مجله مهندسی مکانیک مدرس، شهریور 1395، دوره 16، شماره 6، ص‌ص 259-270

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

حل دقیق نیمه معکوس برای تغییر شکل الاستوپلاستیک تیر با مدل ماده‌ی توانی

حسن بیک محمدلو[1]، حمید اختراعی طوسی[2*]

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد
2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد
* مشهد، کد پستی 9177948944، ekhteraee@um.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 02 اسفند 1394
پذیرش: 11 خرداد 1395
ارائه در سایت: 12 تیر 1395

کلید واژگان:
تحلیل دقیق تیر
حل الاستوپلاستیک
روش هوموتوپی
روش ادومیان
حساب تغییرات

چکیده

تحلیل‌های مهندسی تیر بر حدس یک الگوی مناسب برای میدان جابجایی در مقطع و طول تیر استوار است. تاکنون این نوع تحلیل‌ها به‌طور فراگیر در محدوده رفتار الاستیک ارائه و آزموده شده است. در یک بررسی کاملا جدید در این مقاله به تحلیل مهندسی تیر در محدوده الاستوپلاستیک پرداخته می‌شود. بدین منظور در پی معرفی یک میدان تغییر شکل مناسب که به‌طور معمول تحت عنوان میدان جابجایی کلاسیک اولر برنولی شناخته می‌شود، معادلات حاکم بر تیر الاستوپلاستیک با استفاده از اصول حساب تغییرات استخراج شده است. رفتار ماده بر پایه مدل رامبرگ آزگود و تسلیم ماده بر اساس معیار فن‌مایزز می‌باشد. پاسخ‌یابی معادلات انتگرالی غیرخطی و پیچیده حاصل در مقالات مختلف اغلب به روش‌های عددی انجام شده است. در این مقاله حل دقیق یک تیر نازک تحت بار گسترده یکنواخت با استفاده از دو روش تحلیلی هوموتوپی و ادومیان برای شرایط مرزی دو سر گیردار معرفی می‌گردد. برای راستی‌آزمایی تحلیل، تغییر شکل تیر مورد بررسی توسط نرم‌افزار تجاری آباکوس شبیه‌سازی شده است. نتایج مختلف پاسخ‌های تحلیلی و شبیه‌سازی در قالب تعدادی نمودار ارائه شده‌اند. به‌کمک نمودارها میزان انطباق جواب‌های تیر شبیه‌سازی شده با نتایج حاصل از دو روش تحلیلی ادومیان و هوموتوپی بررسی شده است. در پایان، درمورد امکان توسعه نظریه مهندسی کلاسیک تیر در انجام تحلیل‌های جامع الاستوپلاستیک اظهار نظر شده است.

Exact semi-inverse solutions for the elastoplastic deformation of beam with power law material model

Hassan BeikMohammadlou, Hamid EkhteraeiToussi*

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.
* P.O.B. 9177948944, Mashhad, Iran, ekhteraee@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 21 February 2016
Accepted 31 May 2016
Available Online 02 July 2016

Keywords:
Exact Beam Analysis
Elastoplastic Solution
Homotopy Method
Adomian Method
Variational Calculus

ABSTRACT

Engineering analyses of beams are based on the proper guesstimate of deformation fields. Up until now, the analyses of beams have been widely proposed and experienced in elastic region of materials behavior. This paper considers the elastoplastic engineering analysis of beams. In this regard, following the definition of a proper deformation pattern known as classical Euler- Bernoulli model and using the variational calculus principals the governing equations are extracted. In this analysis the behavior of material obeys the Romberg-Osgood model and yielding is based on the von Mises criterion. Different numerical solutions are suggested for the solution of these complicated equations in the literature. In this paper the exact solution is provided for a thin beam under the action of uniformly distributed load by using the two analytical methods of homotopy and Adomian for the clamped- clamped boundary conditions. In verification phase, the deformation of beam is compared with the results of Abaqus software. Different graphical representations are provided for the results of the analytical solutions and simulations. Using these data, the level of consistency between the simulated solutions on one side and the Adomian and homotopy techniques on the other side, are assessed. At the end, the validity of applying the classical engineering theory of beams in the elastoplastic analyses is discussed.

1- مقدمه

به‌دلیل اهمیت و کاربرد پدیده خمش در طراحی سازه‌های مهندسی، مطالعه این پدیده از دیرباز مورد توجه پژوهشگران بوده است. در راستای بهره‌مندی بیشتر از توانایی مواد، امروزه طراحی و تحلیل تیرها و ورق‌ها در مسائل الاستوپلاستیک مورد توجه قرار گرفته است. انجام کار نظری در حوزه خمش به ارائه یک مدل ریاضی مناسب نیاز دارد. از آنجا که تیر به عنوان یک پیوستار مورد توجه قرار می‌گیرد، مدل‌های ریاضی محیط پیوسته در مورد آن صادق است. حل معادلات پیوستار به‌دلیل غیرخطی و پیچیده بودن در مسائل کاربردی، بسیار دشوار یا اساسا غیر ممکن است. بدین سبب پژوهشگران به ناگزیر از روش‌هایی استفاده می‌نمایند که نیمی تحلیلی و نیمی دیگر مبتنی بر فرضیات و روابط شهودی هستند. در این روش‌ها که تحت عنوان روش‌های نیمه معکوس شناخته می‌شوند، معمولا تحلیلگر در آغاز یک حدس کلی برای میدان تغییر شکل ارائه می‌دهد. از تلفیق این میدان تغییر شکل با تعدادی از معادلات پایه از جمله شرایط تعادل در داخل و خارج سازه، روابط حاکم بر

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:
Please cite this article using:
H. BeikMohammadlou, H. EkhteraeiToussi, Exact semi-inverse solutions for the elastoplastic deformation of beam with power law material model, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 6, pp. 259-270, 2016 (in Persian)

میدان‌هایی از جمله تغییر شکل، تنش و کرنش مشخص می‌شود. در تحلیل تیرها و ورق‌ها اقسام این حدس‌های اولیه با عناوینی از قبیل نظریه کلاسیک یا اولر برنولی[1]، نظریه مرتبه اول برشی یا تیموشنکو، نظریه‌های مراتب بالای برشی و نظریه‌های لایه‌ای قابل مشاهده است. آنالیز خمش در شرایط الاستیک توسط برخی محققان انجام شده است. به‌طور مثال زنکور [1] حل دقیق آنالیز خمش ورق و تیر با مقطع مستطیلی تحت بار گسترده را براساس میدان کلاسیک در شرایط الاستیک به‌دست آورده است. لیم و همکاران [2] با استفاده از معادلات الاستیسیته روشی برای مطالعه خمش تیرها و ورقهای نازک همگن و مستطیلی در شرایط تکیه‌گاهی دو سر مفصل ارائه داده‌اند. لی و همکاران [3] خمش تیرهای تابعی الاستیک با میدان جابجایی کلاسیک را توسط ایده‌برداری از تیرهای همگن به‌صورت تحلیلی مورد بررسی قرار داده‌اند. خمش تیرهای مدرج تابعی یک سرگیردار در شرایط الاستیک غیرخطی به‌وسیله‌ی کانگ و لی [4] انجام شده است. آکقوز و سیوالک [5] بر اساس تئوری الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش، یک مدل برای تغییر شکل برشی تیر برای بارگذاری‌های استاتیکی و دینامیکی ارائه داده‌اند.

اقسام متنوعی از تحلیل‌های الاستوپلاستیک تیرها نیز در منابع قابل مشاهده است. بطور مثال حل تحلیلی خمش تیر با مقطع مستطیلی در شرایط الاستیک-کاملا پلاستیک به‌وسیله‌ی استوک و هلیلوویچ [6] پی‌گیری و انجام شده است. در این پژوهش، تحلیل براساس شرایط الاستیک پیش رفته و در مرحله استخراج معادلات، شرایط پلاستیک با تنش تسلیم ثابت در معادلات وارد شده است [6]. نی و ژانگ [7] حل بسته‌ی تیر خمیده‌ی غیرهمگن در شرایط الاستوپلاستیک با بارگذاری خمش خالص را ارائه کرده‌اند. در سازه‌ی تیر خمیده این امکان وجود دارد که از مختصات قطبی استفاده کرده و در نتیجه معادلات به‌صورت بسته حل شوند. به‌عبارت دیگر در این شرایط نیاز به تعریف میدان جابجایی و روش‌های نیمه معکوس نیست. البته در مقاله‌ی مذکور، تنش تسلیم ثابت درنظر گرفته شده است [7]. بین و وان‌ژی [8] یک راه حل تحلیلی برای بارگذاری ساده‌ی خمش خالص تیر الاستوپلاستیک با درنظرگرفتن تنش ارائه داده‌اند. در تحقیق فوق از کرنش‌های برشی صرف‌نظر شده و تنش تسلیم با مدل ماده‌ی رامبرگ آزگود[2] درنظر گرفته شده است. به کارگیری روش‌های عددی قابلیت تحلیل هندسه‌ها و رفتارهای مکانیکی پیچیده‌تر را هم ممکن نموده است. بطور مثال معارف‌دوست و کدخدایان [9] مقایسه‌ای بین نتایج تئوری‌های تغییر شکل و نموی در تحلیل کمانش الاستوپلاستیک صفحات نازک مستطیلی به‌کمک روش عددی یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته[3] انجام دادند. مدل ماده‌ی به‌کار رفته در پژوهش فوق رامبرگ آزگود بوده است. رمضان‌نژاد و همکاران [10] با به‌کارگیری تئوری‌های تغییر شکل و نموی پلاستیسیته، تحلیل کمانش دینامیکی یک ورق مستطیلی را در شرایط الاستوپلاستیک به‌صورت عددی مورد بررسی قرار داده‌اند. در پژوهشی دیگر، توسط علیزاده و انصاری[11]، حل خمش میکروتیرهای یک‌سرگیردار بر اساس تئوری پلاستیسیته‌ی گرادیانی چن- ونگ انجام شده است. در پژوهش فوق، شرایط الاستیک و الاستیک-کاملا پلاستیک مورد تحلیل قرار گرفته است. ابوالرعب و وویادجیس [12] به‌صورت‌های تحلیلی و آزمایشگاهی، پارامتر طول را برای تئوری گرادیان کرنش پلاستیک تعیین کردند. آنها شرایط را صرفا پلاستیک در نظر گرفته و از خواص الاستیک ماده صرف‌نظر کرده‌اند [12].

به‌طور کلی با توجه به دستاوردهای ارائه شده در مراجع [12-6]، تحلیل الاستوپلاستیک تیرها یک رویکرد کاملا بدیع محسوب نمی‌شود. با این‌حال تحلیل‌های منتشر شده منحصر به تحلیل تنش در مقاطع عرضی تیرها مانده است. اغلب تحلیل‌های مهندسی به برآورد مناسبی از میزان تغییر شکل تیرها نیز نیاز دارند. بنابراین تحلیل‌های جدیدتر باید پاسخی برای میدان تغییر شکل تیر الاستوپلاستیک ارائه دهند. امروزه با وجود یک پیشینه غنی از پژوهشهای مبتنی بر الگوهای مختلف، تغییر شکل مقاطع عرضی تیرهای الاستیک از یکسو و کاربرد حساب تغییرات و تئوری‌های حدی در تعیین معادلات حاکم محیط‌های الاستوپلاستیک از دیگر سو، زمینه برای بسط نظریه‌های مهندسی تیر در تحلیلهای الاستوپلاستیک که موضوع و نوآوری این تحقیق می‌باشد، مهیا گردیده است.

محدودیت‌ها و خطاهای زیادی در اغلب مقالات تحلیلی مرتبط اعمال شده است که این تقریب‌ها به‌منظور آسان‌سازی مدل یا حل ساده‌تر معادلات به کار رفته‌اند. به‌عنوان مثال در اغلب مراجع نام برده، حالت ساده‌ی منحنی تنش کرنش الاستیک-کاملا پلاستیک در نظر گرفته شده است. تقریب‌های دقیق‌تر رفتار مادی مانند مدل ماده‌ی رامبرگ آزگود منجر به روابط دشوارتر می‌شود و مورد توجه قرار نگرفته است. مهمتر اینکه در منابع موجود اغلب از فرض توزیع خطی کرنش از تار خنثی در کنار فرض تنش یک محوری استفاده می‌شود. این در حالی است که در شرایط کرنش صفحه‌ای، تنش‌ها صفحه‌ای نخواهند بود. به‌عبارت دیگر چند محوره بودن تنش‌ها، شرایط آستانه و تداوم تسلیم را تحت تأثیر قرار خواهد داد. این به معنای آن است که انتظار می‌رود پاسخ تغییر شکل تیر در تحلیل‌های نیمه‌معکوس مشابه مقاله‌ی اخیر، از پیش‌بینی‌های قبلی دقیقتر باشد.

در راستای انجام یک تحلیل جامع نیمه‌معکوس برای تغییر شکل الاستوپلاستیک تیرها در مقاله‌ی حاضر، تیری با ابعاد، بارگذاری و شرایط مرزی دلخواه و رفتار ماده‌ی الاستوپلاستیک غیرخطی به‌صورت تحلیلی و دقیق مورد بررسی قرار گرفته است. برای بررسی صحت حل، چند نمونه با مقادیر و شرایط مشخص حل شده اند. بدین منظور ابتدا با ترکیب روابط مربوط به میدان جابجایی، کرنش- جابجایی، تنش-کرنش و با استفاده از اصل حداقل انرژی و اصول حساب تغییرات، معادلات دیفرانسیل حاکم استخراج شده‌اند. برای شرایط الاستوپلاستیک با درنظرگرفتن مدل رامبرگ- آزگود برای رفتار ماده و معیار تسلیم فن مایزز به عنوان شرط ورود به ناحیه پلاستیک، اثرات غیرخطی شرایط پلاستیک وارد مسأله شده است.

برخی روش‌های تحلیلی برای حل معادلات غیرخطی از جمله روش هوموتوپی قبلا آزموده شده‌اند. لیائو از اولین کسانی است که از روش هوموتوپی برای حل تحلیلی معادلات غیرخطی استفاده کرده است [13]. همچنین لیائو تحقیقاتی در زمینه‌ی مقایسه‌ی نتایج روش‌های پرتوربیشن[4] و هوموتوپی انجام داده است [14]. لیانگ و جفری [15] نیز برای یک مسأله غیرخطی، مقایسه‌ای بین نتایج روش‌های پرتوربیشن و تحلیلی هوموتوپی انجام داده است. نتیجه‌ی این تحقیقات نشان می‌دهد عملکرد روش تحلیلی هوموتوپی مطلوب‌تر بوده و به پژوهش‌های دیگران نزدیکتر است [16-14]. روش هوموتوپی، برای بسیاری از معادلات غیرخطی کارآیی بالایی داشته و از مزایای این روش، همگرایی بالا، عدم وابستگی به نقطه شروع حل و تضمین یکتایی جواب است [15-13]. رجبی و رمضانی [16] مدلی برای میکروتیرها[5]ی غیرخطی در شرایط الاستیک با میدان جابجایی کلاسیک ارائه

[1] Euler–Bernoulli
[2] Romberg Osgood
[3] GDQ method

[4] perturbation
[5] microbeams

دادند. ایشان حل معادلات غیرخطی را به‌کمک روش تحلیلی و دقیق هوموتوپی انجام داده‌اند. جعفری و سیفی [17] و جعفری و همکاران [18] با استفاده از روش تحلیلی دقیق هوموتوپی، معادله انتشار موج خطی و غیرخطی تیر را مورد تحلیل قرار داده‌اند. بهزادی و همکاران [19] در زمینه کاربرد روش هوموتوپی برای حل معادلات غیرخطی ولترا[1] و فردهلم به شکل انتگرالی- دیفرانسیلی تحقیقاتی مبسوطی انجام داده‌اند.

در مقاله حاضر، علاوه بر روش هوموتوپی، معادلات حاکم به روشی ابتکاری با ایده برداری از روش ادومیان نیز حل شده‌اند. روش ادومیان [21-20] ابزار تحلیل بخشی از معادلات دیفرانسیل - انتگرالی از جمله معادلات موسوم به معادلات فردهلم[2] نوع اول و دوم است. بسیاری از معادلات غیرخطی در پژوهش‌های مختلف به‌کمک روش ادومیان حل شده‌اند. در یک پژوهش، وازواز [22] برای محاسبه چندجمله‌ای‌های ادومیان در عملگر غیرخطی، الگوریتم جدیدی ارائه داده است.

بابلیان و همکاران [23] مقایسه‌ای بین روش‌های هوموتوپی و ادومیان برای حل معادلات غیرخطی انتگرالی ولترا وفردهلم انجام داده‌اند. این تحقیق نشان می‌دهد نتایج روش هوموتوپی دقیقتر است. کومار و سینگ [24] در تحقیقاتی با اعمال یک ضریب نامعین در معادلات ادومیان (همانند روش هوموتوپی)، برای محاسبه‌ی چندجمله‌ای ادومیان در معادلات غیرخطی، دقت روش ادومیان را به‌خوبی افزایش داده‌اند. همچنین مقایسه‌ی این نتایج با نتایج روش هوموتوپی، نشان می‌دهد که اصلاحات این ضریب نامعین، منجر به همخوانی مناسب دستاورد این دو روش می‌شود [24].

معادلات حاکم در سازه‌های الاستوپلاستیک به‌خصوص برای مدل ماده‌ی غیرخطی رامبرگ آزگود، منجر به معادلات غیرخطی دیفرانسیل انتگرالی پیچیده‌ای می‌شود. در اغلب تحقیقات قبلی، معادلات حاکم در سازه‌های الاستوپلاستیک به روش‌های عددی حل شده‌اند [12-6]. در این مقاله حل دقیق مسأله‌ی تیر الاستوپلاستیک مطرح خواهد شد. پاسخ‌های عددی نسبت به روش‌های حل تحلیلی دقیق، دارای خطاهای رایج محاسباتی و مشکل تکرارناپذیری هستند. در ضمن در این پژوهش، تحلیل‌ها بر پایه‌ی رفتار الاستوپلاستیک توانی یا مدل رامبرگ آزگود، بسط داده شده است.

در برخی تحقیقات در شرایط الاستیک، پژوهشگران برای حل معادلات در شرایط الاستیک خطی یا غیرخطی از روش تحلیلی هوموتوپی[3] استفاده نموده‌اند. در مقاله‌ی حاضر، برای اولین بار، حل مسائل پلاستیسته غیرخطی به دو روش تحلیل دقیق و جداگانه، مبتنی بر تحلیل معادلات دیفرانسیلی- انتگرالی تحت عنوان روش‌های هوموتوپی و ادومیان[4] ارائه شده است. نهایتا جواب‌های بدست آمده از دو روش تحلیلی فوق با نتایج شبیه‌سازی‌های نرم‌افزار آباکوس نیز مقایسه شده‌اند.

2- مدل‌سازی نیمه‌معکوس در تحلیل الاستوپلاستیک تیر

استخراج معادلات الاستیک تیر از ترکیب معادلات تعادل، روابط هوک و معادلات کرنش جابجایی حاصل می‌شود. یکی از روش‌های پیگیری این روند، استفاده از اصول حساب تغییرات است [25]. چنانچه استخراج معادلات حاکم بدون اعمال محدودیت بر هر یک از میدان‌های مورد مطالعه پیگیری شود، معادلات دیفرانسیلی پاره‌ای حاصل اساس یک رویکرد تحلیلی، موسوم به روش مستقیم را تشکیل می‌دهند. اغلب برای حل معادلات پیچیده حاصل به‌ناگزیر باید از روش‌های عددی استفاده کرد که به دلیل خطاهای رایج محاسباتی، دقت کمتری دارند. در استخراج معادلات تیر الاستوپلاستیک، این پیچیدگی‌ها به مراتب از معادلات تیر الاستیک بیشتر می‌شود. در این حالت وجود معیار تسلیم و رفتار غیر خطی مادی در پیچیدگی معادلات حاکم دخیل خواهند شد. لذا برای رفع بخشی از این مشکل، از روش‌های نیمه معکوس استفاده می‌شود. یکی از این روش‌ها تخمین میدان جابجایی است. در این مقاله یک تیر با شرایط کرانی دو سر درگیر تحت بارگسترده، در شرایط الاستیک و الاستوپلاستیک مورد تحلیل قرار گرفته است. شکل 1 بیانگر مختصات کلی و نحوه بارگذاری تیر است. x جهت طولی تیر، y جهت پهنای تیر (عمق تصویر) و z در جهت ارتفاع و بارگذاری می‌باشد. مطابق شکل 1، تیر در جهت‌های x، y و z به ترتیب دارای ابعاد L، b و h است.

باوجود پیشینه غنی برای مقالات مبتنی بر روش‌های نیمه‌معکوس در تحلیل‌های الاستیسیته و ارتعاشاتی، جای خالی این رویکرد ارزشمند تحلیلی در مطالعات الاستوپلاستیک، به‌خوبی آشکار است. در این مقاله و در جایگاه استفاده از رویکرد نیمه‌معکوس برای تحلیل تیرها، میدان تغییر شکل کلاسیک یا نظریه اویلر- برنولی برای تحلیل الاستوپلاستیک تیرها آزموده می‌شود. در این رویکرد از اثر تغییر شکل برشی عرضی صرف‌نظر می‌شود که در تیرهای نازک، باوجود چشم‌پوشی از این اثر، همچنان نتایج مناسبی بدست می‌آید؛ به‌طوری‌که بنا به نتایج قابل دسترسی، هنگامی که نسبت طول به ضخامت یک تیر، کوچکتر از یک بیستم باشد، نظریه کلاسیک کاملا دارای نتایج مناسبی خواهد بود [9,3-1].

مطابق شکل 2 برای تیرهایی که در جهت‌های بارگذاری و عرضی نازک و در امتداد طولی بلند هستند، میدان جابجایی کلاسیک به صورت رابطه (1) در نظر گرفته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
U &= u - zw' \\
V &= 0 \\
W &= w
\end{aligned}
\tag{1}
$$

در این معادلات U، V و W به‌ترتیب جابجایی در جهت‌های x، y و z در هر نقطه از تیر می‌باشد، همچنین جابجایی در مقطع میانی تیر به ترتیب در جهت‌های x و z می‌باشند که فقط تابعی از x در نظر گرفته می‌شوند. به این ترتیب U تابعی از x و z خواهد بود. در این مقاله کلیه مشتق‌گیری‌ها نسبت به x انجام می‌شود، به‌طور مثال منظور از w' و w'' به‌ترتیب مشتق اول و دوم w نسبت به x است.

معادلات حاصل از اصل همیلتن یا حداقل انرژی پتانسیل [26-25] برای یک سازه در حالت کلی به صورت رابطه (2) است:

$$\delta \iint \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{\mathrm{tot}} dv - \delta \int f_i u_i dv - \delta \oint \sigma_i u_i ds = 0 \tag{2}$$

در رابطه (2) عبارت اول مربوط به انرژی پتانسیل کرنشی، عبارت دوم اثر نیروهای حجمی و جمله سوم اثر نیروهای سطحی سازه است. در مسأله حاضر، تیری با پهنا و شرایط مرزی دلخواه تحت بارگسترده‌ی q در نظر گرفته شده است. برای این مسأله ، معادله (2) به صورت رابطه (3) ساده می‌شود:

$$\int \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij}^{\mathrm{tot}} dv = \delta \oint \sigma_i u_i ds \tag{3}$$

با فرض تغییر شکل کوچک و میدان جابجائی کلاسیک ارائه شده در روابط (1)، تنها مؤلفه غیر صفر کرنش کل، از رابطه (4) قابل استخراج خواهد بود:

[1] Voltra
[2] Fered Holm
[3] homotopy Analysis Method (HAM)
[4] Adomian Decomposition Method (ADM)

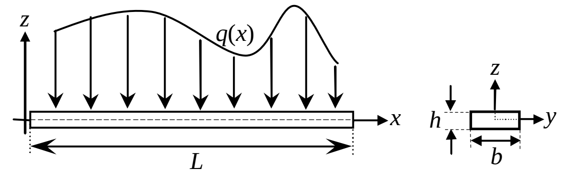

Fig. 1 Loading and geometry of the studied beam

شکل 1 معرفی هندسه عمومی تیر بارگذاری شده

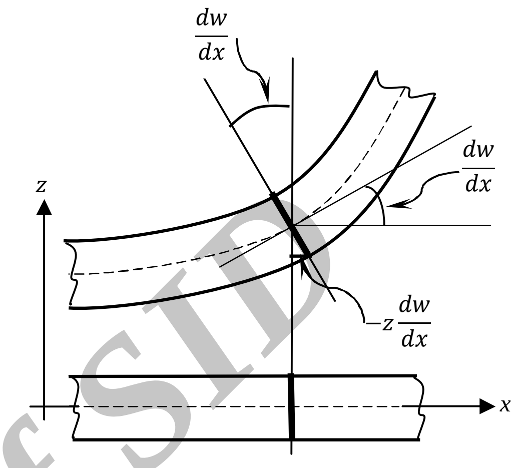

Fig. 2 Classical deformation field for a beam

شکل 2 تغییر شکل تیر در نظریه کلاسیک

$$\varepsilon_x^{\text{tot}} = \frac{\partial U}{\partial x} = u' - zw'' \tag{4}$$

که با توجه با معادلات (3) و (4) نتیجه می‌دهد:

$$\int\int \sigma_x \delta(u' - zw'')dAdx = -\int q\delta w dx \tag{5}$$

برای شرایط کرانی از نوع گیردار و مفصلی، کار نیروها و گشتاورهای متمرکز در تکیه‌گاه‌ها صفر است. منتجه‌های نیرو به صورت روابط (6) تعریف می‌شود:

$$N = \int \sigma_x dA$$
$$M = \int \sigma_x z dA \tag{6}$$

با ترکیب (5) و (6)، رابطه (7) نتیجه می‌شود:

$$\int_0^L (N\delta u' - M\delta w'')\,dx = -\int_0^L q\delta w dx \tag{7}$$

به کمک انتگرال‌گیری جز به جز، معادله (7) به صورت رابطه (8) ساده می‌شود:

$$N' = 0, M'' = q, N\delta u|_0^L = M\delta w'|_0^L = M''\delta w|_0^L = 0 \tag{8}$$

بنابراین برای تیر دو سر گیردار، شرایط مرزی مسأله عبارتند از:

$$u(0) = u(L) = w(0) = w(L) = w'(0) = w'(L) = 0 \tag{9}$$

2-1- معادلات تیر الاستیک با میدان جابجایی کلاسیک (اویلر برنولی)

در تیر الاستیک، کرنش کل با کرنش الاستیک برابر است، بنابراین در این حالت، تنها کرنش الاستیک غیرصفر، همان رابطه (4) است. از طرفی با توجه به قانون هوک[1] [25] رابطه تنش کرنش به صورت رابطه (10) صادق است:

$$\sigma_{ij} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2G\varepsilon_{ij} \tag{10}$$

در این روابط E،νوG به‌ترتیب مدول الاستیک، ضریب پواسون و مدول برشی هستند، توجه شود که این سه کمیت با رابطه $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ با یکدیگر ارتباط دارند[25]. با جاگذاری مؤلفه‌های میدان کرنش از رابطه (4) در رابطه (10) مؤلفه‌های غیر صفر تنش‌های اصلی به شرح زیر بدست می‌آید:

$$\sigma_x = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}(u' - zw'') \tag{11}$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(u' - zw'') \tag{12}$$

به کمک معادله (11) و (12) منتجه‌های نیرو به صورت روابط (14,13) تعریف می‌شود:

$$N = \int \sigma_x dA = E^* \int (u' - zw'')dA = E^* u' A_0 \tag{13}$$

$$M = \int \sigma_x z dA = E^* \int (u' - zw'')z dA = -E^* w'' I \tag{14}$$

که در آن از تساوی‌های زیر استفاده شده است:

$$E^* = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$
$$A = E^* A_0 \text{ و } I = \frac{bh^3}{12} \tag{15}$$

با ترکیب معادلات (8)، (9) و (13) می‌توان نتیجه گرفت $u = 0$ است، به عبارت دیگر جابجایی افقی در تمام نقاط تار خنثی صفر است، همچنین از ترکیب معادلات (8)، (9) و (14) برای تیر دو سرگیردار می‌توان رابطه (16) را نتیجه گرفت:

$$w = \frac{q}{24E^* I}x^2(x-L)^2 \tag{16}$$

که w معادله خیز تیر در جهت z است، در این حالت نتیجه تحلیل با نتایج ارائه شده در کتاب‌های مقاومت‌مصالح، مانند [25]، مطابقت دارد.

2-2 معادلات حاکم بر تیر الاستوپلاستیک

میدان کرنش کل در حالت الاستوپلاستیک شامل دو بخش الاستیک و پلاستیک است:

$$\varepsilon_{ij}^{\text{tot}} = \varepsilon_{ij}^{\text{e}} + \varepsilon_{ij}^{\text{p}} \tag{17}$$

میدان کرنش کل برحسب جابجایی‌ها در معادله (4) آمده است. با فرض تئوری تغییر شکل[2] [27,26] که در آن تغییر شکل پلاستیک رخدادی غیر نموی است و برمبنای معیار فن مایزز، رابطه تنش‌های انحرافی بر حسب کرنش‌های پلاستیک به‌صورت رابطه (18) خواهد بود:

$$\varepsilon_{ij}^{\text{p}} = \frac{3}{2}\frac{\bar{\varepsilon}^{\text{p}}}{\bar{\sigma}}s_{ij} \tag{18}$$

در این رابطه $\bar{\sigma}$ تنش مؤثر و $\bar{\varepsilon}^{\text{p}}$ کرنش مؤثر هستند، همچنین مدل رامبرگ آزگود [27,26] برای رفتار یک محوری تنش-کرنش به صورت رابطه (19) است:

$$\varepsilon^{\text{tot}} = \frac{\sigma}{E} + k\left(\frac{\sigma}{E}\right)^n \tag{19}$$

که با توجه به رابطه (17)، جمله اول رابطه (19) کرنش الاستیک و جمله دوم آن، کرنش پلاستیک است. با ترکیب روابط (18) و (19)، رابطه (20) بدست می‌آید:

$$\varepsilon_{ij}^{\text{p}} = \frac{3}{2}\left[\frac{k^{\frac{1}{n}}}{E(\bar{\varepsilon}^{\text{p}})^{\frac{1}{n}-1}}\right]s_{ij} \tag{20}$$

از طرفی با مرتب کردن معادلات به صورت تنش بر حسب کرنش و ترکیب معادلات (4) و (11) روابط (21-23) بدست می‌آیند:

[1] Hook

[2] deformation theory

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu)(1+2\nu)}[(u'-zw'')(1-\nu) -(\varepsilon_x^{\mathrm{p}})(1-2\nu)] \quad (21)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu)(1+2\nu)}[(u'-zw'')(\nu)-(\varepsilon_y^{\mathrm{p}})(1-2\nu)] \quad (22)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1-\nu)(1+2\nu)}[(u'-zw'')(\nu)-(\varepsilon_z^{\mathrm{p}})(1-2\nu)] \quad (23)$$

همچنین برای محاسبه تنش میانگین به کمک روابط (21) تا (23)، رابطه (24) بدست می‌آید:

$$\sigma_{\mathrm{M}} = \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} = \frac{1}{3}\frac{E}{(1-2\nu)}(u'-zw'') \quad (24)$$

تنش‌های انحرافی از رابطه (25) بدست می آیند [26,25]:

$$s_{ij} = \sigma_{ij}-\sigma_{\mathrm{M}}\delta_{ij} \quad (25)$$

با ترکیب معادلات (20) و (25)، می‌توان روابط (26-28) را نوشت:

$$\varepsilon_x^{\mathrm{p}} = \frac{3}{2}[\frac{k^{\frac{1}{n}}}{E(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})^{\frac{1}{n}-1}}](\frac{E}{1+\nu})[\frac{2}{3}(u'-zw'')-\varepsilon_x^{\mathrm{p}}] \quad (26)$$

$$\varepsilon_y^{\mathrm{p}} = \frac{3}{2}[\frac{k^{\frac{1}{n}}}{E(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})^{\frac{1}{n}-1}}](\frac{-E}{1+\nu})[\frac{1}{3}(u'-zw'')+\varepsilon_y^{\mathrm{p}}] \quad (27)$$

$$\varepsilon_z^{\mathrm{p}} = \frac{3}{2}[\frac{k^{\frac{1}{n}}}{E(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})^{\frac{1}{n}-1}}](\frac{-E}{1+\nu})[\frac{1}{3}(u'-zw'')+\varepsilon_z^{\mathrm{p}}] \quad (28)$$

بنا به تعریف کرنش مؤثر [27,26]، به‌صورت $\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}} = 3/2\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ نتیجه می‌دهد:

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = [k^{\frac{1}{n}}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})^{1-\frac{1}{n}}][\frac{(u'-zw'')}{(1+\nu)+\frac{3}{2}k^{\frac{1}{n}}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})^{1-\frac{1}{n}}}] = -2\varepsilon_y^{\mathrm{p}} = -2\varepsilon_z^{\mathrm{p}} = \varepsilon_x^{\mathrm{p}} \quad (29)$$

قابل توجه است که رابطه (29)، فرض عدم تغییر حجم در شرایط پلاستیک را ارضا می‌کند، یعنی:

$$\varepsilon_x^{\mathrm{p}}+\varepsilon_y^{\mathrm{p}}+\varepsilon_z^{\mathrm{p}} = 0 \quad (30)$$

نهایتا با تعریف کمیت‌های:

$$A = E^{*}A_0 \text{ و } D = \frac{Eb}{(1+\nu)} \text{ و } B = \frac{12(1-2\nu)}{h^3(1-\nu)} \quad (31)$$

و از ترکیب معادلات (6)، (8)، (21) و (29)، معادلات (32-34) استخراج می‌شوند:

$$Au' - B\int_{-h/2}^{h/2}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}dz = c_1 \quad (32)$$

$$-Dw'' - B\int_{-h/2}^{h/2}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}zdz = q\frac{x^2}{2}+c_2x+c_3 \quad (33)$$

$$(u'-zw'') = (1+\nu)k^{-\frac{1}{n}}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})^{\frac{1}{n}}+\frac{3}{2}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) \quad (34)$$

به این ترتیب معادلات حاکم به‌صورت دستگاه سه معادله سه مجهول تیر الاستوپلاستیک، شامل کرنش معادل پلاستیک در هر نقطه از تیر و جابجایی‌های تیر در جهت‌های z و x، به‌ترتیب در قالب توابع $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}(x,z)$، $w(x)$ و $u(x)$ بدست آمده‌اند. در این حالت تغییر متغیر $U_1 = u'$ و $W_2 = w''$ معادلات دیفرانسیل (32) تا (34) را به معادلات جبری (غیر دیفرانسیلی) تبدیل می‌نماید، همچنین این سه معادله قابلیت ادغام شدن دارند و می‌توان به صورت رابطه (35)، دستگاه را به یک معادله انتگرالی غیر دیفرانسیلی تبدیل کرد:

$$a_0(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})^{\frac{1}{n}}+\frac{3}{2}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) = \frac{c_1}{A}+\frac{B}{A}\int_{-h/2}^{h/2}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}dz+\frac{B}{D}z\int_{-h/2}^{h/2}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}zdz + z(q\frac{x^2}{2}+c_2x+c_3) \quad (35)$$

که در آن $a_0 = (1+\nu)k^{-\frac{1}{n}}$ است. در این معادله ثابت‌های c_1، c_2 و c_3، مجهول و بقیه ثابت‌ها معلومند. مشاهده می‌شود معادله (35) یک معادله انتگرالی غیرخطی و غیرصریح است. این معادله به لحاظ ساختاری یک معادله انتگرالی محسوب می‌شود. در صورت حل این معادله، در واقع تابع کرنش پلاستیک معادل، یعنی $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}(x,z)$، در هر نقطه از تیر تعیین خواهد شد. علاوه بر اهمیت کاربردی $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}(x,z)$، می‌توان توسط آن خیز افقی و قائم تیر الاستوپلاستیک را نیز تعیین کرد. برای این منظور، با جاگذاری تابع کرنش پلاستیک معادل بدست آمده در معادلات (32) و (33)، توابع $u'(x)$ و $w''(x)$ تعیین می‌شوند، سپس با درنظرگرفتن یک ثابت انتگرال‌گیری مجهول برای u، دو ثابت انتگرال‌گیری مجهول برای w و سه ثابت مجهول c_1، c_2 و c_3، در مجموع 6 ثابت مجهول در معادلات وجود خواهد داشت که به کمک 6 شرط مرزی رابطه (9)، قابل تعیین هستند. در ادامه دو روش تحلیلی و دقیق ادومیان و هوموتوپی برای حل معادله (35)، ارائه می‌شود.

3- معرفی و کاربرد روش اصلاح شده ادومیان در تحلیل تیر الاستوپلاستیک

معادلات انتگرالی معمولا با اسامی مختلفی نام‌گذاری می‌شوند. به‌طور مثال معادله انتگرالی غیرخطی فردهلم به صورت کلی (36) می‌باشد:

$$u(x) = f(x)+\lambda\int_0^L K(x,t)F[u(t)]dt \quad (36)$$

در این معادله تابع مجهول $u(x)$ در داخل و خارج انتگرال ظاهر شده است. $F[u(t)]$ تابعی غیرخطی از مجهول $u(t)$ است. توابع $K(x,t)$ و $f(x)$ توابعی معلوم و λ یک پارامتر مستقل از t است [20-24].

از مقایسه معادله حاکم بر میدان کرنش الاستوپلاستیک تیر در رابطه‌های (35) و (36) می‌توان نتیجه گرفت رابطه (35) معرف نوعی معادله انتگرالی فردهلم می‌باشد. در ادامه یک روش تحلیلی تحت عنوان روش ادومیان برای پاسخ‌یابی معادله حاکم بر میدان کرنش الاستوپلاستیک در رابطه (35)، که الگویی مشابه با معادله انتگرالی غیرخطی فردهلم دارد، به‌کار گرفته می‌شود.

روش ادومیان بر این پایه استوار است که تابع مجهول $u(x)$ به صورت رابطه (37) مجزاسازی شود.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty}u_n(x) \quad (37)$$

که جملات این سری به ازای $n \geq 0$ با یک روند بازگشتی تعیین می‌شوند. در معادله انتگرالی غیرخطی فردهلم به فرم معادله (36)، جمله غیرخطی $F(u(t))$ با چندجمله‌ای‌های ادومیان به‌صورت رابطه (38) جایگزین می‌شوند:

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}[F(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^i u_i(x))]|_{\lambda=0} \quad (38)$$

به‌طور نمونه:

$$A_0 = F(u_0)$$
$$A_1 = u_1(\frac{d}{du_0})F(u_0)$$
$$A_2 = u_2(\frac{d}{du_0})F(u_0)+(\frac{{u_1}^2}{2!})(\frac{d^2}{d{u_0}^2})F(u_0) \quad (39)$$

با جایگزینی معادله (38) در (37)، رابطه (40) نتیجه می‌شود

:($n \geq 0$)

$$u_0(x) = f_1(x)$$

$$u_1(x) = f_2(x) + \lambda \int_0^L K(x,t)A_0(t)dt$$

$$u_{n+1}(x) = \lambda \int_0^L K(x,t)A_{n+1}(t)dt \qquad (40)$$

در نهایت با استفاده از رابطه (37) تابع $u(x)$ تعیین می‌شود. مطابق مراجع [20-22] همگرایی این روش تضمین شده است.

حال با هدف به‌کارگیری روش ادومیان در تحلیل تیر الاستوپلاستیک، ابتدا معادله (35) به‌صورت رابطه (41) بازنویسی می‌شود:

$$F(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}(x,z)) = \frac{c_1}{A} + \frac{B}{A}\int_{-h/2}^{h/2} \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} dz + \frac{B}{D} z \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} z dz + z(q\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3) \qquad (41)$$

که در آن می‌توان رابطه (42) را نوشت:

$$F(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}(x,z)) = a_0(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})^{\frac{1}{n}} + \frac{3}{2}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) \qquad (42)$$

در این راستا، ابتدا چندجمله‌ای‌های ادومیان به‌صورت روابط (44,43) تعریف می‌شود:

$$F(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}(x,z)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x,z) \qquad (43)$$

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(x,z) \qquad (44)$$

از معادلات (41) تا (44)، رابطه (45) نتیجه می‌شود:

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots = \frac{c_1}{A} + \frac{B}{A}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\varepsilon_0(x,z) + \varepsilon_1(x,z) + \cdots)dz + \frac{B}{D} z \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z((\varepsilon_0(x,z) + \varepsilon_1(x,z) + \cdots)dz + z(q\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3) \qquad (45)$$

در واقع هدف یافتن پاسخ (45) است. برای این منظور به‌کمک معادلات (39) و (40) هریک از جملات تابع هدف تعیین می‌شوند. بعد از محاسبه‌ی هرتعداد جمله دلخواه، با استفاده از معادله (44)، کرنش پلاستیک هر نقطه از تیر $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}(x,z)$، به‌صورت یک تابع به‌دست می‌آید. نهایتا به‌کمک پاسخ $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}(x,z)$ و با استفاده از معادلات (32) و (33)، میدان جابجایی تیر مشخص می‌شود. نمونه‌ای از شیوه پاسخ‌یابی معادله (45) برای یک مسأله کلی در پیوست الف ارائه شده است.

4- حل معادله تیر الاستوپلاستیک با استفاده از روش تحلیلی هوموتوپی

در روش هوموتوپی، معادله دیفرانسیلی انتگرالی غیرخطی به‌شکل کلی $N[g(\tau)] = 0$ درنظر گرفته می‌شود که در آن N یک عملگر غیرخطی، τ متغیر مستقل و $g(\tau)$ تابع مجهول است [14,13]. معادله مرتبه صفرم هوموتوپی به‌صورت رابطه (46) است:

$$(1-P)L[\phi(\tau,P) - g_0(\tau)] = P\beta H(\tau)N[\phi(\tau,P)] \qquad (46)$$

که در آن $P \in [0,1]$ یک متغیر جدید و $\beta \neq 0$ متغیری غیرصفر، و $H(\tau) \neq 0$ یک تابع کمکی است. L یک عملگر خطی کمکی است. $g_0(\tau)$ یک حدس اولیه برای $g(\tau)$ و $\phi(\tau,P)$ یک تابع نامعلوم است. به ازای $P = 0$ و $P = 1$ به‌ترتیب $\phi(\tau,0) = g_0(\tau)$ و $\phi(\tau,1) = g(\tau)$ است. بنابراین با تغییر P از صفر تا یک، حل $\phi(\tau,P)$ از حدس اولیه‌ی $g_0(\tau)$ تا جواب مطلوب $g(\tau)$ تغییر می‌کند. با استفاده از سری تیلور می‌توان رابطه (47) را نوشت:

$$\phi(\tau,P) = g_0(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\tau)P^m \qquad (47)$$

که در آن رابطه (48) برقرار است:

$$g_m(\tau) = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m \phi(\tau,P)}{\partial P^m}|_{P=0} \qquad (48)$$

اگر تابع کمکی، عملگر خطی کمکی، متغیر کمکی و حدس اولیه درست باشد، آنگاه می‌توان رابطه (49) را نوشت:

$$g(\tau) = g_0(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\tau) \qquad (49)$$

با تعریف ضریب χ به‌صورت $\chi_m = \{0|m \leq 1 \quad , \quad 1|m > 1\}$ و انجام برخی عملیات ریاضی می‌توان رابطه (50) را نوشت:

$$L[g_m(\tau) - \chi_m g_{m-1}(\tau)] = \beta H(\tau)R_m(\vec{g}_{m-1}(\tau)) \qquad (50)$$

ماتریس $\vec{g}_m(\tau)$ به‌شکل $\vec{g}_m(\tau) = \{g_0(\tau), g_1(\tau), \ldots, g_n(\tau)\}_m$ است. تعداد جملات هر سطر ماتریس $\vec{g}_m$، برابر با $n+1$ می‌باشد. برای کنترل میزان دقت حل، تابع خطا تعریف می‌شود. تابع خطا $R_{m+1}(\vec{g}_m(\tau))$ از رابطه (51) به‌دست می‌آید:

$$R_{m+1}[\vec{g}_m(\tau)] = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m N[\phi(\tau,P)]}{\partial P^m}|_{P=0} \qquad (51)$$

با به‌کار بردن عملگر L^{-1} در دو طرف رابطه (50)، رابطه (52) نتیجه می‌شود:

$$g_m(\tau) = \chi_m g_{m-1}(\tau) + \beta L^{-1}[H(\tau)R_m(\vec{g}_{m-1}(\tau))] \qquad (52)$$

در نهایت با ترکیب جواب‌های جزئی طبق رابطه زیر، جواب معادله تا m امین جمله به‌دست می‌آید:

$$g(\tau) = \sum_{m=0}^{M} g_m(\tau) \qquad (53)$$

به‌طور مشخص وقتی $M \to \infty$، معادله (52) جواب دقیق معادله (46) خواهد بود اما محاسبات معمولا تا جایی ادامه می‌یابد که دقت مورد نظر حاصل شود.

حال در راستای هماهنگ‌سازی روش تحلیلی هوموتوپی برای تحلیل تیر الاستوپلاستیک می‌توان نوشت:

$$N[\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}(x,z)] = -a_0(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}(x,z))^{\frac{1}{n}} - \frac{3}{2}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}(x,z) + \frac{c_1}{A} + \frac{B}{A}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}(x,z)dz + \frac{B}{D} z \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}(x,z)zdz + z(q\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3) = 0 \qquad (54)$$

مشابه رابطه (49) ابتدا تابع پاسخ میدان کرنش پلاستیک تفکیک شده و به‌صورت رابطه (55) در نظر گرفته می‌شود:

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}(x,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m(x,z) \qquad (55)$$

عملگر خطی L در رابطه (50) برای تحلیل الاستوپلاستیک در ساده‌ترین صورت ممکن به شکل رابطه (56) قابل ارائه است:

$$L[\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}(x,z)] = \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}(x,z) \qquad (56)$$

بنابراین می‌توان رابطه (57) را توشت:

$$L[\varepsilon_m(x,z) - \chi_m \varepsilon_{m-1}(x,z)] = \beta R_m(\vec{\varepsilon}_{m-1}(x,z)) \qquad (57)$$

لازم به توضیح است که انتخاب عملگر، همچون تعداد جملات، در دقت

حل تأثیر می‌گذارد و انتخاب میان این دو (تعداد جملات یا مرتبه عملگر) به انتخاب کاربر بستگی خواهد داشت.

به‌همین منظور در اینجا چند اپراتور مختلف مورد بررسی قرار گرفته است و مشابه مرجع ردیف [16-18] حاصل تأثیر اپراتور خطی کننده L روی تابع برابر خود تابع است. همچنین تابع کمکی $H(x,z)$ که در رابطه (46) به کار رفته است، برابر واحد درنظر گرفته شده است. این انتخاب با توجه به دقت کافی و سادگی در حل‌های انجام شده و نیز به‌پشتوانه‌ی استفاده‌ی اپراتور خطی در مراجع مختلف از جمله مرجع [16-18] در مسأله ای مشابه، انجام شده است. علاوه بر اینها $\beta \neq 0$ متغیری غیرصفر و البته دلخواه است که مقدار آن به شدت در نتایج تأثیرگذار است. اما طبق نتایج مراجع دیگر از جمله مرجع ردیف [16-18] و نیز نتایج این مقاله مشاهده می‌شود، هرچه تعداد جملات بیشتری از سری تابع هدف مورد استفاده قرار گیرد، تأثیر مقدار انتخابی β کمتر خواهد بود.

به‌منظور ایجاد ساختار معادله (51)، با انجام برخی عملیات ریاضی و به‌کمک رابطه (50)، معادله خطا به‌صورت رابطه (58) نوشته می‌شود:

$$R_m[\overleftrightarrow{\varepsilon}_{m-1}(x,z)] = \frac{-a_0}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}\{[\phi(x,z,P)]^{\frac{1}{n}}\}}{\partial P^{m-1}}\Big|_{P=0} + \frac{B}{A}\int_{-h/2}^{h/2}\varepsilon_{m-1}(x,z)dz + \frac{B}{D}z\int_{-h/2}^{h/2} z\varepsilon_{m-1}(x,z)dz + (1-\chi_m)\left[\frac{c_1}{A} + \frac{z}{D}\left(q\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3\right)\right] - \frac{3}{2}\varepsilon_{m-1}(x,z) \quad (58)$$

به این ترتیب جملات مختلف ε_m به‌دست آمده‌اند، برای انجام فرایند حل دقیق و یافتن جواب مسأله، مقادیر مختلف پارامترها، در ε_mها جایگزین می‌شوند. سپس از رابطه (54) تابع کرنش پلاستیک مؤثر در تمام نقاط تیر الاستوپلاستیک حاصل می‌شود. در ادامه با جای‌گذاری، تابع کرنش پلاستیک مؤثر به‌دست آمده در روابط (32) و (33) میدان جابجایی در تمام نقاط تیر الاستوپلاستیک به‌دست می‌آید. نمونه‌ای از پاسخ‌یابی معادله (58) برای یک مسأله کلی در پیوست ب ارائه شده است.

5- بررسی نتایج

در بخش‌های قبل نظریه جامعی برای تحلیل نیمه معکوس الاستوپلاستیک تنش و تغییر شکل در تیرها ارائه گردید. حال کاربرد نظریه توسعه داده شده در بخش‌های قبلی، برای تحلیل بارگذاری یک تیر منشوری از جنس آلومینیوم Al7075-T6 در شرایط کرانی دو سر درگیر با مشخصات هندسی و مادی مطابق جدول 1 به‌کمک مرجع [9] مورد بررسی قرار می‌گیرد.

اولین گام درمطالعه پاسخ‌ها، اعتبارسنجی نتایج و میزان انطباق آنها با واقعیات تجربی است. بدین منظور در آغاز، نتایج تحلیل با نتایج شبیه‌سازی رایانه‌ای مقایسه می‌شوند.

5-1- شبیه‌سازی با نرم افزار آباکوس

به موازات مقایسه نتایج حاصل از شیوه‌های مختلف تحلیلی، مسأله تیر مورد بررسی در محیط نرم افزار آباکوس[1] نیز مورد تحلیل قرار گرفته است. در مرحله شبیه‌سازی ابعاد تیر و خواص ماده کاملا مشابه با مقادیر به‌کار رفته در نتایج تحلیلی استفاده شده است. در این شبیه‌سازی، تیر به‌صورت یک مدل سه‌بعدی مورد تحلیل قرار گرفته است. المان به کار رفته برای شبیه‌سازی در نرم‌افزار آباکوس از نوع C3D8R[2] بوده است. سازه‌ی مورد بررسی همانند بخش‌های تحلیلی، دارای خواص الاستوپلاستیک بوده و مدل ماده‌ی رامبرگ- آزگود برای آن به‌کار رفته است. برای اعمال مدل ماده‌ی رامبرگ- آزگود در نرم‌افزار آباکوس، ابتدا به‌کمک جدول1 و رابطه (19)، چندین زوج مرتب تنش- کرنش برای AL7075-T6 تولید شده است. هرچند طبق این رابطه، از شروع بارگذاری سازه دارای کرنش‌های ترکیبی الاستوپلاستیک خواهد بود، اما واضح است که با توجه به انتخاب مقدار 10.9 برای توان سخت شوندگی، به‌ازای کرنش‌های کوچک، بخش الاستیک به مراتب بزرگتر از بخش پلاستیک است و برعکس. بنابراین می‌توان گفت در رابطه (19) جمله اول نماینده بخش الاستیک و جمله دوم نماینده‌ی بخش پلاستیک است. به این ترتیب با انتخاب یک کرنش بسیار کوچک به عنوان مرز این دو ناحیه، کرنش شروع تسلیم مقید گردیده و زوج مرتب‌های تنش- کرنش مناسب برای استفاده در شبیه‌سازی آباکوس فراهم می‌شود.

به‌منظور کسب اطمینان از دستیابی به شبیه‌سازی مناسب برای یک بارگذاری مشخص، آزمون حساسیت مش انجام شده است. برای این منظور به ازای تعداد المان بندی‌های متفاوت، شبیه‌سازی تکرار شده است. نتایج آزمون حساسیت و مش بهینه در شکل 3 آمده است. بعد از تعیین ابعاد مش بهینه، کلیه‌ی شبیه‌سازی‌ها برای تیرهای الاستوپلاستیک، با استفاده از مش‌بندی بهینه انجام شده است.

5-2- نتایج تحلیلی تیر الاستیک

به‌طور معمول در نظریه‌های سنتی مقاومت مصالح در تحلیل تیر، همزمان ضمن در نظر گرفتن الگوی مشخص برای تغییر شکل، رابطه تنش و کرنش در امتداد طولی مشابه خمش خالص و به‌صورت یک محوره در نظر گرفته می‌شود. به این ترتیب همواره کاربران در ارتباط دادن مؤلفه‌های تنش و کرنش با مشکلاتی مواجه هستند. مثلا در حالی‌که این الگوی تغییر شکل باعث تولید مؤلفه برشی تنش نمی‌شود، به کمک اصول تعادل، مؤلفه تنش برشی استخراج می‌شود. به عبارت دیگر در تحلیل مقاومت مصالح، قیود تحلیلی غیر واقعی و بیش از حد است. در مقابل در یک روش تغییراتی نیمه معکوس که با فرض میدان تغییر شکل مشخص شروع می‌شود، همواره سازگاری تنشها و تغییر شکلها حفظ می‌شود. بر این اساس و با فرض الگوی کرنش صفحه ای، نتایج تحلیل برای تیر دو سر گیردار، برای جابجائی طولی منجر به رابطه $u = 0$ می گردد که از این لحاظ فرضیات مقاومت مصالح، با نتایج این تحلیل هماهنگ است. همچنین نتایج شبیه‌سازی نیز این موضوع را تائید می‌کند. در شکل 4 نتایج بی بعد شده‌ی خیز در جهت قائم برای یک تیر دو سر گیردار تحت بار گسترده یکنواخت در شرایط الاستیک آمده است. همچنان که انتظار می‌رود، پاسخ این مقاله بسیار به پاسخ محققین دیگر مانند [5] که مبتنی بر نظریه‌های تیر کلاسیک[3] و برشی مرتبه اول[4] بوده است، نزدیک است. در شکل4 همچنین نتایج با شبیه‌سازی آباکوس مقایسه و نزدیکی جوابها تائید شده است.

5-3- نتایج تحلیلی تیر الاستوپلاستیک با رفتار رامبرگ آزگود

در این بخش پاسخ معادلات دیفرانسیلی- انتگرالی ارائه شده در بخش 2 برای تحلیل خمش یک تیر دو سر گیردار نوعی تحت بار دلخواه با هندسه و مصالح معرفی شده در جدول1 مورد مطالعه قرار می‌گیرد. به‌دلیل ماهیت تکراری روش‌های حل ادومیان و هوموتوپی که در بخش‌های 3 و 4 معرفی شدند،

[1] ABAQUS
[2] An 8-node linear brick, reduced integration, hourglass control
[3] Euler Bernoli beam theory (EBT)
[4] Timoshinko beam theory (TBT)

پیش از شروع به کارگیری آنها، حصول اطمینان از همگرایی تحلیلها ضرورت دارد. توجه میگردد که روش تحلیلی هوموتوپی، همان‌طور که در معادله (57) و نیز در پیوست ب مشاهده می‌شود، همگرایی وابسته به ضریب β دارد. به عبارت دیگر بایستی تحلیل حساسیت جوابهای روش تحلیلی هوموتوپی نسبت به ضریب β انجام شود.

در شکل 5 تأثیر ضریب β در خیز ماکزیمم تیر برای مرتبه‌های مختلف روش هوموتوپی مطالعه شده است. منظور از مرتبه‌ی nام در روش هوموتوپی، حضور nامین جمله در سری هوموتوپی است. شکل 5 نشان می‌دهد به ازای جمله مرتبه‌ی ششم، تغییرات ضریب β در خیز ماکزیمم تیر، بسیار ناچیز است، به‌طوری‌که خطای محاسباتی به‌ازای جمله مرتبه ششم، حدود 0.01 درصد است. این بدان معناست که برای حل به روش هوموتوپی در معادله (55) تنها استفاده از مجموع شش جمله اول سری کفایت می‌کند.

نتایج تحلیل نشان می‌دهد در شرایط الاستوپلاستیک با استفاده از هر دو روش تحلیلی هوموتوپی و ادومیان، برای تیر دو سر گیردار، خیز افقی در مقطع میانی طولی تیر نزدیک به‌صفر خواهد بود ($u \approx 0$). یعنی با وجودی که در حالت الاستوپلاستیک تابع u در معادلات وارد شده است، مقدار محاسبه شده برای آن مشابه تحلیل‌های [1-5] قابل چشم‌پوشی است.

جدول 1 پارامترهای مدل الاستوپلاستیک رامبرگ آزگود برای AL7075-T6 [9]

Table 1 Elastoplastic parameters of Romberg- Osgood model for AL7075T6 [9]

h(m)	B(m)	L(m)	n	k	ν	E(GPa)	کمیت
0.05	0.05	1	10.9	3.94×10^{21}	0.32	72.4	مقدار

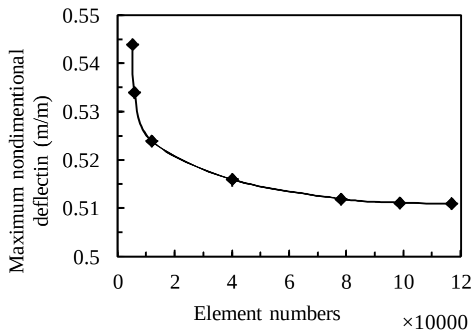

Fig. 3 Mesh sensitivity in terms of element numbers

شکل 3 حساسیت مش بندی به تعداد المان

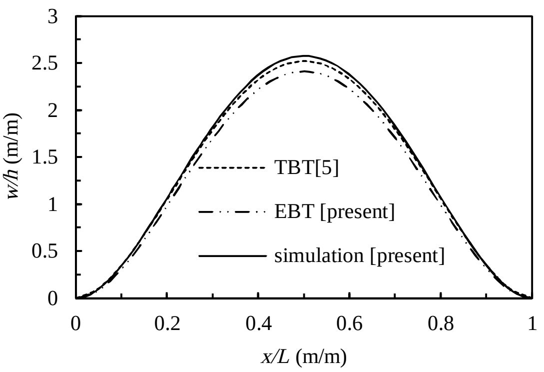

Fig. 4 Non-dimensional vertical deflection for the slender clamped beam under uniform load action

شکل 4 خیز قائم بی‌بعد شده تیر دوسر گیردار تحت بار گسترده ثابت برای تیر بلند

شکل 6 نمونه‌ای از توزیع خیز قائم بی‌بعد شده w/h برای تیر الاستوپلاستیک دو سر گیردار بر مبنای دو روش تحلیلی هوموتوپی و ادومیان و نیز شبیه‌سازی آباکوس را نشان می‌دهد. با توجه به دقت کافی اشاره شده در توضیح شکل 5 و برای فراهم ساختن امکان مقایسه مناسب، در هردو روش تحلیلی از شش جمله ابتدایی سری استفاده شده است. بر مبنای این نمودار نتایج تحلیل دقیق دو روش هوموتوپی و ادومیان با نتایج شبیه‌سازی تطابق خوبی دارند. با این‌حال برای اطمینان از کفایت این روش‌ها برای تحلیل، لازم است نمودارهای تنش و کرنش نیز مورد توجه قرار گیرد. بدین منظور در شکل 7 نتایج حاصل از تحلیل تنش الاستوپلاستیک در راستای طول تیر دو سر گیردار، برای توزیع تنش در ارتفاع $h/4$ از خط میانی تیر ارائه شده است. این نمودار برپایه‌ی نتایج روش‌های هوموتوپی و ادومیان و شبیه‌سازی نرم افزار آباکوس ترسیم شده است. وجود هماهنگی میان شیوه‌های دو روش تحلیلی با نتایج واقعی برای تیر نازک در این شکل دیده می‌شود.

البته همانطور که ملاحظه می‌شود، نتایج روش هوموتوپی در مقایسه با روش ادومیان، به نتایج شبیه‌سازی نزدیک‌تر هستند. برای توجیه این مطلب بایستی به وجود پارامتر آزاد β در روش هوموتوپی اشاره کرد. نتایج محققین قبلی [24,23] در زمینه‌ی مقایسه‌ی این دو روش ریاضی برای معادلات غیرخطی، بیانگر این واقعیت است که در صورت استفاده از ضریب β بهینه، روش هوموتوپی نتایج دقیقتری نسبت به روش ادومیان خواهد داشت. توجه شود که معادلات اولیه‌ی روش ادومیان فاقد چنین ضریبی است.

در شکل‌های 8، 9 و 10 به‌ترتیب منحنی‌های تراز خیز قائم، تنش و

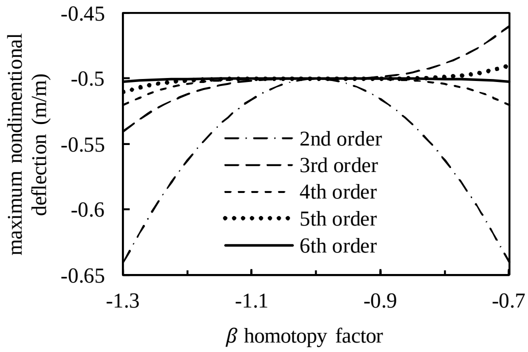

Fig. 5 The effect of β factor on maximum deflection of beam in different orders of homotopy method

شکل 5 تأثیر ضریب β در خیز بیشینه تیر برای مرتبه‌های مختلف روش هوموتوپی

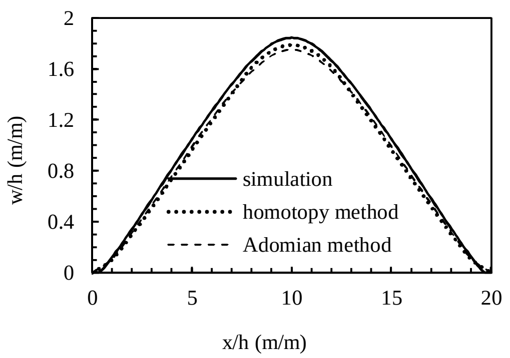

Fig. 6 Non-dimensional vertical deflection of elastoplastic beam centerline

شکل 6 خیز قائم بی‌بعد شده در محور میانی تیر الاستوپلاستیک

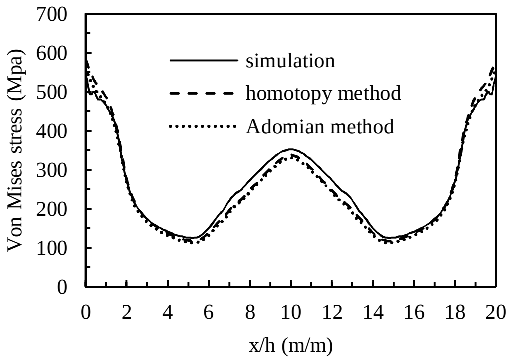

Fig. 7 Longitudinal distribution of $\bar{\sigma}$ at a distance $h/4$ above the elastoplastic beam centerline

شکل 7 توزیع طولی $\bar{\sigma}$ در فاصله $h/4$ بالای محور میانی تیر الاستوپلاستیک

کرنش پلاستیک تیر در شرایط الاستوپلاستیک حاصل از نتایج تحلیلی و شبیه‌سازی با رفتار رامبرگ آزگود ترسیم شده است. زمینه‌ی سیاه و سفید منحنی ترازها، حاصل از شبیه‌سازی و خطوط سفید رنگ کانتورها حاصل از حل دقیق تحلیلی هوموتوپی است. با توجه به نتایج نزدیک دو روش هوموتوپی و ادومیان، هر سه نمودار 8 تا 10 مطلوب بودن نتایج دو روش تحلیلی هوموتوپی و ادومیان را در مقایسه با شبیه‌سازی نشان می‌دهند. از شکل‌های 8 تا 10 نکته‌ی جالب دیگری نیز استنباط می‌شود. با ملاحظه این اشکال پیداست که شدت تغییرات خیز قائم، تنش و کرنش پلاستیک در منحنی‌های تراز کاملا با هم متفاوت است. به‌طوریکه در شکل‌های 8 و 9 کانتورهای تغییرات خیز قائم و تنش در طول تیر به شکلی تقسیم شده‌اند که ابعاد این تقسیمات قابل مقایسه با یکدیگر است. در حالی که شکل 10 نشان می‌دهد کانتور تغییرات کرنش پلاستیک در دو سر و وسط تیر بسیار شدیدتر از سایر قسمت‌های تیر است. در واقع تغییرات کرنش پلاستیک در بخش بسیار عمده‌ای از تیر کاملا ملایم است و در بخشی کوچک از تیر- دو سر تیر و وسط تیر- این شدت تغییرات بسیار زیاد است. در ادامه نتایج تحلیل‌های هوموتوپی و ادومیان در مقاطع عرضی تیر بطور کمی نیز بررسی می‌شود. در شکل‌های 11 تا 15 نتایج دو روش تحلیلی و نتایج شبیه‌سازی در مقطع میانی طول تیر، $L/2$، مقایسه‌ی شده‌اند. شکل‌های 11 و 12 به ترتیب

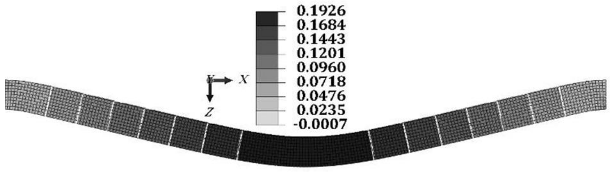

Fig. 8 A composite analytical-simulation illustration for the contours of vertically deflected points(mm) in elastoplastic beam

شکل 8 تصویرمرکب تحلیلی- شبیه‌سازی برای منحنی‌های تراز نقاطی با جابجائی قائم مشابه در تیر الاستوپلاستیک

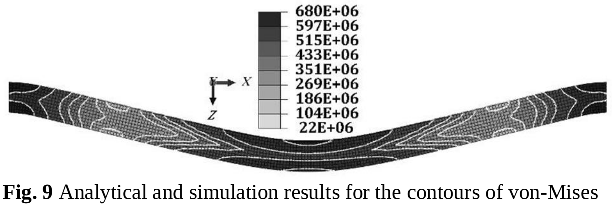

Fig. 9 Analytical and simulation results for the contours of von-Mises stress(Pa) in elastoplastic beam

شکل 9 نتایج تحلیل و شبیه‌سازی برای منحنی تراز تنش ون- می‌سز در تیر الاستوپلاستیک

تغییرات تنش در جهت x و تنش معادل (فن‌مایزز) در مقطع $L/2$ را برای روش‌های مختلف نشان می‌دهد.

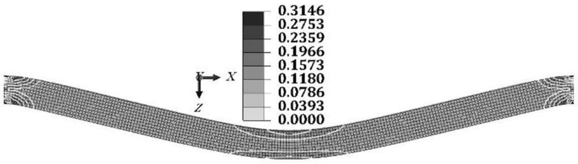

Fig. 10 Analytical and simulation results for the contours of plastic strain(m/m) in elastoplastic beam

شکل 10 نتایج تحلیل و شبیه‌سازی برای منحنی‌های تراز کرنش پلاستیک در تیر الاستوپلاستیک

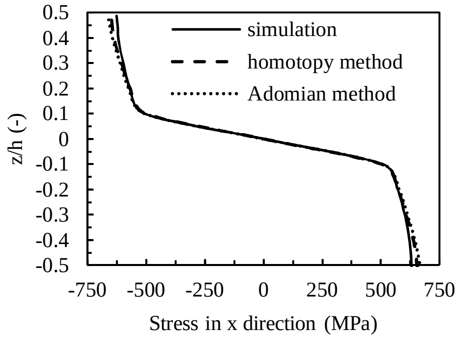

Fig. 11 Analytical and simulation results for theσ_x component at the mid-span cross section of elastoplastic beam

شکل 11 نتایج تحلیل و شبیه‌سازی برای مؤلفه σ_x تنش در مقطع عرضی میانه تیر الاستوپلاستیک

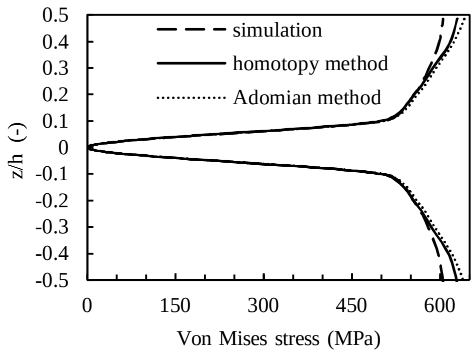

Fig. 12 Analytical and simulation results for the mid-span transversal distribution of $\bar{\sigma}$in the elastoplastic beam

شکل 12 نتایج تحلیل و شبیه‌سازی برای توزیع $\bar{\sigma}$ در مقطع عرضی میانه تیر الاستوپلاستیک

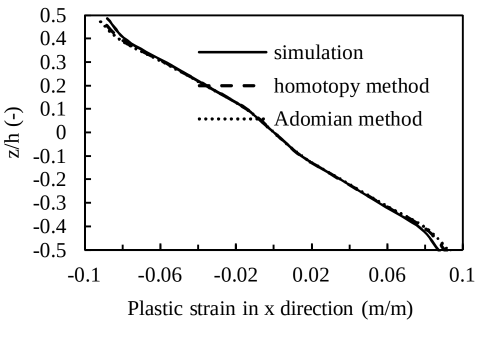

Fig. 13 Analytical and simulation results for the mid-span transversal distribution of $\varepsilon_x^{\mathrm{p}}$ in the elastoplastic beam

شکل 13 نتایج تحلیل و شبیه‌سازی برای توزیع $\varepsilon_x^{\mathrm{p}}$ در مقطع عرضی میانه تیر الاستوپلاستیک

همچنین شکل‌های 13، 14 و 15 در مقطع $L/2$ به ترتیب بیانگر نحوه‌ی تغییرات کرنش در جهت x، کرنش پلاستیک معادل وکرنش کل برای روش‌های مختلف است. نمودارهای 11 تا 15 نشان می‌دهد روش‌های تحلیلی مذکور در مقاطع عرضی نیز با نتایج شبیه‌سازی همخوانی دارند و به پاسخ-یابی مناسبی دست یافته‌اند.

بعد از اطمینان از همخوانی نتایج حل دقیق روش‌های هوموتوپی و ادومیان با نتایج شبیه‌سازی، در شکل‌های 16 تا 20 نمودارهای مختلف روش هوموتوپی در 3 مقطع عرضی ارائه شده است. شکل‌های 16 و 17 به ترتیب تغییرات تنش در جهتx و تنش معادل فن‌مایزز در مقاطع $L/2$، $L/3$ و $L/4$ را برای روش هوموتوپی نشان می‌دهد. همچنین شکل‌های 18، 19 و 20 با استفاده از روش هوموتوپی به ترتیب بیانگر تغییرات کرنش در جهت x، کرنش پلاستیک معادل (فن‌مایزز) و کرنش کل برای مقاطع مختلف است.نمودارهای 16 تا 20 قابلیت روش‌های حل دقیق ارائه شده در معرفی پاسخ برای نواحی مختلف میدان تغییر شکل را نشان می‌دهد، همان‌طور که ملاحظه می‌شود، این تصاویر به گونه‌ای مرتب شده‌اند که وضعیت مقاطع عرضی در مواضع مختلف معرفی شوند. به‌طوری‌که مقطع $L/4$ در محدوده کاملا الاستیک و مقطع $L/2$ کاملا در محدوده الاستوپلاستیک قرار گرفته است. در حالی‌که مقطع $L/3$ تقریبا در محدوده ارتفاع 0.2cm- تا 0.2cm کاملا الاستیک و در باقی نواحی کاملا در شرایط الاستوپلاستیک قرار دارد.

این موضوع بیانگر آن است که روش‌های تحلیلی هوموتوپی و ادومیان در مسأله ی حاضر برای مقادیر مختلف بار گسترده قابل کاربرد است. فارغ از

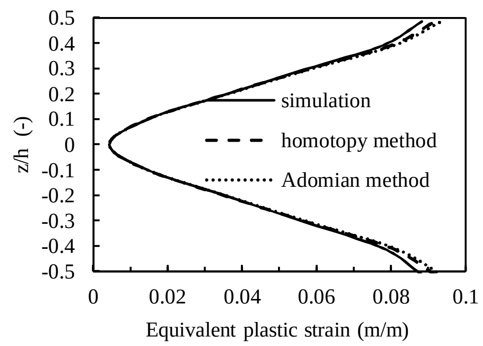

Fig. 14 Analytical and simulation results for the mid-span transversal distribution of $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ in the elastoplastic beam

شکل 14 نتایج تحلیل و شبیه‌سازی برای توزیع $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ در مقطع عرضی میانه تیر الاستوپلاستیک

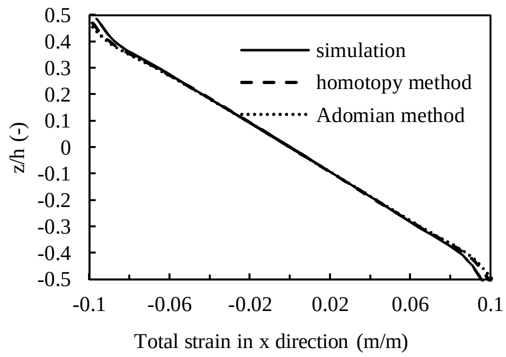

Fig. 15 Analytical and simulation results for the mid-span transversal distribution of $\varepsilon_x^{\mathrm{tot}}$ in the elastoplastic beam

شکل 15 مقایسه کرنش کل در جهتx در مقطع عرضی $L/2$ حاصل از نتایج تحلیلی و شبیه‌سازی تیر الاستوپلاستیک

اینکه تیر در شرایط کاملا الاستیک باقی بماند یا آن‌که بخشی از تیر و حتی همه‌ی تیر وارد شرایط الاستوپلاستیک شده و دارای کرنش پلاستیک باشد، شیوه تحلیل پاسخگو و نتایج تحلیل قابل استفاده است.

6- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله تحلیل الاستوپلاستیک تیرهای نازک به روش تحلیلی مورد توجه قرار گرفته است. در مدلسازی نیمه معکوس یا مهندسی تیر از الگوی

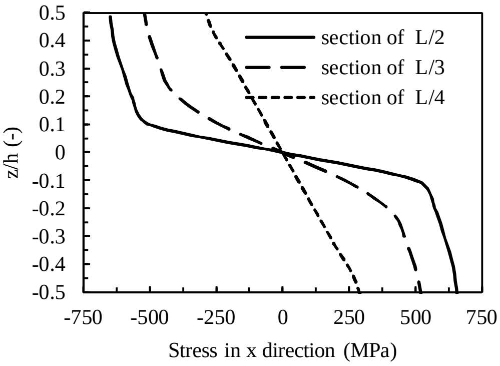

Fig. 16 A comparison of σ_x at several cross sections of elastoplastic beam obtained by homotopy method

شکل 16 مقایسه σ_x حاصل از روش هوموتوپی در مقاطع عرضی مختلف تیر الاستوپلاستیک

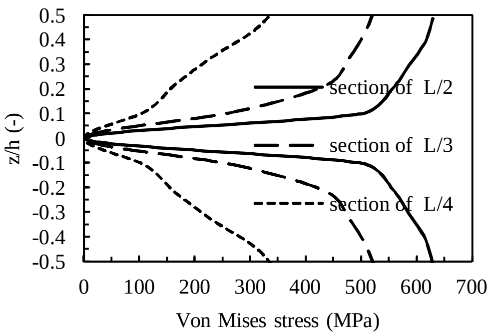

Fig. 17 A comparison of $\bar{\sigma}$ at several cross sections of elastoplastic beam obtained by homotopy method

شکل 17 مقایسه $\bar{\sigma}$ حاصل از روش هوموتوپی در مقاطع عرضی مختلف تیر الاستوپلاستیک

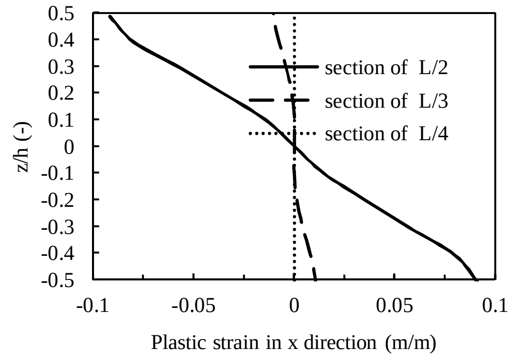

Fig. 18 A comparison of $\varepsilon_x^{\mathrm{p}}$ at several cross sections of the elastoplastic beam obtained by homotopy method

شکل 18 مقایسه کرنش پلاستیک در جهت x حاصل از روش هوموتوپی در مقاطع عرضی مختلف تیر الاستوپلاستیک

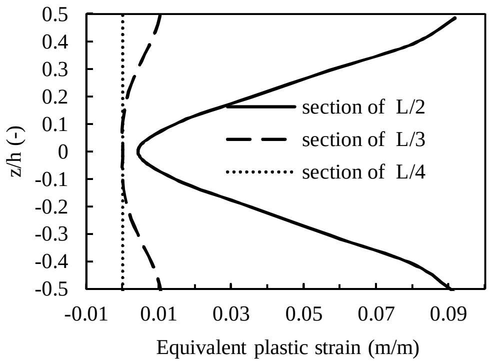

Fig. 19 A comparison of $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ at several sections of elastoplastic beam, obtained by homotopy method

شکل 19 مقایسه کرنش پلاستیک معادل حاصل از روش هوموتوپی در مقاطع عرضی مختلف تیر الاستوپلاستیک

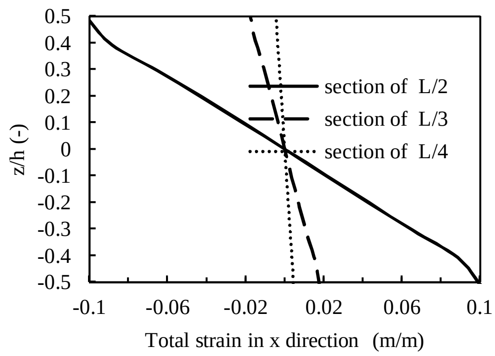

Fig. 20 A comparison of $\varepsilon_x^{\mathrm{tot}}$ at several cross sections of the elastoplastic beam, obtained by homotopy method

شکل 20 مقایسه کرنش کل در جهت x حاصل از روش هوموتوپی در مقاطع عرضی مختلف تیر الاستوپلاستیک

جابجایی کلاسیک استفاده و معادلات حاکم بر تحلیل الاستوپلاستیک تیر به روش‌های تغییراتی استخراج شده است. معادلات دیفرانسیلی- انتگرالی حاکم بدون ساده‌سازی در الگوی تغییر شکل و تنش و نیز بدون یاری‌گرفتن از روش‌های عددی و تنها بر پایه‌ی روش‌های تحلیلی، پاسخ‌یابی شده‌اند. برای یک تیر نوعی فلزی با هندسه و مصالح مشخص میدان‌های تغییرشکل الاستوپلاستیک ، کرنش و تنش استخراج شده‌اند. از نرم افزار آباکوس برای اعتبار سنجی نتایج استفاده شده است.

نتایج نشان داده است که در تیر نازک مورد بررسی، میدان‌های تنش و کرنش الاستوپلاستیک حاصل از فرض میدان جابجایی کلاسیک و به‌کارگیری روش‌های تحلیل هوموتوپی و ادومیان به‌خوبی با میدان‌های حاصل از شبیه‌سازی مطابقت دارند. همچنین ملاحظه می‌شود هماهنگ با حجم وسیع‌تر عملیات در روش هوموتوپی، دقت این روش نیز از روش ادومیان بیشتر است.

بارگذاری اعمال شده به نحوی بوده است که در مقاطع مختلف عرضی تیر، شرایط متفاوت الاستیک یا الاستوپلاستیک ایجاد شده است. در تمامی این مقاطع، نتایج روش‌های تحلیلی هوموتوپی، ادومیان و شبیه‌سازی همخوانی مناسبی داشته‌اند. این بدان معناست که وجود نسبت‌های مختلف از تغییر شکل الاستیک یا پلاستیک آسیبی به دقت عمل روش‌های تحلیلی وارد نکرده است.

فرمول‌بندی این مقاله منحصر به تیر دو سر گیردار و بارگذاری با بار گسترده بوده است. اما با توجه به اینکه در فرایند تحلیل، تأثیر شرایط کرانی و نوع بار در انتهای مرحله محاسبات دخالت داده می‌شود، لذا با اندکی تغییر، نتایج برای اقسام شرایط تکیه‌گاهی و انواع بارگذاری قابل تعمیم است و محاسبات مجدد مسأله ی جدید، در مقایسه با حجم نتایج قابل حصول بسیار کوچک خواهد بود.

7- پیوست

7-1- پیوست الف

به منظور پاسخ یابی معادله (44)، در آغاز تحلیل، جمله اول به شکل رابطه (59) در نظر گرفته می‌شود:

$$a_0\varepsilon_0^{\frac{1}{n}} + \frac{3}{2}\varepsilon_0 = a_0 + \frac{3}{2} \tag{59}$$

در نتیجه $\varepsilon_0 = 1$ بدست می‌آید. برای محاسبه‌ی جملات بعدی با استفاده از سری ادومیان به‌صورت رابطه (60) عمل می‌شود:

$$a_0\left(\frac{1}{n}\right)\varepsilon_0^{\frac{1}{n}-1} + \frac{3}{2} = 1.5013 \tag{60}$$

مثلا برای A_1 و ε_1 می‌توان روابط (62,61) را نوشت:

$$A_1 = \varepsilon_1\left[a_0\left(\frac{1}{n}\right)\varepsilon_0^{\frac{1}{n}-1} + \frac{3}{2}\right] = \frac{B}{A}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\varepsilon_0 dz + \frac{B}{D}z\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\varepsilon_0 z dz + \frac{c_1}{A} - \left(a_0 + \frac{3}{2}\right) \tag{61}$$

$$\varepsilon_1 = 3.5263h + (155.53 \times 10^9 bh)^{-1}c_1 - 1.008 \tag{62}$$

برای جملات بعدی نیز با برخی محاسبات ریاضی رابطه (63) نتیجه می‌شود:

$$A_2 = \varepsilon_2 F'(\varepsilon_0) + \frac{{\varepsilon_1}^2}{2}F''(\varepsilon_0) = \frac{B}{A}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\varepsilon_1 dz + \frac{B}{D}z\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\varepsilon_1 z dz + \frac{c_3}{D}z \tag{63}$$

بعد از محاسبات ریاضی مشروح، روابط (64-69) حاصل می‌شوند:

$$\varepsilon_2 = 0.0004{\varepsilon_1}^2 + 0.353\varepsilon_1 + 0.666\frac{c_3}{D}z \tag{64}$$

$$A_3 = \varepsilon_3 F'(\varepsilon_0) + \varepsilon_1\varepsilon_2 F''(\varepsilon_0) + \frac{{\varepsilon_1}^3}{6}F'''(\varepsilon_0) = \frac{B}{A}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\varepsilon_2 dz + \frac{B}{D}z\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\varepsilon_2 z dz + \frac{c_2}{D}xz \tag{65}$$

$$\varepsilon_3 = [-0.25{\varepsilon_1}^3 + 0.364{\varepsilon_1}^2 + 124.5\varepsilon_1 + +235.1\frac{c_3}{D}z \quad 0.5328\frac{c_3}{D}z\varepsilon_1 + 666\frac{c_2}{D}xz] \times 10^{-3} \tag{66}$$

$$A_4 = \varepsilon_4 F'(\varepsilon_0) + \left(\frac{1}{2}{\varepsilon_2}^2 + \varepsilon_1\varepsilon_3\right)F''(\varepsilon_0) + \ldots = \frac{B}{A}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\varepsilon_3 dz + \frac{B}{D}z\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\varepsilon_3 z dz + \frac{q}{2D}x^2 z \tag{67}$$

$$A_4 = [1501.3\varepsilon_4 - 1.2(0.5{\varepsilon_2}^2 + \varepsilon_1\varepsilon_3) + 1.15\,{\varepsilon_1}^2\varepsilon_2 - 0.2775{\varepsilon_1}^4] \times 10^{-3} \tag{68}$$

$$1501.3\varepsilon_4 - 0.6\varepsilon_2^2 - 1.2\varepsilon_1\varepsilon_3 - 1.15\varepsilon_1^2 + 0.2775\varepsilon_1^4 = \frac{500q}{D}x^2 z - 0.13\varepsilon_1^3 + 0.19\varepsilon_1^2 + 66\varepsilon_1 +$$

$$+\left(\frac{z}{D}\right)(0.28c_3\varepsilon_1 + 124.5c_3 + 352.6c_2x) \quad (69)$$

بطور خلاصه‌تر و با حذف جملات خیلی کوچکتر، رابطه (70) نتیجه می‌شود:

$$\varepsilon_4 \times 10^6 = (0.0004)\{(0.4{\varepsilon_1}^2)^2 + (353\varepsilon_1)^2 + (666\frac{c_3}{D}z)^2 + (0.4{\varepsilon_1}^2)\left(706\varepsilon_1 + 1332\frac{c_3}{D}z\right) + (706\varepsilon_1)\left(666\frac{c_3}{D}z\right) - 500{\varepsilon_1}^4 + 728{\varepsilon_1}^3 + 249000{\varepsilon_1}^2 + 1065.6\frac{c_3}{D}z{\varepsilon_1}^2 + 470200\frac{c_3}{D}z\varepsilon_1 + 1332000\frac{c_2}{D}xz\varepsilon_1\} + 44000\varepsilon_1 + 185{\varepsilon_1}^4 + 127{\varepsilon_1}^2 - 0.766\left(0.4{\varepsilon_1}^4 + 353{\varepsilon_1}^3 + 666\frac{c_3}{D}z{\varepsilon_1}^2\right) - 87{\varepsilon_1}^3 \quad (70)$$

7-2- پیوست ب

به منظور پاسخ‌یابی معادله (58) می‌توان مراحل ذیل را انجام داد. ابتدا با در نظرگرفتن $\varepsilon_0 = 1$، جملات مختلف به‌صورت روابط (72,71) به‌دست می‌آیند:

$$R_1 = -a_0 - \frac{3}{2} + \frac{B}{A}h + \frac{c_1}{A} + \frac{1}{D}z(q\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3) \quad (71)$$

$$\varepsilon_1 = \beta R_1 \quad (72)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$R_2 = \beta[\left(-a_0 - \frac{3}{2} + \frac{B}{A}h + \frac{c_1}{A}\right)\left(\frac{-a_0}{n} - \frac{3}{2} + \frac{B}{A}h\right) + \frac{1}{D}z(q\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3)(\frac{-a_0}{n} - \frac{3}{2} + \frac{B}{D}\frac{h^3}{12})] \quad (73)$$

و به روابط (76-74) منجر می‌شود:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \beta R_2 \quad (74)$$

$$R_3 = \frac{-a_0}{2n}\left[\left(\frac{1}{n} - 1\right)\beta^2{R_1}^2 + \beta(R_1 + R_2)\right] - \frac{3}{2}\beta(R_1 + R_2) + \frac{B}{A}\int \beta(R_1 + R_2)dz + \frac{B}{D}z\int z\beta(R_1 + R_2)dz \quad (75)$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 + \beta R_3 \quad (76)$$

به‌همین ترتیب برای جملات بعدی الی آخر.

8- مراجع

[1] A. M. Zenkour, Exact mixed-classical solutions for the bending analysis of shear deformable rectangular plates, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 27, No. 7, pp. 515–534, 2003.

[2] C. W. Lim, S. Cui, W. A. Yao, On new symplectic elasticity approach for exact bending solutions of rectangular thin plates with two opposite sides simply supported, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, No. 16, pp. 5396-5411, 2007.

[3] Sh. R. Li, D. F. Cao, Z. Q. Wan, Bending solutions of FGM Timoshenko beams from those of the homogenous Euler–Bernoulli beams, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 10, pp. 7077–7085, 2013.

[4] Y. A. Kang, X. F. Li, Bending of functionally graded cantilever beam with power-law non-linearity subjected to an end force, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 44, No. 6, pp. 696-703, 2009.

[5] B. Akgoz, O. Civalek, A size-dependent shear deformation beam model based on the strain gradient elasticity theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 70, pp. 1–14, 2013.

[6] B. Stok , M. Halilovic, Analytical solutions in elasto-plastic bending of beams with rectangular cross section, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 33, No. 3, pp. 1749–1760, 2009.

[7] G. Nie, Zh. Zhong, Closed-form solutions for elastoplastic pure bending of a curved beam with material inhomogenity, *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 27, No. 1, pp. 54-64, 2014.

[8] J. Bin, Ch. Wanji, A new analytical solution of pure bending beam in couple stress elasto-plasticity: Theory and applications, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, No. 6, pp. 779–785, 2010.

[9] M. Maarefdoust, M. Kadkhodayan, A comparison between the incremental and deformation theories to analyze elastoplastic buckling of thin rectangular plates by GDQ method, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 12, No.3, pp. 11-26, 2012. (in Persian فارسی)

[10] H. RamezannezhadAzarboni, M. Darvizeh, A. Darvizeh, R. Ansari, Application of deformation and incremental theory of plasticity in the dynamic buckling of rectangular Elastoplastic plate, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 5, pp. 25-33, 2015. (in Persian فارسی)

[11] H. Alizadeh, R. Ansari, Bending analysis of micro cantilevers based on the Chen-Wang strain gradient plasticity theory, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 2, pp. 198-204, 2015. (in Persian فارسی)

[12] R. K. Abu Al-Rub, G. Z. Voyiadjis, Analytical and experimental determination of the material intrinsic length scale of strain gradient plasticity theory from micro- and nano-indentation experiments, *International Journal of Plasticity*, Vol. 20, No. 6, pp. 1139-1182, 2004.

[13] S. J. Liao, On the homotopy analysis method for nonlinear problem, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 147, No. 2, pp. 499–513, 2004.

[14] S. J. Liao, Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 169, No. 2, pp. 1186–1194, 2005.

[15] S. Liang, D. J. Jeffrey, Comparison of homotopy analysis method and homotopy perturbation method through an evolution equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 14, No. 12, pp. 4057–4064, 2009.

[16] F. Rajabi, Sh. Ramezani, A nonlinear microbeam model based on strain gradient elasticity theory, *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 26, No. 1, 2013.

[17] H. Jafari, S. Seifi, Homotopy analysis method for solving linear and nonlinear fractional diffusion_ware equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 14, No. 5, pp. 2006–2012, 2009.

[18] H. Jafari , A. Golbabai , S. Seifi, K. Sayevand, Homotopy analysis method for solving multi-term linear and nonlinear diffusion_wave equations of fractional order, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 59, No. 3, pp. 1337-1344, 2010.

[19] Sh. S. Behzadi, S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, A.Yildirim, Application of homotopy analysis method for solving a class of nonlinear Volltra-Fredholm intergo-differential equations, *Journal of Applied Analysis and Computation*, Vol. 2, No. 2, pp. 127-136, 2012.

[20] G. Adomian, Nonlinear Stochastic Operator Equations, *Journal of Mathematical Analysis and* Applications, Vol. 55, No. 2, pp. 441-452, 1976.

[21] G. Adomian, *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*, pp. 23-254, Boston: Kluwer, HA, 1994.

[22] A. M. Wazwaz, A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 111, pp. 53-69, 2000.

[23] E. Babolian, A. R. Vahidi, Z. Azimzadeh, A comparison between the Homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method for solving nonlinear Volterra integral equations, *Tarbiat Moallem University*, Vol. 11, No. 2, pp. 155-160, 2012.

[24] M. Kumar, N. Singh, Modified Adomian decomposition method and computer implementation for solving singular boundary value problems arising in various physical problems, *Computers and Chemical Engineering*, Vol. 34, No. 11, pp. 1750-1760, 2010.

[25] F. P. Beer, E. R. Johnston, J. T. Dewolf, D. F. Mazurek, *Mechanics of materials*, sixth edition, pp. 88-264, New York: McGraw-Hill, 2012.

[26] K. Washizu, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, second edition, pp. 10-420, New York: Pergamon Press, 1975.

[27] H. L. Langhaar, *Energy Methods in Applied Mechanics,* pp. 35-320, New York: Wiley, 1989.