خود جای دادهاند. بر این اساس بیان ماتریسی I_i Ω_i ، V_i انرژی جنبشی برحسب این سه کمیت ماتریسی عبارت است از:

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (m_i (V_i)^T (V_i) + (\Omega_i)^T [I_i] (\Omega_i))$$
(16)

در تبدیل روابط (12) و (14) از فرم برداری به فرم ماتریسی هر کمیت برداری در پایهی متناظر با اندیس آن کمیت تجزیه می شود. لذا خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{k} (v_{k}) = (v_{k-1})^{T} (v_{k-1}) + (b_{k-1})^{T} (u_{k-1})$$

$$\times (b_{k-1})^{T} (v_{k-1})$$

$$+ (b_{k})^{T} (\Omega_{k}) \times (b_{k})^{T} (R_{k})$$
(...17)

 ${b_{k-1}}^T = {b_k}^T [C_{k-1}^k]$ (18)که در آن $\begin{bmatrix} c_{k-1} \\ c_{k-1} \end{bmatrix}$ ماتریس دوران از پایه (k-1) ام به پایه k ام مىباشد. ھمچنين مىتوان ثابت نمود كە:

$$\begin{bmatrix} x^{\star} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -x_3 & x_2 \\ x_3 & \mathbf{0} & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$
(20)

از طرفین، فرم ماتریسی روابط سینماتیکی بهصورت زیر حاصل
$$\{b_k\}$$
 از طرفین، فرم ماتریسی روابط سینماتیکی بهصورت زیر

4-3- استخراج ماتریسهای [3]

در مورد بردار سرعت مرکز جرم جسم 1 میتوان نوشت:

$$V_1 = \{b_0\}^T\{\dot{p}_1\} = \{b_1\}^T\{V_1\}$$
(23)
حال اگر ماتریس دوران از پایه (b_0) به پایه (b_1) را با $[C_0^1]$ نمایش
دهیم آنگاه طبق تعریف خواهیم داشت:
 $\{b_0\}^T = \{b_1\}^T[C_0^1]$
(24)
 $V_1 = [C_0^1]\{\dot{p}_1\}$
(25)
 $I[$ ترکیب روابط (2), (6-1لف), (9) و (10) برای ربات زمینی و روابط
(2), (6-1) (2) رای ربات فضایی, ماتریس های [ک] برای هر

یک بهصورت زیر به دست میآیند:

¹ Cross Matrix

(26-الف) $[S_s] = diag([C_0^1], [D_1], [D_2], \dots, [D_n])$ (26-ب) $[S_s] = diag([C_0^1], [D_1], [D_2], \dots, [D_n])$

4-4- محاسبهی عبارت
$$\left(\frac{\partial(\mathbf{0})}{\partial(\mathbf{q})}^{\mathrm{T}} - \mathbf{T}[\mathbf{\dot{s}}]\right)^{\mathrm{T}} - \mathbf{[\ddot{s}]}$$

ماتریسهای $[_{t}S_{1}]$ و $[_{s}S_{1}]$ هردو قطری بلوکی¹ هستند و لذا همان طور که در
مرجع [14] آمده است، محاسبهی $^{\mathrm{T}}-\mathbf{[}S_{1}\mathbf{J}$. $^{\mathrm{T}}-\mathbf{[}_{s}S_{1}\mathbf{J}^{\mathrm{T}}$ و $^{\mathrm{T}}[_{s}\dot{s}]$ و
بهسادگی از اعمال $^{\mathrm{T}}-\mathbf{[}$] و $^{\mathrm{T}}(\mathbf{\dot{j}})$ روی درایههای قطر اصلی انجام می شود.
بدین ترتیب تنها جملهای که از عبارت $\left(\frac{\partial(\mathbf{0})}{\partial(\mathbf{1})}^{\mathrm{T}} - \mathbf{T}[\mathbf{s}]\right)^{\mathrm{T}}-\mathbf{[}S_{1}$ باقی می ماند،

$$\forall i \neq \mathbf{1} : \frac{\partial \{\alpha_i\}}{\partial \{\alpha_i\}} = [\mathbf{0}] \qquad (1 - 27)$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots\} : \frac{\partial \{\omega_i\}}{\partial \{\omega_i\}} = [\mathbf{0}] \qquad (1 - 27)$$

$$\frac{\partial \{V_1\}}{\partial \{1\}} = [0] \qquad (z^{-27})$$

$$\forall i \neq j : \frac{\partial \{\omega_i\}}{\partial \{\alpha_j\}} = [0]$$
 (s-27)

$$\forall j \neq \mathbf{1} : \frac{\partial \{\Omega_1\}}{\partial \{\alpha_j\}} = \mathbf{[0]}$$
 (o-27)

$$\frac{\partial(\lambda_t)}{\partial(q_t)} = diag\left(\frac{\partial(\omega_1)}{\partial(\alpha_1)}, \frac{\partial(\omega_2)}{\partial(\alpha_2)}, \dots, \frac{\partial(\omega_n)}{\partial(\alpha_n)}\right) \quad (28)$$

$$\frac{\partial \{q_s\}}{\partial \{\alpha_1\}} = \left(\frac{\partial \{V_i\}}{\partial \{\alpha_1\}}\right)_{21} + diag\left(\left[\mathbf{0}\right], \frac{\partial \{\Omega_1\}}{\partial \{\alpha_1\}}, \frac{\partial \{\omega_2\}}{\partial \{\alpha_2\}}, \dots, \frac{\partial \{\omega_n\}}{\partial \{\alpha_n\}}\right) \qquad (-28)$$

$$+ c_r \left[\mathbf{1}_{\mathcal{O}} + \mathbf{1}_{\mathcal{O}} + \mathbf{1}_{\mathcal{O}}$$

$$\begin{split} & [S_{t}]^{-T} \left([\dot{S}_{t}]^{T} - \frac{\partial (\lambda_{t})}{\partial (q_{t})} \right) \\ &= \operatorname{diag} \left([D_{1}]^{-T} \left([\dot{D}_{1}]^{T} \\ - \frac{\partial (\omega_{1})}{\partial (\alpha_{1})} \right), \dots, [D_{n}]^{-T} \left([\dot{D}_{n}]^{T} - \frac{\partial (\omega_{n})}{\partial (\alpha_{n})} \right) \right) \qquad (\text{ (i.e. 29)} \\ & [S_{s}]^{-T} \left([\dot{S}_{s}]^{T} - \frac{\partial (\lambda_{s})}{\partial (q_{s})} \right) \\ &= \left(- [C_{0}^{1}]^{-T} \frac{\partial (V_{1})}{\partial (\alpha_{1})} \right)_{21} \\ &+ \operatorname{diag} \left([C_{0}^{1}]^{-T} [\dot{C}_{0}^{1}]^{T}, [D_{1}]^{-T} \left([\dot{D}_{1}]^{T} \\ - \frac{\partial (\omega_{n})}{\partial (\alpha_{1})} \right), \dots, [D_{n}]^{-T} \left([\dot{D}_{n}]^{T} \\ - \frac{\partial (\omega_{n})}{\partial (\alpha_{n})} \right) \right) \end{split}$$

(36)

77 میندسی مکانیک مدرس، شهریور 1395، دوره 16،شماره 6

عبارتهایی به فرم $\left[C_0^1\right]^{-T} \left[\dot{C}_0^1\right]^T$ ، $\left[D_i\right]^{-T} \left(\left[\dot{D}_i\right]^T - \frac{\partial (\omega_i)}{\partial (\alpha_i)}\right)$ و در دو رابطی اخیر مشاهده می شود که بایستی روابطی $-T \frac{\partial (v_1)}{\partial (a_1)}$ برای آن ها به دست آید. در مرجع [1] آمده است که: $\begin{bmatrix} \dot{C}_{k-1}^k \end{bmatrix} = \llbracket \omega_k^{\star} \rrbracket \llbracket C_{k-1}^k \rrbracket$ (30)که در آن ماتریس کراس به صورت ترانهاده ی رابطه ی (30) تعریف شده است. لذا با توجه به تعريف ارائه شده از ماتريس كراس در اين مقاله خواهيم داشت: $\begin{bmatrix} \dot{C}_{k-1}^k \end{bmatrix} = \llbracket \omega_k^{\star} \rrbracket^T \llbracket C_{k-1}^k \rrbracket$ (31)بدين ترتيب داريم:

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_0^1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} C_0^1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega_1^{\star} \end{bmatrix}$$

که نتیجه میدهد: (33)

(32)

$$\begin{bmatrix} C_0^1 \end{bmatrix}^{-T} \begin{bmatrix} \dot{C}_0^1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \Omega_1^{\star} \end{bmatrix}$$

برای استخراج دو عبارت باقیمانده، مدلسازی دینامیکی برای سیستم یک جسمی (n = 1)، یکبار با استفاده از فرم متداول معادلات بولتزمان -هامل که در مرجع [3] آورده شده و یکبار با استفاده از فرم پیشنهاد شده در این مقاله انجام می شود. این دو معادله با وجود این که ظاهر متفاوتی دارند، ديناميك سيستم يكساني را توصيف ميكنند و لذا معادل اند. از معادل بودن این دو معادله روابطی برای دو عبارت باقیمانده به دست میآید که فرم رابطهی (5) را به ازای سیستمهای دینامیکی موردمطالعه در این مقاله بسیار سادەتر مىكند.

در مرجع [2]، معادله ی گشتاور نیرو حول مرکز جرم برای جسم صلب از فرم عمومی معادلهی بولتزمان-هامل و بهصورت رابطه (34) به دست آمده

$$\begin{split} & \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{N} \frac{\partial \overline{T}}{\partial (\Omega_{1})} + \left[\Omega_{1}^{*} \right] \frac{\partial \overline{T}}{\partial (\Omega_{1})} + \left[V_{1}^{*} \right] \frac{\partial \overline{T}}{\partial (V_{1})} = \left\{M^{\mathcal{F}/C}\right\} \quad (34) \\ & (34) \\ & (34) \\ & (34) \\ & (34) \\ & (34) \\ & (34) \\ & (34) \\ & (34) \\ & (34) \\ & (34) \\ & (34) \\ & (34) \\ & (36) \\ & (34) \\ & (36) \\ & ($$

که نتیجه می دهد:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial (q_s)} = (0)$$
(37)

با حای گذاری روابط اخبر در رابطه ی (5) و سط سطر دوم آن خواهیم

داشت: '∂Ŧ d

 $\overline{dt} \setminus \overline{\partial (\Omega_1)}$

 $\frac{\partial \bar{T}}{\partial (\lambda_s)} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial (\Lambda_s)}$ $\partial \bar{T}$ (46)

رابطهی اخیر در مورد ربات زمینی نیز صدق میکند. به عبارت دیگر

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial (\lambda_t)} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial (\Lambda_t)}$$
(47)

که در آن:
(
$$\Lambda_t$$
) = ((Ω_1)^T (Ω_2)^T (Ω_n)^T)^T
(48)

با توجه به آنچه بیان گردید، معادلهی (5) برای ربات زمینی و فضایی به

صورت زیر ساده می شوند:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial f_A} \right) + \left[\lambda_t^* \right] \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial f_A} \right) - \left[S_t \right]^{-T} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial f_A} \right)$$
(49)

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dt} \begin{pmatrix} \partial \overline{T} \\ \partial \overline{A_s} \end{pmatrix} & (\partial U_t f) & (\partial U_t f) \\ &= (\Phi_t) \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \partial \overline{T} \\ \partial \overline{A_s} \end{pmatrix} + [\lambda_s^*] \begin{pmatrix} \partial \overline{T} \\ \partial \overline{A_s} \end{pmatrix} - [S_s]^{-T} \begin{pmatrix} \partial \overline{T} \\ \partial \overline{A_s} \end{pmatrix} & (-49) \\ &= (\Phi_s) \end{aligned}$$

محاسبهی
$$rac{\partial \overline{ au}}{\partial (a_s)}$$
برای ربات فضایی $a \overline{ au}$

در محاسبه $\frac{\partial I}{\partial A_{A}}$ به درک نحوه ارتباط میان کمیتهای سینماتیکی (روابط 21) نیاز داریم. یک راهکار بسیار مناسب در دستیابی به این هدف رسم گرافی است که تصویر واضحی از نقش تکتک کمیت های سینماتیکی در تشکیل انرژی جنبشی را در اختیار گذارد. گراف متناظر با روابط مينماتيكي (21-الف) و (21-ب) مي تواند به صورت "شكل 2" نمايش داده

$$A_i = \frac{1}{2} m_i \{V_i\}^T \{V_i\}$$
$$B_i = \frac{1}{2} \{O_i\}^T [U_i] \{O_i\}$$

از روابط اخیر خواهی

(50-الف)

(50-ت)

داريم:

 $\frac{\partial A_i}{\partial \{V_i\}} = m_i \{V_i\}$ (51-الف) $\frac{\partial B_i}{\partial \{\Omega_i\}} = [I_i] \{\Omega_i\}$ (51-ت)

نحوهی استفاده از این گراف در محاسبهی درایههای $\frac{\partial ar{ au}}{\partial \{ I_s \}}$ به این صورت \overline{T} است که در گام اول تمام مسیرهای آغاز شده از کمیت داخل کروشه تا شناسایی میشوند. در گام دوم به ازای هر یک از پارهخطهای جهتدار در یک مسیر دلخواه از کمیت انتهای پارهخط جهتدار نسبت به کمیت حاضر در ابتدای آن، گرادیان ماتریسی گرفته میشود. در گام سوم همهی گرادیانها از پاره خط جهت دار اول تا آخر در هم ضرب می شوند. با به دست آمدن این حاصل ضربها برای تمامی مسیرها، آنها را با هم جمع می کنیم. در نهایت حاصل این جمع همان $\frac{\partial \bar{T}}{\partial (\Lambda_s)}$ خواهد بود.

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial (V_1)} = \sum_{k=1}^{n} [C_1^k]^T m_k (V_k)$$
 (i.i.)

+
$$[D_1]^{-T} \left([\dot{D}_1]^T - \frac{\partial \{\Omega_1\}}{\partial \{\alpha_1\}} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \{\Omega_1\}} - [D_1]^{-T} \frac{\partial \{V_1\}}{\partial \{\alpha_1\}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \{V_1\}}$$

= $[D_1]^{-T} \{Q_{\alpha_1}\}$ (38)
- clb با کم کردن رابطهی (38) از رابطهی (34) خواهیم داشت:
 $\left([\Omega_1^*] - [D_1]^{-T} \left([\dot{D}_1]^T - \frac{\partial \{\Omega_1\}}{\partial \{\alpha_1\}} \right) \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \{\alpha_1\}} + ([V^*] + [D_1]^{-T} \frac{\partial \{V_1\}}{\partial \{\Omega_1\}}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{T}} = \{M^{F/C}\} =$

$$\left(\begin{bmatrix} V_1^{\star} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \end{bmatrix}^{-T} \frac{\partial (V_1)}{\partial (\alpha_1)} \right) \frac{\partial (V_1)}{\partial (V_1)} = \left\{ M^{F/C} \right\} - \begin{bmatrix} D_1 \end{bmatrix}^{-T} \left\{ Q_{\alpha_1} \right\}$$
(39)

طی روندی طولانی اثبات نمودهایم که ضرایب مومنتوم های خد زاویهای در معادلهی (39) هر دو صفرند و لذا دو اتحاد سینماتیکی بهصورت زير حاصل مىشوند:

$$\left[\Omega_{1}^{\star}\right] - \left[D_{1}\right]^{-T} \left(\left[\dot{D}_{1}\right]^{T} - \frac{\partial \left(\Omega_{1}\right)}{\partial \left(\alpha_{1}\right)}\right) = \left[0\right] \qquad (\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow 40)$$

$$[V_1^{\star}] + [D_1]^{-T} \frac{\partial (v_1)}{\partial (\alpha_1)} = [0]$$
 (-40)

به همین ترتیب از صفر بودن طرف راست معادلهی (39) ثابت که:

$$[\mathbf{x}^{\star}] - [D_i]^{-T} \frac{\partial [C_{i-1}^i]^T(\mathbf{x})}{\partial (\alpha_i)} [C_{i-1}^i]^T = [\mathbf{0}] \qquad (z-40)$$

که در آن (x) هر برداری است که به (α_1) بستگی نداشته باشد. روابط (40) صرفا بیانگر ارتباط میان انواع کمیتهای سینماتیکی هستند و لذا به اندیس وابستگی ندارند (به ازای سایر اندیسها نیز صحیحاند). با استفاده از این واقعیت و نیز جای گذاری از رابطهی (25) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \omega_i^{\star} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_i \end{bmatrix}^{-T} \left(\begin{bmatrix} \dot{D}_i \end{bmatrix}^T - \frac{\partial \{\omega_i\}}{\partial \{\alpha_i\}} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \end{bmatrix}$$
(41)

$$[([C_{i-1}^{i}](x))^{*}] + [D_{i}]^{-T} \frac{\partial[C_{i-1}(x)]}{\partial\{\alpha_{i}\}} = [0] \qquad (-41)$$

$$[\mathbf{x}^{\star}] - [D_i]^{-T} \frac{\partial [C_{i-1}^i]^T(\mathbf{x})}{\partial \{\alpha_i\}} [C_{i-1}^i]^T = [\mathbf{0}]$$
(741)

که در آن برای ربات زمینی i = 1,2,…,n و برای ربات فضایی ر سرد. $i = 2, \cdots, n$ خواهد بود.

حال با جای گذاری رابطهی (41- الف) در روابط (29) نتایج زیر حاصل خواهند شد:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\lambda}_{t}^{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} S_{t} \end{bmatrix}^{-T} \left(\begin{bmatrix} \dot{S}_{t} \end{bmatrix}^{T} - \frac{\partial (\boldsymbol{\lambda}_{t})}{\partial (q_{t})} \right) = \\ diag(\mathbf{I}\omega_{1}^{\mathbf{x}}], \begin{bmatrix} \omega_{2}^{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \omega_{n}^{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \qquad (id)^{-42} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{\lambda}_{s}^{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} S_{s} \end{bmatrix}^{-T} \left(\begin{bmatrix} \dot{S}_{s} \end{bmatrix}^{T} - \frac{\partial (\boldsymbol{\lambda}_{s})}{\partial (q_{s})} \right) = \\ = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1}^{\mathbf{x}} \mathbf{D}_{21} \\ + diag(\mathbf{I}0^{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

$$+ atag(\Omega_1^{1}_1, \Omega_1^{1}_1, \Omega_2^{1}_1, \dots, \Omega_n^{n}_n)$$

be cr آن دو ماتریس $[\lambda_t^*]$ و $[\lambda_t^*]$ تعریف شدهاند. با استفاده از رابطه λ_t

(11) و طبق تعاریف حساب دیفرانسیل ماتریسی داریم:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial (\lambda_s)} = \left\{ \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial (V_1)} \right)^T \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial (\Omega_1)} \right)^T \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial (\omega_2)} \right)^T \dots \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial (\omega_n)} \right)^T \right\}^T$$
(43)

 $\partial \{\Omega_i\}$

$$\partial \bar{T} = \partial \bar{T}$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \{\omega_i\}} = \frac{\partial \{\Omega_i\}}{\partial \{\omega_i\}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \{\Omega_i\}} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \{\Omega_i\}}$$
(44)
- \mathcal{O}_{ij}

از روابط (21) نتیجه می گیریم که درایههای ماتریس ستونی (p_1 و ماتریس مربعی (p_1 او $C_0^1(a_1)$ در تابع انرژی جنبشی حضور ندارند. لذا میتوان نوشت:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial (p_1)} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial (\alpha_1)} = \{0\}$$
(55)

حال به ازای
$$n, \dots, n$$
 خال به ازای n, \dots, n خال به ازای n, \dots, n خال به ازای n خال به ازای $\frac{\partial \overline{T}}{\partial (\alpha_i)} = \frac{\partial}{\partial (\alpha_i)} \sum_{j=1}^{i-1} \overline{T}_j + \frac{\partial}{\partial (\alpha_i)} \sum_{j=i}^n \overline{T}_j$ (56)
(56) حال به ازای \overline{T}_j (56) جاز تابعی از $[C_{i-1}^i]$ به ازای C_{i-1}^i (57) جاز تابعی از (α_i) خواهد بود. بنابراین می توان نوشت:
 $\frac{\partial \overline{T}}{\partial (\alpha_i)} = \sum_{j=i}^n \frac{\partial \overline{T}_j}{\partial (\alpha_i)}$

$$\bar{T}_{j} = \bar{T}_{j} \left(\{V_{j}\} ((\alpha_{i})), \{\Omega_{j}\} ((\alpha_{i})) \right)$$
(58)
$$I = \bar{T}_{j} \left(\{V_{j}\} ((\alpha_{i})), \{\Omega_{j}\} ((\alpha_{i})) \right)$$
(58)
$$I = \frac{\partial \{V_{j}\}}{\partial (\alpha_{i})} \frac{\partial \bar{T}_{j}}{\partial (\alpha_{i})} + \frac{\partial \{\Omega_{j}\}}{\partial (\alpha_{i})} \frac{\partial \bar{T}_{j}}{\partial (\alpha_{j})}$$

$$= \frac{\partial \{V_{j}\}}{\partial (\alpha_{i})} m_{j} \{V_{j}\}$$

$$+ \frac{\partial \{\Omega_{j}\}}{\partial (\alpha_{i})} [I_{j}] \{\Omega_{j}\}$$
(59)

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \{\alpha_i\}} = \sum_{j=i}^n \left(\frac{\partial \{V_j\}}{\partial \{\alpha_i\}} m_j \{V_j\} + \frac{\partial \{\Omega_j\}}{\partial \{\alpha_i\}} [I_j] \{\Omega_j\} \right)$$
(60)

$$\frac{\partial\{\Omega_j\}}{\partial\{\alpha_i\}} = \frac{\partial\{\Omega_j\}}{\partial\{\Omega_j\}} \frac{\partial\{\Omega_j\}}{\partial\{\Omega_j\}} = \frac{\partial\{\Omega_j\}}{\partial\{\Omega_j\}} \frac{\partial\{\Omega_j\}}{\partial\{\Omega_j\}}$$

$$(61)$$

از ترکیب روابط (12-لف)، (41-ب) نتیجه می گیریم:

$$\frac{\partial \{\Omega_i\}}{\partial \{\alpha_i\}} = -[D_i]^T [C_{i-1}^i] \Pi \Omega_{i-1}^*] [C_{i-1}^i]^T$$
(62)

به علاوه از قاعده ی زنجیره ای خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \{\Omega_j\}}{\partial \{\Omega_i\}} = \frac{\partial \{\Omega_{i+1}\}}{\partial \{\Omega_i\}} \frac{\partial \{\Omega_{i+2}\}}{\partial \{\Omega_{i+1}\}} \cdots \frac{\partial \{\Omega_j\}}{\partial \{\Omega_{i-1}\}}$$
(63)

$$\frac{\partial \{\Omega_j\}}{\partial \{\Omega_i\}} = \left[C_i^{i+1} \right]^T \left[C_{i+1}^{i+2} \right]^T \dots \left[C_{j-1}^j \right]^T = \left[C_i^j \right]^T$$
(64)

از ترکیب روابط (61)، (62) و (64) نتیجه ی زیر حاصل می شود:

$$\frac{\partial \{\Omega_j\}}{\partial c} = -[D_i]^T [C_{i-1}^i] [\Omega_{i-1}^{\star}]^T \qquad (65)$$

$$\sigma(a_i)$$
 برای محاسبه $\frac{\partial\{v_j\}}{\partial\{a_i\}}$ با استفاده از رابطه (21) می توان نوشت:

$$\frac{\partial \{V_j\}}{\partial (\alpha_i)} = \frac{\partial \{V_{j-1}\}}{\partial (\alpha_i)} [C_{j-1}^j]^T + \frac{\partial \{\Omega_{j-1}\}}{\partial (\alpha_i)} ([r_{j-1}^{\star}] [C_{j-1}^j]^T + [C_{j-1}^j]^T [R_j^{\star}])$$
(66)

در رابطهی اخیر، $\frac{\partial \{\alpha_{j-1}\}}{\partial \{\alpha_i\}}$ از رابطهی (65) به دست میآید. به علاوه از روابط (21) و (41-ب) داریم:

$$\frac{\partial \{V_i\}}{\partial \{\alpha_i\}} = -[D_i]^T [C_{i-1}^i] [V_i^*] [C_{i-1}^i]^T + \frac{\partial \{\Omega_j\}}{\partial \{\alpha_i\}} [R_i^*]$$
(67)





با انجام روند مذکور به ازای تک تک درایههای
$$\{A_s\}$$
و بهره گیری از روابط (5) انتایج عمومی زیر حاصل می شوند:

$$\frac{\partial T}{\partial \{\Omega_i\}} = \sum_{k=i}^{n} \mathbf{I} C_i^k \mathbf{I}^T \mathbf{I}_k \mathbf{I} (\Omega_k) + \sum_{k=i}^{n} \left(\sum_{j=i}^{k} \left([C_i^j]^T \mathbf{I} \mathcal{L}(j, k) \mathbf{I} [C_j^k]^T \right) \right) m_k (V_k)$$

$$i = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, n \qquad (..., 52)$$

$$\begin{bmatrix} R_{1}^{*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} L(j,k) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{cases} \begin{bmatrix} R_{j}^{*} \end{bmatrix} & j = k \\ \\ \begin{bmatrix} R_{j}^{*} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{j}^{*} \end{bmatrix} & j \neq k \end{cases} \quad (z^{-52})$$

محاسبهی $rac{\partial ar{T}}{\partial \{\lambda_i\}}$ برای ربات زمینی -6-4

گراف شکل 2 برای ربات زمینی نیز قابل استفاده است با این تفاوت که بایستی یک پاره خط جهتدار از سمت (Ω_1) به (V_1) نیز رسم شود تا وابستگی آنها در ربات زمینی نشان داده شود. با استفاده از این گراف، روابطی به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \{\Omega_i\}} = \sum_{k=i}^n [C_i^k]^T [\mathcal{U}_k] \{\Omega_k\} + \sum_{k=i}^n \left(\sum_{j=i}^k \left([C_i^j]^T [\mathbf{L}(j,k)] [C_j^k]^T \right) \right) m_k \{V_k\}$$

$$i = 12 \dots n$$
(53)

7 مىندىس مكانىك مدرس، شہريور 1395، دورہ 16،شمارہ 6

که در آن: (68)

$$\{V_{J_i}\} = \{V_{i-1}\} + [r_{i-1}^*]^T \{\Omega_{i-1}\}$$

$$(68)$$

$$(57) \quad (67), \quad$$

صورت بازگشتی به دست میآیند.

محاسبهی $rac{\partial ar{ au}}{\partial (q_t)}$ برای ربات زمینی -4-8

روابط (59) تا (68) در مورد ربات زمینی نیز صدق می کنند با این تفاوت که داریم:

$$\{V_{J_2}\} = [(R_1 + r_1)^*]^{\mathrm{T}} \{\omega_1\}$$

$$\tag{69}$$

5- محاسبەي شبەنىروھا

فرض کنیم F نیرویی دلخواه، اعمال شده بر عضوی دلخواه باشد. بردار مکان متناظر با محل اعمال این نیرو میتواند به دو قسمت P_1 (بردار مکان مرکز جرم جسم اول) و u تقسیم شود که در آن u برداری است که از مرکز جرم جسم اول آغاز و به محل اعمال نیرو منتهی میشود. لذا میتوان نوشت:

$$Q_x = \sum_{\text{sys}} F \cdot \frac{\partial (P_1 + u)}{\partial x}$$
(70)

واضح است که بردار
$$u$$
 به x بستگی ندارد و لذا **0 =** $\frac{\partial u}{\partial x}$ خواهد بود. به
علاوه داریم:

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(x b_1^{(0)} + y b_2^{(0)} + z b_3^{(0)} \right) = b_1^{(0)} \tag{71}$$

$$Q_x = \left(\sum_{\text{sys}} F\right) \cdot b_1^{(0)} \tag{72}$$

بدین ترتیب
$$\{Q_{P_1}\}$$
 به صورت رابطه (73) به دست می اید:

$$\{Q_{P_1}\} = \left\{ \left(\sum_{sys} F\right) \cdot b_1^{(o)} \quad \left(\sum_{sys} F\right) \\ \cdot b_2^{(o)} \quad \left(\sum_{sys} F\right) \cdot b_3^{(o)} \right\}^T$$
(73)

از معادلهی اخیر معلوم میگردد که $\{Q_{P_1}\}$ ، همان ماتریس ستونی حاوی مؤلفههای نیروی برایند وارد بر کل سیستم در پایهی اینرسی است.

ماتریس دوران $\begin{bmatrix} C_{i-1}^{i} \end{bmatrix}$ به عنوان تابعی از ماتریس ستونی $\{\alpha_{i}\}$ در بردارهای مکان مستقر در جسم *i* ام به بعد حضور دارد. لذا در محاسبهی $Q_{\psi_{i}}$ با زنجیرهای از اعضا متشکل از جسم *i* ام تا جسم *n* ام مواجه خواهیم بود. لذا می توان نوشت:

$$Q_{\psi_i} = \sum_k F_k \cdot \frac{\partial u_{ik}}{\partial \psi_i} \tag{74}$$

که در آن F_k نیروی k ام وارد بر سیستم متشکل از جسم i ام تا جسم n ام و u_{ik} هستند. n ام و u_{ik} بردار مکان از J_i به محل اعمال F_k هستند.

$$Q_{\psi_{i}} = \sum_{k} (b_{0})^{T} (F_{k})_{0} \cdot \frac{\partial (b_{0})^{T} (u_{ik})_{0}}{\partial \psi_{i}}$$
$$= \sum_{k} (b_{0})^{T} (F_{k})_{0}$$
$$\cdot (b_{0})^{T} \left(\frac{\partial (u_{ik})_{0}}{\partial \psi_{i}}\right)^{T}$$
$$= \sum_{k} \frac{\partial (u_{ik})_{0}}{\partial \psi_{i}} (F_{k})_{0}$$
(75)

که در آن اندیس صفر به این معناست که هر دو ماتریسهای ستونی، حاصل تجزیهی بردارهای داخل کروشه در پایهی اینرسی هستند. از رابطهی اخیر خواهیم داشت:

$$\{Q_{\alpha_i}\} = \sum_{k} \frac{\partial (u_{ik})_0}{\partial (\alpha_i)} (F_k)_0$$
(76)

حال اگر رابطهی اخیر را برحسب $\{u_{ik}\}_i$ بنویسیم رابطهی (77) حاصل میشود:

$$\{Q_{\alpha_i}\} = \sum_{k} \frac{\partial [C_0^i]^T (u_{ik})_i}{\partial (\alpha_i)} (F_k)_0$$
(77)

$$\frac{\partial \left[C_{0}^{i}\right]^{T} \left(u_{ik}\right)_{i}}{\partial \left(\alpha_{i}\right)} = \frac{\partial \left[C_{0}^{i-1}\right]^{T} \left[C_{i-1}^{i}\right]^{T} \left(u_{ik}\right)_{i}}{\partial \left(\alpha_{i}\right)}$$
(78)

با استفاده از رابطهی (41-ج) و اعمال قاعدهی زنجیرهای خواهیم داشت: ماریاده از رابطه می (41-ج) و اعمال قاعده می زنجیره می خواهیم داشت:

$$\frac{\partial [C_0^i] \left(u_{ik} \right)_i}{\partial \left(\alpha_i \right)} = [D_i]^T [u_{ik}^{\star}]_i [C_0^i]$$
(79)

که جای گذاری آن در رابطهی (77) به معادلهی (80) منتج می گردد:

$$\{Q_{\alpha_i}\} = [D_i]^T \sum_k [u_{ik}^{\star}]_i [C_0^i] \{F_k\}_0$$

$$= [D_i]^T \sum_k [u_{ik}^{\star}]_i \{F_k\}_i$$
(80)
is in the interval of the

$$\int \frac{d}{dt} = \int \frac{d}{dt} \int \int$$

$$\{\boldsymbol{\phi}\} = \left\{ \left\{ \boldsymbol{\phi}_{P_1} \right\}^T \left\{ \boldsymbol{\phi}_{\alpha_1} \right\}^T \dots \left\{ \boldsymbol{\phi}_{\alpha_n} \right\}^T \right\}^I$$
(81)

 $\{\Phi_{P_1}\} = \llbracket C_0^{-1} \rrbracket \{Q_{P_1}\}$ (82)

$$\{\boldsymbol{\Phi}_{\alpha_i}\} = [\boldsymbol{D}_i]^{-T} \{\boldsymbol{Q}_{\alpha_i}\} = \sum_k [\boldsymbol{u}_{ik}^{\star}]_i \{\boldsymbol{F}_k\}_i$$

1-5- محاسبهی شبه نیروها برای ربات زمینی

رابطهی (83) در مورد هر دو ربات صحیح است با این تفاوت که J_1 برای ربات زمینی، مفصل آن با زمین و برای ربات فضایی، نقطهی مرکز جرم جسم اول هستند (شکل1).

6- مدلسازی دینامیکی یک ربات دو لینکی زمینی

در این قسمت قصد داریم با استفاده از الگوریتم ارائه شده مدل دینامیکی یک ربات دو لینکی زمینی در حالت صفحهای را به دست آوریم (شکل 3). در مورد این سیستم داریم:

$$\frac{d}{dt} \begin{cases} \frac{\partial \bar{T}}{\partial (\Omega_{1})} \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial (\Omega_{2})} \end{cases} + \begin{bmatrix} [\omega_{1}^{\star}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\omega_{2}^{\star}] \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{\partial \bar{T}}{\partial (\Omega_{1})} \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial (\Omega_{2})} \end{cases} \\
- \begin{bmatrix} [D_{1}]^{-T} & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [D_{2}]^{-T} \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{\partial \bar{T}}{\partial (\alpha_{1})} \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial (\alpha_{2})} \end{cases} = \begin{cases} \{\Phi_{\alpha_{1}}\} \\ \{\Phi_{\alpha_{2}}\} \end{cases} \\
\begin{bmatrix} C_{1}^{2}] = \begin{bmatrix} \cos\psi_{2} & \sin\psi_{2} & \mathbf{0} \\ -\sin\psi_{2} & \cos\psi_{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \end{cases}$$
(84)

www.S134.ir

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \{\Omega_2\}} = \left\{ \mathbf{0}, \mathbf{0}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} m l^2 (\dot{\psi}_1 (\mathbf{2} + \mathbf{3} \cos \psi_2) + \mathbf{2} \dot{\psi}_2) \right\}^{\mathrm{T}} \qquad (-89)$$
$$- \left[D_2 \right]^{-\mathrm{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \{\alpha_2\}} = \left\{ \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{2} m l^2 \dot{\psi}_1 (\dot{\psi}_1) \right\}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1^{\star} \mathbf{1} & [\mathbf{0}] \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \overline{T} \\ \partial \overline{(\Omega_1)} \\ \partial \overline{T} \\ \partial \overline{(\Omega_2)} \end{bmatrix} = \begin{cases} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$
(5-89)

1-6- محاسبه ی شبه نیروها برای ربات دو لینکی زمینی با توجه به "شکل 3" و روابط (86) داریم:

$$\{ \Phi_{\alpha_1} \} = \mathbf{2} [R^*] \{F_1\} + \mathbf{2} ([R^*]] \\ + [([C_1^2]^T \{R])^*] \{F_2\} \\ = \{0, 0, 2l(f_1 \\ + f_2(\mathbf{1} + \cos\psi_2))\}^T$$
(...90)
$$\{ \Phi_{\alpha_2} \} = \mathbf{2} [R^*] \{F_2\} = \{0, 0, 2lf_2\}^T$$
(...90)

در نهایت، با جای گذاری روابط (89) و (90) در رابطهی (84)، معادلات حرکت به صورت زیر به دست می آیند:

$$2l(f_{1} + f_{2}(1 + \cos\psi_{2})) = \frac{2}{3}ml^{2}[2(5 + 3\cos\psi_{2})\ddot{\psi}_{1} + (2 + 3\cos\psi_{2})\ddot{\psi}_{2} - 3\dot{\psi}_{2}(2\dot{\psi}_{1} + \dot{\psi}_{2})\sin\psi_{2}]$$

$$2lf_{2} = \frac{2}{3}ml^{2}[2\ddot{\psi}_{2} + (2 + 3\cos\psi_{2})\ddot{\psi}_{1}$$

+
$$3\dot{\psi}_{1}^{2}sin\psi_{2}$$
 (-91)

در این قسمت نتایج شبیه سازی و صحت سنجی مدل در نرمافزار آدامز به ازای شرایط اولیه ی صفر، $I_{yy} = I_{zz} = 0.2$ ، $I_{xx} = 1 \cdot m = 3 \cdot kg$ ، طول لینک 2m و تحریک $f_1 = f_2 = 0.1 sint N$ به دست آمده و همان طور که در شکلهای A 5، 6 و 7 مشاهده می شود، نمودارهای حاصل از شبیه سازی توسط الگوریتم ارائه شده با مدل نرمافزار آدامز به طور کامل مطابقت دارد.



Fig. 4 Validation of the first generalized coordinate

شكل 4 صحتسنجي اولين مختصهي تعميم يافته



شکل 5 صحت سنجی شبهسرعت اول

حال فرض می کنیم لینکها، میله هایی باریک و همسان باشند و نیروها همواره عمود بر میله ها باقی بمانند. بر این اساس داریم: $m_1 = m_2 = m$ (صالف) $(I_1] = [I_2] = m = \frac{1}{3}ml^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (r_1) = $(I_2] = [R_2] = [R] = (I_1, 0, 0)^T$ (r_7 -86)

$$(F_1) = (\mathbf{0}, f_1, \mathbf{0})^T$$
 (3-86)
 $(F_2) = (\mathbf{0}, f_2, \mathbf{0})^T$ (3-86)

با در نظر گرفتن ساده سازی های اخیر و استفاده از روابط (53)، (60)، (62) و (67) داریم:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \{\Omega_1\}} = [I] \{\Omega_1\} + [C_1^2]^T [I] \{\Omega_2\} + [R^*]m\{V_1\}$$

$$+ \{2[R^*] [C_1^2]^T$$

$$+ [C_1^2]^T [R^*]m\{V_2\}$$

$$(b) \{87\}$$

$$\frac{\partial T}{\partial (\Omega_2)} = [I] \{\Omega_2\} + [R^*] m\{V_2\}$$
(-.87)

$$-[D_1]^{-T} \frac{\partial I}{\partial (\alpha_1)} = \{0\} \qquad (\varepsilon-87)$$

$$-[D_2]^{-T} \frac{\partial I}{\partial \{\alpha_2\}} = [C_1^2] (2[V_1^*][C_1^2]^T m\{V_2\} + [\Omega_1^*][C_1^2]^T ([I]\{\Omega_2\} + [R^*]m\{V_2\}))$$
(3-87)

از طرفی از روابط سینماتیکی (21) داریم:
(
$$\Omega_1$$
 = { ω_1 = { $0,0,\dot{\psi}_1$ }^T (ω_1 = { ω_1 = { $0,0,\dot{\psi}_1$

$$\{\Omega_2\} = \{\mathbf{0}, \dot{\mathbf{0}}, \dot{\mathbf{0}}_1 + \dot{\mathbf{0}}_2\}^T \qquad (-88)$$

$$\begin{pmatrix} 2i\psi_1 \cos\psi_2 + i(\psi_1 + \psi_2) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (588)$$

(67) و (63). (63). (63) و (63). (65) و (65). (65) و (67) و (67). $\frac{\partial \overline{T}}{\partial (\Omega_1)} = \left\{ 0, 0, \frac{2}{3}ml^2 \left(\dot{\psi}_1 (5 + 3\cos\psi_2) \right) \right\}$

$$+ \dot{\psi}_{2}(2 + 3\cos\psi_{2})$$

$$+ \dot{\psi}_{2}(2 + 3\cos\psi_{2})) \Big]^{T}$$
(89)



Fig. 3 A terrestrial two-link planar robot شکل 3 یک ربات دو لینکی زمینی در حالت صفحهای





شکل 7 صحت سنجی شبهسرعت دوم

8- نتیجه گیری

در این مقاله، الگوریتمی جهت استخراج معادلات حرکت رباتهای زمینی و فضایی با تعداد دلخواه عضو صلب در حالت زنجیرباز ارائه گردید. با توجه به معایب روشهای نیوتن- اویلر و لاگرانژ و نیز مزایای قابل توجه مفهوم شبه مختصات و شبه سرعتها، از فرمی از معادلات مبتنی بر معادلات بولتزمان -هامل که مفاهیم مذکور در آن حضور دارند، جهت مدلسازی دینامیکی استفاده گردید. بهطور خاص، مشاهده گردید که این رویکرد در مدل سازی دینامیکی، با از میان برداشتن معایب روش،های نیوتن-اویلر و لاگرانژ (نیاز به تشکیل انرژی جنبشی و احتساب نیروهای داخلی بین اجزای سیستم)، امکان استخراج معادلات این سیستمها را در حالت عمومی فراهم آورده و بدین جهت می تواند روشی مطلوب در ارائه الگوریتم های عمومی تشکیل معادلات بهشمار آید. همچنین نقش کلیدی استخراج اتحادهای سینماتیکی در سادهسازی معادلات بولتزمان- هامل، از طریق اثبات سه رابطهی کاربردی نشان داده شده و مورد استفاده قرار گرفت. در ادامه، نحوهی استفاده از الگوریتم ارائه شده، از طریق حل یک مثال نشان داده شد و نهایتا صحت مدل بهوسیلهی مقایسهی نمودارهای حاصل از شبیهسازی یک ربات دو لینکی دو درجه آزادی و نمودارهای بهدستآمده از مدل ربات در نرمافزار آدامز تأیید گردید.

9- فهرست علائم

- انرژی جنبشی انتقالی عضو i ام A_i
- انرژی جنبشی دورانی عضو i ام B_i
- (b_i) ماتریس ستونی حاوی بردارهای پایهی بدنی عضو *i* ام
 - نقطهی مرکز جرم عضو i ام \mathcal{C}_i
 - ماتریس دوران از پایهی i ام به پایهی j ام $[C_i^j]$
- ماتریس تبدیل از مشتق زوایای عضو i ام به سرعتهای زاویهای D_i
 - F بردار نیروی دلخواه وارد شده بر عضو دلخواهی از سیستم
 - بردار نیروی دلخواه واردشده بر عضو i ام F_i
- ماتریس اینرسی عضو i ام نسبت به مرکز جرم آن بیان شده در [I_i]

پايەي بدنى ھمان عضو

- مفصل بين عضو *i* ام و عضو *i i* ام
- بردار مکان مرکز جرم عضو اول نسبت به نقطهای ساکن در چارچوب مرجع اینرسی
 - (q) ماتریس ستونی مختصات تعمیم یافته
 - J_i بردار مکان مرکز جرم عضو i ام نسبت به مفصل R_i
 - بردار مکان مفصل J_{i+1} نسبت به مرکز جرم عضو i ام r_i
- [3] ماتریس تبدیل از سرعتهای تعمیمیافته به شبهسرعتها
- انرژی جنبشی کل سیستم برحسب مختصات تعمیمیافته و سرعتهای تعمیمیافته و شبهسرعتها
- بردار مکان متناظر با محل اعمال نیروی دلخواه F نسبت به مرکز جرم عضو اول در ربات فضایی
- بردار مکان متناظر با محل اعمال نیروی دلخواه F_k نسبت به مفصل u_{ik}
 - بردار سرعت مرکز جرم عضو i ام V_i

علائم يونانى

Ji

- ماتریس ستونی حاوی زوایای وضعیت عضو i ام نسبت به عضو $(lpha_i)$ ام i-1
 - (ג) ماتریس ستونی شبهسرعتها
- (Ω_i) ماتریس ستونی حاوی مؤلفههای بردار سرعت زاویهای عضو *i* ام نسبت به چارچوب مرجع اینرسی بیانشده در پایهی *i* ام
- ماتریس ستونی حاوی مؤلفههای بردار سرعت زاویهای عضو i ام $\{\omega_i\}$ نسبت به عضو i-1 ام بیان شده در پایهی i ام

بالانويسها

т

S

- 🗙 🌑 اپراتور تبدیل از ماتریس ستونی به ماتریس کراس
 - ترانهادهی ماتریس
 - معکوس ترانهادهی ماتریس
 - زيرنويسها
 - ربات فضاي
 - ربات زمینی t

10- مراجع

- R. D. Quinn, Equations of motion for structures in terms of quasi-coordinates, Journal Of Applied Mechanics, Vol. 57, No. 3, pp. 745-749, 1990.
- D. T. Greenwood, Advanced dynamics, pp.226-305, Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [3] Leonard Meirovitch, *Methods of analytical dynamics*, pp. 157-164, New York: McGraw-Hill, 1970.
- [4] M. Korayem, A. Shafei, Application of recursive gibbs–appell formulation in deriving the Equations of motion of N-viscoelastic robotic manipulators in 3D space using Timoshenko beam theory, *Acta Astronautica*, Vol. 83, No. 4 pp. 273-294, 2013.
- [5] Alipour, K., Moosavian, S.A.A. and Bahramzadeh, Y., Dynamics of wheeled mobile robots with flexible suspension: analytical modelling and verification. *International Journal of Robotics & Automation*, Vol. 23, No. 4, pp. 242, 2008.
- [6] A. F. Jahromi, R. B. Bhat, W. F. Xieintegrate, Integrated ride and handling vehicle model using lagrangian quasi-coordinates, *International Journal of Automotive Technology*, Vol. 16, No. 2, pp 239-251, 2014.
- [7] J. M. Cameron, W. J. Book, Modeling mechanisms with nonholonomic joints using the Boltzmann-Hamel equations, *International Journal On Robotics Research*, Vol. 16, No. 1, pp. 47-59, 1997.
- [8] J. D. Turner, Symbolic Equation of motion and linear algebra models for high-speed ground vehicle simulations, *Journal Of Guidance And Control*, Vol. 10, No. 5, pp. 8-18, 2001.
- [9] K. Sibilski, A. Zyluk, Generation of equations of motion of flying vehicles as multi-body systems - general remarks, guidance, Navigation And Control and Co-located Conferences, Vol. 56 No. 4, pp. 10-13, 2009.
- [10] F. Talamucci, An algebraic procedure for reducing the Boltzmann-Hamel

International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 21, No. 4, pp. 373-386, 2011.

- [13] M. Lu, W. Gu, J. Liu, Z. Wang, Z. Jing, G. Qin, S. Tu, Recursive dynamic algorithm of open-chain multibody system, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 14, No. 2, pp. 194–197, 2014.
- [14] J. R. Magnus, H. Neudecker, *Matrix Differential Calculus With Applications in Statistics and Econometrics*, Second Edition, pp.226-305, New York: Wiley, 1999.

equations in nonholonomic systems, Advances In Theoretical And Applied Mechanics, Vol. 8, No. 1, pp. 7 – 26, 2015.

- [11] A. Khoshnood, H. M. Maryamnegari, Dynamics modeling and active vibration control of a Satellite with flexible solar panels, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 16, pp. 57-66, 2015. (in Persian (فارسى))
- [12] J. M. Maruskin, A. M. Bloch, The Boltzmann-Hamel equations for the optimal control of mechanical systems with nonholonomic constraints,