



## کاربرد روش شبکه بولتزمن برای شبیه‌سازی جریان گازی در یک میکروکانال تحت تاثیر میدان مغناطیسی

احمد رضا رحمتی<sup>1\*</sup>، حسین خراسانی‌زاده<sup>2</sup>، محمدرضا عرب‌یار محمدی<sup>3</sup>

1-استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان

2-دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان

3-دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان

\*کاشان، صندوق پستی 87317-51167، ar\_rahmati@kashanu.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 28 اردیبهشت 1395

پذیرش: 30 خرداد 1395

ارائه در سایت: 29 تیر 1395

کلید واژگان:

روش شبکه بولتزمن

میکروکانال

مگنتوگازدینامیک

نیروی لورنتس

سرعت لغزشی

### چکیده

در کار حاضر جریان گازی با نادسن خروجی 0.2 تحت تاثیر میدان مغناطیسی در یک میکروکانال که با گرادیان فشار تحریک شده مورد مطالعه قرار می‌گیرد. اثر تغییرات پارامترهای میدان مغناطیسی شامل قدرت و طول با اعمال سرعت لغزشی در دیواره‌های میکروکانال به صورت عددی شبیه‌سازی شده است. مدل هندسی جریان، یک مجرای مسطح دوبعدی با عرض ثابت در طول میکروکانال بوده و جریان مورد نظر پایدار و آرام فرض شده است. معادلات حاکم بر میدان جریان و میدان مغناطیسی به روش شبکه بولتزمن و به طور هم‌زمان حل شده و تغییرات سرعت، فشار، نیروی لورنتس و مولفه آلفایی میدان مغناطیسی مورد بحث قرار گرفته است. ویژگی این تحقیق، متغیر بودن پارامترهایی مانند عدد نادسن و نیروهای حجمی در طول میکروکانال است. از طرف دیگر، با استفاده از دقت مرتبه دو در محاسبه سرعت لغزشی، نتایج با بهبود قابل توجهی به روابط تحلیلی نزدیک شده و با تعیین مناسب پارامتر زمان آرامش، خطای منحنی انحراف فشار نسبت به مطالعات گذشته کاهش می‌یابد. نتایج شبیه‌سازی عددی نشان می‌دهد که با کاهش طول میدان مغناطیسی اعمالی به 40% میانی میکروکانال، رفتار مولفه محوری نیروی مغناطیسی به توزیع M شکل تبدیل شده و شیب فشار در ناحیه اثر میدان افزایش یافته و نقطه بیشینه انحراف فشار در طول کانال جابه‌جا می‌شود. از طرفی سرعت در دیواره، در این ناحیه، دارای رفتاری متفاوت از سرعت در مرکز کانال است.

## Application of Lattice Boltzmann Method for Simulating MGD in a Microchannel under Magnetic Field Effects

Ahmad Reza Rahmati\*, Hussein Khorasanizadeh, Mohammad Reza Arabyarmohammadi

Department of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran

\*P.O.B. 87317-51167, Kashan, Iran, ar\_rahmati@kashanu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 17 May 2016  
Accepted 19 June 2016  
Available Online 20 July 2016

**Keywords:**  
Lattice Boltzmann Method  
Microchannel  
MGD  
Lorentz Force  
Slip Velocity

### ABSTRACT

In this paper, magnetogasdynamics with outlet Knudsen of 0.2 is studied in a pressure-driven microchannel. By using a developed code, the effects of changing magnetic field parameters including power and length with implementation of slip velocity at the walls have been simulated numerically. The geometry is a two dimensional planar channel having a constant width throughout. The flow is assumed to be laminar and steady in time. In order to analyze the variation of velocity, pressure, Lorentz force and induction magnetic field, the governing equations for flow and magnetic fields have been solved simultaneously using the lattice Boltzmann. No assumption of being constant for parameters like Knudsen and volumetric forces is made. Another feature of this research is to improve the quantity of results, which is a major problem in this method and many studies have been done in this area. This study presents the results which have more quantitative agreement with that of analytical relations by using a second order accuracy for calculation of slip velocity and correction of pressure deviation curve in comparison with the past studies if a proper relaxation time is determined. The simulation results show a change in  $F_x$  profile to M if the length of external magnetic field length reduces to 40% of the whole. Removing applied magnetic field from both ends of the channel will increase pressure gradient at the intermediate part and displace the section at which the maximum pressure deviation occurs. Slip velocity and centerline velocity behave differently for the reduced magnetic field length.

### 1- مقدمه

علم در مقیاس‌های میکرو و نانو باعث شده تا جهش خوبی در استفاده از سیستم‌های میکروالکترومکانیکی در صنایع نظامی، مخابراتی، الکترونیکی، پزشکی و حمل و نقل بوجود آید. هم اکنون از این سیستم‌ها در انواع حسگرها، مبدل‌ها، کنترل کننده‌های جریان، پمپ‌ها و جنگ افزارهای

سیستم‌های میکروالکترومکانیکی، ابزارهایی در اندازه میکرون هستند که از اجزای مکانیکی و الکتریکی تشکیل می‌شوند. جذابیت‌های سیستم میکروالکترومکانیکی در کوچک‌سازی و گستره کاربرد آنها است [1]. توسعه

معادلات موفق شدند که در ناحیه جریان لغزشی، به نتایج بسیار دقیقی در مقایسه با کارهای تجربی دست یابند.

شرایط مرزی در روش شبکه بولتزمن بسیار حائز اهمیت است و در همگرایی حل جریان‌ها تاثیر زیادی دارد. ژائولی و همکاران [15] از روش برون‌یابی غیرتعدالی برای شرایط مرزی سرعت و فشار بهره گرفته‌اند. در این روش، تابع توزیع در گره‌های مرزی به دو بخش تعادلی و غیرتعدالی تفکیک می‌شوند. بخش غیرتعدالی و مجهول در مرز با برون‌یابی مرتبه اول از قسمت غیرتعدالی گره مجاور به دست می‌آید. این روش نسبت به روش چن و همکاران [16] دارای پایداری عددی بهتری بوده و از دقت مرتبه دو برخوردار است. شرط مرزی لغزشی ماکسول مرتبه اول توسط ریس و دلار [17] برای شبیه‌سازی جریان‌های رقیق نزدیک به حالت پیوسته در میکروکانال‌ها استفاده شده‌است. این روش نیز برای جریان‌های تراکم‌پذیر از دقت مرتبه دو برخوردار است.

طبق مطالعات ژئونگ [18]، دلیل تفاوت نتایج حاصل از تحقیقات مختلف در جریان‌های گازی رقیق، استفاده از شرایط مرزی مختلف و ارائه روابط متعدد بین عدد نادسن و زمان آرامش است. در پارامترهای مختلف موثر بر شرایط مرزی دیواره، ژانگ و همکاران [19] به مطالعه روی ضریب انطباق ممنوم مماسی برای بررسی عکس‌العمل دیواره با سیال در عدد نادسن محدود پرداختند. بررسی‌های اسپراگالیا و سوشی [20] برای شرایط مرزی در روش شبکه بولتزمن نشان می‌دهد که می‌توان ضریب لغزش در دیواره را به‌گونه‌ای تنظیم کرد که با استفاده از دقت مرتبه دو برحسب عدد نادسن، انطباق مناسبی با نتایج تحلیلی و تجربی بدست آورد.

شاترجی و امیرالدین [21] برای مطالعه خواص ترمودینامیکی سیال در حال حرکت در یک میکروپمپ مگنتوهیدرودینامیک جریان مستقیم، یک الگوریتم غیر هم‌دما با روش شبکه بولتزمن ارائه کردند. معادلات ارائه شده و نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که شرط مرزی سرعت لغزشی در محاسبات بکارگرفته نشده و جریان تراکم‌ناپذیر بوده است. خزیمه نژاد و نیازمند [22] برای تحلیل اثرات پارامترهای هندسی و عملکردی یک میکروپمپ لزجی با رویکرد کمینه‌سازی آنتروپی از روش شبکه بولتزمن استفاده کرده و محدوده بهینه برای پارامترهای هندسی و عملکردی را مشخص کرده‌اند.

برای تحلیل یک میکروپمپ الکترومگنتوهیدرودینامیک با روش شبکه بولتزمن، پارامترهای تاثیرگذار که در حل این‌گونه مسائل باید در نظر گرفته شوند شامل تراکم‌پذیری، رقت، گرمایش ویسکوز و خزش دمایی بوده [23] و حل هم‌زمان معادلات حاکم بر میدان جریان با میدان دما، میدان مغناطیس، میدان الکتریکی و تابع توزیع یون‌ها را نیاز دارد. در مطالعات انجام شده تاکنون، هر کدام برخی از موارد مطرح شده فوق را در نظر گرفته‌اند.

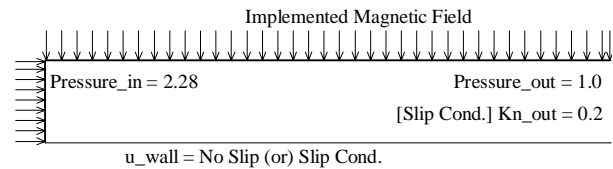
مطالعات تئوری در زمینه کاربرد میدان مغناطیسی برای جریان‌های گازی به قرن بیستم باز می‌گردد ولی در سال‌های اخیر و پس از سال 2000 میلادی، تحقیقات صورت گرفته جنبه کاربردی به‌خود گرفته است. در فصل نهم کتاب دینامیک پلاسما و جریان‌های گازی تحت تاثیر میدان مغناطیسی که ویرایش جدید آن در سال 2012 به چاپ رسیده [24]، بیان شده که اگر ژنراتورهای مگنتوهیدرودینامیک، با گازهای یونیزه شده به عنوان سیال رسانا، برای تولید توان‌های بیش از یک مگاوات بکار روند نسبت به تجهیزات معمول سبک‌تر و کوچک‌تر خواهند شد. اگرچه به دلیل نبود اطلاعات کافی برای تکنولوژی‌های دما بالا، این ژنراتورها هنوز در مرحله توسعه می‌باشند. سای و خاسانه [25]، جریان‌های گازی شبه‌هم‌دما با رینولدز مغناطیسی پایین و

هوشمند استفاده وسیعی صورت می‌گیرد [2]. این سیستم‌ها با تکنیک لیتوگرافی ساخته می‌شوند و می‌توان میلیون‌ها قطعه میکروالکترومکانیکی را به سادگی یک نمونه تولید کرد. اخیراً مطالعه جامعی در زمینه آزمایشگاه‌های کوچک که در مقیاس میلیمتر و کمتر ساخته می‌شوند، انجام شده که به اصول، کاربردها، نحوه مدل‌سازی و ساخت این قطعات می‌پردازد [3]. برخی از این تجهیزات مانند میکروپمپ‌ها شامل میکروکانال‌هایی برای عبور سیال هستند. آزمایشگاه‌های کوچک مبتنی بر میدان مغناطیسی در سال‌های اخیر بسیار گسترش پیدا کرده‌اند. اکنون می‌توان میدان‌های مغناطیسی و آهنرباها را در مقیاس میکرومتر ساخت و روی یک تراشه نصب کرد [4]. شش کاربرد رایج سیال‌های رسانا در سیستم‌های میکروسایالی مغناطیسی که شامل مخلوط‌سازی، پمپاژ، میکروقطره‌ساز، تمرکزدهنده جریان، جداساز ذرات و انتقال دهنده جرم است در مطالعه مروری توسط یانگ و همکاران [5] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. الحیاچه و همکاران [6] کاربرد پمپ‌های مگنتوهیدرودینامیکی را از مقیاس نانو تا ماکرو در پمپ‌های آب دریا، فلز مذاب، نمک مذاب، نانو سیالات و در نهایت میکروپمپ‌ها ارائه کرده‌اند.

رفتار جریان در این سیستم‌های بسیار کوچک، متفاوت از آن چیزی است که در مقیاس معمولی با آن مواجه می‌شویم؛ بنابراین برای مدل‌سازی جریان سیال در میکروکانال‌ها به روش‌های موثرتر و جامع‌تری نیاز بوده تا در فرآیند طراحی، کمتر از آزمایش استفاده کرد و هزینه‌ها را کاهش داد. برخلاف جریان‌هایی در مقیاس ماکرو، ساخت ابزارهای آزمایش در مقیاس میکرو بسیار مشکل و با هزینه زیاد است [7]. لموف و همکاران [8] یک نمونه میکروپمپ مگنتوهیدرودینامیک با جریان متناوب را ساخته و تست کردند. این میکروپمپ هیچ قطعه متحرکی نداشته و فقط از نیروی لورنتز برای حرکت محلول الکترولیت استفاده می‌کند. دلاکه‌نژاد و میربرزگی [9] اثر تغییر طول میدان الکترومغناطیس را در یک ریزپمپ ام‌اچ‌دی و در هارتمن پایین با روش حجم محدود مورد مطالعه قرار داده و حداکثر دبی و دمای میانگین را با در نظر گرفتن تغییر خواص آب بدست آورده‌اند. درخشان و یزدانی [10] نیز با روش مشابه و استفاده از الگوریتم سیمپل، جریان سیال در یک میکروپمپ مگنتوهیدرودینامیک را تحلیل نموده و اثر شدت میدان مغناطیسی و ابعاد هندسی را بررسی کرده‌اند. طبق نتایج به دست آمده، نیروی حجمی لورنتز، مستقل از عرض کانال بوده ولی با افزایش عمق کانال کاهش می‌یابد.

روش شبکه بولتزمن، روشی با دیدگاه مبتنی بر ذره است که به عنوان یک راه موثر برای شبیه‌سازی میکروجرین‌ها در مقیاس مزوسکوپیک مطرح می‌باشد. این روش به بررسی مجزای هر یک از ملکول‌های موجود در یک گره شبکه نمی‌پردازد و بنابراین نسبت به روش شبیه‌سازی مستقیم مونت‌کارلو مشکلات کمتری دارد [11]. علاوه بر این، همه رژیم‌های جریان از مقیاس ماکرو تا جریان آزاد ملکولی را پوشش داده و برای هندسه‌های بسیار پیچیده کاربرد دارد. مطالعه مروری روی دامنه وسیع کاربردهای روش شبکه بولتزمن توسط چن و دولن [12] انجام شده است. مباحث نانوسیال، تخلخل، انتقال حرارت و میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی از جمله پرکاربردترین زمینه‌های تحقیقاتی برای روش شبکه بولتزمن است.

وانگ و همکاران [13]، مرور کاملی بر تحقیقات صورت گرفته روی میکروجرین‌های گازی هم‌دما به روش شبکه بولتزمن داشته و شرایط مرزی مختلف، روابط معرفی شده برای زمان آرامش و مزایا و معایب هر یک را مورد بحث و بررسی قرار داده‌اند. لی و لین [14] با تعریف یک رابطه دقیق‌تر برای نادسن و شرط مرزی تعادلی در دیواره و با استفاده از دقت مرتبه دو در



**Fig. 1** Pressure-driven microchannel and implemented magnetic field at the channel walls

شکل 1 میکروکانال با محرکه فشار و اعمال میدان مغناطیسی در دیواره‌های کانال

جدول 1 کمیت‌های ورودی مساله و نحوه تغییر پارامترهای میدان مغناطیسی

Table 1 Problem's inputs and variation of magnetic field parameters			
$\frac{H}{L} = 0.05$	$\frac{P_{in}}{P_{out}} = 2.28$	$Ma = 0.1$	کمیت‌ها
Ha	B Length	B Profiles	میدان مغناطیسی
5.4	100%L	Constant Magnitude	
Ha	B Length	B Profile	تغییر قدرت
0.54	100%L	Constant Magnitude	
Ha	B Length	B Profile	تغییر طول
5.4	40%L	Constant Magnitude	

معادلات حاکم بر جریان سیال و میدان مغناطیسی به صورت هم‌زمان حل می‌شوند. عدد نادسن در خروجی کانال در محدوده جریان گذرا (0.2) قرار دارد و نمی‌توان رفتار جریان را مبتنی بر فرض پیوستگی پیش‌بینی کرد. در این تحقیق با افزودن اثر میدان مغناطیسی، به مطالعه و تحلیل رفتار میدان سرعت با تغییر پارامترهای میدان مغناطیسی پرداخته شده و نحوه توزیع میدان مغناطیسی در جریان سیال مورد بررسی قرار گرفته است. پارامترهای متغیر میدان مغناطیسی شامل قدرت میدان (عدد هارتمن 0.54 و 5.4) و طول میدان (40% و 100% کانال) بوده و توزیع میدان مغناطیسی، ثابت در نظر گرفته شده است.

### 3- معادلات حاکم بر مساله

رفتار دینامیکی سیال در مقیاس ماکرو که تحت تاثیر میدان مغناطیسی قرار دارد تابعی از معادلات دیفرانسیلی بقای جرم و ممنتوم و بقای مغناطیس است و در رابطه (1) ارائه شده است.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

$$\frac{\partial (\rho V)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V V) = -\nabla p + \nabla \cdot [\partial \nabla (\rho V)] + F_L$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (V \times B) + \eta \nabla^2 B$$

$$F_L = j \times B \quad j = \sigma (V \times B) \quad (1)$$

روش شبکه بولتزمن از روش‌های شبکه گازی نشات گرفته و یک دهه بعد ابه [28] ثابت کرد که می‌توان آن را مستقیماً از معادله بولتزمن استخراج نمود. رابطه (2)، معرف معادله بولتزمن با تقریب خطی بی‌جی‌کیاست. تفاضل در سمت راست معادله نشان دهنده انحراف از حالت تعادل است.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + e \cdot \nabla f = \omega (f^{eq} - f) \quad (2)$$

هارتمن‌های کمتر از یک را در یک میکروکانال دوبعدی با اثر لغزش و پرش دما مورد بررسی قرار داده‌اند و با مقایسه مقادیر افت فشار، نیروهای مغناطیسی و تنش‌های برشی ویسکوز در دیواره کانال، به ساده‌سازی معادلات حاکم بر دینامیک جریان‌های گازی تحت تاثیر میدان مغناطیسی پرداخته‌اند. ایجاد نیروی رانش الکترومغناطیس در جریان‌های گازی یونیزه شده با محرکه فشار و تحت تاثیر میدان مغناطیسی و الکتریکی در یک میکروکانال توسط ونگ و چن [26] مورد مطالعه قرار گرفته و یک مدل ریاضی بر حسب اعداد بی‌بعد برای آن ارائه شده است. نتایج برای  $10.0 \leq Ha \leq -10.0$  نشان داده که نیروی رانشی تولید شده می‌تواند باعث افزایش سرعت لغزشی و مقاومت جریان شود. از طرف دیگر با افزایش عدد نادسن، اثر نیروی الکترومغناطیس بر لغزش در دیواره‌ها بیشتر شده ولی تاثیر آن بر مقاومت کاهش می‌یابد. آگاروال و دلار با توسعه روش شبکه بولتزمن، کامل‌ترین مباحث را در این زمینه از سال 2000 میلادی به بعد ارائه کرده‌اند. تحقیق حاضر در ادامه مطالعات آگاروال و چوساک [27]، به شبیه‌سازی میکروپمپ مغناطیسی جریان مستقیم با محرکه فشار می‌پردازد. پس از شبیه‌سازی عددی میکروجریان و اعتبارسنجی با نتایج تحلیلی [27] و عددی [23]، اثرات قدرت و طول میدان مغناطیسی بر سرعت لغزشی، انحراف فشار و تغییرات نادسن مورد بررسی قرار می‌گیرند.

در این تحقیق دو هدف اصلی مدنظر قرار گرفته است. هدف اول دستیابی به ابزار شبیه‌سازی است که از روش شبکه بولتزمن به‌عنوان یک روش پربازده و در حال توسعه برای بررسی رفتار میکروجریان تحت تاثیر نیروهای خارجی استفاده می‌کند، ضمن اینکه هیچ‌یک از پارامترهای تاثیرگذار در مسئله را ثابت فرض نمی‌کند (حل همزمان معادلات جریان و معادلات حاکم بر القای مغناطیسی) و از شرایط مرزی نزدیک‌تر به واقعیت بهره می‌برد (شرط مرزی فشار بجای شرط مرزی سرعت). هدف دوم بالا بردن دقت حل مسئله و کاهش خطای محاسباتی است. در مطالعات زیادی که تاکنون انجام شده، کیفیت نتایج همواره مورد تایید بوده ولی از لحاظ کمیت، هنوز نیاز به تحقیقات بیشتر در این زمینه احساس می‌شود. در این مطالعه با استفاده از دقت مرتبه دوم در محاسبه سرعت لغزشی و انتخاب ضرایب مناسب برای مشتقات مرتبه اول و دوم سرعت در دیواره کانال، سعی در بهبود خطای نتایج نسبت به مطالعات گذشته است. پارامتر دیگری که برای کاهش خطای محاسبات در میدان جریان بررسی می‌شود، زمان آرامش است که انتخاب صحیح این عدد و تغییرات آن در طول کانال بر نحوه انحراف فشار تاثیر خواهد گذاشت. ویژگی کار حاضر، تحقق همزمان اهداف تشریح شده (حل همزمان معادلات حاکم، متغیر بودن پارامترهای میکرو جریان در طول کانال و کاهش خطای محاسباتی) با روش شبکه بولتزمن است.

### 2- تشریح مساله

مدل مطالعاتی این تحقیق که در شکل 1 نشان داده شده، یک میکرو کانال در شرایط هم‌دما و تحت تاثیر میدان مغناطیسی است که سیال رسانا از آن عبور می‌کند. کمیت‌های ورودی مساله (اختلاف فشار، نسبت ابعادی، نادسن و ماخ در خروجی کانال) در جدول 1 مشخص شده است.

محاسبات عددی در یک برنامه کامپیوتری ارتقا یافته به زبان فرترن انجام شده است. جریان بر اثر اختلاف فشار تعریف شده، وارد میکرو کانال شده و تحت تاثیر میدان مغناطیسی اعمالی و القایی قرار می‌گیرد. باتوجه به پایین بودن عدد رینولدز، فرض جریان آرام منطقی است. بالا بودن رینولدز مغناطیسی حاکی از اثر میدان القایی بوده و نمی‌توان از آن صرف‌نظر کرد. لذا

در رابطه (3) پارامتر  $\omega$ ، سرعت رسیدن به حالت تعادل را تنظیم می‌کند و وابسته به فشار و لزجت سینماتیکی است.

$$\omega = \frac{p(x, t)}{\vartheta(T)} \quad (3)$$

رابطه (4) که برای تابع توزیع تعادلی ارائه شده را می‌توان به کمک بسط سری تیلور با دقت مرتبه دو ساده‌سازی کرد.

$$f^{eq} = \frac{\rho}{2\pi RT} \exp\left(-\frac{1}{2RT}(e - V)^2\right) \quad (4)$$

با فرض عدد نادسن کوچک و استفاده از بسط چاپمن-انسکوگ، می‌توان از معادله بولتزمن به ناوبراستوکس رسید [29].

#### 4- ویژگی‌های فیزیکی مساله

میکروکانال‌ها دارای ابعادی از مرتبه 0.1 تا 10 میکرومتر هستند. در این ابعاد بسیار کوچک، ممکن است ذره سیال مسافت نسبتاً طولانی را طی کرده و قبل از تصادم با ذرات دیگر با مرزهای کانال برخورد کند. این مفهوم که با عدد نادسن تعریف می‌شود [30]، به‌عنوان یک پارامتر مهم، میزان رقت را بیان کرده و نسبت طول آزاد میانگین به طول مشخصه سیستم می‌باشد. با افزایش نادسن، اثر رقت اهمیت زیادی پیدا می‌کند. عدد نادسن معیار تقسیم بندی جریان به رژیم‌های مختلف است. رژیم جریان پیوسته در  $Kn < 0.001$ ، جریان لغزشی در  $0.001 < Kn < 0.1$ ، جریان گذرا در  $0.1 < Kn < 10$  و جریان آزاد ملکولی در  $Kn > 10$  تعریف می‌شوند. برای آنالیز جریان سیال می‌توان از مدل‌های ملکولی و یا پیوسته استفاده کرد. مزیت مدل‌های ملکولی، گستره کاربرد آنها در همه رژیم‌های جریانی است ولی مدل‌های پیوسته را فقط در اعداد نادسن کمتر از 0.1 می‌توان استفاده کرد و در محدوده نادسن 0.001 تا 0.1، باید از معادلات ناوبراستوکس با شرط مرزی لغزشی استفاده کرد. معادله انتقال بولتزمن در مدل‌های ملکولی تا نادسن کمتر از 10 بکار گرفته می‌شود و برای رقت بیشتر، فرض عدم تصادم به این معادله افزوده می‌شود. پارامتر مهم دیگر در میکروجرایان‌ها، سرعت لغزشی در مرزهای دیواره است. شرط عدم لغزش تا وقتی معتبر است که نادسن کمتر از 0.001 باشد. با خارج شدن از ناحیه پیوستگی جریان، به دلیل کافی نبودن فرکانس برخورد، احتمال رسیدن به حالت تعادل کاهش می‌یابد و سرعت لغزشی قابل ملاحظه خواهد بود [31]. شرط مرزی مهم‌ترین قسمت از الگوریتم شبکه بولتزمن است. تانگ و همکاران [32]، جو و همکاران [33] و هوانگ و همکاران [34] تحقیقات متعددی را با شرایط مرزی مختلف انجام داده‌اند تا سرعت لغزشی در دیواره را به صورت عددی شبیه‌سازی کنند. آرکیلیک و همکاران [7] با ساخت یک میکروکانال و انجام آزمایش‌های تجربی نشان دادند که در جریان لغزشی، نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی به کمک معادلات ناوبراستوکس تراکم پذیراز دقت مناسبی برخوردار است.

مطالعاتی که در زمینه مگنتوهیدرودینامیک انجام شده، برهم کنش انرژی جنبشی و مغناطیسی و اثر نیروی لورنتس روی میدان جریان را مورد بررسی قرار می‌دهند. بردار سرعت و نیروی لورنتس، میزان اثر متقابل ممنتومسیال و میدان مغناطیسی در هر یک از نقاط جریان را تعیین می‌کند. لذا نیروی مغناطیس ابزار کنترل کننده جریان برای سیال‌های رسانا است. دلیل حل هم‌زمان معادله القای مغناطیسی و معادله حاکم بر جریان در این تحقیق، رینولدز مغناطیسی است که میزان نفوذ میدان مغناطیسی در ذرات سیال را تعیین می‌کند و هرچه این عدد بیشتر باشد، سیال رساناتر بوده و میدان مغناطیسی القایی بزرگتری ایجاد می‌شود. در رینولدز مغناطیسی پایین،

#### 5- شرایط مرزی و گسسته‌سازی

برای مقادیر نادسن بزرگتر از 0.05، باید از دقت مرتبه دو به‌منظور محاسبه سرعت لغزشی استفاده کرد [35] که در این تحقیق مدنظر قرار گرفته است. با توجه به عدد نادسن در کار حاضر و بهره‌گیری از مطالعه مروری آگاروال [36] روی شبیه‌سازی اثرات لغزش در هندسه‌های مختلف، رابطه (5) ارائه شده است. ضرایب ارائه شده در رابطه (5) از نتایج تست‌های تجربی بدست آمده‌اند و اعتبارسنجی نتایج به دست آمده در کار حاضر با سه مرجع متفاوت [27، 23، 5] با این ضرایب انجام شده است.

$$u_{wall} = C_1 Kn \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{wall} + C_2 Kn^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{wall} \quad (5)$$

$$0.03 < Kn < 0.7 \rightarrow C_1 = 1.26, C_2 = 0.17$$

در ورودی و خروجی کانال شرط مرزی فشار اعمال شده است. همان‌طور که در رابطه (6) نشان داده شده، نادسن رابطه معکوس با تغییرات فشار دارد، لذا نادسن و در نتیجه سرعت لغزشی در دیواره کانال باید روند صعودی داشته باشند. زمان آرامش در هر مقطع از کانال متناسب با نادسن تغییر می‌کند،  $\tau \propto Kn$  و برای اولین بار توسط لیم و همکاران [23] برای میکروجرایان‌های تراکم پذیر ارائه شده که در آن‌ها فرض پیوستگی معتبر نیست. در این رابطه فرض شده که مدت زمان رسیدن به آرامش برای ذرات سیال معادل با فاصله زمانی است که بین دو برخورد تجربه می‌کنند. اعتبارسنجی رابطه ارائه شده برای زمان آرامش در کار حاضر، نهایتاً تا نادسن 0.2 معتبر بوده و تمام محدوده رژیم گذرا را شامل نمی‌شود. این رابطه توسط آگاروال و چوساک [33] در حل هم‌زمان میدان سرعت و میدان مغناطیسی تا عدد نادسن 0.2، در خروجی یک میکروکانال با شرط مرزی فشار، صحت سنجی شده است. قابل ذکر است که لیو و جو [37] برای صرفاً میدان سرعت در یک میکروکانال با شرط مرزی فشار درستی این رابطه را تا عدد نادسن خروجی 0.388 بررسی کرده‌اند.

$$Kn(x) \times P(x) = Kn(L) \times P(L)$$

$$\tau = 3\vartheta \quad Re = \frac{\bar{u}H}{\vartheta} \quad Kn_0 = \sqrt{\frac{\gamma\pi M_0}{2 Re}} \quad (6)$$

در رابطه (6)، با فرض ثابت بودن لزجت دینامیکی در جریان‌های هم‌دما و تناسب خطی زمان آرامش با نادسن می‌توان به ثابت ماندن حاصل ضرب فشار در عدد نادسن رسید. در رابطه (7) برای استخراج شرایط مرزی، روش هیدرودینامیکی استفاده شده که مبتنی بر رابطه بین مقادیر ماکروسکوپی و توابع توزیع است. بر خلاف شرط مرزی سرعت ورودی، در این مسئله استفاده از فرض توسعه یافتگی جریان معتبر نمی‌باشد. با توجه به اینکه روابط استخراج شده برای تعیین مقادیر مجهول کافی نیست، زو و هی [38]، شرط برابری دو تابع توزیع غیرتعادلی که در یک راستا قرار دارند را ارائه کرده‌اند.

$$\rho = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8$$

$$\rho u = f_1 - f_3 + f_5 - f_6 - f_7 + f_8$$

$$\rho v = f_2 - f_4 + f_5 + f_6 - f_7 - f_8$$

$$f_i - f_i^{eq} = f_{i+2} - f_{i+2}^{eq}, \quad i = 1, 2, 5, 6 \quad (7)$$

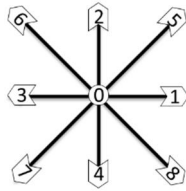


Fig. 2 Velocity Vectors in D2Q9 model

شکل 2 بردارهای سرعت در مدل D2Q9

در این مدل، از مش متعامد با فاصله یکنواخت و برابر در راستای  $x$  و  $y$  استفاده شده‌است. اگرچه بازه زمانی و بازه مکانی، در این مطالعه که از شرط مرزی فشار استفاده شده، برابر یک نیست ولی آنچه که اهمیت دارد، ثابت بودن این اعداد در کلیه محاسبات است. مقدار انتخاب شده برای بازه زمان و بازه مکان بستگی به ابعاد هندسی مسئله، رقت جریان و نسبت فشار تعریف شده دارد و در پایداری حل و همگرایی نتایج نقش مهمی دارد. سرعت صوت با رابطه (11) تعریف شده و فشار در هر نقطه از جریان به صورت ضرب ثابتی از چگالی محاسبه می‌شود.

$$p = \rho c_s^2 \quad c_s = \frac{c}{\sqrt{3}} \quad c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 1 \quad (\Delta x = \Delta y) \quad (11)$$

در شبیه‌سازی‌های سه‌بعدی برای گسسته‌سازی با دقت بالاتر معمولاً از مدلی با 27 سرعت مجزا استفاده می‌شود [41]. در رابطه (12)، معادله گسسته بولتزمن بدون اثر نیروهای خارجی ارائه شده و توابع وزنی توسط هی و همکاران [42] مورد محاسبه قرار گرفته است.

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + e_i \cdot \nabla f_i = \frac{1}{\tau} (f_i^{eq} - f_i)$$

$$f_i(x + e_i \Delta t, t + \Delta t) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau + \frac{\Delta t}{2}}\right) f_i + \frac{\Delta t}{\tau + \frac{\Delta t}{2}} f_i^{eq}$$

$$f_i^{eq} = w_i \rho [1 + 3(e_i \cdot V) + 4.5(e_i \cdot V)^2 - 1.5|V|^2]$$

$$w_i = \frac{1}{9}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$w_i = \frac{1}{36}, \quad i = 5, 6, 7, 8$$

$$w_i = \frac{4}{9}, \quad i = 0 \quad (12)$$

این معادله در دو مرحله حل می‌شود که شامل برخورد (سمت راست معادله) و انتشار (سمت چپ معادله) است. مرحله برخورد مربوط به هر گره شبکه بوده و در شکل 3 نحوه برخورد و انتشار نشان داده شده است. تابع توزیع تعادلی برای سرعت‌های پایین در محدوده تراکم‌ناپذیری معتبر است.

## 5-2- شبیه‌سازی میدان مغناطیسی به روش شبکه بولتزمن

شبیه‌سازی جریان مگنتوهیدرودینامیک در میکرو ابزارهای سیالی یکی از زمینه‌های پرکاربرد در مطالعات شبکه بولتزمن به‌شمار می‌رود که شامل میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی، مکانیک سیالات، انتقال حرارت و انتقال جرم است. دلار، بریانیس و والوجرجیس از جمله افرادی هستند که در این زمینه تحقیقات متعددی انجام داده‌اند. دلار پارامتر تانسور تنش ماکسول را در معادله تعادل وارد کرد [39]. بریانیس و والوجرجیس اثر نیروی لورنتس را با استفاده از نیروی حجمی مدل‌سازی کردند [43]. در روش شبکه بولتزمن برای مگنتوهیدرودینامیک، در هر مرحله پس از تابع توزیع چگالی و محاسبه سرعت، تابع توزیع القای مغناطیسی محاسبه می‌شود [44].

با توجه به اینکه رابطه (5) و (7) تاثیر بسیار کلیدی در حل مساله بخصوص در اعداد نادسن بالا دارند، لذا در رابطه (8) جزئیات و الگوریتم محاسبه مقادیر مجهول توابع توزیع چگالی و کمیت‌های ماکرو در مقیاس شبکه ( $u_{wall}, \rho$ ) در دیواره بالایی کانال به صورت مبسوط و در 6 مرحله ارائه شده است.

(1) تعیین کمیت‌های مجهول

$$u_{wall}, \rho, f_4, f_7, f_8$$

(2) با گسسته‌سازی  $\frac{\partial u}{\partial y}$  و  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  به کمک مشتق مرتبه اول و دوم سه نقطه-ای، رابطه (5) به یک معادله خطی با یک مجهول  $u_{wall}$  تبدیل می‌شود

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-u_{m-2} + 4u_{m-1} - 3u_{wall}}{2dx}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{m-2} - 2u_{m-1} + u_{wall}}{dx^2} \quad (8\text{-الف})$$

(3) به‌عنوان حدس اولیه فرض می‌شود که شرط عدم لغزش برقرار باشد تا بتوان به کمک شرط برابری دو تابع توزیع غیر تعادلی هم‌راستا از رابطه ذیل مقدار اولیه چگالی را محاسبه کرد

$$\rho = f_0 + f_1 + f_3 + 2(f_2 + f_5 + f_6) \quad (8\text{-ب})$$

(4) با توجه به اینکه مولفه سرعت عمود بر دیواره کانال برابر صفر در نظر گرفته می‌شود و برابری دو تابع توزیع غیر تعادلی هم‌راستا، لذا همواره  $f_4 = f_2$  خواهد بود

(5) محاسبه مقادیر نهایی  $f_7$  و  $f_8$  در هر مرحله از تکرار الگوریتم حل مساله، مطابق با روش هیدرودینامیکی انجام می‌شود

$$f_7 = \rho \times \frac{1.0 - u_{wall}}{2.0} - (f_3 + f_6) - \frac{(2f_2 + f_0)}{2.0}$$

$$f_8 = \rho \times \frac{1.0 + u_{wall}}{2.0} - (f_1 + f_5) - \frac{(2f_2 + f_0)}{2.0} \quad (8\text{-ج})$$

(6) محاسبه مجدد  $u_{wall}$  و  $\rho$  مطابق با رابطه (18) و تکرار الگوریتم حل مساله با محاسبه توابع توزیع تعادلی.

در میدان مغناطیسی اعمالی، شار عمود بر دیواره کانال است و مقادیر مجهول در ورودی و خروجی میکروکانال از مقادیر معلوم و متناظر در دیواره روبرو بدست می‌آید که در رابطه (9) نشان داده شده است [39]. از آنجا که در میکروکانال‌ها، نسبت ابعادی زیاد است لذا استفاده از شرط مرزی تناوبی، خطایی در حل مسئله بوجود نخواهد آورد.

$$\begin{aligned} B_{y\text{wall}} &= b_0 & B_{x\text{wall}} &= 0 \\ B_{y\text{in}} &= B_{y\text{out}} & B_{x\text{in}} &= B_{x\text{out}} \end{aligned} \quad (9)$$

## 5-1- شبیه‌سازی میدان جریان به روش شبکه بولتزمن

در شکل 2 و رابطه (10)، برای گسسته‌سازی معادلات از سیستم دو بعدی با نه سرعت مجزا استفاده شده است که با D2Q9 نشان داده می‌شود. D نمایانگر بعد مسئله و Q نشان‌دهنده تعداد مولفه‌های تابع توزیع احتمال است [40].

$$e_i: \begin{cases} c(0,0), & i = 0 \\ c \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}(i-1)\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}(i-1)\right) \right), & i = 1, 2, 3, 4 \\ \sqrt{2}c \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(i-\frac{9}{2}\right)\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(i-\frac{9}{2}\right)\right) \right), & i = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (10)$$

در رابطه (16)، نحوه محاسبه مولفه‌های سرعت در مقیاس شبکه برای تابع توزیع میدان مغناطیسی شبیه میدان جریان است با این تفاوت که مولفه‌های جهات فرعی حذف شده‌اند.

$$\xi_i = \begin{cases} c \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}(i-1)\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}(i-1)\right) \right), & i = 1, 2, 3, 4 \\ c(0, 0), & i = 0 \end{cases} \quad (16)$$

### 6- محاسبه مقادیر ماکرو در مقیاس شبکه

کلید پارامترها تا پایان الگوریتم حل در مقیاس شبکه محاسبه شده و پس از تعیین مولفه‌ها، با استفاده از پارامترهای بی‌بعد، مقادیر واقعی کمیت‌ها مشخص می‌شود. در رابطه (17) مقدار نیروی لورنتز در هر راستا از ضرب برداری قانون اهم در بردار میدان مغناطیسی محاسبه شده و چگالی معادل نیروی لورنتس به تابع توزیع چگالی اضافه می‌شود.

$$F = \sigma \cdot (V \times B) \times B \quad (17)$$

در رابطه (18) مقادیر چگالی، مولفه‌های سرعت و میدان مغناطیسی با جمع تابع توزیع مربوطه در هر گره شبکه مشخص می‌شود.

$$\rho = \sum_{i=0}^8 f_i \quad \rho V = \sum_{i=0}^8 e_i f_i$$

$$B_y = \sum_{i=0}^4 h_{y_i} \quad B_x = \sum_{i=0}^4 h_{x_i} \quad (18)$$

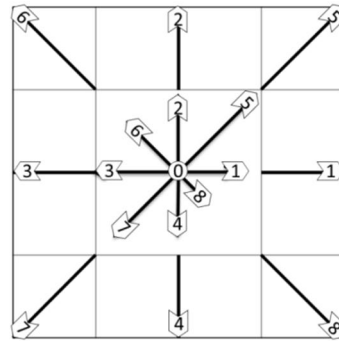
### 7- اعتبارسنجی

برای بررسی عملکرد برنامه کامپیوتری ارتقا یافته، جریان هارتمن در یک کانال دو بعدی مدل‌سازی شده و اعتبارسنجی در دو مرحله ارائه شده است. در ابتدا اثرات اعمال میدان مغناطیسی بر روی کانال بدون اثر لغزش بررسی شده و انطباق کاملی بین نتایج با رابطه تحلیلی مشاهده می‌شود. در مرحله دوم، یک میکروکانال با شرط مرزی لغزش در دیواره و شرط مرزی فشار در ابتدا و انتهای کانال مدل‌سازی شده است. نتایج بدست آمده در دو عدد نادسن متفاوت، با شبیه‌سازی عددی لیم و همکاران [23] و نتایج تحلیلی آر کیلیک و همکاران [7] مقایسه می‌شود.

### 7-1- مقایسه با رابطه تحلیلی در یک کانال

در شکل 5 نتایج بی‌بعد  $u$  و  $B_x$  در اعداد هارتمن 0.5، 20 و 100 با فرمول تحلیلی مورد مقایسه قرار گرفته است. عدد هارتمن شامل ویژگی‌های هندسی مساله ( $H$ )، شرایط مرزی ( $b_0$ ) و خواص فیزیکی سیال ( $\theta, \rho, \sigma$ ) است. در رابطه (19) برای مولفه محوری میدان سرعت و میدان مغناطیسی القایی در کانال هارتمن، فرمولاسیون تحلیلی توسط لاند و لیفشیتز [45] ارائه شده است و این رابطه نشان می‌دهد که کیفیت میدان سرعت و میدان مغناطیسی القایی را می‌توان به صورت توابع هایپربولیک از عدد هارتمن بیان کرد.

$$\begin{cases} u = \frac{\left(\cosh\left(\frac{Ha}{2}\right) - \cosh\left(\frac{y}{H} Ha\right)\right)}{\left(\cosh\left(\frac{Ha}{2}\right) - 1\right)} & , -\frac{H}{2} < y < \frac{H}{2} \\ B_x = \frac{\left(\sinh\left(\frac{y}{H} Ha\right) - 2\frac{y}{H} \sinh\left(\frac{Ha}{2}\right)\right)}{\left(\cosh\left(\frac{Ha}{2}\right) - 1\right)} & , Ha = BH \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} \end{cases} \quad (19)$$



$$\begin{aligned} \text{Local Collision} & \rightarrow \omega f_i^{eq}(x, t) + (1 - \omega) f_i(x, t) \\ \text{Non local propagation} & \rightarrow f_i(x + e_i, t + 1) \end{aligned}$$

Fig. 3 Collision and Propagation

شکل 3 فرآیند برخورد و انتشار

در رابطه (13) معادله القای مغناطیسی و شکل گسسته آن توسط دلار [39] ارائه شده است که مشابه شکل هیدرودینامیکی معادله شبکه بولتزمن می‌باشد.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \xi \cdot \nabla h = \frac{(h^{eq} - h)}{\tau_h}$$

$$h_i(x + \Delta t \xi_i, t + \Delta t) = \frac{1}{\tau_h} h_i^{eq} + \left(1 - \frac{1}{\tau_h}\right) h_i(x, t)$$

$$\begin{aligned} x \text{ جهت} \rightarrow h &= h_x \\ y \text{ جهت} \rightarrow h &= h_y \end{aligned} \quad (13)$$

جریان سیال در کانال هارتمن به‌عنوان یک نمونه برای اعتبارسنجی روش شبکه بولتزمن، تحت شرایط عدد ماخ پایین و غلبه فشار هیدرودینامیکی بر فشار مغناطیسی، بکار می‌رود. هر یک از مولفه‌های میدان مغناطیسی تابع توزیع جداگانه‌ای داشته که توسط دلار [39] در رابطه (14) ارائه شده است.

$$\begin{aligned} h_{x_i}^{eq} &= \varphi_i [B_x - 2\xi_{y_i} (V_y B_x - V_x B_y)] \\ h_{y_i}^{eq} &= \varphi_i [B_y + 2\xi_{x_i} (V_y B_x - V_x B_y)] \\ \varphi_i &= \frac{1}{6}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ \varphi_i &= \frac{1}{3}, \quad i = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

در رابطه (15)، ارتباط بین پارامتر آرامش میدان مغناطیسی با ضریب انتشار مغناطیسی مشابه رابطه بین لزجت سینماتیکی و فرکانس برخورد است.

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{2}} \rightarrow \tau_h = 2\eta + 0.5 \quad (15)$$

در میدان مغناطیسی، هر تابع توزیع به یک مولفه از میدان اشاره دارد و حاوی اطلاعات کمتری است. لذا برای رسیدن به دقت قابل قبول، پیچیدگی کمتری در ساختار شبکه نیاز بوده و می‌توان از مدل D2Q5 استفاده کرد که دارای 5 مولفه سرعت است (شکل 4).

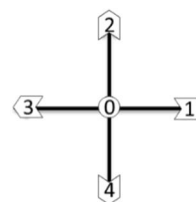


Fig. 4 Velocity Vectors in D2Q5 model

شکل 4 بردارهای سرعت در مدل D2Q5

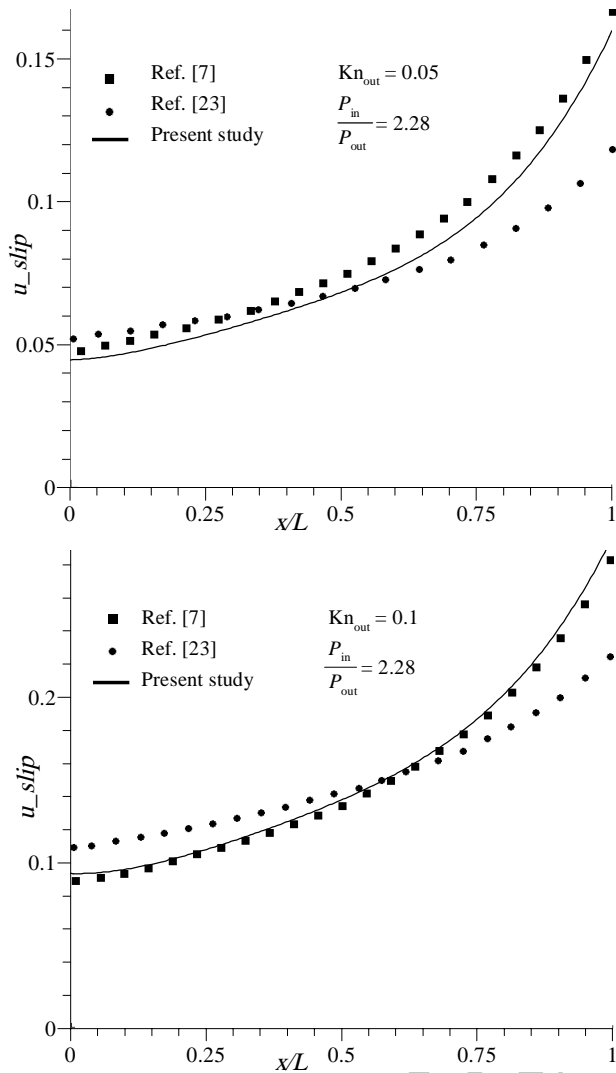


Fig. 6 Validation of slippage in pressure-driven microchannel  
 شکل 6 صحت‌سنجی سرعت لغزشی در میکروکانال با محرکه فشار

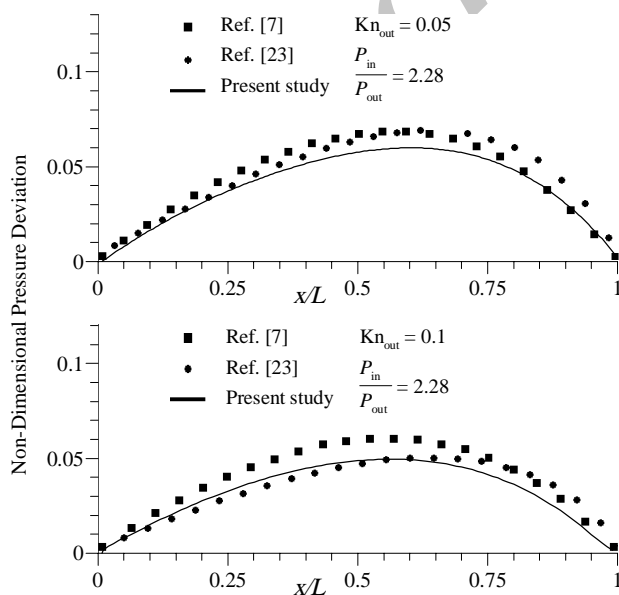


Fig. 7 Comparing pressure deviation in microchannel  
 شکل 7 مقایسه انحراف فشار از حالت خطی در میکروکانال

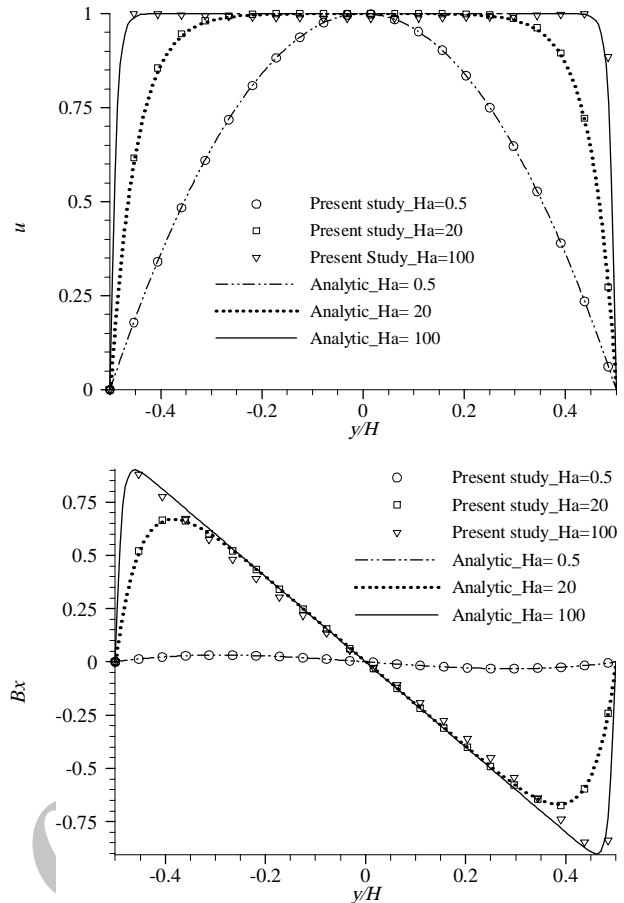


Fig. 5 Comparing numerical and analytical solutions for Hartmann channel  
 شکل 5 مقایسه نتایج عددی و تحلیلی در کانال هارتمن

2-7- مقایسه با شبیه‌سازی عددی و روابط تحلیلی در یک میکروکانال

در شکل 6 و 7 برای اعتبارسنجی از یک میکروکانال با نسبت ابعادی  $(\frac{H}{L}) = 10$ ، نسبت فشار ورودی به خروجی  $(\frac{P_{in}}{P_{out}}) = 2$  و عدد نادسن خروجی  $(Kn_o) = 0.05$  و  $0.1$  استفاده شده است. دلیل بهبود نتایج نسبت به روش لیم و همکاران [23]، بکارگیری رابطی از دقت مرتبه دو در محاسبه سرعت لغزشی روی دیواره‌ها و استفاده از پارامتر اصلاح شده برای زمان آرامش [44] بوده است.

به‌منظور اعتبارسنجی نتایج کار حاضر با مراجع [7، 23، 27]، مقادیر بدست آمده برای سرعت لغزشی در مرزها نسبت به سرعت خروجی در مرکز میکروکانال بی‌بعد شده‌اند.

با توجه به رابطه (5) می‌توان مشاهده کرد، رابطه سرعت لغزشی در دیواره کانال تابعی از عدد نادسن است و با توجه به اینکه در اثر کاهش فشار، رقت سیال در طول کانال افزایش می‌یابد لذا عدد نادسن و در نتیجه سرعت لغزشی افزایش خواهد یافت.

همانطور که در مطالعه لیم و همکاران [23] اشاره شده، میزان اسکيو در منحنی انحراف فشار بیش از حد پیش‌بینی شده در حالی که در مطالعه حاضر این مساله بهبود یافته و مشابه آرکیلیک و همکاران [7]، محل بیشینه انحراف فشار به حدود 60% کانال نزدیک شده است.

3-7- استقلال شبکه و معیار هم‌گرایی

در اعتبارسنجی صورت گرفته با حفظ نسبت ابعادی میکروکانال  $(\frac{1}{20})$ ، از پنج

### 2-8- تغییر طول میدان مغناطیسی

برای بررسی این اثر، طول میدان مغناطیسی از 100% تا 20% کاهش یافته و برای مقایسه سه طول 0%، 40% و 100% نمایش داده شده است.

در شکل 10، طول میدان مغناطیسی اعمالی به 40% میانی کانال کاهش یافته و با حالت 100% مقایسه شده است. عدد هارتمن 5.4 بوده و میدان مغناطیسی در طول کانال ثابت می‌باشد. در شکل 10، وجود مولفه محوری میدان مغناطیسی  $B_x$  قبل از شروع نقطه اثر میدان، ناشی از پدیده انتشار مغناطیسی است در حالی که با شروع میدان، اثر جابجایی میدان مغناطیسی ناشی از حرکت سیال هم اضافه می‌شود. توزیع نیروی لورنتس قبل و بعد از میدان مغناطیسی اعمالی با طول 40% کاملاً متفاوت است. در ابتدای میدان اعمالی، مقادیر نیرو در دیواره‌ها بیشینه بوده و در لحظه اتمام میدان، شیب منحنی  $F_x$  در دیواره‌های کانال صفر شده است.

سرعت بر روی مرزها در حال افزایش است و علی‌رغم اتمام میدان مغناطیسی و تصور اینکه سرعت در دیواره‌ها باید به حالت بدون میدان برگردد ولی مقدار لغزش به بیشینه مقدار خود در طول کانال رسیده و همچنان اثرات میدان مغناطیسی را به همراه دارد.

### 3-8- نمودارهای انحراف فشار و تغییرات نادرین

در شکل 11 مشاهده می‌شود که در هارتمن 0.54 تغییرات فشار مشابه حالت بدون میدان مغناطیسی است و حالت غیرخطی فشار تنها ناشی از اثرات اختلاف فشار هیدرودینامیکی بر سیال رقیق می‌باشد. با افزایش هارتمن به 5.4، فشار مغناطیسی زیاد شده و باعث انحراف بیشتر نسبت به حالت خطی می‌شود. با کاهش طول میدان مغناطیسی به 40% میکرو کانال، شیب فشار در ناحیه اثر میدان مغناطیسی افزایش می‌یابد و نقطه بیشینه انحراف فشار در طول کانال، از 60% به ابتدا و انتهای میدان مغناطیسی اعمالی تغییر مکان می‌دهد. برای تعیین میزان انحراف فشار از حالت خطی، از نقطه چین در

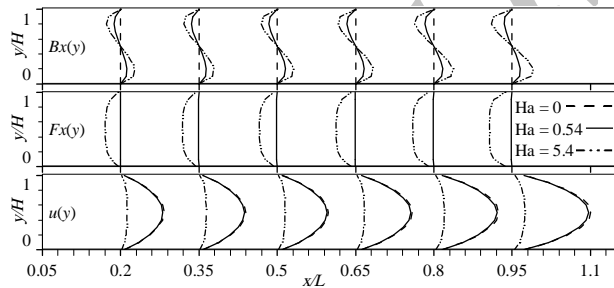


Fig. 9 magnetic field power effects on  $B_x$ ,  $F_x$  and  $u$  in fluid flow.

شکل 9 اثرات قدرت میدان مغناطیسی روی کمیت‌های  $B_x$ ،  $F_x$  و  $u$  در جریان.

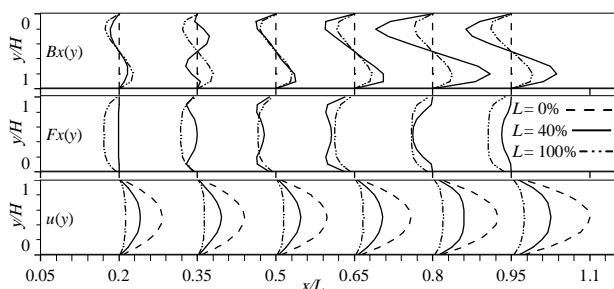


Fig. 10 Magnetic field length effects on  $B_x$ ,  $F_x$  and  $u$ .

شکل 10 اثرات طول میدان مغناطیسی روی کمیت‌های  $B_x$ ،  $F_x$  و  $u$ .

ترکیب مش  $8 \times 160$ ،  $10 \times 200$ ،  $12 \times 240$ ،  $14 \times 280$  و  $16 \times 320$ ، استفاده شده که مطابق شکل 8، نتایج نشان داد که ترکیب سوم تا پنجم تقریباً بر هم منطبق می‌شوند. لذا ترکیب  $12 \times 240$  در شبیه‌سازی بکار رفته است.

در محاسبات، تعداد تکرارها و حداقل جذر مجموع مربعات تغییر مولفه‌های میدان سرعت در کانال به‌عنوان معیار همگرایی برای سرعت تعریف شده که در رابطه (20) معرفی می‌شود. با توجه به اینکه معادلات مستقل از هم حل نمی‌شوند لذا نیازی به تعریف معیار برای متغیرهای میدان مغناطیسی وجود ندارد.

$$\sqrt{\frac{1}{mn} \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n (u_{t+\Delta t} - u_t)_{i,j}^2 + (v_{t+\Delta t} - v_t)_{i,j}^2} < \text{tole.} \quad (20)$$

### 8- نتایج و بحث

در این تحقیق پس از اعتبارسنجی برنامه کامپیوتری شبیه‌سازی میکروجریان، اثر پارامترهای میدان مغناطیسی، انحراف فشار، تغییرات نادرین، سرعت لغزشی و سرعت در مرکز کانال مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. اعتبارسنجی و نتایج تحقیق حاضر در هر دو رژیم لغزشی ( $Kn=0.05, 0.1$ ) و گذرا ( $Kn=0.2$ ) انجام گرفته است. بسکوک و کامیاداکیس [46]، حالت غیر خطی فشار در طول میکرو کانال را ناشی از اثرات تراکم‌پذیری میکرو جریان گازی بیان می‌کنند.

### 1-8- تغییر قدرت میدان مغناطیسی

در شکل 9، اثر قدرت میدان مغناطیسی با دو عدد هارتمن 0.54 و 5.4 بررسی شده است. میدان مغناطیسی اعمالی دارای توزیع ثابت بوده و 100% طول کانال را پوشش می‌دهد. با افزایش عدد هارتمن، مقدار بیشینه مولفه محوری میدان مغناطیسی افزایش قابل ملاحظه‌ای پیدا می‌کند.

مقدار نیروی لورنتس  $F_x$  در دیواره‌ها برای حالت لغزشی مقدار قابل توجهی دارد در حالی که این کمیت در حالت عدم لغزش برابر صفر است. بنابراین در حالت لغزشی، شیب توزیع نیروی لورنتس در دیواره‌ها کمتر خواهد بود. همان‌گونه که انتظار می‌رود، با افزایش عدد هارتمن، توزیع سرعت به سمت یکنواخت‌تر (تخت‌تر) شدن متمایل می‌شود و لایه هارتمن کاهش می‌یابد.

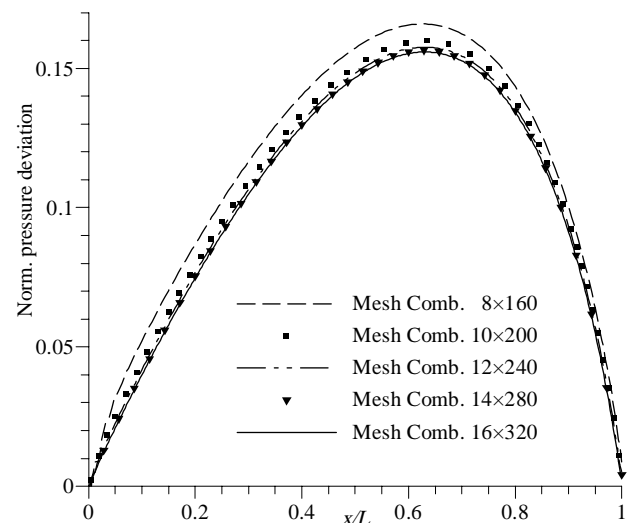


Fig. 8 Grid study with 5 mesh combination

شکل 8 مطالعه شبکه با 5 ترکیب مش



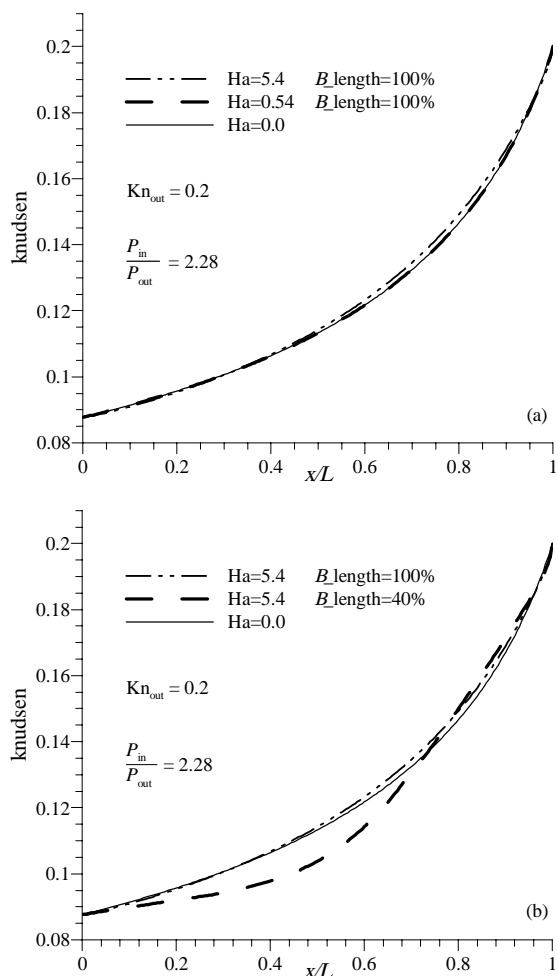


Fig. 12 Effect of magnetic field power and length on knudsen variation  
 شکل 12 اثر طول و قدرت میدان مغناطیسی بر تغییرات نادسن

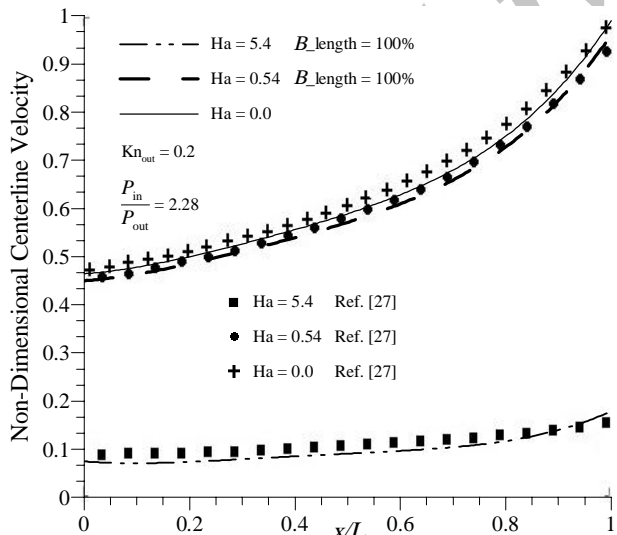


Fig. 13 Centerline velocity with different Hartmanns  $L = 100\%$   
 شکل 13 سرعت در مرکز میکروکانال تحت تاثیر قدرتهای مختلف با طول  $100\%$

در شکل 14، اثرات کاهش طول میدان بررسی شده است. نکته مهمی که در این شکل قابل مشاهده است، تاثیر کاملا متفاوت دو میدان مغناطیسی با قدرت یکسان و طولهای متفاوت بر مقطع میانی کانال است. این رفتار نشان می‌دهد که نفوذ میدان مغناطیسی در جریان سیال به صورت آنی نخواهد بود

منحنی‌ها استفاده شده است. طبق بررسی، رقت و نیروهای حجمی و سطحی وارد شده بر سیال، مقدار و نحوه غیرخطی شدن را تعیین می‌کنند. در شکل 12، حذف اثرات میدان مغناطیسی اعمالی در ابتدا و انتهای کانال، باعث کاهش شدید شیب رقت از ابتدای کانال می‌شود. این کاهش تا مقطع 70% ادامه داشته و پس از آن تا انتهای کانال، نرخ رشد نادسن افزایش می‌یابد. در حالی که با اعمال میدان به کل طول کانال بدلیل توزیع فشار مغناطیسی یکنواخت‌تر در طول میکروکانال، ضمن کاهش کلی عدد نادسن، روند تغییرات مانند حالت بدون میدان است. این کاهش به دلیل وجود میدان مغناطیسی و ایجاد نیروی لورنتس در خلاف جهت جریان است. طبق رابطه (5) و همان‌طور که در شکل 12 دیده می‌شود، با کاهش فشار، نادسن زیاد می‌شود ولی افزایش قدرت میدان مغناطیسی بر رقت سیال تاثیر چندانی نداشته است و تنها تغییر غیریکنواخت توزیع فشار ناشی از کاهش طول میدان، توانسته که شیب منحنی نادسن را تغییر دهد.

#### 8-4- سرعت در مرکز میکروکانال

در شکل 13، نتایج بر مبنای سرعت خروجی در وسط میکروکانال در حالت بدون میدان بی‌بعد شده و با مطالعات عددی و تحلیلی آگاروال و چوساک [27] مقایسه شده است. در مسائلی که شرط مرزی فشار تعریف می‌شود، به سبب کاهش فشار در خروجی کانال، افزایش سرعت بوجود خواهد آمد ولی با توجه به شکل 13 و رابطه (16)، در حضور میدان مغناطیسی، نیروی لورنتس که در جهت عکس جریان عمل می‌کند افزایش پیدا خواهد کرد و لذا افت سرعت در انتها بیشتر از ابتدای کانال خواهد بود.

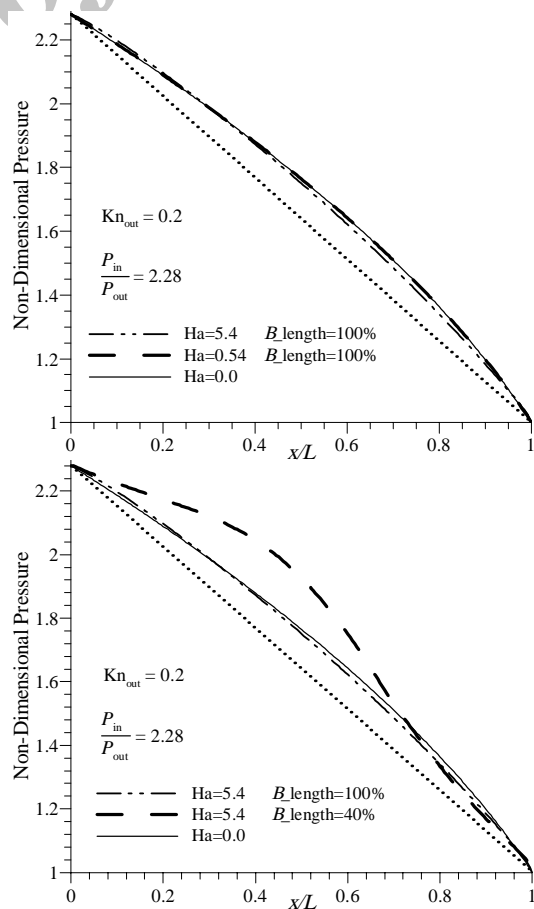


Fig. 11 Pressure deviation through microchannel  
 شکل 11 انحراف فشار در میکروکانال با تغییر طول و قدرت میدان مغناطیسی

### 9- نتیجه‌گیری

کاهش خطای محاسباتی (نسبت به مطالعات گذشته) علاوه بر حل هم‌زمان معادلات حاکم بر میدان سرعت و میدان مغناطیسی با روش شبکه بولتزمن و در نظر گرفتن تغییر پارامترهای میکرو جریان در طول کانال، ویژگی‌های اصلی نتایج کار حاضر است.

تحقیق حاضر نشان می‌دهد که در صورت استفاده از شرط مرزی هیدرودینامیکی (رابطه 7) به همراه روابطی از دقت مرتبه دو برای محاسبه سرعت لغزشی (رابطه 5) و از طرفی بکارگیری ضرایب مناسب برای مشتقات اول و دوم سرعت در دیواره ( $C_1$  و  $C_2$ ) می‌توان بهبود چشمگیری را نسبت به نتایج تحلیلی در سرعت دیواره بدست آورد و علاوه بر کیفیت، به کمیت مناسبی برای این سرعت دست پیدا کرد (شکل 6). نکته بسیار با اهمیت دیگر، پارامتر زمان آرامش است که در رفتار منحنی فشار در طول کانال بسیار موثر بوده و می‌تواند اسکینو منحنی انحراف فشار را به نتایج مورد انتظار نزدیک کند (شکل 7).

پس از اعتبارسنجی، به بررسی حذف میدان مغناطیسی از ابتدا و انتهای میکروکانال پرداخته شد و نتایج نشان داد که کاهش طول میدان به معنای حذف اثرات القایی نخواهد بود و در قسمت‌هایی از کانال که میدان مغناطیسی اعمال نشده، میدان مغناطیسی از نوع القایی وجود خواهد داشت. از طرف دیگر، کاهش طول میدان مغناطیسی به 40% میانی کانال، موجب انتقال بیشینه نیروی لورنتس به سمت دیواره‌های کانال خواهد شد. افزایش قدرت میدان مغناطیسی باعث افزایش حالت غیرخطی فشار می‌شود ولی بر عدد نادسن به عنوان یکی از خواص فیزیکی سیال تاثیر ناچیزی دارد.

### 10- فهرست علائم

$b_0$	اندازه بیشینه بردار میدان مغناطیسی ( $NA^{-1}m^{-1}$ )
$B$	بردار میدان مغناطیسی ( $NA^{-1}m^{-1}$ )
$c$	اندازه بردار سرعت در مقیاس شبکه ( $ms^{-1}$ )
$c_s$	سرعت صوت در مقیاس شبکه ( $ms^{-1}$ )
$e$	بردار سرعت در مقیاس شبکه برای میدان جریان ( $ms^{-1}$ )
$f$	تابع توزیع چگالی
$F$	بردار نیروی لورنتس (N)
$h$	تابع توزیع میدان مغناطیسی
$H$	عرض کانال
$Ha$	عدد هارتمن
$Kn$	عدد نادسن
$L$	طول کانال
$M$	عدد ماخ
$m$	تعداد گره‌ها در راستای عرضی کانال
$n$	تعداد گره‌ها در راستای طولی کانال
$p$	فشار ( $kgm^{-1}s^{-2}$ )
$Pr_m$	عدد پرائنتل مغناطیسی
$R$	ثابت گاز
$Re$	عدد رینولدز
$Re_m$	عدد رینولدز مغناطیسی
$T$	دما (K)
$u$	مولفه $x$ بردار سرعت ( $ms^{-1}$ )
$\bar{u}$	سرعت محوری میانگین در خروجی کانال ( $ms^{-1}$ )

بلکه تابعی از اثرات القایی میدان و سرعت جریان است. از طرف دیگر، تاثیرات فشار مغناطیسی مانند فشار هیدرودینامیکی بر کل جریان سیال اعمال خواهد شد و حذف میدان اعمالی از ابتدا و انتهای میکروکانال نمی‌تواند اثرات القایی میدان را از بین ببرد.

اعمال شار مغناطیسی با طول 40%، مشابه حالتی که میدان اعمالی، کل طول کانال را پوشش می‌دهد، باعث افت سرعت شده ولی در ناحیه تاثیر میدان مغناطیسی، سرعت در مرکز کانال کاهش کمتری را نشان می‌دهد.

### 8-5- سرعت لغزشی در دیواره‌ها

در شکل 15، سرعت‌های لغزشی در دیواره‌ها تحت تاثیر عدد هارتمن مشاهده می‌شود. سرعت در دیواره، در ناحیه تاثیر گرفته از میدان مغناطیسی اعمالی، دارای رفتاری متفاوت (برعکس) از سرعت در مرکز کانال است که نشان دهنده بقای جرم در طول کانال می‌باشد. بیشتر بودن اثر میدان مغناطیسی در دیواره نسبت به مرکز کانال نشان دهنده نحوه نفوذ میدان در جریان سیال بوده و اهمیت کوپل معادلات میدان سرعت و مغناطیس را اثبات می‌کند. با کاهش فشار در طول کانال، چگالی سیال کاهش می‌یابد. با توجه به ثابت بودن سطح مقطع کانال و قانون بقای جرم، سرعت سیال افزایش خواهد یافت که در شکل‌های 13 تا 15 این موضوع را می‌توان مشاهده کرد.

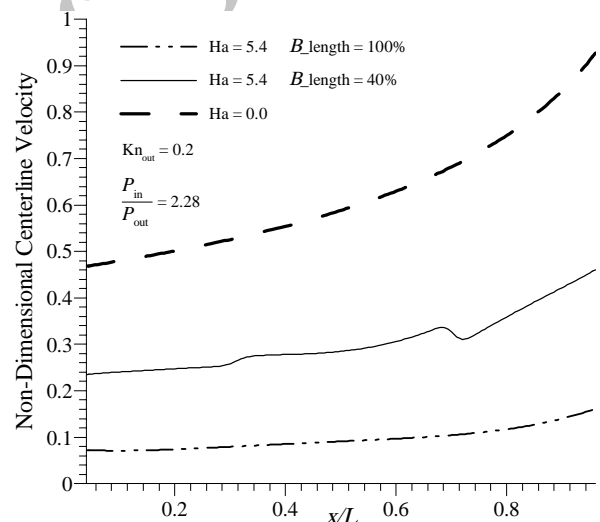


Fig. 14 Centerline velocity with different Hartmanns and  $L = 40\%$

شکل 14 سرعت در مرکز میکروکانال تحت تاثیر قدرت‌های مختلف با طول 40%

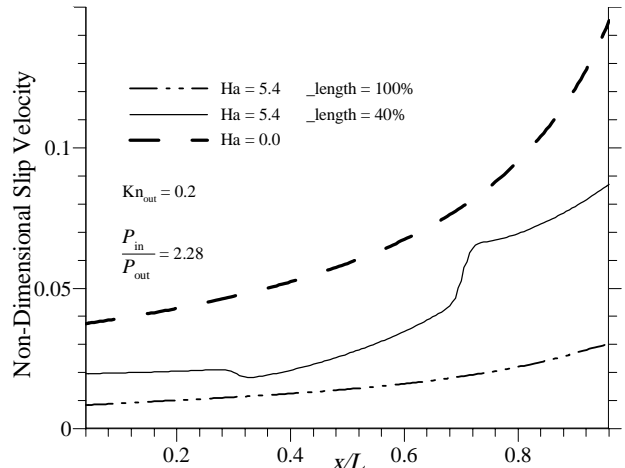


Fig. 15 slip velocity profile for different magnetic field

شکل 15 توزیع سرعت لغزشی موثر از میدان مغناطیسی

[11] U. Lantermann, D. Hänel, Particle Monte Carlo and lattice-Boltzmann methods for simulations of gas-particle flows, *Computers & Fluids*, Vol. 36, No. 2, pp 407-422, 2007.

[12] S. Chen, G. D. Doolen, Lattice Boltzmann method for fluid flows, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 30, pp. 329-364, 1998.

[13] J. Wang, L. Chen, Q. Kang, S. S. Rahman, The lattice Boltzmann method for isothermal micro-gaseous flow and its application in shale gas flow: A review, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 95, pp.94-108, 2016.

[14] T. Lee, C. L. Lin, Rarefaction and compressibility effects of the lattice-Boltzmann-equation method in a gas microchannel, *Physical Review E*, Vol. 71, No. 4, sp. 046706, pp. 1-10, 2005.

[15] G. Zhao-Li, Z. Chu-Guang, S. Bao-Chang, Non-equilibrium extrapolation method for velocity and pressure boundary conditions in the lattice Boltzmann method, *Chinese Physics*, Vol. 11, No. 4, p. 366, 2002.

[16] S. Chen, D. Martinez, R. Mei, On boundary conditions in lattice Boltzmann methods, *Physics of Fluids*, Vol. 8, No. 9, pp. 2527-2536, 1996.

[17] T. Reis, P. J. Dellar, Moment-based formulation of Navier-Maxwell slip boundary conditions for lattice Boltzmann simulations of rarefied flows in microchannels, *Physics of Fluids*, Vol. 24, No 11, sp. 112001, pp. 1-21, 2012.

[18] N. Jeong, Lattice Boltzmann approach for the simulation of rarefied gas flow in the slip flow regime. *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 27, No. 6, pp.1753-1761, 2013.

[19] Y. Zhang, R. Qin, D. R. Emerson, Lattice Boltzmann simulation of rarefied gas flows in microchannels, *Physical Review E*, Vol. 71, No. 4, sp. 047702, pp. 1-4, 2005.

[20] M. Sbragaglia, S. Succi, Analytical calculation of slip flow in lattice Boltzmann models with kinetic boundary conditions, *Physics of Fluids*, Vol. 17, No. 9, sp. 093602, pp. 1-27, 2005.

[21] D. Chatterjee, S. Amiroudine, Lattice Boltzmann simulation of thermofluidic transport phenomena in a DC magnetohydrodynamic (MHD) micropump, *Biomedical microdevices*, Vol. 13, No. 1, pp.147-157, 2011.

[22] H. Khozayemeh-Nezhad, H. Niazmand, Analysis of effects of geometrical and operational parameters of viscous micropump with the approach to entropy generation minimization by LBM, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 3, pp. 67-78, 2016. (in Persian فارسی)

[23] C. Y. Lim, C. Shu, X. D. Niu, Y. T. Chew, Application of lattice Boltzmann method to simulate microchannel flows, *Physics of Fluids*, Vol. 14, No. 7, pp. 2299-2308, 2002.

[24] C. Cai, K. R. Khasawneh, *Two-Dimensional Micro-Hartmann Gas Flows*, G. Allen, J. Nabrzyski, E. Seidel, G. D. van Albada, J. Dongarra, P. M. A. Slood (Eds.), *Computational Science -- ICCS 2009: 9th International Conference Baton Rouge, LA, USA, May 25-27, Part I*, pp. 655-664. Berlin: Springer, 2009.

[25] H. C. Weng, D. C. Chen, Magnetogasdynamic flow and heat transfer in a microchannel with isothermally heated walls. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 57, No. 1, pp.16-21, 2013.

[26] S. I. Pai, *Magnetogasdynamics and plasma dynamics*, 2<sup>nd</sup> Edition, pp. 99-115, Vienna: Springer Science & Business Media, 2012.

[27] R. K. Agarwal, L. Chusak, Oscillatory magnetogasdynamic slip flow in a microchannel, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 84, No. 1, pp.135-146, 2014.

[28] T. Abe, Derivation of the lattice Boltzmann method by means of the discrete ordinate method for the Boltzmann equation, *Journal of Computational Physics*, Vol. 131, No. 1, pp. 241-246, 1997.

[29] U. Frisch, B. Hasslacher, Y. Pomeau, Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation, *Physical Review Letters*, Vol. 14, pp. 1505-1508, 1986.

[30] G. A. Bird, Monte Carlo simulation of gas flows, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 10, pp. 11-31, 1978.

[31] Kandlikar, G. Satish, *Heat transfer and fluid flow in minichannels and microchannels*, 2<sup>nd</sup> Edition, pp. 11-102, Oxford: Elsevier, 2006.

[32] G. H. Tang, W.Q. Tao, Y.L. He, Lattice Boltzmann method for simulating gas flow in microchannels, *International Journal of Modern Physics C*, Vol. 15, No. 2, pp. 335-47, 2004.

[33] Z. Guo, C. Zheng, B. Shi, An extrapolation method for boundary conditions in lattice Boltzmann method, *Physics of Fluids*, Vol. 14, No. 6, pp. 2007-2010, 2002.

[34] H. Huang, T.S. Lee, C. Shu, Lattice Boltzmann method simulation

$v$	مولفه $v$ بردار سرعت ( $\text{ms}^{-1}$ )
$V$	بردار سرعت ( $\text{ms}^{-1}$ )
$w$	ضریب وزنی برای میدان جریان
<b>علائم یونانی</b>	
$\gamma$	نسبت گرمای ویژه
$\varepsilon$	نسبت ابعادی کانال
$\eta$	ضریب انتشار مغناطیسی ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ )
$\lambda$	طول آزاد میانگین
$\mu$	لزجت دینامیکی ( $\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$ )
$\xi$	بردار سرعت در مقیاس شبکه برای میدان مغناطیسی ( $\text{ms}^{-1}$ )
$\rho$	چگالی ( $\text{kgm}^{-3}$ )
$\sigma$	ضریب هدایت الکتریکی ( $\text{A}^2\text{s}^3\text{m}^{-3}\text{kg}^{-1}$ )
$\sigma_{ac}$	ضریب انطباق
$\tau$	زمان آرامش
$\varphi$	ضریب وزنی برای میدان مغناطیسی
$\omega$	فرکانس برخورد در میدان جریان (Hz)
$\omega_h$	فرکانس برخورد در میدان مغناطیسی (Hz)
$\vartheta$	لزجت سینماتیکی ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ )
<b>بالانویس‌ها</b>	
eq	تعداد
<b>زیرنویس‌ها</b>	
o	مقدار کمیت در خروجی کانال

**11- مراجع**

[1] D. A. Koester, K. W. Markus, M. D. Walters, MEMS: small machines for the microelectronics age, *Computer*, Vol. 29, No. 1, pp. 93-94, 1996.

[2] M.Gad-el-Hak, Challenges in modeling liquid and gas flows in micro/nano devices, *Advances In Multiphysics Simulation And Experimental Testing Of Mems*, pp. 1-36, 2008.

[3] J. L. Garcia-Cordero, A. J. Ricco, *Lab-on-a-chip (general philosophy)*, *Encyclopedia of Microfluidics and Nanofluidics*, pp. 1501-1511, New York: Springer, 2015.

[4] N.Minc, *Magnetic Field-Based Lab-on-Chip Devices. Encyclopedia of Microfluidics and Nanofluidics*, pp.1681-1689, New York: Springer, 2015.

[5] R. J. Yang, H. H. Hou, Y. N. Wang, L. M. Fu, Micro-magnetofluidics in microfluidic systems: A review, *Sensors and Actuators B: Chemical*, Vol. 224, pp. 1-15, 2016.

[6] O.M. Al-Habahbeh, M. Al-Saqq, M. Safi, T. Abo Khater, Review of magnetohydrodynamic pump applications, *Alexandria Engineering Journal*, Vol. 55, No. 2, pp. 1347-1358, 2016.

[7] E. B. Arkilic, M. A. Schmidt, K. S. Breuer, Gaseous flow in microchannels, *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, Chicago, IL, FED-Vol. 197, pp. 57-66, 1994.

[8] A. V. Lemoff, A. P. Lee, R. R. Miles, C. F. McConaghy, An AC magnetohydrodynamic micropump: Towards a true integrated microfluidic system, *10th International Conference on Solid-State Sensors and Actuators*, Sendai, Japan, pp. 1126-1129, June 7-10, 1999.

[9] M. Dallakehnezhad, S. A. Mirbozorgi, Numerical analysis of thermodynamic behavior of an MHD micropump by simultaneously changing the length of electric and magnetic fields, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 6, pp. 91-98, 2014. (in Persian فارسی)

[10] Sh. Derakhshan, K. Yazdani, Numerical analysis of a magnetohydrodynamic micropump performance, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 13, pp. 251-258, 2015. (in Persian فارسی)

- mixtures*, PhD Thesis, University of Cambridge, Cambridge, 2010.
- [41] X. He, L. Luo, Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation, *Physical Review E*, Vol. 56, No. 6, pp. 6811–6817, 1997.
- [42] X. He, S. Chen, G. D. Doolen, A novel thermal model for the lattice Boltzmann method in incompressible limit, *Journal of Computational Physics*, Vol. 146, pp. 282–300, 1998.
- [43] G. Breyiannis, D. Valougeorgis, Lattice kinetic simulations in three dimensional magnetohydrodynamics, *Physical Review E*, Vol. 69, No. 6, sp. 065702, pp. 1-4, 2004.
- [44] R. K. Agarwal, Lattice Boltzmann simulations of magnetohydrodynamic slip flow in microchannels, AIAA Paper 2005–0163, *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, Reno, Nevada, pp. 10–13, January 10-13, 2005.
- [45] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics. T. 8: Electrodynamics of continuous media*, Second Impression, pp. 224–238, New York: Pergamon Press Ltd, 1963.
- [46] A. Beskok, G. E. Karniadakis, W. Trimmer, Rarefaction and compressibility effects in gas microflows, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 118, No. 3, pp. 448-456, 1996.
- gas slip flow in long microtubes, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 17, No. 6, pp. 587 – 607, 2007.
- [35] S. Colin, P. Lalonde, R. Caen, Validation of a second-order slip flow model in rectangular microchannels, *Heat transfer engineering*, Vol. 25, No. 3, pp. 23-30, 2004.
- [36] A. Agrawal, A comprehensive review on gas flow in microchannels, *International Journal of MicroNano Scale Transport*, Vol. 2, No. 1, pp. 1–40, 2011.
- [37] X. Liu, Z. Guo, A lattice Boltzmann study of gas flows in a long microchannel, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 65, No. 2, pp. 186-193, 2011.
- [38] Q. Zou, X. He, On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model, *Physics of Fluids*, Vol. 9, pp. 1591–1597, 1997.
- [39] P. J. Dellar, Moment-based boundary conditions for lattice Boltzmann magnetohydrodynamics, *Proceedings of the 9th European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications*, Leicester, pp. 83-90, September 5-9, 2011.
- [40] S. Bennett, A lattice Boltzmann model for diffusion of binary gas

Archive of SID