مجله مهندسی مکانیک مدرس، مهر 1395، دوره 16، شماره 7، ص‌ص 163-169

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بررسی روش تابع اولیه‌گیری نیمه‌ضمنی بر پایه نگاشت نمایی برای مومسانی وان- مایسز با سخت‌شوندگی درهم خطی

نادر حاجی‌آقاجان‌پور[1]، مهرزاد شریفیان[2*]

1-کارشناس‌ارشد، مهندسی عمران، فارغ‌التحصیل دانشگاه مهندسی فناوری‌های نوین قوچان، قوچان

2- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه مهندسی فناوری‌های نوین قوچان، قوچان

* قوچان، صندوق‌پستی 94771-67335, m.sharifian@qiet.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 06 بهمن 1394
پذیرش: 03 خرداد 1395
ارائه در سایت: 29 تیر 1395

کلید واژگان:
تابع اولیه‌گیری
نگاشت نمایی
مومسانی وان- مایسز
سخت‌شوندگی خطی

چکیده

در تحلیل کشسان- مومسان ناخطی اجزای محدود سازه‌ها، تنش‌ها در هر نقطه گوس از هر جزء در هر تکرار از هر نمو بارگذاری به‌هنگام می‌گردند. این به‌هنگام‌سازی به کمک تابع اولیه‌گیری از معادله‌های بنیادی در مومسانی انجام می‌شود. باید دانست، دقت تابع اولیه‌گیری از معادله‌های بنیادی مومسانی اثر چشم‌گیری بر دقت پاسخ نهایی تحلیل سازه دارد. در این پژوهش، سطح تسلیم وان- مایسز با قانون های سخت‌شوندگی همگن و پویا در محدوده تغییرشکل‌های کوچک در نظر گرفته می‌شود. معادله‌های دیفرانسیل مومسانی به فضای تنش افزوده برده می شود و یک دستگاه معادله دیفرانسیل ناخطی تشکیل می‌شود. دستگاه معادله دیفرانسیل به‌دست‌آمده با یک روش نیمه‌ضمنی قابل حل است. دقت حل در این روش بستگی به شعاع سطح تسلیم استفاده شده در فرآیند حل دارد؛ بنابراین رابطه‌سازی‌ها به‌گونه‌ای می‌شود که بتوان شعاع سطح تسلیم را از هر قسمت دلخواه از گام مومسانی برداشت کرد. در پایان با انجام آزمون‌های عددی گسترده دقت پاسخ‌ها برای یافتن بهترین لحظه از گام بارگذاری برای محاسبه شعاع سطح تسلیم بررسی می‌شود.

Investigation on semi-implicit integration method based on exponential map for von-Mises plasticity model with linear mixed hardening

Nader Haji Aghajanpour, Mehrzad Sharifian*

Department of Civil Eng., Quchan University of Advanced Technology, Quchan, Iran
* P.O.B. 94771-67335 Quchan, Iran, m.sharifian@qiet.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 26 January 2016
Accepted 23 May 2016
Available Online 20 July 2016

Keywords:
Integration
exponential map
von-Mises plasticity
linear hardening

ABSTRACT

In the nonlinear elastoplastic finite element analysis, the stresses must be updated at each Gauss point of the elements in each iteration of each load increment by a stress-updating process. The stress-updating process is performed by integration of the constitutive equations in plasticity. It should be noted that the accuracy of integrating the constitutive equations significantly affects the accuracy of the final results of the structural analysis. In this study, the von-Mises plasticity model along with the isotropic and kinematic hardening mechanisms is considered in the small strain realm. The constitutive equations are converted to a nonlinear equation system in an augmented stress space. The aforementioned nonlinear equation system is solved by a semi implicit technique. The precision of the solution is dependent on the radius of the yield surface which is used in the process of the solution. Therefore, the relations are derived so that the yield surface radius can be picked up from each arbitrary part of plasticity step. Finally, to determine the best time of loading step for calculating the radius of the yield surface, a wide range of numerical tests is performed.

1- پیش‌گفتار

روش‌های تابع اولیه‌گیری بر پایه نگاشت نمایی در فضای تنش افزوده از روش‌های نو تابع اولیه‌گیری از معادله‌های دیفرانسیلی مومسانی است. هانگ و لیو در سال 1999 فضای تنش افزوده را معرفی کردند [1]. پس از آن پژوهش‌گران معادلات مربوط به مومسانی وان- مایسز با سخت‌شوندگی در هم خطی را به دستگاه معادله دیفرانسیل ناخطی تبدیل کردند. نخستین بار آوریکیو و برائو در سال 2003 روش تابع اولیه‌گیری نمایی از معادله دیفرانسیل یاد شده را بر پایه یک رویکرد صریح به‌صورت یک روش ناسازگار ارائه کردند [2]. از برتری‌های روش‌های بر پایه نگاشت نمایی می‌توان به دقت بالا نسبت به سایر روش‌های عددی و سازگاری مومسانی در بیشتر آن‌ها اشاره کرد. سازگاری آن است که در انتهای هر گام بارگذاری، تنش‌ها به‌طور خودکار بر سطح تسلیم قرار گیرد و نیازی به برگرداندن تنش‌ها بر سطح تسلیم نباشد. ماهیت صریح این روش‌ها سبب شده استفاده از آن‌ها در حل مسئله‌های اجزای محدود ناخطی از کارایی بالایی برخوردار باشند. بدیهی است که کارایی بالاتر، محبوبیت بیشتری را برای روش‌های برپایه نگاشت نمایی به همراه داشته است.

Please cite this article using:
برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:
N. Haji Aghajanpour, M. Sharifian, Investigation on semi-implicit integration method based on exponential map for von-Mises plasticity model with linear mixed hardening, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 16, No. 7, pp. 163-169, 2016 (in Persian)

پس از آوریکیو و برائو، لیو در سال 2004 دو روش تابع اولیه‌گیری نمایی صریح برای معیار تسلیم مومسان مطلوب دراکر- پراگر رابطه‌سازی کرد [3]. آرتیولی و همکارانش در سال 2005، شیوه نمایی برای مومسانی وان- مایسز را به حالت سازگار بهبود دادند [4]. آرتیولی و همکارانش در سال 2006، یک شیوه نمایی صریح مرتبه دوم برای الگوی سخت‌شونده خطی وان- مایسز پیشنهاد دادند [5]. در ادامه رضایی پژند و نصیرایی در سال 2007 شیوه نمایی برای مومسانی وان- مایسز را به یک شیوه تابع اولیه‌گیری نمایی نیمه‌ضمنی با دقت مرتبه دو بهبود دادند [6]. آرتیولی و همکارانش در سال 2007 شیوه به‌هنگام‌سازی نمایی تنش را برای مومسانی وان- مایسز با سخت‌شوندگی همگن خطی و پویای ناخطی آرمسترانگ و فردریک به‌دست آوردند [7]، سپس رضایی پژند و نصیرایی در سال 2008 دو شیوه تابع اولیه‌گیری نمایی نیمه‌ضمنی مرتبه دو را برای الگوی مومسان مطلوب دراکر- پراگر پیشنهاد دادند [8]. رضایی پژند و همکارانش در سال 2010 روش تابع اولیه‌گیری نمایی را برای مومسانی وان- مایسز با سخت‌شوندگی پویای ناخطی گسترش دادند [9] و در سال 2011 یک روش تابع اولیه‌گیری نمایی برای مدل مومسانی چرخه‌ای ارائه کردند [10]. رضایی پژند و شریفیان در سال 2011 یک روش تابع اولیه‌گیری با قابلیت کنترل خودکار خطا پیشنهاد کردند. در پژوهش آن‌ها تابع اولیه‌گیری بر پایه زاویه بین نرخ کرنش و تنش جابه‌جا شده و نیز زاویه میان تنش جابه‌جا شده و تنش بازگشتی پیشنهاد شده است [11]. افزون بر آن رضایی پژند و همکاران در سال 2011 دو روش تابع اولیه‌گیری صریح بر پایه نگاشت نمایی با سخت‌شوندگی همگن خطی و پویای پراگر ارائه دادند [12]. سرانجام در سال 2013، دو روش تابع اولیه‌گیری نیمه‌ضمنی بر پایه نگاشت نمایی و شیوه‌های اولر پیشرو و پسرو برای مومسانی دراکر- پراگر با سخت‌شوندگی درهم ناخطی رابطه‌سازی کردند [13].

پس از مطالعه پیشینه پژوهش‌ها نیاز به بررسی این موضوع احساس شد که در روش نمایی نیمه‌ضمنی برداشت شعاع مومسانی از کدام قسمت از گام مومسانی منجر به دقیق‌ترین پاسخ‌ها می‌شود. برای این منظور روش نگاشت نمایی برای مومسانی وان- مایسز با سخت‌شوندگی همگن و پویای خطی به گونه‌ای رابطه‌سازی خواهد شد که بتوان شعاع سطح تسلیم را از هر قسمت دلخواه یک گام مومسانی برداشت کرد.

در روابطی که در این مقاله ارائه می‌شود تانسورهای مرتبه دو با برداری 9 مؤلفه‌ای به صورت رابطه (1) جایگزین شده‌اند.

$$\sigma = [\sigma_x \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yx} \quad \sigma_y \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{zy} \quad \sigma_z]^T \tag{1}$$

البته با توجه به تقارن تانسورهای مرتبه دو، شمار مؤلفه‌های مستقل به شش کاهش می‌یابد، چنان‌چه استفاده از بردارهای شش مؤلفه‌ای مورد نظر باشد، باید عملگر اثر و نرم اقلیدسی اصلاح شوند.

2- معادله‌های بنیادی

یک الگوی مومسانی وان- مایسز با سخت‌شوندگی درهم خطی در محدوده تغییرشکل‌های کوچک در نظر گرفته می‌شود. تنش کل و کرنش کل هر یک به دو بخش انحرافی و حجمی به‌صورت روابط (3,2) جداسازی می‌شوند.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} + p\mathbf{i}\ , \qquad p = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \frac{1}{3}\theta\mathbf{i}\ , \qquad \theta = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{3}$$

که $\mathrm{tr}(\ )$، عملگر اثر است $(\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$، $\mathbf{i}$ بردار معادل با تانسور همانی مرتبه 2، s تنش انحرافی، p تنش حجمی، e کرنش انحرافی و θ کرنش حجمی است. بخش حجمی به‌صورت کشسان در رابطه (4) عمل می‌کند.

$$p = K\theta \tag{4}$$

که در رابطه بالا، K مدول بالک است. کرنش انحرافی به دو بخش کشسان و مومسان به صورت روابط (6,5) تقسیم می‌شود.

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^{\mathrm{p}} + \mathbf{e}^{\mathrm{e}} \tag{5}$$

$$\mathbf{s} = 2G\mathbf{e}^{\mathrm{e}} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{\mathrm{p}}) \tag{6}$$

اکنون، بردار تنش انتقالی (جابه‌جا شده) به‌صورت رابطه (7) تعریف می‌شود.

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha} \tag{7}$$

در رابطه بالا، α بخش انحرافی تنش بازگشتی است و در صفحه تنش انحرافی مرکز سطح تسلیم را نشان می‌دهد. سطح تسلیم وان- مایسز با رابطه (8) معرفی می‌شود.

$$F = \|\boldsymbol{\Sigma}\| - R = 0 \tag{8}$$

R شعاع سطح تسلیم است و با قانون سخت‌شوندگی همگن خطی به صورت (9) بیان می‌شود.

$$R = R_0 + H_{\mathrm{iso}}\gamma \tag{9}$$

در این رابطه R_0، شعاع نخستین سطح تسلیم، H_{iso}، ثابت ماده (ثابت سخت‌شوندگی همگن) و γ کمیت عددی است که $\dot{\gamma}$ ضریب مومسانی را تعریف می‌کند. رشد کرنش مومسان انحرافی به‌صورت رابطه (10) بیان می‌شود.

$$\dot{\mathbf{e}}^{\mathrm{p}} = \dot{\gamma}\mathbf{n} \tag{10}$$

در رابطه کنونی، n بردار عمود بر سطح تسلیم در نقطه تماس است که جهت کرنش مومسان انحرافی را به صورت رابطه (11) نشان می‌دهد.

$$\mathbf{n} = \frac{\partial F}{\partial \Sigma} = \frac{\Sigma}{\|\Sigma\|} = \frac{\Sigma}{R} \tag{11}$$

همچنین، قانون سخت‌شوندگی پویای خطی پراگر با رابطه (12) نشان داده می‌شود.

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = H_{\mathrm{kin}}\dot{\mathbf{e}}^{\mathrm{p}} \tag{12}$$

این رابطه بیان می‌کند که مرکز سطح تسلیم در جهت نرخ کرنش مومسان انحرافی جابه‌جا می‌شود و H_{kin} ثابت ماده (ثابت سخت‌شوندگی پویا) است.

سرانجام، شرط‌های بارگذاری- باربرداری کان- تاکر با رابطه‌های (13) ارائه می‌شود [2].

$$\dot{\gamma} \geq 0\ , \qquad F \leq 0\ , \qquad \dot{\gamma}F = 0 \tag{13}$$

که $\dot{\gamma}=0$ رفتار کشسان و $\dot{\gamma} > 0$ رفتار مومسان را نشان می‌دهد.

3- معادله‌های بنیادی در فضای تنش افزوده

آوریکیو و برائو در سال 2003 معادله‌های مربوط به مومسانی وان- مایسز با سخت‌شوندگی درهم خطی را به دستگاه معادله دیفرانسیل ناخطی رابطه (14) تبدیل کردند.

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbb{A}\mathbf{X} \tag{14}$$

در رابطه بالا $\mathbf{X}$ بردار تنش افزوده با $n+1$ بعد به صورت رابطه (15) است.

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} X^0\overline{\boldsymbol{\Sigma}} \\ X^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}^{\mathrm{s}} \\ X^0 \end{Bmatrix} \tag{15}$$

برای دست‌یابی به دستگاه رابطه (14) به ترتیبی که در ادامه می‌آید می‌توان عمل کرد، از ترکیب دو رابطه (6) و (7) و مشتق‌گیری نسبت به زمان رابطه (16) به‌دست می‌آید.

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} + \dot{\boldsymbol{\alpha}} + 2G\dot{\mathbf{e}}^{\mathrm{p}} = 2G\dot{\mathbf{e}} \tag{16}$$

سپس، رابطه (12) در (16) قرار داده می‌شود و رابطه (17) به‌دست

می‌آید.

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} + (2G + H_{\text{kin}})\dot{\mathbf{e}}^{\text{p}} = 2G\dot{\mathbf{e}} \tag{17}$$

و رابطه‌های (10) و (11) در رابطه بالا جای‌گذاری می‌شود و رابطه (18) به‌دست می‌آید.

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} + (2G + H_{\text{kin}})\frac{\Sigma}{R}\dot{\gamma} = 2G\dot{\mathbf{e}} \tag{18}$$

در ادامه، بردار تنش جابه‌جا شده بدون بعد ($\bar{\Sigma}$) به‌صورت رابطه (19) تعریف می‌شود.

$$\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{\Sigma}{R} \tag{19}$$

رابطه (18) به‌صورت رابطه (20) بازنویسی می‌گردد.

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = 2G\dot{\text{e}} - (2G + H_{\text{kin}})\bar{\boldsymbol{\Sigma}}\dot{\gamma} \tag{20}$$

از رابطه (19) نسبت به زمان مشتق گرفته می‌شود، با جای‌گذاری رابطه (9) در آن می‌توان به رابطه (21) رسید.

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\Sigma}}} + \frac{2G + H_{\text{iso}} + H_{\text{kin}}}{R}\dot{\gamma}\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{2G}{R}\dot{\mathbf{e}} \tag{21}$$

فاکتور تابع اولیه‌گیری X^0 به‌صورت رابطه (22) تعریف می‌شود.

$$\frac{d}{dt}(X^0\bar{\boldsymbol{\Sigma}}) = \frac{2G}{R}X^0\dot{\mathbf{e}} \tag{22}$$

در این رابطه، مشتق‌گیری نسبت به زمان انجام می‌شود و رابطه به‌دست آمده بر X^0 به صورت رابطه (23) تقسیم می‌گردد.

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\Sigma}}} + \frac{\dot{X}^0}{X^0}\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{2G}{R}\dot{\mathbf{e}} \tag{23}$$

مقایسه (21) و (23) و جایگذاری (9)، رابطه (24) را در بردارد.

$$\frac{\dot{X}^0}{X^0} = \frac{2G + H_{\text{iso}} + H_{\text{kin}}}{R_0 + H_{\text{iso}}\gamma}\dot{\gamma} \tag{24}$$

برای حل معادله (24)، X^0 تابعی از γ درنظر گرفته می‌شود؛ افزون بر آن چون $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$ و $\dot{X}^0 = \frac{dX^0}{dt}$ است، معادله بالا در dt ضرب شده و تابع اولیه گرفته می‌شود؛ بنابراین پاسخ معادله (24) به صورت رابطه (25) خواهد بود.

$$X^0(\gamma) = \begin{cases} \left(1 + \frac{H_{\text{iso}}}{R_0}\gamma\right)^{\left(\frac{2G + H_{\text{kin}} + H_{\text{iso}}}{H_{\text{iso}}}\right)} & H_{\text{iso}} \neq 0 \\ exp\left(\frac{2G + H_{\text{kin}}}{R_0}\gamma\right) & H_{\text{iso}} = 0 \end{cases} \tag{25}$$

با توجه به تعریف بردار تنش افزوده در رابطه (15) و (22) رابطه (26) به‌دست می‌آید.

$$\dot{\text{X}}^s = \frac{2G}{R}X^0\dot{\text{e}} \tag{26}$$

چون در محدوده کشسانی $\dot{\gamma} = 0$ است، با نگاهی به رابطه (24)، رابطه (27) به‌دست می‌آید.

$$\dot{X}^0 = 0 \tag{27}$$

درمحدوده مومسانی که X^0 ثابت نیست، رابطه (23) را در $\bar{\Sigma}^{\text{T}}$ ضرب کرده و رابطه (28) به‌دست می‌آید.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{\Sigma}\|^2 + \frac{\dot{X}^0}{X^0}\|\bar{\Sigma}\|^2 = \frac{2G}{R}\dot{\text{e}}^{\text{T}}\bar{\Sigma} \tag{28}$$

از آن‌جا که $\bar{\Sigma} = 1$ است، پس از ضرب X^0 در رابطه (28)، این رابطه به شکل رابطه (29) در می‌آید.

$$\dot{\boldsymbol{X}}^0 = \frac{2G}{R}\dot{\text{e}}^{\text{T}}\text{X}^{\text{s}} \tag{29}$$

چنان‌چه شکل فشرده $\dot{\mathbf{X}} = \mathbb{A}\mathbf{X}$ در نظر گرفته شود، با نگاهی به رابطه‌های (26-28) ماتریس $\mathbb{A}$ به راحتی به صورت روابط (30) و (31) محاسبه می‌شود.

$$\mathbb{A}_{\text{e}} = \frac{2G}{R}\begin{bmatrix} \mathbb{O}_{9\times9} & \dot{\mathbf{e}}_{9\times1} \\ \mathbf{0}_{1\times9} & 0 \end{bmatrix}_{10\times10} \quad \text{محدوده کشسان} \tag{30}$$

$$\mathbb{A}_{\text{p}} = \frac{2G}{R}\begin{bmatrix} \mathbb{O}_{9\times9} & \dot{\mathbf{e}}_{9\times1} \\ \dot{\mathbf{e}}^{\text{T}}_{1\times9} & 0 \end{bmatrix}_{10\times10} \quad \text{محدوده مومسان} \tag{31}$$

در سخت‌شوندگی پویا R ثابت است؛ بنابراین $\mathbb{A}$ تنها به $\dot{\text{e}}$ وابسته است، اما در سخت‌شوندگی ترکیبی R ثابت نیست؛ بنابراین $\mathbb{A}$ به $\mathbf{X}$ وابسته می‌شود که معادله $\dot{\mathbf{X}} = \mathbb{A}\mathbf{X}$ را ناخطی می‌کند.

چنان‌چه دو شرط زیر که از شرط‌های کان- تاکر (13) نتیجه گرفته شده، به‌صورت هم‌زمان برقرار شود، نمو در محدوده مومسان واقع است [4].

1- تنش جابه‌جا شده باید روی سطح تسلیم به‌صورت رابطه (32) باشد.

$$\|\boldsymbol{\Sigma}\| = R \tag{32}$$

که با استفاده از رابطه‌های (15) و (19) این شرط به‌صورت رابطه (33) در می‌آید.

$$\|\mathbf{X}^{\text{s}}\| = X^0 \tag{33}$$

2- جهت رشد کرنش باید به سوی بیرون از سطح تسلیم به‌صورت رابطه (34) باشد.

$$\boldsymbol{\Sigma}^{\mathbf{T}}\dot{\mathbf{e}} > 0 \tag{34}$$

که رابطه کنونی را می‌توان به‌صورت رابطه (35) بازنویسی کرد.

$$(\mathbf{X}^{\text{s}})^{\text{T}}\dot{\mathbf{e}} > 0 \tag{35}$$

4- الگوریتم به‌هنگام‌سازی تنش

جهت به‌هنگام‌سازی تنش، در مسیرهای کرنش انتخابی، نرخ کرنش ثابت فرض می‌شود ($\dot{\text{e}} = \text{cte}$). به‌صورت معمول، در زمان $t = t_n$ مقادیر متغیرها معلوم ($\gamma_n, \alpha_n, \text{e}_n, \text{s}_n$)، همچنین کرنش در زمان $t = t_{n+1}$ نیز معلوم است (e_{n+1})؛ بنابراین الگوریتم پیشنهادی باید ضمن حل معادلات مومسانی، تنش به‌هنگام‌شده و سایر متغیرها را به‌دست آورد. برای حل معادله دیفرانسیل (14) شرط نخستین رابطه (36) درنظر گرفته می‌شود.

$$\mathbf{X}(0) = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_0^{\text{s}} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\Sigma_0}{R_0} \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{36}$$

پاسخ معادله (14) به صورت رابطه (37) است.

$$\mathbf{X}_{n+1} = \exp(\mathbb{A}.\Delta t)\,\mathbf{X}_n \tag{37}$$

با داشتن سخت‌شوندگی همگن ($H_{\text{iso}} \neq 0$) ماتریس $\mathbb{A}$ در فاز مومسانی ثابت نیست که در این صورت می‌توان $\mathbb{A}$ را در طول هر گام زمانی ثابت پنداشت؛ یعنی پس از یافتن مقدار $\mathbb{A}$ در آغاز گام ($\mathbb{A}_n$)، آن را در تمام طول گام زمانی به‌صورت روابط (38-39) استفاده کرد.

$$\mathbf{X}_{n+1} = \exp(\mathbb{A}_n.\Delta t)\,\mathbf{X}_n = \bar{\mathbb{G}}_n\mathbf{X}_n \tag{38}$$

$$\bar{\mathbb{G}}_n = \begin{cases} \bar{\mathbb{G}}_e = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{9\times9} & \frac{2G}{R_n}\Delta\mathbf{e} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbb{G}}_p = \begin{bmatrix} \mathbb{I} + (a_0 - 1)\Delta\hat{\text{e}}\Delta\hat{\text{e}}^{\text{T}} & b_0\Delta\hat{\mathbf{e}} \\ b_0\Delta\hat{\text{e}}^{\text{T}} & a_0 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{39}$$

که ماتریس $\bar{\mathbb{G}}_n$ ماتریس نمایی است و برای هر مقدار حقیقی $\mathbb{A}_n.\Delta t$ قابل دست‌یابی است، همچنین عامل‌های Δe، $\Delta\hat{\text{e}}$، a_0 و b_0 به‌صورت روابط (40-41) است.

$$\Delta\mathbf{e} = \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n\,,\quad \Delta\hat{\mathbf{e}} = \frac{\Delta\text{e}}{\|\Delta\text{e}\|} \tag{40}$$

$$a_0 = \cosh\left(\frac{2G}{R_n}\|\Delta\text{e}\|\right),\qquad b_0 = \sinh\left(\frac{2G}{R_n}\|\Delta\text{e}\|\right) \tag{41}$$

همچون بسیاری از الگوریتم‌های تابع اولیه‌گیری، هرگام باید با یافتن یک مقدار نخستین آزمونی برای بردار تنش افزوده (با فرض رفتار الاستیک) به‌صورت رابطه (42) آغاز شود.

$$\mathbf{X}_{n+1}^{\mathrm{TR}} = \overline{\mathbb{G}}_e \mathbf{X}_n \tag{42}$$

در این صورت چنان‌چه شرط (43) برقرار باشد، حل آزمونی پذیرفته می‌شود و مقدارهای متغیرها از روی حل آزمونی بالا برآورد می‌شود.

$$\left\|\mathbf{X}_{n+1}^{\mathrm{s,TR}}\right\| \le X_{n+1}^{0,\mathrm{TR}} \tag{43}$$

اگر شرط (43) برقرار نباشد، حل آزمونی پذیرفته نمی‌شود و بخشی از گام مومسان است. این گام می‌تواند به دو قسمت تقسیم شود: یک بخش کشسان که با یک بخش کشسان- مومسان ادامه می‌یابد. ثابت $0 \le \alpha \le 1$که مرز بین ناحیه کشسان کامل و ناحیه کشسان- مومسان را مشخص می‌کند به صورت روابط (44-45) تعریف می‌شود.

$$\alpha = \frac{\sqrt{C^2 - DM} - C}{D} \tag{44}$$

$$C = \frac{2GX_n^0}{R_n}\mathbf{X}_n^{\mathrm{s}}\Delta\mathrm{e}\ ,\ \ D = \left(\frac{2GX_n^0\|\Delta\mathbf{e}\|}{R_n}\right)^2$$

$$\boldsymbol{M} = \|\mathbf{X}_n^{\mathrm{s}}\|^2 - (X_n^0)^2 \tag{45}$$

$\alpha\Delta\mathrm{e}$ بیانگر یک بخش کشسان کامل و $(1-\alpha)\Delta\mathrm{e}$ بیانگر یک کشسان-مومسان کامل است؛ بنابراین بردار تنش افزوده به هنگام شده (X_{n+1}) به‌صورت روابط (46-48) به‌دست خواهد آمد.

$$\mathbf{X}_{n+\alpha} = \mathbb{G}_{\mathrm{e}}\mathbf{X}_n \tag{46}$$

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbb{G}_{\mathrm{p}}\mathbf{X}_{n+\alpha} \tag{47}$$

و یا:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbb{G}_{\mathrm{e}}\mathbb{G}_{\mathrm{p}}\mathbf{X}_{\boldsymbol{n}} \tag{48}$$

در این‌جا، $\mathbb{G}_{\mathrm{e}}$ و $\mathbb{G}_{\mathrm{p}}$ با رابطه (39) مشخص می‌شوند، با این تفاوت که $\Delta\mathrm{e}$ در ناحیه کشسان با $\alpha\Delta\mathrm{e}$ و در ناحیه کشسان- مومسان با $(1-\alpha)\Delta\mathrm{e}$ جایگزین می‌شود؛ بنابراین، رابطه‌های (39) و (41) به‌صورت روابط (49-51) بازنویسی می‌شوند.

$$\mathbb{G}_n = \begin{cases} \mathbb{G}_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{9\times 9} & \alpha\dfrac{2G}{R_n}\Delta\mathbf{e} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbb{G}_{\mathrm{p}} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} + (a_1 - 1)\Delta\hat{\mathbf{e}}\Delta\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}} & b_1\Delta\hat{\mathbf{e}} \\ b_1\Delta\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}} & a_1 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{49}$$

$$a_1 = \cosh(g)\ ,\qquad b_1 = \sinh(g) \tag{50}$$

$$g = \frac{2G}{R_n}(1-\alpha)\|\Delta\mathbf{e}\| \tag{51}$$

آشکار است که $\alpha = 0$ یک گام کشسان- مومسان را نشان می‌دهد، $\mathbb{G}_{\mathrm{e}} = \mathbb{I}$ و $\mathbb{G}_{\mathrm{p}} = \overline{\mathbb{G}}_{\mathrm{p}}$.

در پایان هر گام شعاع سطح تسلیم باید به‌هنگام شود که به کمک رابطه‌های (9) و (25) می‌توان به روابط (53,52) رسید.

$$R_{n+1} = R_0(X_{n+1}^0)^{\beta} \tag{52}$$

$$\beta = \frac{H_{\mathrm{iso}}}{2G + H_{\mathrm{iso}} + H_{\mathrm{kin}}} \tag{53}$$

اما باید شعاع در گام n+1 برحسب شعاع در گام nام محاسبه شود؛ بنابراین رابطه بالا در $(X_n^0)^{\beta}$ به صورت رابطه (54) ضرب و تقسیم می‌شود.

$$R_{n+1} = R_0(X_n^0)^{\beta}\left(\frac{X_{n+1}^0}{X_n^0}\right)^{\beta} = R_n\left(\frac{X_{n+1}^0}{X_n^0}\right)^{\beta} \tag{54}$$

در پایان تنش به‌هنگام‌شده و مرکز سطح تسلیم به‌صورت روابط (55-58) محاسبه می‌شود.

$$\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = \frac{R_{n+1}}{X_{n+1}^0}\mathbf{X}_{n+1}^{\mathrm{s}} \tag{55}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \frac{H_{\mathrm{kin}}}{2G + H_{\mathrm{kin}}}(2G\mathbf{e}_{n+1} - \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}) \tag{56}$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \boldsymbol{\Sigma}_{n+1} + \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \tag{57}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} + K.\theta_{n+1}\mathrm{i} \tag{58}$$

لازم به توضیح است که X^0 یک متغیر تاریخچه‌ای نیست و نیازی به‌هنگام کردن آن نیست؛ بنابراین می‌توان آن را در آغاز هر گام، مقدار یک پنداشت؛ این کار از سرریزشدگی عددی جلوگیری می‌کند.

5- سازگاری الگوریتم عددی

برای نشان دادن آن‌که روش عددی ارائه شده با سطح تسلیم سازگار است، با دریافت این‌که در زمان t_n بردار تنش روی سطح تسلیم قرار داشته باشد، باید ثابت شود پس از به‌هنگام‌سازی تنش به کمک الگوریتم ارائه‌شده، در زمان t_{n+1} نیز، بردار تنش روی سطح تسلیم قرار دارد[6].

در زمان $t = t_n$ تنش روی سطح تسلیم قرار دارد، پس بر پایه رابطه (33) می‌توان رابطه (59) را نوشت.

$$\|\mathbf{X}_n^{\mathrm{s}}\|^2 = (X_n^0)^2 \tag{59}$$

با رابطه‌های (38) و (39) مقادیر X^{s} و X^0 در زمان t_{n+1} به صورت روابط (61,60) به‌دست می‌آید.

$$\mathbf{X}_{n+1}^{\mathrm{s}} = \mathbf{X}_n^{\mathrm{s}} + (a_1 - 1)\Delta\hat{\mathbf{e}}\Delta\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}_n^{\mathrm{s}} + b_1\Delta\hat{\mathbf{e}}X_n^0 \tag{60}$$

$$X_{n+1}^0 = b_1\Delta\hat{\mathbf{e}}\mathbf{X}_n^{\mathrm{s}} + a_1X_n^0 \tag{61}$$

در این‌جا $\|\mathrm{X}_{n+1}^{\mathrm{s}}\|^2$ به‌صورت رابطه (62) محاسبه می‌شود.

$$\|\mathbf{X}_{n+1}^{\mathrm{s}}\|^2 = (\mathbf{X}_{n+1}^{\mathrm{s}})^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_{n+1}^{\mathrm{s}} \tag{62}$$

از رابطه (60) استفاده می‌شود، از طرفی چون $\|\Delta\hat{\mathbf{e}}\| = 1$ است، بنابراین رابطه (63) را به‌صورت زیر داریم.

$$\|\mathbf{X}_{n+1}^{\mathrm{s}}\|^2 = a_1^2\|\mathbf{X}_n^{\mathrm{s}}\|^2 + b_1^2(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}}^{\mathbf{0}})^2 + 2a_1b_1X_n^0\mathbf{X}_n^{\mathrm{s}}\Delta\hat{\mathbf{e}} \tag{63}$$

از سوی دیگر با استفاده از رابطه (61) عبارت $(X_{n+1}^0)^2$ به صورت رابطه (64) محاسبه می‌شود.

$$(X_{n+1}^0)^2 = a_1^2(X_n^0)^2 + b_1^2\|\mathbf{X}_n^{\mathrm{s}}\|^2 + 2a_1b_1X_n^0\mathbf{X}_n^{\mathrm{s}}\Delta\hat{\mathbf{e}} \tag{64}$$

از مقایسه رابطه‌های (63) و (64) رابطه (65) به آسانی به‌دست می‌آید.

$$\|\mathbf{X}_{n+1}^{\mathrm{s}}\|^2 = (X_{n+1}^0)^2 \tag{65}$$

و آن یعنی بردار تنش در زمان $t = t_{n+1}$ روی سطح تسلیم قرار گرفته است.

6- رابطه‌سازی نو در الگوریتم عددی

رابطه (38) یک روش صریح را نشان می‌دهد، چرا که $\mathbb{A}_n$ با استفاده از شعاع سطح تسلیم در زمان t_n، به‌دست آمده است. در طول هر گام زمانی $\mathbb{G}_{\mathrm{e}}$ ثابت است، اما $\mathbb{G}_{\mathrm{p}}$ در صورتی که سخت‌شوندگی همگن موجود باشد با تغییر R، تغییر خواهد کرد. جهت افزایش دقت و کارایی روش عددی، رابطه‌سازی به گونه‌ای انجام می‌شود که بتوان شعاع را از هر قسمت از گام مومسانی برداشت کرد، پس از آن این شعاع در تمام طول گام زمانی ثابت پنداشت شده و در محاسبات به صورت ربطه (66) استفاده می‌شود.

$$R = R_{n+\alpha+\eta(1-\alpha)} \tag{66}$$

η کمیتی عددی در بازه $[0,1]$ پنداشت شده است و روابط (68,67) را نتیجه می‌شود.

$$\mathbf{X}_{n+\alpha}^{\mathrm{s}} = \mathbf{X}_n^{\mathrm{s}} + \boldsymbol{\alpha}\frac{2G}{R_n}X_n^0\Delta\mathbf{e} \tag{67}$$

$$X_{n+\alpha+\eta(1-\alpha)}^0 = \bar{b}\Delta\hat{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}_n^{\mathrm{s}} + \alpha\frac{2G}{R_n}X_n^0\Delta\mathbf{e}\right) + \bar{a}X_n^0 \tag{68}$$

$\bar{a}$ و $\bar{b}$ همان تعریف‌های (50) است با این تفاوت که در اینجا باید روابط (70,69) را نوشت.

$$\bar{a} = \cosh(\eta g) \tag{69}$$

$$\bar{b} = \sinh(\eta g) \tag{70}$$

بنابراین شعاع در نقطه دلخواه از گام کشسان- مومسان به‌صورت رابطه (71) به‌دست می‌آید

$$R_{n+\alpha+\eta(1-\alpha)} = R_n \left(\frac{X^0_{n+\alpha+\eta(1-\alpha)}}{X^0_n}\right)^{\beta} \quad (71)$$

و می‌توان این رابطه را به‌صورت رابطه (72) درآورد.

$$R_{n+\alpha+\eta(1-\alpha)} = R_n H^{\beta} \quad (72)$$

که H از قراردادن (68) در (71) به صورت رابطه (73) به‌دست آمده است.

$$H = \sinh(\eta g)\left(\frac{\Delta \hat{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}} \mathrm{X}^{\mathrm{s}}_n}{X^0_n} + \alpha \frac{2G}{R_n}\|\Delta \mathrm{e}\|\right) + \cosh(\eta g) \quad (73)$$

که در این رابطه‌ها g به‌صورت رابطه (74) تعریف می‌شود.

$$g = \frac{2G}{R_n}(1-\alpha)\|\Delta \mathbf{e}\| \quad (74)$$

7- عملگر مماسی سازگار

در تحلیل‌های اجزای محدود ناخطی که در آن‌ها از شیوه نیوتن- رافسون استفاده می‌شود، برای برپایی ماتریس سختی مماسی سازه به عملگر مماسی سازگار کشسان- مومسان نیاز است [5]. عملگر مماسی سازگار در ناحیه کشسان- مومسان با رابطه (75) محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{2G}{2G + H_{\mathrm{kin}}}\left(\frac{\partial \Sigma_{n+1}}{\partial \mathrm{e}_{n+1}} + H_{\mathrm{kin}}\right)\mathbb{I}_{\mathrm{dev}} + K.\,\mathbf{i}\mathbf{i}^{\mathrm{T}} \quad (75)$$

و برای فاز کشسانی با روابط (76-78) به‌دست می‌آید.

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = 2G\mathbb{I}_{\mathrm{dev}} + K.\,\mathbf{i}\mathbf{i}^{\mathrm{T}} \quad (76)$$

$$\mathbb{I}_{\mathrm{dev}} = \mathbb{I} - \frac{1}{3}(\mathbf{i}\mathbf{i}^{\mathrm{T}}) \quad (77)$$

$\mathbb{I} = 9 \times 9$ ماتریس همانی

$$\mathrm{i}^{\mathrm{T}} = \{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1\} \quad (78)$$

8- آزمون‌های عددی

در این بخش بررسی می‌شود که در فرآیند به‌هنگام‌سازی تنش، شعاع سطح تسلیم از کدام قسمت گام مومسانی برداشت شود تا دقیق‌ترین پاسخ‌ها به‌دست آید. برای رسیدن به این منظور یک پیشینه بارگذاری کرنش معلوم درنظر گرفته می‌شود (شکل 1)، سپس تنش های وابسته برای دو نوع ماده متفاوت به‌هنگام می شوند [4].

در پیشینه کرنش شکل 1 سایر مؤلفه‌های کرنش صفر است. عامل ε_{y0} کرنش نخستین تسلیم را نشان می‌دهد ($\varepsilon_{y0} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{R_0}{E}}$).

ماده 1
$R_0 = 15$ MPa
$E = 100$ MPa; $\upsilon = 0.3$; $H_{\mathrm{kin}} = 10$ MPa; $H_{\mathrm{iso}} = 10$ MPa;

ماده 2
$R_0 = 24.3$ MPa
$E = 7000$ MPa ; $\upsilon = 0.3$; $H_{\mathrm{kin}} = 0$; $H_{\mathrm{iso}} = 225$ MPa;

با توجه به این‌که حل دقیق برای این مسئله‌ها موجود نیست پاسخ‌های به دست‌آمده از گام زمانی بسیار کوچک ($\Delta t = 1 \times 10^{-5} sec$)، به‌عنوان پاسخ‌های دقیق درنظر گرفته می‌شود. برای بررسی مناسب دقت نتیجه‌های به‌دست‌آمده، خطای نسبی تنش‌های به‌هنگام‌شده با رابطه (79) محاسبه می‌شود.

$$E^{\sigma}_n = \frac{\|\sigma_n - \bar{\sigma}_n\|}{\|\bar{\sigma}_n\|} \quad (79)$$

در رابطه بالا، $\bar{\sigma}_n$ بردار تنش دقیق و σ_n بردار تنش به‌هنگام‌شده در لحظه $t = t_n$ است.

با درنظر گرفتن $\Delta t = 0.1\ sec$ خطای نسبی برای مقدارهای η برابر 0.1، 0.2، 0.3، 0.4 و 0.5 در یک نمودار و برای η برابر0.5، 0.6، 0.7،

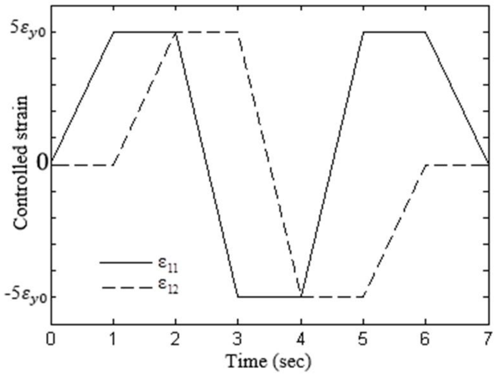

Fig.1 Strain history

شکل 1 پیشینه بارگذاری کرنش

0.8 و 0.9 در نموداری دیگر برای هر یک از ماده‌ها رسم می‌شود. این نمودارها در شکل‌های 2 تا 5 آورده شده است.

همان‌گونه که از شکل‌های 2 تا 5 برمی‌آید کمترین خطای نسبی در $\eta = 0.5$ است. این بدان معناست که در $\eta = 0.5$ دقیق‌ترین پاسخ‌ها به‌دست می‌آید، حال نیاز به بررسی دقیق‌تر در همسایگی $\eta = 0.5$ است؛ بنابراین برای بررسی بهتر دقت تنش‌های به‌هنگام‌شده، خطای نسبی تنش برای مقدارهای η برابر 0.45، 0.48 و 0.5 در یک نمودار و برای η برابر 0.5، 0.52 و 0.55 در نموداری دیگر برای هر ماده رسم می‌شود که در شکل‌های 6 تا 9 این نمودارها آورده شده است.

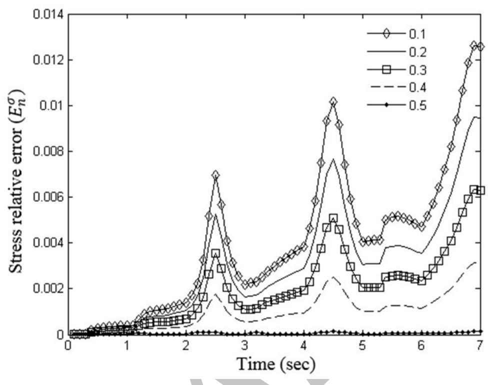

Fig.2 Stress relative error for material 1 with $\eta = 0.1\ to\ 0.5$

شکل 2 خطای نسبی برای ماده 1 با η برابر 0.1 تا 0.5

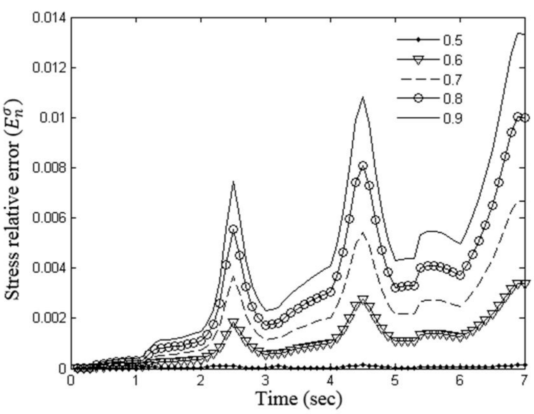

Fig.3 Stress relative error for material 1 with $\eta = 0.5$ to 0.9

شکل 3 خطای نسبی برای ماده 1 با η برابر 0.5 تا 0.9

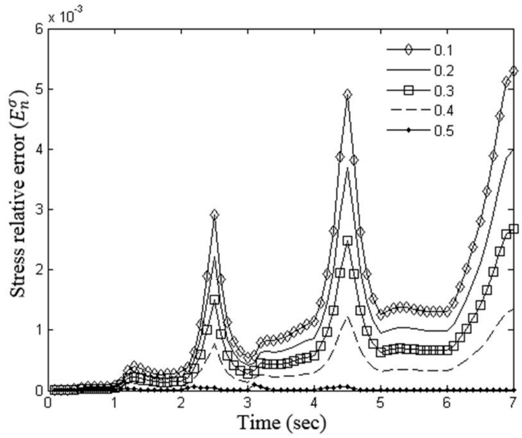

Fig.4 Stress relative error for material 2 with $\eta = 0.1$ to 0.5

شکل 4 خطای نسبی برای ماده 2 با η برابر 0.1 تا 0.5

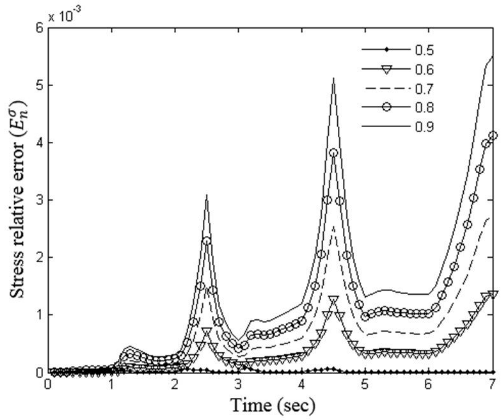

Fig.5 Stress relative error for material 2 with $\eta = 0.5$ to 0.9

شکل 5 خطای نسبی برای ماده 2 با η برابر 0.5 تا 0.9

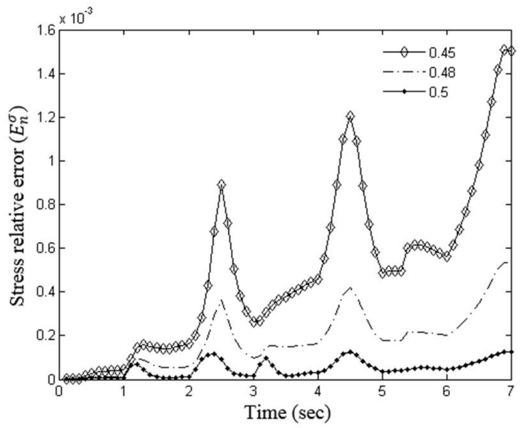

Fig.6 Stress relative error for material 1 with $\eta = 0.45$ to 0.5

شکل 6 خطای نسبی برای ماده 1 با η برابر 0.45 تا 0.5

همان‌گونه که در شکل‌های 6 تا 9 دیده می‌شود، کمترین خطای نسبی در $\eta = 0.5$ است؛ یعنی دقیق‌ترین پاسخ‌ها با $\eta = 0.5$ به‌دست می‌آید. آخرین و ریزترین بررسی برای مقدارهای η برابر 0.49، 0.5 و 0.51 صورت گرفته است و در شکل‌های 10 و 11 نشان داده شده است.

شکل‌های 10 و 11 به روشنی نمایان می‌سازد که $\eta = 0.5$ کمترین خطای نسبی را به‌دست می‌دهد. با توجه به تعریف η این نتیجه را می‌توان بیان کرد که چنان‌چه شعاع از وسط گام کشسان- مومسان برداشت شود و در محاسبات به‌هنگام‌سازی تنش استفاده شود، دقیق‌ترین پاسخ‌ها به‌دست می‌آید. در پایان باید یادآور شد این نتیجه به دلیل ماهیت بسیار پیچیده معادله‌های بنیادی و الگوریتم به‌هنگام‌سازی تنش تاکنون با یک روش تحلیلی به‌دست نیامده است.

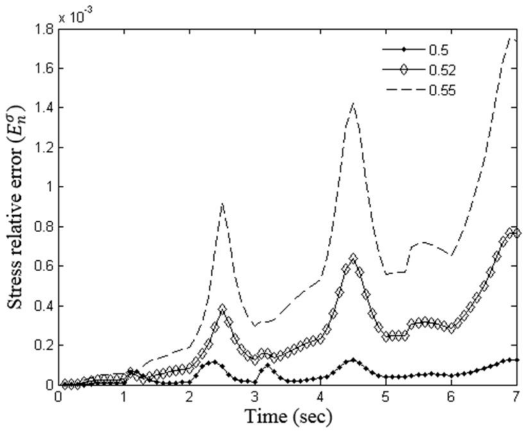

Fig.7 Stress relative error for material 1 with $\eta = 0.5$ to 0.55

شکل 7 خطای نسبی برای ماده 1 با η برابر 0.5 تا 0.55

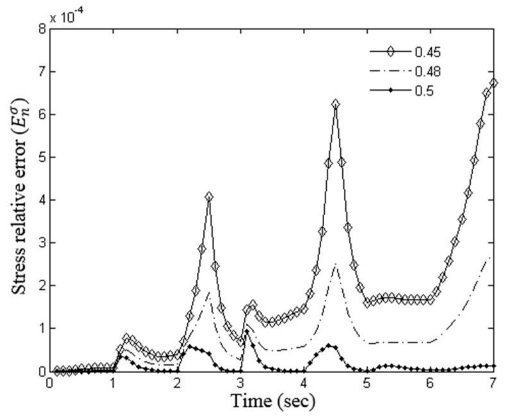

Fig.8 Stress relative error for material 2 with $\eta = 0.45$ to 0.5

شکل 8 خطای نسبی برای ماده 2 با η برابر 0.45 تا 0.5

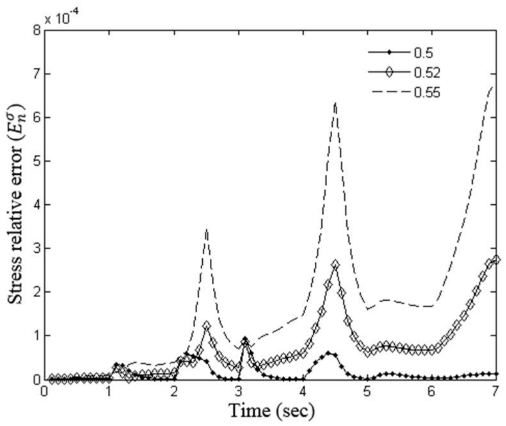

Fig.9 Stress relative error for material 2 with $\eta = 0.5$ to 0.55

شکل 9 خطای نسبی برای ماده 2 با η برابر 0.5 تا 0.55

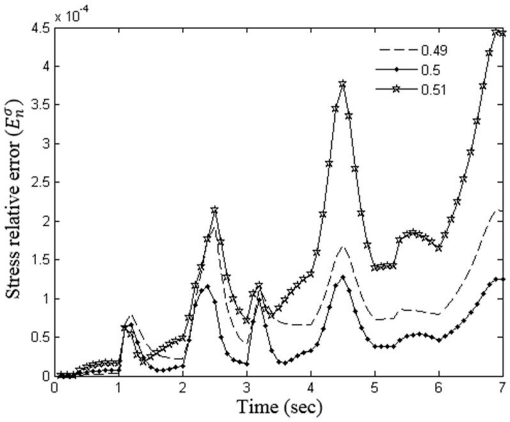

Fig.10 Stress relative error for material 1 with $\eta = 0.49$ to 0.51

شکل 10 خطای نسبی برای ماده 1 با η برابر 0.49 تا 0.51

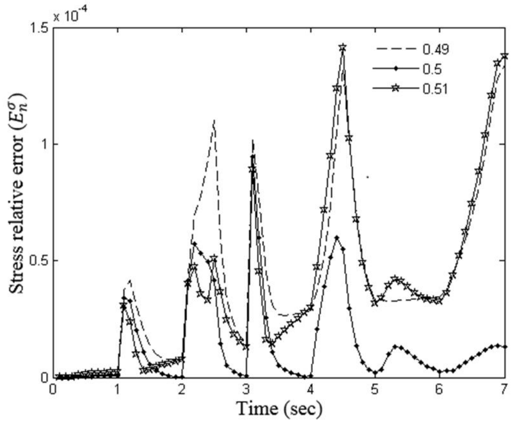

Fig.11 Stress relative error for material 2 with $\eta = 0.49$ to 0.51

شکل 11 خطای نسبی برای ماده 2 با η برابر 0.49 تا 0.51

9- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی روش نیمه‌ضمنی بر پایه نگاشت‌نمایی برای سخت‌شوندگی‌های درهم همگن و پویای خطی پرداخته شد. برای آن‌که بتوان شعاع را از هر نقطه دلخواه از گام مومسانی برداشت کرد، رابطه‌سازی لازم صورت گرفت. آزمون عددی به این صورت طرح شد که یک مسیر بارگذاری کرنش معلوم درنظر گرفته شد، سپس برای دو نوع ماده متفاوت تنش‌ها به‌هنگام شدند.

به‌هنگام‌سازی تنش در آزمون عددی در مرحله‌های مختلف صورت پذیرفت. در حقیقت در هر مرحله شعاع و متغیرهای مومسانی از یک قسمت خاص از گام مومسانی برداشت شد. در هر مرحله تنش‌های به‌هنگام‌شده با پاسخ‌های دقیق مقایسه و دقت هر یک از مرحله‌های یادشده به‌صورت جداگانه محاسبه و در نمودارهایی ترسیم شد. بر پایه تحلیل‌های صورت گرفته می‌توان دریافت که در روش نیمه‌ضمنی بر پایه نگاشت‌نمایی، استفاده از شعاع سطح تسلیمی که از میانه گام مومسانی برداشت می‌شود، دقیق‌ترین پاسخ در به‌هنگام سازی تنش‌ها را به‌دست می‌دهد. از آن‌جا که در تابع اولیه‌گیری از معادله‌های بنیادی مومسانی، هر چه دقت روش مورد استفاده افزایش یابد می‌توان در تحلیل گام‌های زمانی بزرگ‌تری را لحاظ کرد؛ بنابراین در عین حال که دقت مورد نیاز تأمین می‌شود، زمان تحلیل کاهش می‌یابد که یکی از عامل‌های بسیار مهم در تحلیل و طراحی سازه‌هاست.

10- مراجع

[1] H.-K. Hong, C.-S. Liu, Internal symmetry in bilinear elastoplasticity, *Non-Linear Mechanics*, Vol. 34, No. 2, pp. 279-288, 1999.

[2] F. Auricchio, L. Beirao da Veiga, on a new integration scheme for Von-Mises plasticity with linear hardening, *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 56, No. 10, pp. 1375-1396, 2003.

[3] C.-S. Liu, International symmetry groups for the Drucker-Prager material model of plasticity and numerical integrating methods, *Solids and Structures*, Vol. 41, No. 14, pp. 3771-3791, 2004.

[4] E. Artioli, F. Auricchio, L. Beirao da Veiga, Integration scheme for Von-Mises plasticity models based on exponential maps: Numerical investigations and theoretical considerations, *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 64, No. 9, pp. 1133-1165, 2005.

[5] E. Artioli, F. Auricchio, L. Beirao da Veiga, A novel ‘optimal’ exponential-based integration algorithm for Von-Mises plasticity with linear hardening: Theoretical analysis on yield consistency, accuracy, convergence and numerical investigations, *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 67, No. 4, pp. 449-498, 2006.

[6] M. Rezaiee-Pajand, C. Nasirai, Accurate integration scheme for Von-Mises plasticity with mixed-hardening based on exponential maps, *Engineering Computations*, Vol. 24, No. 6, pp. 608-635, 2007.

[7] E. Artioli, F. Auricchio, L. Beirao da Veiga, Second-order accurate integration algorithms for Von-Mises plasticity with a nonlinear kinematic hardening mechanism, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, No. 9, pp. 1827-1846, 2007.

[8] M. Rezaiee-Pajand, C. Nasirai, On the integration scheme for Drucker-Prager’s elastoplastic models based on exponential maps, *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 74, No. 10, pp. 799-826, 2008.

[9] M. Rezaiee-Pajand, C. Nasirai, M. Sharifian, Application of exponential-based methods in integrating the constitutive equations with multi-component nonlinear kinematic hardening, *ASCE Engineering Mechanics*, Vol. 136, No. 12, pp. 1502-1518, 2010.

[10] M. Rezaiee-Pajand, C. Nasirai, M. Sharifian, Integration of nonlinear mixed hardening models, *Multidiscipline Modeling in Materials and structures*, Vol. 7, No. 3, pp. 266-305, 2011.

[11] M. Rezaiee-Pajand, M. Sharifian, A novel formulation for integrating nonlinear kinematic hardening Drucker-Prager’s yield condition, *Mechanics A/Solids*, Vol. 31, No. 1, pp. 163-178, 2011.

[12] M. Rezaiee-Pajand, M. Sharifian, M. Sharifian, Accurate and approximate integrations of Drucker-Prager plasticity with linear isotropic and kinematic hardening, *Mechanics A/Solids*, Vol. 30, No. 3, pp. 345-361, 2011.

[13] M. Rezaiee-Pajand, F. Auricchio, M. Sharifian, M. Sharifian, Computational plasticity of mixed hardening pressure-dependency constitutive equations, *ActaMechanica*, Vol. 225, No. 6, pp. 1699-1733, 2014.