مجله مهندسی مکانیک مدرس، مهر 1395، دوره 16، شماره 7، ص‌ص 32-42

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

کنترل غیر خطی مقاوم H∞ و پیشبین برای ردیابی مسیر کوادروتور با استفاده از تخمین پارامترهای سیستم

صدرا برجی منفرد[1]، احمد کلهر[2*]، محمد علی امیری آتشگاه [3]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوا فضا، دانشگاه تهران، تهران
2- استادیار، مهندسی برق کنترل، دانشگاه تهران، تهران
3- استادیار، مهندسی هوا فضا، دانشگاه تهران، تهران
* تهران، صندوق پستی 1561-14395، akalhor@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 07 اردیبهشت 1395
پذیرش: 11 خرداد 1395
ارائه در سایت: 23 تیر 1395

کلید واژگان:
کوادروتور
کنترل غیر خطی مقاوم H∞
کنترل پیش بین
تخمین پارامتر
حداقل مربعات بازگشتی

چکیده

در این مقاله به طراحی استراتژی کنترلی برای یک ربات پرنده بدون سرنشین چهار پره برای ردیابی مسیر مطلوب پرداخته شده است. ابتدا معادلات دینامیکی توسط فرمول اویلر- لاگرانژ استخراج شده است. سپس از روش کنترلی خطی پیش بین بر مبنای خطای فضای حالت برای ردیابی حرکات انتقالی و از کنترل غیر خطی مقاوم H∞ برای پایدارسازی حرکات چرخشی کوادروتور و رد اغتشاش خارجی استفاده شده است. در هر دو روش کنترلی از انتگرال خطای موقعیت استفاده شده است که باعث دستیابی به یک خطای حالت ماندگار پوچ در برابر اغتشاش پایدار ورودی به سیستم می‌شود. اغتشاش خارجی به صورت گشتاورهای آیرودینامیکی در نظر گرفته شده است. با افزایش نامعینی در جرم و ممان‌های اینرسی سیستم کنترل طراحی شده، به صورت کامل قادر به ردیابی و پایدارسازی نمی‌باشد، لذا برای حذف آثار نامعینی پارامتری و افزایش قوام سیستم در برابر این نامعینی‌ها از روش حداقل مربعات بازگشتی برای تخمین پارامترهای جرم و اینرسی که خطی می باشند، استفاده شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که سیستم کنترلی طراحی شده با وجود تخمین پارامترهای سیستم، عملکرد مناسبی در پایدارسازی و ردیابی مسیر مطلوب و رد اغتشاش خارجی و نامعینی‌های پارامتری دارد.

Robust Nonlinear H∞ and MPC Control for Path Tracking of a Quadrotor through Estimation of System Parameters

Sadra Borji Monfared[1], Ahmad Kalhor[*2], Mohammadali Amiri Atashgah[1]

1-Department of Aerospace engineering, University of Tehran, Tehran, Iran
2- School of Electrical and Computer Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran
* P.O.B. 14395-1561, Tehran, Iran, akalhor@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 26 April 2016
Accepted 31 May 2016
Available Online 13 July 2016

Keywords:
Quadrotor
Nonlinear Robust H∞
Predictive Control
Parameter Estimation
Recursive Least Squares

ABSTRACT

In this paper, a trajectory tracking control strategy for a quadrotor flying robot is developed. At first, dynamic model is obtained by Lagrange-Euler approach. Then, control structure, consisting of a model-based predictive controller, has been used based on state space error to track transitional movements for reference trajectory and also robust nonlinear H∞ control is applied for stabilizing the rotational movements and rejecting the external disturbance. In both controllers the integral of the position error is considered, allowing the achievement of a null steady-state error when sustained disturbances are acting on the system. The external disturbances are considered as aerodynamic torques. If uncertainties increase, the designed control system unable to path tracking properly. So finally, in order to eliminate the effects of parameter uncertainties the recursive least squares is used for estimating mass and moment inertia parameters which are linear and it is applied to the control system. Simulation results show that by using estimation of system parameters, the proposed control system has a promising performance in terms of stabilization and position tracking even in the presence of external disturbance and parametric uncertainties.

1- مقدمه

امروزه علاقه‌ی رو به رشدی در توسعه سیستم هواپیمای بدون سرنشین عمود پرواز[1] با قابلیت‌های پردازنده مستقل پیشرفته به وجود آمده است. توسعه کاربردهای این پرنده‌ها به دلیل مزیت‌های فراوانی که دارد، بسیار گسترده شده است. ازجمله کاربردهای آن می‌توان به ماموریت‌های شناسایی، عکس برداری، بازرسی خطوط انتقال نفت و خطوط فشار قوی، کشف آتش سوزی-ها، استفاده در محیط‌های خطرناک و غیرقابل دسترس، نظارت بر مرزها، نظارت بر ترافیک در مناطق شهری، کشاورزی و جنگل داری اشاره کرد [1]. کوادروتور در طبقه بندی وسایل هوایی در بخش پرنده‌های هوایی بدون سر نشین عمود پرواز به شمار می‌آید. این نوع از پرنده‌های بدون سر نشین، بدون خلبان هستند. علاوه برآن، می‌توانند از راه دور توسط انسان کنترل و هدایت

[1] Vertical Short Take Off Landing (VSTOL)

شوند و یا می‌توانند مستقل باشند. مزیت‌های استفاده از این وسیله: ظرفیت حمل بار، سادگی ساختار وسیله، قابلیت مانورپذیری بالا، داشتن قیود کم در حرکت، هزینه کم تعمیر و نگهداری می‌باشد. در عین حال تحقیقات بر روی آن به دلیل رفتار به شدت غیر خطی کاملا مشکل است. مدل دینامیکی آن دارای خواص زیر فعال، غیرخطی، اتصال قوی و بی ثباتی استاتیک می‌باشد، از محدودیت برد و زمان پرواز برخوردار است و ساخت مدل دقیق با توجه به مدل انتزاعی آن مشکل است. برای بهبود عملکرد این وسایل در زمینه کنترل دو راه وجود دارد، روش اول ساختن مدل دینامیک دقیق و دومی طراحی کنترلی که نیاز دقیق‌تری به مدل دینامیک نداشته باشد. بنابراین تحقیقات نظری در بخش‌های کنترلی یکی از مسائل محبوب، در حال حاضر بوده است [2].

کنترل مقاوم یکی از استراتژی‌های طراحی سیستم‌های کنترل است که در آن بر روی پایداری و مقاوم بودن سیستم کنترلی در مقابل اغتشاش تاکید می‌شود و هدف از طراحی، ایجاد یک سیستم کنترلی است که تغییرات در شرایط سیستم، کمترین اثر در خروجی را داشته باشد. به عبارت دیگر، افزایش قابلیت اطمینان سیستم، مهم‌ترین هدفی است که در طراحی کنترل مقاوم مد نظر قرار می‌گیرد. به ویژه، تامین عملکرد مناسب و یا پایداری در حضور عوامل نامعین، دینامیک‌های مدل نشده و یا عوامل مزاحم مانند اغتشاش و ورودی‌های ناخواسته، از جمله اصلی ترین اهداف در طراحی سیستم‌های کنترل مقاوم است.

در بررسی عملکرد کنترلر غیر خطی $H\infty$ با این مسئله مواجهیم که این کنترلر از آنجا که فقط برای بررسی پایداری و کنترل وضعیت به کار می‌رود، و در مورد کوادروتور فقط به بررسی پایدار بودن و مقاومت در حرکات چرخشی و کنترل زوایای اویلر می‌پردازد، در پژوهش‌های انجام شده به تنهایی به ندرت استفاده شده و با روش‌های کنترلی دیگری بسته به اهداف تعریف شده از قبیل کنترل مود لغزشی، پسگام انتگرالی، کنترل پیش بین و سایر رویکردها ادغام شده است.

در [3] تاثیر یک کنترلر $H\infty$ در سیستم حلقه بسته برای کنترل موقعیت ربات پرنده چهار پره مورد مطالعه قرار گرفته است. شبیه سازی بر اساس یک مدل غیر خطی منجر به نتایج رضایت بخشی گردیده است. مقاوم بودن، ردیابی خوب مرجع و رد اغتشاش به لطف یک معماری دو درجه آزادی نشان داده شده است.

در [4] یک کنترل غیر خطی $H\infty$ برای محاسبه کنترل اعمال شده بر روی کوادروتور ارائه شده است. این کنترلر بر اساس مدل ربات پرنده شش درجه آزادی با آگاهی از هر دو درجه آزادی فعال و غیر فعال فراهم شده است. برای حل مسئله ردیابی مسیر، یک حلقه کنترل بیرونی اجرا شده است که به عنوان تولید ردیاب استفاده می‌شود. با استفاده از یک مرجع مسیر قبلا شناخته شده، از استراتژی کنترل پیش بین[1] بر اساس مدل خطای حرکت XY برای تولید زاویه مرجع لازم استفاده شده است و نامعینی‌های پارامتری را تا 20% و در [5] تا 30% پوشش می‌دهد.

در [6] یک استراتژی کنترل مقاوم $H\infty$ برای حل مسئله ردیابی مسیر برای یک هلیکوپتر چهار پره ارائه شده است. این ساختار کنترل اغتشاش خارجی، مانند نیروهای آیرودینامیکی و گشتاورها را در تمام شش درجه آزادی و کوپلینگ بین حرکات طولی و سمتی را در نظر گرفته است و عدم قطعیت پارامتری و دینامیک مدل نشده را تا 40% در نظر گرفته است.

در [7] از کنترل غیر خطی مد لغزشی بر اساس مشاهده گر اغتشاش برای ردیابی مسیر مطلوب، و از کنترل مقاوم $H\infty$ برای پایدار سازی حرکات چرخشی استفاده شده است. برای حل معادله همیلتون- ژاکوبی-ایزاک[2] از روش سری تیلور استفاده شده است که در عین سادگی کار مقدار تقریبی از جواب را می‌دهد.

ساختار شناسایی کوادروتور شامل تعریف جرم، ممان اینرسی و اینرسی روتور می باشد، از دو روش برای شناسایی ساختار کوادروتور معمولا استفاده می شود، روش اول محاسبه این پارامترها با استفاده از معادله اصلی جرم برای ممان اینرسی می‌باشد، اما این روش بسیار دشوار است و برای اشکال پیچیده دقیق نیست. روش دوم بهره گیری از شناسایی آنلاین با الگوریتم‌های شناسایی برای تخمین این پارامترها می‌باشد، درعین حال که دقیق تر می‌باشد، محاسبات بیشتری را شامل می‌شود [8].

هدف از این مقاله طراحی کنترل مقاوم غیر خطی $H\infty$ به کمک کنترلر پیش بین و استفاده از تکنیک حداقل مربعات بازگشتی برای شناسایی نامعینی پارامتری از قبیل جرم و ممان اینرسی می‌باشد.

در بخش 2 مدل دینامیکی کوادروتور بررسی شده است. در بخش 3 به طراحی کنترلر پیش بین پرداخته شده است، در بخش 4 کنترلر مقاوم غیر خطی $H\infty$ طراحی شده است. دربخش 5 شناسایی سیستم گنجانده شده است. و در نهایت در بخش 6 نتایج و نمودارها آورده شده است.

2- مدل سازی دینامیکی

اصولا از دو روش نیوتون- اویلر و اویلر- لاگرانژ برای بیان مدل دینامیکی استفاده می‌شود که در این مقاله از روش اویلر- لاگرانژ استفاده شده است.

2-1- دینامیک کوادروتور

ربات چهار پره، دارای شش درجه آزادی در فضا بوده که سه درجه آن مربوط به زوایا برای موقعیت چرخشی و سه درجه آن مربوط به حرکت انتقالی مرکز جرم می‌باشد، جهت تعیین وضعیت چرخشی، دو دستگاه مختصات اینرسی و بدنی در نظر گرفته می‌شود، دستگاه مختصات اینرسی برروی زمین ثابت شده است. در این دستگاه صفحه $\boldsymbol{XY}$ در راستای افق و محور $\boldsymbol{Z}$ در راستای عمود بر آن و در خلاف جاذبه‌ی زمین قرار می‌گیرد. در دستگاه بدنی مرکز آن منطبق بر مرکز جرم کوادروتور می‌باشد. در این حالت محور $\boldsymbol{X}$ در راستای محور اتصال‌های رتور راست و چپ بوده و محور $\boldsymbol{Y}$ در راستای محور اتصال رتورهای جلو و عقب می‌باشد. محور $\boldsymbol{Z}$ نیز در راستای عمود بر محور $\boldsymbol{X}$ و $\boldsymbol{Y}$ بوده و جهت آن نیز به کمک قانون دست راست تعیین می‌شود. شکل 1 تصویر یک کوادروتور را در دو دستگاه اینرسی و بدنی نشان می‌دهد.

در ربات چهار پره هر رتور گشتاور معینی حول مرکز دوران رتور ایجاد می‌کند که ملخ‌های به کار گرفته شده یکسان نبوده و به دو دسته تیغه‌های راستگرد و چپگرد تقسیم می‌شوند که خلاف یکدیگر می‌چرخند. همانطور که در شکل 2 مشاهده می‌شود، یکسان بودن گشتاورهای این رتورها منجر به ثابت بودن کوادروتور حول مرکز گرانش خواهد شد. برای ایجاد حرکات انتقالی پرنده به سمت رتور با سرعت چرخش کمتر متمایل می‌شود و باعث می‌شود تا نیروی تراست، مولفه‌ای در آن جهت پیدا کند. قابل ذکر است که در ساختار کوادروتور کوپلینگ وجود دارد به این معنا که پرنده نمی‌تواند بدون داشتن حرکت رول یا پیچ حرکت انتقالی داشته باشد و همین عامل باعث می‌شود که با چهار ورودی بتوانیم شش درجه آزادی را کنترل نماییم.

[1] Model Predictive Control(MPC)

[2] Hamilton-Jacobi-Isaacs

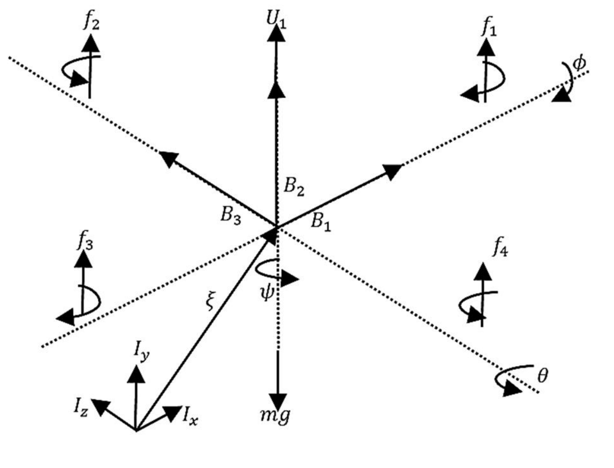

Fig. 1 The quadrotor helicopter configuration

شکل 1 نمایی از ساختار ربات پرنده چهار پره

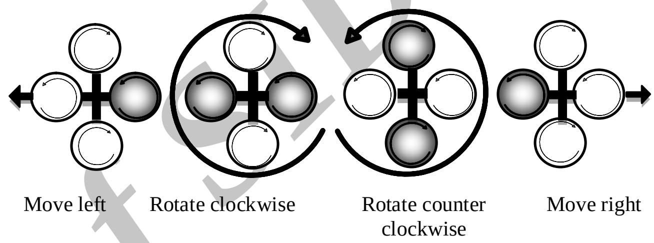

Fig. 2 The quadrotor motion description, the arrow width is proportional to propeller rotational speed

شکل 2 مکانیزم حرکت کوادروتور، ضخامت فلش ها بیانگر سرعت چرخش رتورها [9]

2-2- استخراج معادلات

در این بخش معادلات سینماتیکی و دینامیکی با فرضیات زیر استخراج شده اند:

- مرکز جرم و مبدا دستگاه مختصات بدنی بر هم منطبق می‌باشند.
- ساختار کوادروتور و رتورها صلب درنظر گرفته شده اند.
- ساختار کوادروتور متقارن در نظر گرفته می‌شود که منجر به قطری شدن ماتریس تانسور اینرسی می‌شود [10].

بردار $\xi = \{x, y, z\}$ بیانگر موقعیت مرکز جرم می‌باشد، جهت‌گیری وسیله با ماتریس چرخش $R_\mathrm{r}: B \to I$ بیان می‌شود که $R_\mathrm{r} \in SO(3)$ ماتریس چرخش متعامد می‌باشد، این ماتریس چرخش با سه گردش حول محورهای فریم ثابت بدنی بدست می‌آید، اولین چرخش حول محور E_x بوسیله زاویه رول $(-\pi / 2 < \phi < \pi / 2)$ ، زاویه پیچ حول محور E_y بوسیله $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ و زاویه یاو حول محو ر E_z بوسیله $(-\pi < \psi < \pi)$ بیان می‌شود، در نهایت ماتریس چرخش از مختصات بدنی به اینرسی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$R_\mathrm{r} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\psi\mathrm{c}\theta & \mathrm{c}\psi\mathrm{s}\theta\mathrm{s}\phi - \mathrm{s}\psi\mathrm{c}\phi & \mathrm{c}\psi\mathrm{s}\theta\mathrm{c}\phi + \mathrm{s}\psi\mathrm{s}\phi \\ \mathrm{s}\psi\mathrm{c}\theta & \mathrm{s}\psi\mathrm{s}\theta\mathrm{s}\phi + \mathrm{c}\psi\mathrm{c}\phi & \mathrm{s}\psi\mathrm{s}\theta\mathrm{c}\phi - \mathrm{c}\psi\mathrm{s}\phi \\ -\mathrm{s}\theta & \mathrm{c}\theta\mathrm{s}\phi & \mathrm{c}\theta\mathrm{s}\phi \end{bmatrix} \quad (1)$$

که عبارات $\mathrm{c}0 = \cos(0)$ و $\mathrm{s}0 = \sin(0)$ می‌باشد.

تصویر بردار سرعت خطی در دستگاه بدنی $V^B = [u\, v\, w]$ و تصویر آن در دستگاه چسبیده به زمین برابر $V^I = [\dot X\, \dot Y\, \dot Z]$ و تصویر بردار سرعت زاویه‌ای در دستگاه بدنی $\omega^B = [p\, q\, r]$ و تصویر آن در دستگاه اینرسی برابر با $\eta^I = [\dot\phi\, \dot\theta\, \dot\psi]$ است، معادلات سینماتیکی حرکات انتقالی و چرخشی بوسیله ماتریس چرخش بدست می‌آیند، معادله سینماتیکی انتقالی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$V^I = R^r \cdot V^B \quad (2)$$

که $V^I = [u_0\, v_0\, w_0]^\mathrm{T}$ و $V^B = [u_L\, v_L\, w_L]^\mathrm{T}$ به ترتیب سرعت‌های خطی مرکز جرم کوادروتور در فریم اینرسی و بدنی ثابت می‌باشند.

معادلات سینماتیکی چرخشی نیز با استفاده از ماتریس چرخش و بعد از ساده سازی به صورت زیر می‌باشد:

$$\dot\eta = W_\eta^{-1}\omega \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \dot\phi \\ \dot\theta \\ \dot\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi\sec\theta & \cos\phi\sec\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (4)$$

که $\eta = [\phi\, \theta\, \psi]^\mathrm{T}$ و $\omega = [p\, q\, r]^\mathrm{T}$ به ترتیب بردار سرعت‌های زاویه‌ای فریم بدنی ثابت می‌باشند.

2-3- معادلات اویلر-لاگرانژ

لاگرانژین $\mathcal{L}$ کاستن جمع انرژی‌های انتقالی E_trans و چرخشی E_rot از انرژی پتانسیل E_pot است:

$$\mathcal{L}(q, \dot q) = E_\mathrm{trans} + E_\mathrm{rot} - E_\mathrm{pot} = \left(\frac{m}{2}\right)\dot\xi^\mathrm{T}\dot\xi + \left(\frac{1}{2}\right)v^\mathrm{T}Iv - mgz \quad (5)$$

معادله اویلر-لاگرانژ با نیرو و گشتاور خارجی به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\begin{bmatrix} f \\ \tau \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} \quad (6)$$

عبارات خطی و زاویه‌ای مستقل از همدیگر هستند، بنابراین می‌توان معادلات آنها را جدا کرد، نیروی خارجی خطی تراست نهایی رتورها می‌باشد، معادله خطی اویلر-لاگرانژ به صورت زیر است:

$$f = RT_B = m\ddot\xi + mg\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

ماتریس ژاکوبین $J(\eta)$ از v به $\dot\eta$ برابر است با:

$$J(\eta) = W_\eta^\mathrm{T} I W_\eta = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xx}\mathrm{s}_\theta \\ 0 & I_{yy}\mathrm{c}_\phi^2 + I_{zz}\mathrm{s}_\phi^2 & (I_{yy} - I_{zz})\mathrm{c}_\phi\mathrm{s}_\phi\mathrm{s}_\theta \\ -I_{xx}\mathrm{s}_\theta & (I_{yy} - I_{zz})\mathrm{c}_\phi\mathrm{s}_\phi\mathrm{c}_\theta & I_{xx}\mathrm{s}_\theta^2 + I_{yy}\mathrm{s}_\phi^2\mathrm{c}_\theta^2 + I_{zz}\mathrm{c}_\phi^2\mathrm{c}_\theta^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

بنابراین انرژی چرخشی E_rot در فریم اینرسی به صورت زیر می‌تواند بیان شود:

$$E_\mathrm{rot} = \left(\frac{1}{2}\right)v^\mathrm{T}Iv = \left(\frac{1}{2}\right)\dot\eta^\mathrm{T}J\dot\eta \quad (9)$$

نیروی زاویه‌ای خارجی گشتاور رتورها می‌باشد، معادله اویلر- لاگرانژ زاویه‌ای عبارت است از:

$$\tau = \tau_B = J\ddot\eta + \frac{d}{dt}(J)\dot\eta - \frac{1}{2}\frac{d}{d\eta}(\dot\eta^\mathrm{T}J\dot\eta) = J\ddot\eta + C(\eta, \dot\eta)\dot\eta \quad (10)$$

که $C(\eta, \dot\eta)$ عبارت کریولیس می‌باشد و وابسته به ماتریس اینرسی بوده که به صورت معادله (11) تعریف می‌شود: $\dot J(\eta) = C(\eta, \dot\eta) + C(\eta, \dot\eta)^T$

$$c_{ijk} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial J_{kj}}{\partial \eta_i} + \frac{\partial J_{ki}}{\partial \eta_j} - \frac{\partial J_{ij}}{\partial \eta_k}\right\}$$

$$c_{kj} = \sum_{1}^{n} c_{ijk}(\eta)\dot{\eta}_i = \sum_{1}^{n} \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial J_{kj}}{\partial \eta_i} + \frac{\partial J_{ki}}{\partial \eta_j} - \frac{\partial J_{ij}}{\partial \eta_k}\right\}\dot{\eta}_i$$

$$C(\eta,\dot{\eta}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
C_{11} &= 0 \\
C_{21} &= \left(I_{zz} - I_{yy}\right)\left(\dot{\theta}c_\phi s_\phi + \dot{\psi}s_\phi c_\theta\right) \\
&\quad + \left(I_{yy} - I_{zz}\right)\dot{\psi}c_\phi^2 c_\theta + I_{xx}\dot{\psi}c_\theta \\
C_{22} &= \left(I_{zz} - I_{yy}\right)\dot{\phi}c_\phi s_\phi \\
C_{23} &= -I_{xx}\dot{\psi}s_\theta c_\theta + I_{yy}\dot{\psi}s_\phi^2 s_\theta c_\theta + I_{zz}\dot{\psi}c_\phi^2 s_\theta c_\theta \\
C_{31} &= \left(I_{yy} - I_{zz}\right)\dot{\psi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi - I_{xx}\dot{\theta}c_\theta \\
C_{32} &= \left(I_{zz} - I_{yy}\right)\left(\dot{\theta}c_\phi s_\phi s_\theta + \dot{\phi}s_\phi^2 c_\theta\right) \\
&\quad + \left(I_{yy} - I_{zz}\right)\dot{\phi}c_\phi^2 c_\theta + I_{xx}\dot{\psi}s_\theta c_\theta \\
&\quad - I_{yy}\dot{\psi}s_\phi^2 s_\theta c_\theta - I_{zz}\dot{\psi}c_\phi^2 s_\theta c_\theta \\
C_{33} &= \left(I_{yy} - I_{zz}\right)\dot{\phi}c_\phi c_\phi c_\theta^2 - I_{yy}\dot{\theta}s_\phi^2 s_\theta c_\theta \\
&\quad - I_{zz}\dot{\theta}c_\phi^2 c_\theta c_\theta + I_{xx}\dot{\theta}c_\theta c_\theta
\end{aligned} \tag{11}$$

با استفاده از معادله (7) و (10) معادلات حرکات انتقالی و چرخشی به صورت زیر حاصل می‌شود [11]:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{1}{m}(\cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\phi)U_1 + \frac{A_x}{m} \\
\ddot{y} &= \frac{1}{m}(\sin\psi\sin\theta\cos\phi - \cos\psi\sin\phi)U_1 + \frac{A_y}{m} \\
\ddot{z} &= -g + \frac{1}{m}(\cos\theta\cos\phi)U_1 + \frac{A_z}{m}
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\ddot{\eta} = J(\eta)^{-1}\left(\tau_\eta - C(\eta,\dot{\eta})\dot{\eta}\right) \tag{13}$$

که عبارات $\mathbf{A_x}$، $\mathbf{A_y}$ و $\mathbf{A_z}$ نیروهای آیرودینامیکی می‌باشند.

3- طراحی کنترلر پیش بین بر اساس فضای حالت برای ردیابی مسیر

در این بخش قانون کنترلی برای ردیابی مسیر حرکات انتقالی طراحی شده است. برای این منظور یک استراتژی پیش بین فضای حالت خطی بر اساس خطای مدل ارائه شده است. از خطای مدل، دو کنترلر پیش بین اضافه شده است. اولین طراحی برای کنترل ارتفاع از طریق ورودی U_1 می‌باشد و دومین کنترلر سیگنال پارامتر متغیر با زمان برای حرکات خطی X و Y بر اساس ورودی مجازی می‌باشد.

بنابراین معادلات حرکت انتقالی جهت طراحی کنترلر به صورت فضای حالت $\hat{x}(t) = f\left(\dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)\right)$ بازنویسی می‌شود. با استفاده از معادله و بردار فضای حالت جدید معادله دینامیک به صورت (14) بیان می‌شود:

$$\dot{\hat{x}}(t) = f\left(\hat{x}(t), \hat{u}(t)\right) = \begin{bmatrix} w_0(t) \\ -g + \left(\cos\theta(t)\cos\phi(t)\right)\dfrac{U_1(t)}{m} + \dfrac{A_x}{m} \\ u_0(t) \\ u_x(t)\dfrac{U_1(t)}{m} + \dfrac{A_y}{m} \\ v_0(t) \\ u_y(t)\dfrac{U_1(t)}{m} + \dfrac{A_z}{m} \end{bmatrix} \tag{14}$$

که

$$u_x(t) = \left(\cos\psi(t)\sin\theta(t)\cos\phi(t) + \sin\psi(t)\sin\phi(t)\right) \tag{15}$$

$$u_y(t) = \left(\sin\psi(t)\sin\theta(t)\cos\phi(t) - \cos\psi(t)\sin\phi(t)\right) \tag{16}$$

معادله (14) نشان می‌دهد که حرکت در جهت X و Y به بهره ورودی کنترلی U_1 وابسته است. در حقیقت U_1 بردار تراست نهایی را برای حرکات خطی مورد نظر طراحی می‌کند، در حالی که u_x و u_y جهت U_1 را که منجر به حرکت در محورهای X و Y است فراهم می‌کند.

هدف این روش تضمین ردیابی مسیر مرجع مشخص شده بدون هر خطای جابه‌جایی می‌باشد. با این حال با توجه به این واقعیت که جهت‌گیری مختصات با زمان در حال تغییر است، چهار پره یک مرجع مجازی با همان مدل ریاضی کوادروتور دارد:

$$\dot{\hat{x}}_{\mathrm{ref}}(t) = f\left(\hat{x}_{\mathrm{ref}}(t), \hat{u}_{\mathrm{ref}}(t)\right) \tag{17}$$

که $\hat{x}_{\mathrm{ref}}(t) = [z_{\mathrm{ref}}(t)\ \ w_{0_{\mathrm{ref}}}(t)\ x_{\mathrm{ref}}(t)\ \ u_{0_{\mathrm{ref}}}(t)\ \ x_{\mathrm{ref}}(t)\ \ v_{0_{\mathrm{ref}}}(t)]^{\mathrm{T}}$ و $\hat{u}_{ref}(t) = [\,U_{1\mathrm{ref}}\ \ u_{x_{\mathrm{ref}}}\ u_{y_{\mathrm{ref}}}]^{\mathrm{T}}$ به ترتیب وضعیت مرجع و ورودی کنترل می‌باشد.

با کم کردن معادله (14) از (17) و استفاده از روش اویلر خطای مدل انتقالی به صورت مدل خطی گسسته به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\tilde{x}(k+1) = A\cdot\tilde{x}(k) + B(k)\cdot\tilde{u}(k) \tag{18}$$

که $\tilde{x}(k) = \hat{x}(k) - \hat{x}_{\mathrm{ref}}(k)$ بردار خطا و $\tilde{u}(k) = \hat{u}(k) - \hat{u}_{\mathrm{ref}}(k)$ ورودی خطای کنترل می‌باشد.

بنابراین خطای مدل (18) به دو بخش خطای ارتفاع و خطای Y و X تقسیم می‌شود:

$$\tilde{x}_z(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & T \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \tilde{z}(k) \\ \widetilde{w}_0(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{T}{m}\left(\cos\theta(k)\cos\phi(k)\right) + \dfrac{A_z}{m} \end{bmatrix}\widetilde{U}_1(k) \tag{19}$$

$$\tilde{x}_{xy}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & T & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \tilde{x}(k) \\ \tilde{u}_0(k) \\ \tilde{y}(k) \\ \tilde{v}_0(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{T}{m}U_1(k) + \dfrac{A_x}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{T}{m}U_1(k) + \dfrac{A_y}{m} \end{bmatrix}\widetilde{U}_1(k) \tag{20}$$

که T زمان نمونه برداری می‌باشد که باید به اندازه کافی کوچک انتخاب شود که تمام خطاهای مکانی را پوشش دهد و به انداره کافی بزرگ انتخاب شود که پایداری حلقه بسته سیستم در حالت پایدار را شامل شود.

ایده استفاده شده در این کنترلر شامل محاسبه قانون کنترلی در کمینه کردن تابع زیر می‌باشد [12]:

$$J_z = \left[\hat{\tilde{X}} - \tilde{X}_{z\mathrm{r}}\right]^{\mathrm{T}} Q_z \left[\hat{\tilde{X}} - \tilde{X}_{z\mathrm{r}}\right] + \left[\hat{\widetilde{U}}_1 - \tilde{X}_{1\mathrm{r}}\right]^{\mathrm{T}} R_z \left[\hat{\widetilde{U}}_1 - \tilde{X}_{1\mathrm{r}}\right] \tag{21}$$

که Q_z و R_z وزن‌های مثبت معین قطری هستند و پیش بینی خروجی سیستم $\hat{\tilde{x}}_z(k+j|k)$ با استفاده از مدل فضای حالت متغیر با زمان، از معادله (22) بدست می‌آید:

$$\hat{\tilde{x}}_z = P_z(k|k)\cdot\tilde{X}_z(k|k) + H_z(k|k)\cdot\widetilde{U}_1 \tag{22}$$

ماتریس P_z و H_z با استفاده از ماتریس A و $B(k)$ موجود در معادله (19) محاسبه می‌شود که در [12] آورده شده است. معادله $\widetilde{U}_1(k) = U_1(k) -$

$U_{1_{\mathrm{ref}}}(k)$ و $\tilde{X}_z(k)$ بیانگر خطای ارتفاع، و بردار ارتفاع مرجع هستند که ازطریق معادله (23) حاصل می‌شوند:

$$\tilde{x}_{zr} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{x}_{zr}(k+1|k) - \hat{x}_{zr}(k|k) \\ \vdots \\ \hat{x}_{zr}(k+N_2|k) - \hat{x}_{zr}(k|k) \end{bmatrix}$$
$$\tilde{U}_{1_{\mathrm{ref}}} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{U}_{1_{\mathrm{r}}}(k|k) - \hat{U}_{1_{\mathrm{r}}}(k|k) \\ \vdots \\ \hat{U}_{1_{\mathrm{r}}}(k+Nu-1|k) - \hat{U}_{1_{\mathrm{r}}}(k-1|k) \end{bmatrix} \tag{23}$$

برای کمینه کردن معادله (21) در حالتی که قیدی وجود ندارد، قانون کنترلی باید به صورت (24) بیان شود [13].

$$\tilde{U}_1 = [H_z^{\mathrm{T}} \cdot Q_z \cdot H_z + R_z]^{-1} \cdot [H_z^{\mathrm{T}} . Q_z \cdot (\tilde{x}_{zr} - P_z \cdot \tilde{x}_z(k)) + R_z \cdot \tilde{U}_{1_{\mathrm{ref}}}] \tag{24}$$

بدین ترتیب $U_1(k) = \tilde{U}_1(k) + U_{1_{\mathrm{ref}}}(k)$ بدست می‌آید. در مرحله بعد اعمال ورودی کنترلی برای $u_x(k)$ و $u_y(k)$ می‌باشد، که فرایند بدست آوردن آن شبیه محاسبه $U_1(k)$ می‌باشد، قانون کنترلی برای حرکت X و Y به صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{U}_{xy} = [H_{xy}^{\mathrm{T}} \cdot Q_{xy} \cdot H_{xy} + R_{xy}]^{-1} \cdot [H_{xy}^{\mathrm{T}} \cdot Q_{xy} \cdot \left(\tilde{x}_{xy_{\mathrm{r}}} - P_{xy} \cdot \tilde{x}_{xy}(k)\right) + R_{xy} \cdot \tilde{U}_{xy_{\mathrm{r}}}] \tag{25}$$

که $\tilde{u}_{xy} = [\tilde{u}_x(k) \quad \tilde{u}_y(k)]^{\mathrm{T}}$ و داریم:

$$\begin{bmatrix} u_x(k) \\ u_y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_x(k) \\ \tilde{u}_y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{x_{\mathrm{ref}}}(k) \\ u_{y_{\mathrm{ref}}}(k) \end{bmatrix} \tag{26}$$

با بدست آوردن $u_x(k)$ و $u_y(k)$ زاویه رول مرجع ϕ_{ref} و θ_{ref} برای استفاده در کنترلر غیرخطی H∞ با استفاده از معادله (12) بدست می‌آید.

4- طراحی کنترلر غیر خطی H∞ برای کنترل زوایا

در این بخش قانون کنترلی مقاوم برای کنترل زوایای کوادروتور در برابر اغتشاش خارجی طراحی می‌شود. هدف تئوری کنترل غیر خطی H∞ که برای اولین بار توسط ون در شفت ارائه شد، بدست آوردن نرخ محدود انرژی بین خطای سیگنال و انرژی اغتشاش سیگنال می‌باشد. جواب مسئله کنترل غیر خطی H∞ وابسته به حل معادله همیلتون- ژاکوبی-بلمن-ایزاک[1] می‌باشد، که با جایگزینی معادله ریکاتی در فرمول کنترل خطی H∞ بدست می‌آید [14].

یک سیستم غیر خطی چند ورودی چند خروجی به صورت معادله (27) در نظر گرفته و داریم:

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)\omega + g_2(x)u$$
$$z = W\begin{bmatrix} h(x) \\ u \end{bmatrix} \tag{27}$$

که $x\epsilon\mathbb{R}^n$ متغیر دستگاه، $u\epsilon\mathbb{R}^{m_2}$ ورودی دستگاه، $\omega\epsilon\mathbb{R}^{m_1}$ متغیر ورودی خارجی و $z\epsilon\mathbb{R}^p$ متغیر پنالتی، $h(x)\epsilon\mathbb{R}^m$ و $W\epsilon\mathbb{R}^{(p+m)\times(p+m)}$ وزن ماتریس می‌باشد. اهداف کنترل، بدست آوردن پایداری سیستم حلقه بسته و کاهش اثر ورودی اغتشاش ω به متغیر پنالتی z می‌باشد. در این مورد سیستم حلقه بسته پایدار است و ضریب میرایی اغتشاش نیز بصورت زیر بدست می‌آید: انتخاب یک مقدار مثبت $\gamma > 0$، اگر در همسایگی u در نقطه $x = 0$ به ازای هر $T > 0$ وجود داشته باشد، به طوری که تابع $\omega: [0, T] \to \mathbb{R}^{m_1}$ به صورت تکه‌ای پیوسته باشد، آنگاه سیگنال‌های خارجی به صورت محلی بوسیله γ ضعیف می‌شوند، همچنین اگر عبارت x قابل اندازه‌گیری باشد و $t\epsilon[0, T]$ و $z\epsilon[0, T] \to \mathbb{R}^p$ قانون کنترل بهینه H∞ به صورت زیر می‌باشد [15]:

$$\int_0^T \|z\|_2^2 dt \le \gamma^2 \int_0^T \|\omega\|_2^2 dt dt \tag{28}$$

عبارت سمت چپ نامساوی را می‌توان به صورت زیر در نظرگرفت:

$$\|z\|_2^2 = z^{\mathrm{T}} z = [h^{\mathrm{T}}(x) \quad u^{\mathrm{T}}] W^{\mathrm{T}} W \begin{bmatrix} h(x) \\ u \end{bmatrix} \tag{29}$$

که ماتریس متقارن مثبت معین $W^T W$ به صورت زیر قابل بیان می‌باشد:

$$W^{\mathrm{T}} W = \begin{bmatrix} Q & S \\ S & R \end{bmatrix} \tag{30}$$

که Q و R عبارت‌های مثبت معینی می‌باشند.

همیلتونین در رابطه با تعریف (28) به صورت (31) بیان می‌شود:

$$H(x, p, \omega, u) = p^{\mathrm{T}}(f(x) + g_1(x)\omega + g_2(x)u) + \frac{1}{2}(\|h(x) + u(x)\|^2) - \gamma^2\|x\|^2 \tag{31}$$

در مقاله [16] نشان داده شده است که اگر تابع هموار و مثبت $V(x)$ به صورت محلی در همسایگی مبدا در $\mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد باید معادله (32) را ارضا کند:

$$H(x, V_x^{\mathrm{T}}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} H\left(x, V_x^{\mathrm{T}}, \alpha_1(x, V_x^{\mathrm{T}}), \alpha_2(x, V_x^{\mathrm{T}})\right) \tag{32}$$

معادله همیلتون- ژاکوبی-بلمن-ایزاک به صورت معادله (33) تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^{\mathrm{T}} V}{\partial x} f(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^{\mathrm{T}} V}{\partial x}\left[\frac{1}{\gamma^2} g_1(x,t) g_1^{\mathrm{T}}(x,t) - g_2(x,t) R^{-1} g_2^{\mathrm{T}}(x,t)\right]\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial^{\mathrm{T}} V}{\partial x} g_2(x,t) R^{-1} S^{\mathrm{T}} h(x) + \frac{1}{2} h^{\mathrm{T}}(x)(Q - SR^{-1}S^{\mathrm{T}}) h(x) = 0 \tag{33}$$

بنابراین با فرضیات فوق سیگنال کنترل بهینه $u^*(x,t)$ برای معادله (33) به صورت زیر استخراج می‌شود [17]:

$$u^* = -R^{-1}(\mathrm{S}^{\mathrm{T}} h(x) + g_2^{\mathrm{T}}(x,t)\ \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}) \tag{34}$$

حال برای توسعه کنترل غیر خطی H∞ برای زیر سیستم چرخشی کوادروتور در معادله اویلر- لاگرانژ گشتاوری به عنوان گشتاور اغتشاش خارجی در نظر گرفته و بصورت (35) باز نویسی می‌کنیم:

$$\tau_\eta = \tau_{\eta_a} + \tau_{\eta_d} \tag{35}$$

که τ_{η_a} بردار گشتاور اعمالی و τ_{η_d} تاثیر نهایی مدلسازی سیستم و اغتشاش خارجی می‌باشد.

برای تجزیه و تحلیل قانون کنترلی ذکر شده ابتدا باید خطای ردیابی را به صورت (36) تعریف کنیم:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\eta}} \\ \tilde{\eta} \\ \int \tilde{\eta} dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\eta} - \dot{\eta}^d \\ \eta - \eta^d \\ \int (\eta - \eta^d) dt \end{bmatrix} \tag{36}$$

[1] Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs

که η^d و $\dot{\eta}^d \epsilon \mathbb{R}^n$ مسیر مطلوب و سرعت متناظر می‌باشند. قابل ذکر است که عبارت‌های انتگرال شامل بردار خطا می‌باشد. این عبارت اجازه بدست آوردن بردار خطای حالت پایدار پوچ را زمانی که اغتشاش ماندگار یا مداوم به سیستم اعمال می‌شود را می‌دهد. به همین جهت قانون کنترلی برای بخش چرخشی سیستم به صورت (37) می‌باشد:

$$\tau_{\eta_a} = J(\eta)\ddot{\eta} + C(\eta,\dot{\eta})\dot{\eta} - T_1^{-1}(J(\eta)T\hat{x} + C(\eta,\dot{\eta})T\hat{x}) + T_1^{-1}u) \quad (37)$$

قانون کنترلی به سه بخش تقسیم می‌شود: عبارت اول معادله (37) اجزای تشکیل دهنده دینامیک سیستم را شامل می‌شود، بخش دوم شامل بردار خطای $\hat{x}$ و مشتق آن $\dot{\hat{x}}$ می‌باشد. با فرض $\tau_{\eta_d} \equiv 0$ این دو عبارت قادر به ردیابی کامل می‌باشد، که بیانگر تلاش کنترل ضروری مورد نیاز برای انجام وظیفه می‌باشد. و در نهایت سومین عبارت که شامل بردار u می‌باشد، بیانگر تلاش کنترلی اضافی مورد نیاز در مواجه با اغتشاش می‌باشد.

در معادله (37) ماتریس T به صورت (38) بیان می‌شود:

$$T = [T_1 \quad T_2 \quad T_3] \quad (38)$$

که $T_1 = \rho I$ می‌باشد. که ρ یک اسکالر واحد می‌باشد و I ماتریس واحد با مرتبه n می‌باشد.

با جایگزین کردن معادله (37) در معادله اویلر لاگرانژ معادله (13) و تعریف $\omega = J(\eta)T_1J(\eta)^{-1}\tau_{\eta_d}$ داریم:

$$J(\eta)T\dot{\hat{x}} + C(\eta,\dot{\eta})T\hat{x} = u + \omega \quad (39)$$

عبارت (39) معادله دینامیکی خطای سیستم را نشان می‌دهد.

برای اعمال نتایج تئوری (39) به صورت فرم استاندارد مسئله کنترل غیر خطی H∞ داریم:

$$\dot{\hat{x}} = f(x) + g_1(x)\omega + g_2(x)u \quad (40)$$

$$f(\hat{x},t) = T_0^{-1}\begin{bmatrix} J(\eta)^{-1}C & 0 & 0 \\ T_1^{-1} & I - T_1^{-1}T_2 & -I + T_1^{-1}(T_2 - T_3) \\ 0 & I & -I \end{bmatrix} T_0 \quad (41)$$

$$g(\hat{x},t) = k(\hat{x},t) = T_0^{-1}\begin{bmatrix} J(\eta)^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

که $T_0 = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ 0 & I & I \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ می‌باشد.

جواب معادله همیلتون- ژاکوبی-بلمن-ایزاک بستگی به انتخاب متغیر پنالتی z و تابع $h(\hat{x})$ دارد که در این مقاله مقدار $h(\hat{x}) = \hat{x}$ انتخاب شده است. تابع لیاپانوف $V(\hat{x},t)$ را به صورت معادله (43) در نظر بگیریم:

$$V(x,t) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}T_0^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & Y & X - Y \\ 0 & X - Y & Z + Y \end{bmatrix} T_0 x \quad (43)$$

که X و Y و $Z\epsilon\mathbb{R}^{n\times n}$ درایه‌های مثبت و ثابت هستند که $Z - XY^{-1}X + 2X > 0$ و J ماتریس اینرسی کوادروتور می‌باشد. با جایگزینی تابع لیاپانوف (43) در معادله (33) جواب معادله همیلتون-ژاکوبی-بلمن-ایزاک به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{bmatrix} J & Y & X \\ Y & 2X & Z + 2X \\ X & Z + 2X & 0 \end{bmatrix} + Q + \frac{1}{\gamma^2}T^{\mathrm{T}}T - (S^{\mathrm{T}} + T)R^{-1}(S^{\mathrm{T}} + T) = 0 \quad (44)$$

جواب مقادیر ثابت معادله (44) به همراه درایه‌های T با استفاده از معادله ریکاتی بدست می‌آید. اثبات تابع لیاپانوف و محاسبه درایه‌های T و تئوری کنترل غیر خطیH∞ به صورت کامل در [18] آورده شده است.

با محاسبه ماتریس T و جایگزینی $V(\hat{x},t)$ در معادله (34) قانون کنترل بهینه H∞ به صورت زیر به ازای پارامتر γ به صورت (45) بدست می‌آید:

$$u^* = -R^{-1}(S^{\mathrm{T}} + \mathrm{T})\hat{x} \quad (45)$$

سپس با جایگزینی معادله (45) در معادله (37) و برخی ساده سازی قانون کنترلی به صورت (46) نوشته می‌شود:

$$\tau^*_{\eta_a} = J(\eta)\ddot{\eta}^d + C(\eta,\dot{\eta})\dot{\eta} - J(\eta)\left(K_D\dot{\tilde{\eta}} + K_P\tilde{\eta} - K_I\int \tilde{\eta}\,dt\right) \quad (46)$$

برای محاسبه وزن ماتریس $W^{\mathrm{T}}W$ داریم:

$$Q_1 = \omega_1^2 I, \quad Q_2 = \omega_2^2 I, \quad Q_3 = \omega_3^2 I, \quad R = \omega_u^2 I$$
$$Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} = 0, \quad S_1 = S_2 = S_3 = 0 \quad (47)$$

مقادیر عبارات تحلیلی بهره ها به صورت (48) بیان می‌شود که شبیه بهره‌های کنترلر تناسبی، انتگرالی، مشتقی[1] می‌باشد.

$$K_D = \frac{\sqrt{\omega_2^2 + 2\omega_1\omega_3}}{\omega_1}I + J(\eta)^{-1}(C(\eta,\dot{\eta}) + \frac{1}{\omega_u^2}I)$$
$$K_P = \frac{\omega_3}{\omega_1} + \frac{\sqrt{\omega_2^2 + 2\omega_1\omega_3}}{\omega_1}J(\eta)^{-1}(C(\eta,\dot{\eta}) + \frac{1}{\omega_u^2}I)$$
$$K_I = \frac{\omega_3}{\omega_1}J(\eta)^{-1}(C(\eta,\dot{\eta}) + \frac{1}{\omega_u^2}I) \quad (48)$$

این عبارات یک ویژگی مهم دارند، که آنها به پارامتر γ بستگی ندارند. بنابراین، یک عبارت جبری برای محاسبه راه حل کلی بهینه برای این مورد خاص به دست آمده است.

5 - پیاده سازی شناسایی در حلقه کنترلی

جرم کوادروتور، ممان‌های اینرسی و فاصله رتورها تا مرکز جرم از جمله نامعینی می‌باشند. اگر نامعینی‌های سیستم را افزایش دهیم، دیگر کنترلر توانایی پایدار سازی و ردیابی را از دست خواهد داد. به طور مثال در این مورد اگر نامعینی جرم بیشتر از 20% باشد (به روش سعی وخطا)، ردیابی سیستم عملکرد قابل قبولی ندارد و باعث بروز مشکل احتمالی در سیستم کنترلی و افزایش تلاش کنترلی خواهد شد. برای مثال حمل بار در بین مسیر و یا هرگونه جابه جایی در جرم منجر به بروز مشکل در سیستم خواهد شد. با اینکه کنترلر غیرخطی H∞ در ذات خود در برابر نامعینی‌ها مقاوم می‌باشد، اما این مقاومت محدوده خاصی را در بر می‌گیرد و به ازای مقادیر خاصی از جرم سیستم ناپایدار شده و ردیابی سیستم به خوبی انجام نمی‌پذیرد و تلاش کنترلی سیستم افزایش خواهد داشت. از طرفی بخش کنترلر پیش بین که از مقاومت پایینی در مواجه با اغتشاش برخوردار است، از این قاعده مستثنی است و عملکرد قابل قبولی با وجود نا معینی ندارد . لذا تخمین پارامترها امری ضروری می‌باشد، بدین منظور پارامتر جرم و ممان‌های اینرسی در هر لحظه بصورت آنلاین شناسایی شده و در قانون کنترلی اعمال شوند. برای این منظور ما فرض می‌کنیم جرم دقیق و ممان‌های اینرسی در طراحی کنترل را نمی‌دانیم ولی در دینامیک سیستم موجود است. به همین جهت با استفاده از تکنیک حداقل مربعات برگشتی با فاکتور فراموشی به صورت آنلاین جرم و ممان اینرسی را شناسایی کرده و به سیستم اعمال می‌کنیم [19].

[1] Proportional–Integral–Derivative(PID)

5-1- تخمین پارامتر به کمک حداقل مربعات بازگشتی

در این قسمت با استفاده از تکنیک حداقل مربعات بازگشتی[1] ترم‌های نامعینی را شناسایی کرده و به بخش کنترلی سیستم اعمال می‌کنیم. این الگوریتم تخمین پارامترهای کلاسیک است که به طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته است. این الگوریتم، در برابر روش‌های دیگر در زمینه کنترل تطبیقی در [20] مقایسه شده است.

دراین روش مشاهدات پی در پی در زمان حقیقی به دست می‌آیند. برای این کار استفاده از محاسبات بازگشتی برای صرفه جویی در زمان محاسبه، امر مطلوبی است. ابتدا به تخمین پارامتر جرم می‌پردازیم، در معادله حرکت انتقالی این پارامتر به صورت مستقیم وجود دارد، لذا از معادله فضای حالت (14) استفاده می‌کنیم و از آنجا که ترکیب خطی بین پارامتر مجهول و معلوم باید وجود داشته باشد، پارامتر مجهول یعنی m را به صورت $\frac{1}{m}$ در نظر می‌گیریم [21].

الگوریتم حداقل مربعات بازگشتی به صورت (49) می‌باشد:

$$\ddot{z} = -g + \frac{1}{m}(\cos\theta\cos\phi)U_1 + \frac{A_z}{m}$$
$$y_e = \phi^{\mathrm{T}}(t)\theta(t) + \varepsilon(t) \quad ,\theta = \frac{1}{m}$$
$$\theta = \left[\delta_1, 000, \delta_{N_p}\right] \tag{49}$$

اکنون برای تخمین پارامترهای ممان اینرسی از درایه‌های ماتریس اینرسی J استفاده می‌کنیم:

$$J = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xx}\mathrm{s}\theta \\ 0 & I_{yy}\mathrm{c}^2\phi + I_{zz}\mathrm{s}^2\phi & (I_{yy}-I_{zz})\mathrm{c}\phi\mathrm{s}\phi\mathrm{c}\theta \\ -I_{xx}\mathrm{s}\theta & (I_{yy}-I_{zz})\mathrm{c}\phi\mathrm{s}\phi\mathrm{c}\theta & I_{xx}\mathrm{s}^2\theta + I_{yy}\mathrm{s}^2\phi\mathrm{c}^2\theta + I_{zz}\mathrm{s}^2\phi\mathrm{c}^2\theta \end{bmatrix} \tag{50}$$

برای تخمین پارامتر I_{xx} از عبارت $I_{xx}\mathrm{s}^2\theta$ برای تخمین پارامتر I_{yy} از $I_{yy}\mathrm{s}^2\phi\mathrm{c}^2\theta$ و برای تخمین پارامتر I_{zz} از $I_{zz}\mathrm{s}^2\phi\mathrm{c}^2\theta$ استفاده شده است که پارامترهای مجهول را به ترتیب I_{xx}، I_{yy}، I_{zz} را به عنوان $\hat{\theta}$ در نظر گرفته و با استفاده از معادله (51) به تخمین می‌پردازیم:

$$y_e = \phi^{\mathrm{T}}(t)\theta(t) + \varepsilon(t)$$

$\phi^{\mathrm{T}}(t) = \mathrm{s}^2\theta$ تخمین پارامتر $\hat{\theta} = I_{xx}$

$\phi^{\mathrm{T}}(t) = \mathrm{s}^2\phi\mathrm{c}^2\theta$ تخمین پارامتر $\hat{\theta} = I_{yy}$

$\phi^{\mathrm{T}}(t) = \mathrm{s}^2\phi\mathrm{c}^2\theta$ تخمین پارامتر $\hat{\theta} = I_{zz}$

(51)

تخمین حداقل مربعات بازگشتی $\hat{\theta}$ با فراموشی نمایی به صورت (52) می‌باشد [22]:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t)\left(y(t) - \phi^{\mathrm{T}}(t)\hat{\theta}(t-1)\right) \tag{52}$$

در رابطه (53) بردار $K(t)$ ضرایب وزنی هستند که نشان می‌دهند جمله تصحیحی و تخمین قبلی چگونه ترکیب می‌شوند، که به صورت (53) بدست می‌آید:

$$K(t) = P(t)\phi^{\mathrm{T}} = P(t-1)(\lambda I + \phi^{\mathrm{T}}P(t-1)\phi^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{53}$$

[1] Recursive Least Square (RLS)

عبارت λ فاکتور فراموشی نمایی می‌باشد و $P(t)$ متغیر حالت به صورت زیر می‌باشد:

$$P(t) = \left(I - K(t)\phi^{\mathrm{T}}(t)\right)P(t-1)/\lambda \tag{54}$$

و همچنین ε مشخصه نویز اندازه گیری شده با میانگین صفر و واریناس σ_ε^2 می‌باشد.

$$\varepsilon(t) = y(t) - \phi^{\mathrm{T}}(t)\hat{\theta}(t-1) \tag{55}$$

و در نهایت $\hat{\theta}$ به صورت بازگشتی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(t-1) + K(t)\,\varepsilon(t) \tag{56}$$

بدین ترتیب پارامتر نامعین m، I_{xx}، I_{yy} و I_{zz} با تحریک اولیه تخمین زده شده و سیستم در برابر این نامعینی‌ها مقاوم گردید.

6- نتایج

استراتژی کنترلی برای بررسی عملکرد و ارزیابی مسئله ردیابی مسیر در وجود نامعینی و اغتشاش با موارد زیر شبیه سازی گردید.

پارامترهای به کار رفته در کنترل پیش بین به صورت زیر تنظیم شده‌اند:

$$N_{2_u} = N_{2_u} = N_{2_u} = 3I_{nz}, T = 0.1$$
$$N_{2_{xy}} = N_{2_{xy}} = N_{2_{xy}} = 3I_{nxy}$$
$$A_x = A_y = A_Z = 0.5$$
$$Q_z = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad R_z = 0.01$$
$$Q_{xy} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad R_{xy} = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

پارامترهای به کار رفته در شبیه سازی ربات پرنده در جدول 1 گنجانده شده است. مقادیر اولیه زوایا و مکانی ربات پرنده به صورت $(\phi, \theta, \psi) =$ (0,0,0.5) و $(x, y, z) =$ (0,0,0.5) در نظر گرفته شده و بهره کنترل غیر خطی H∞ با مقادیر $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_u) =$ (0.05,0.5,5,0.7) تنظیم شده است و مقدار اولیه برای تخمین جرم مقدار $m = 0.2$ و برای ممان اینرسی (I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}) مقادیر $I_{xx} = I_{yy} = 1 \times 10^{-3}$ و $I_{zz} = 7 \times 10^{-3}$ و برای فاکتور فراموشی نیز $\lambda = 0.8$ در نظر گرفته شد.

نتایج شبیه سازی در این بخش پوشش داده شده است، در زیر مجموعه کنترلر پیش بین، شکل3 نشان می‌دهد با افزایش نامعینی در پارامتر جرم به مقدار 40%- $(m = 0.444)$ ردیابی کامل کنترلر در راستاهای (X, Y, Z) صورت نگرفته است. در شکل 4 نیز همین نامعینی باعث تاخیر در همگرایی

جدول 1 پارامترهای به کار رفته در شبیه سازی کوادروتور

Table 1 Parameters for simulation of quadrotor

پارامتر	مقدار	واحد
جرم	0.74	kg
طول بازو	0.21	m
اینرسی حول محور x	$I_{xx} = 4 \times 10^{-3}$	$\mathrm{kg.m^2}$
اینرسی حول محور y	$I_{yy} = 4 \times 10^{-3}$	$\mathrm{kg.m^2}$
اینرسی حول محور z	$I_{zz} = 8.4 \times 10^{-3}$	$\mathrm{kg.m^2}$
اغتشاش به عنوان	$A_p = 0.055$ در ثانیه 18	N.m
گشتاورهای	$A_q = 0.085$ در ثانیه 22.5	N.m
آیرودینامیکی τ_{η_d}	$A_r = 0.1$ در ثانیه 10	N.m
زمان نمونه برداری	$T = 0.1$	s

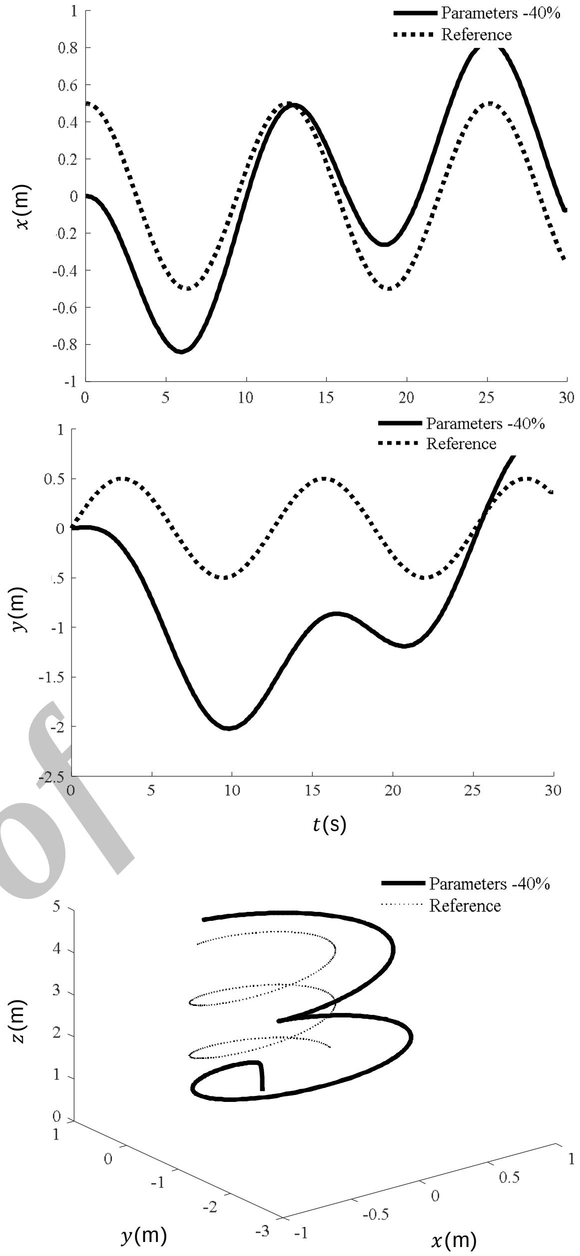

Fig. 3 Position of (X,Z) and path tracking with increasing uncertainty in mass 40% and without identification

شکل 3 موقعیت (X,Y,Z) و مسیر مطلوب با افزایش نامعینی جرم به میزان % 40-و بدون تخمین پارامتر

خطای تابع کنترلی به صفر می‌شود. در شکل 5 شناسایی پارامتر m انجام گرفته است. بواسطه همین تخمین پارامتر ردیابی کامل در موقعیت‌های کنترلر پیش بین و طی مسیر مطلوب در شکل 6 اتفاق افتاده است. برای طی مسیر مطلوب مقادیر مسیرهای مطلوب به صورت $x_d = 1/2\cos(t/2)$ و $y_d = 1/2\sin(t/2)$ و $z_d = 1 + t/10$ و $\psi_d = \pi/3$ در نظر گرفته شده است. در شکل 7 خطای موقعیت (X,Y,Z) در ردیابی مرجع قابل مشاهده می‌باشد. در شکل 8 خطای تابع قانون کنترلی در راستای ارتفاع و طولی - سمتی با وجود نا معینی نشان داده شده است که بلافاصله به صفر همگرا می‌شود. شکل 9 تخمین پارامترهای (I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}) با استفاده از حداقل مربعات برگشتی را نشان می‌دهد.

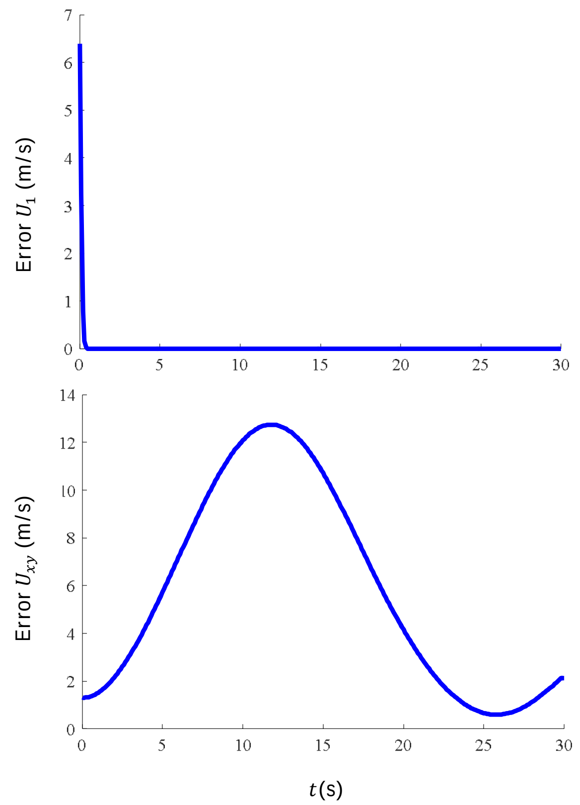

Fig. 4 Height and longitudinal-lateral error models in the control laws with increasing uncertainty in mass -40% and without identification

شکل 4 خطای تابع قانون کنترلی در راستای ارتفاع و طولی - سمتی با افزایش نامعینی جرم به میزان 40%- و بدون تخمین

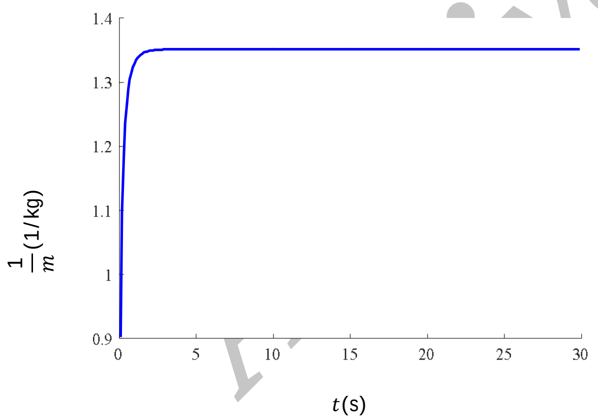

Fig. 5 Estimation of mass parameter with recursive least square

شکل 5 شناسایی پارامتر جرم با استفاده از حداقل مربعات برگشتی

در نهایت شکل 10 نمودار زوایای اویلر با وجود اغتشاش خارجی که به عنوان گشتاورهای آیرودینامکی و به صورت پله در نظر گرفته شده را نشان می‌دهد. این اغتشاش در ثانیه 18 برای زوایه ϕ و در ثانیه 22.5 برای زاویه θ و ثانیه 10 برای زاویه ψ می‌باشد. پر واضح است که کنترلر توانایی رد این اغتشاش را دارد.

چالش‌های بعدی در انتخاب نوع اغتشاش، می‌تواند انواع مدل‌های باد از قبیل باد برشی و تند باد از جلو و سایر مدل‌های اغتشاش جوی باشد، که در زمینه مدلسازی دقیق آنها و در نهایت اعمال به سیستم و پیاده سازی هنوز جای پیشرفت‌هایی وجود دارد.

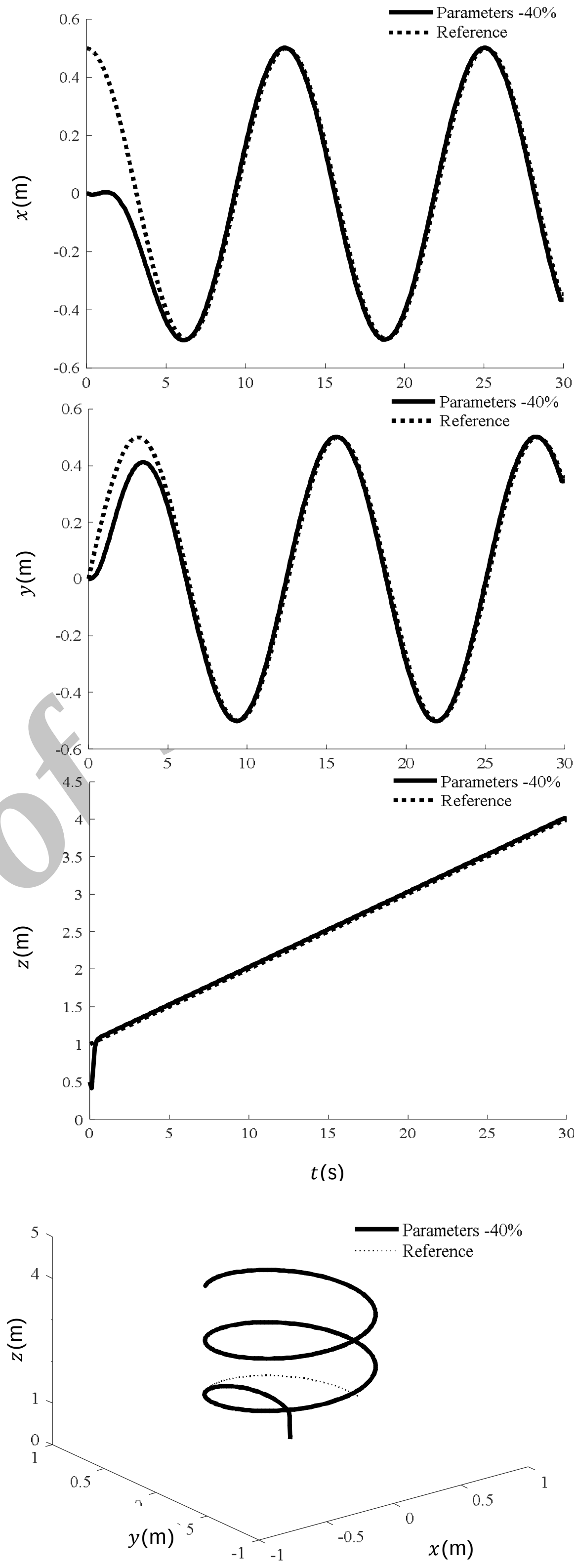

Fig. 6 Position (X, Y, Z) and path tracking with external disturbances and uncertainty with RLS

شکل 6 موقعیت (X, Y, Z) و مسیر مطلوب با وجود اغتشاش خارجی و نامعینی با استفاده از حداقل مربعات برگشتی

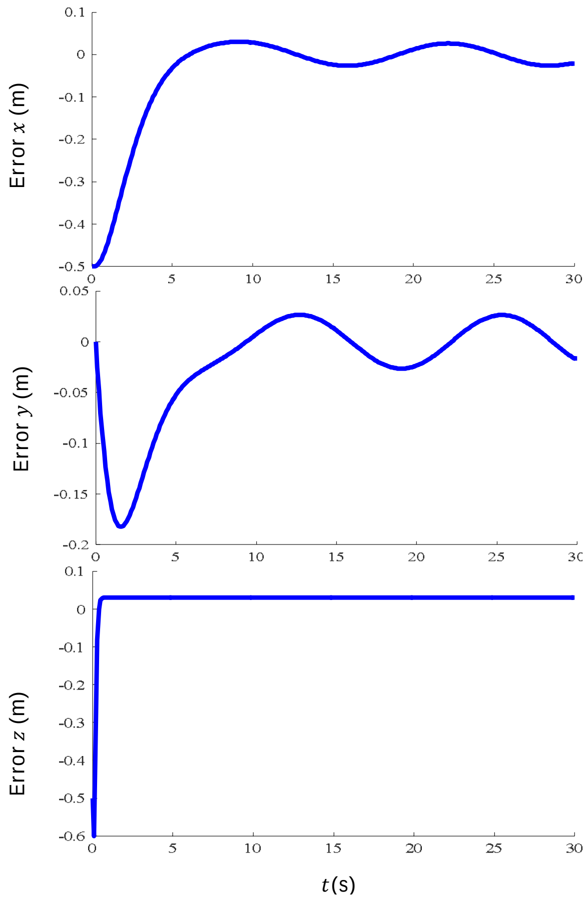

Fig. 7 Position error of reference tracking (X, Y, Z)

شکل 7 خطای موقعیت (X, Y, Z) در ردیابی مرجع

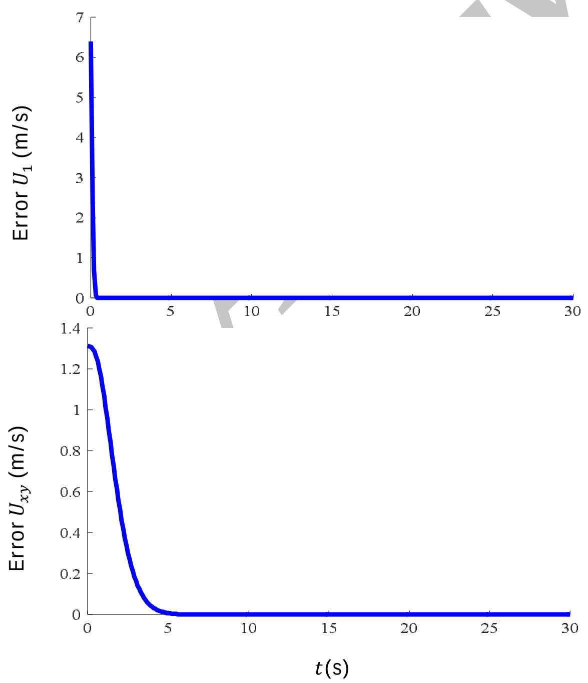

Fig. 8 Height and longitudinal-lateral error models in the control laws with RLS

شکل 8 خطای تابع قانون کنترلی در راستای ارتفاع و طولی- سمتی با تخمین

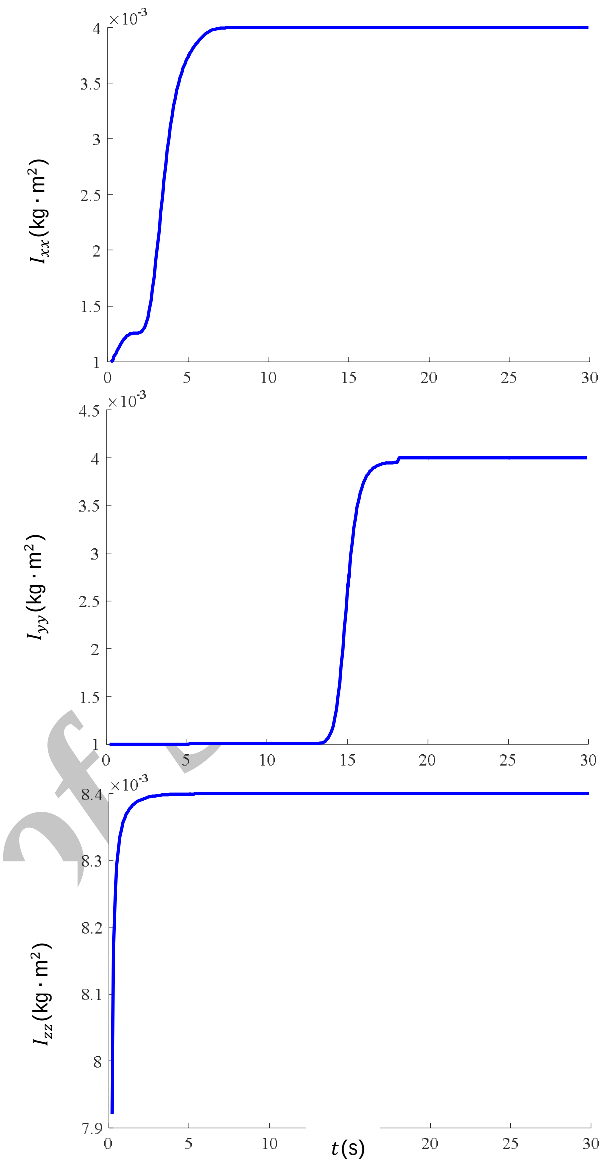

Fig. 9 Estimation of inertia matrix (I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}) parameters with recursive least square

شکل 9 تخمین پارامتر (I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}) با استفاده از حداقل مربعات برگشتی

7- جمع بندی و نتیجه گیری

در این مقاله مدل‌سازی کامل یک ربات پرنده بدون سرنشین دارای چهار رتور به روش اویلر-لاگرانژ انجام شد. از روش کنترل پیش بین مبتنی بر خطای فضای حالت و کنترلر غیر خطی H∞ استفاده شده است. طراحی بر مبنای وجود اغتشاش خارجی از قبیل گشتاورهای آیرودینامیکی صورت گرفته است. کنترلر پیش‌بین عملکرد خوبی در ردیابی با فرض نامعینی پارامتری ناچیز بدست آورد و تئوری کنترل مقاوم H∞ از پایداری و مقاومت در وجود اغتشاش خارجی برخوردار بود. نامعینی‌های پوشش داده شده این دو کنترلر در محدوده خاصی جواب داشتند و با افزایش آن در سیستم واگرایی و عدم ردیابی کامل منجر می‌شد، لذا به کمک تخمین حداقل مربعات بازگشتی نامعینی‌های پارامتری از قبیل جرم و ممان اینرسی شناسایی به سیستم اعمال شد و به این ترتیب باعث بهبود عملکرد سیستم کنترلی گردیده و ردیابی قابل قبول مرجع با وجود اغتشاش خارجی و نا معینی نشان داده شد.

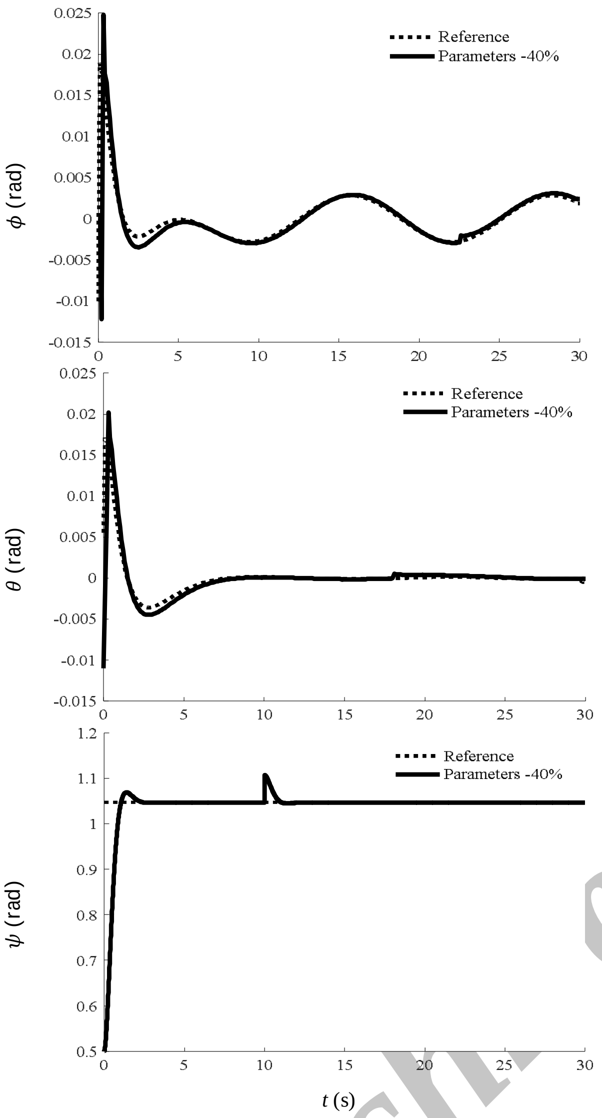

Fig. 10 Orientation (ϕ, θ, ψ) with external disturbances and uncertainty with RLS

شکل 10 جهت گیری (ϕ, θ, ψ) در حضور اغتشاش خارجی و نامعینی با استفاده از حداقل مربعات برگشتی

8- مراجع

[1] F. Kendoul, Survey of advances in guidance, navigation, and control of unmanned rotorcraft systems, *Journal of Field Robotics*, Vol. 29, No. 2, pp. 315-378, 2012.

[2] Y. Li, S. Song, A survey of control algorithms for quadrotor unmanned helicopter, *IEEE Fifth International Conference on Advanced Computational Intelligence (ICACI)*, Nanjing, China October 18-20, 2012.

[3] M. Chen, M. Huzmezan, A combined MBPC/2 DOF H∞ controller for a quad rotor UAV, AIAA Atmospheric *Flight Mechanics Conference and Exhibit*, Texas, USA, August 11-14, 2003.

[4] G. V. Raffo, M. G. Ortega, F. R. Rubio, Backstepping/nonlinear H∞ control for path tracking of a quadrotor unmanned aerial vehicle, *American Control Conference*, Washington, USA, June 11-13, 2008.

[5] G. V. Raffo, M. G. Ortega, F. R. Rubio, Robust nonlinear control for path tracking of a quad-rotor helicopter, *Asian Journal of Control*, Vol. 17, No. 1, pp. 142-156, 2015.

[6] G. V. Raffo, M. G. Ortega, F. R. Rubio, Nonlinear H∞ controller for the quad-rotor helicopter with input coupling, *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, Milano, Italia, Aug 28-Sept 2,

[15] A. Isidori, H∞ control via measurement feedback for affine nonlinear systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 4, No. 4, pp. 553-574, 1994.

[16] W. Kang, P. De, A. Isidori, Flight control in a windshear via nonlinear H infinity methods, *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*, Hamburg, Germany, May 6-10, 1992.

[17] W. Feng, I. Postlethwaite, Robust non-linear H∞/adaptive control of robot manipulator motion, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: *Journal of Systems and Control Engineering*, Vol. 208, No. 2, pp. 221-230, 1994.

[18] M. G. Ortega, M. Vargas, C. Vivas, F. R. Rubio, Robustness improvement of a nonlinear H∞ controller for robot manipulators via saturation functions, *Journal of Robotic Systems*, Vol. 22, No. 1, pp. 421-437, 2005.

[19] X. Zhang, X. Li, K. Wang, Y. Lu, A survey of modelling and identification of quadrotor robot, *Abstract and Applied Analysis*, Vol. 1, No. 1, pp. 16-32, 2014.

[20] Y. Ameho, F. Niel, F. Defay, J.-M. Biannic, C. Bérard, Adaptive control for quadrotors, *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, Karlsruhe, Germany, May 6-10, 2013.

[21] M. Elsamanty, A. Khalifa, M. Fanni, A. Ramadan, A. Abo-Ismail, Methodology for identifying quadrotor parameters, attitude estimation and control, *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics* (AIM), Wollongong, NSW, July 9-12, 2013.

[22] K. J. Åström , B. Wittenmark, *Adaptive Control*, Second Edition, pp. 41-82, New York: Courier Corporation, 2013.

2011.

[7] G. Alizadeh, K. Ghasemi, Control of Quadrotor Using Sliding Mode Disturbance Observer and Nonlinear H∞, *International Journal of Robotics*, Vol. 4, No. 1, pp. 38-46, 2015.

[8] M. I. Rashid, S. Akhtar, Adaptive control of a quadrotor with unknown model parameters, *9th International Bhurban Conference on Applied Sciences and Technology (IBCAST)*, Islamabad, Pakistan, Jan 9-12, 2012.

[9] A.Lavaei Yanesi, M. Amiri Atashgah, Three-dimensional constrained optimal motion planning for six-degree-of-freedom quadrotor helicopter for urban traffic purposes, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 5, pp. 13-24, 2015. (in Persian فارسی)

[10] S. Bouabdallah, A. Noth, R. Siegwart, PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor, *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Sendai, Japan, Sept 28- Oct 2, 2004.

[11] P. C. Garcia, R. Lozano, A. E. Dzul, *Modelling and control of mini-flying machines*, pp. 22-34, London: Springer-Verlag, 2006.

[12] J. A. Rossiter, *Model-based predictive control*, Second Edition, pp. 32-52, New York: Springer-Verlag, 2013.

[13] E. F. Camacho, C. Bordons, *Nonlinear model predictive control: An introductory review, in Assessment and future directions of nonlinear model predictive control*, pp. 46-48, New York: *Springer*, 2007.

[14] A. J. Van der Schaft, L 2-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state-feedback H∞ control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 6, pp. 770-784, 1992.