



## شبیه‌سازی غیر خطی ناپایداری انگشتی سیال ویسکوالاستیک

محمدحسن کیهانی<sup>1</sup>، حسنی شکری<sup>2</sup>، محمود نوروزی<sup>3\*</sup>

1- استاد، تبدیل انرژی، دانشگاه صنعتی شاهرود

2- دانشجوی دکتری، تبدیل انرژی، دانشگاه صنعتی شاهرود

3- استادیار، تبدیل انرژی، دانشگاه صنعتی شاهرود

\* شاهرود، صندوق پستی، 3619995161، mnorouzi@shahroodut.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 03 اردیبهشت 1395

پذیرش: 12 تیر 1395

ارائه در سایت: 24 مرداد 1395

کلید واژگان:

ناپایداری انگشتی

سیال ویسکوالاستیک

معادله ساختاری کریمینال-اریکسن-فیلبی

### چکیده

در این مطالعه، ناپایداری انگشتی لزج در جابجایی مخلوط‌شدنی سیال نیوتنی به‌وسیله سیال ویسکوالاستیک، مورد بررسی قرار گرفته است. مدل‌سازی سیال ویسکوالاستیک توسط معادله ساختاری کریمینال-اریکسن-فیلبی صورت گرفته است. سادگی و وابستگی توابع رئولوژیک به نرخ برش از مزایای این معادله ساختاری محسوب می‌شود. همچنین برای نمایش این وابستگی از مدل کاربو-یاسودا استفاده شده است. در شبیه‌سازی غیرخطی، با کمک روش طیفی و تبدیلات هارتلی به بررسی تأثیر توابع رئولوژیک سیال ویسکوالاستیک جابجاکننده بر روی این ناپایداری پرداخته شده است. نتایج ارائه شده شامل کانتورهای غلظت، منحنی‌های میانگین غلظت عرضی، طول اختلاط و بازده جاروبی خواهد بود. نتایج نشان می‌دهد با تغییر پارامترها در جهت افزایش ویسکوزیته سیال ویسکوالاستیک جابجاکننده، از شدت ناپایداری کاسته شده و افزایش بازده جاروبی و کاهش طول اختلاط مشاهده می‌شود. همچنین تغییر پارامترها در جهت افزایش ضریب اختلاف تنش نرمال اول در این نوع سیال، در آغاز بازده جاروبی را افزایش داده و سپس با پیشروی زمانی انگشتی‌ها، کاهش می‌دهد. این در حالیست که این عامل تأثیر چندانی بر روی طول اختلاط دو سیال نخواهد گذاشت. علاوه بر این، در ناپایداری انگشتی ویسکوالاستیک همانند انگشتی‌های لزج، مکانیزم‌های مختلف غیرخطی تعامل انگشتی‌ها همچون اثر انتشار، بهم‌پیوستگی و شکافتگی نوک انگشتی‌ها در کانتورهای غلظت قابل مشاهده است.

## Nonlinear simulation of viscoelastic fingering instability

Mohammad Hasan Kayhani, Hosna Shokri, Mahmood Norouzi\*

Mechanical Engineering Department, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

\* P.O. B. 3619995161, Shahrood, Iran, mnorouzi@shahroodut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 22 April 2016

Accepted 02 July 2016

Available Online 14 August 2016

### Keywords:

Fingering instability

Viscoelastic fluid

Criminale-Eriksen-Filbey constitutive

equation

### ABSTRACT

In this study, the viscous fingering instability in miscible displacement of Newtonian fluid by Viscoelastic fluid is investigated. The Criminale-Eriksen-Filbey (CEF) model has been used as the constitutive equation. Simplicity and dependence of rheological functions to shear rate are the advantages of this model. Also, the Carreau-Yasuda model was used to show this dependency. In nonlinear simulation, using spectral method based on Hartly transforms, the effect of rheological functions of displacing viscoelastic fluid on this instability has been studied. The results include concentration contours, transversely averaged concentration profiles, mixing length and sweep efficiency. The results show that, by changing the parameters in order to increase viscosity of displacing viscoelastic fluid, flow becomes more stable. In other words, sweep efficiency is increased and mixing length is decreased. Also, at first, the sweep efficiency increases with changing the parameters so that the first normal stress difference in this type of fluid can be increased and then is decreased with evolution of fingering. However, this factor will have little effect on mixing length. In addition, as well as viscous fingering, several nonlinear finger interactions such as spreading, coalescence and tip splitting were observed in simulation of viscoelastic fingering instability.

### 1- مقدمه

شبیه به انگشت در این سطح مشترک ایجاد می‌شوند. رشد و شکل‌گیری این انگشتی‌ها نقشی بسیار مهم در فرایند جابجایی سیالات، به خصوص انتقال نفت از مخازن کشف شده دارد. در مرحله اولیه‌ی برداشت از یک مخزن نفتی، گاهی اوقات تنها می‌توان به 10 درصد نفت موجود دست یافت [1]. به منظور استخراج نفت باقی مانده در مخازن، سیال دیگری مانند آب از چاه‌های عمیقی که در کنار مخزن اصلی حفر شده است به درون آن پمپاژ می‌شود و بدین ترتیب، نفت باقی مانده در مخازن به خارج آن هدایت خواهد شد. با

ناپایداری انگشتی لزج<sup>1</sup> یکی از شناخته شده‌ترین ناپایداری‌های هیدرودینامیکی در محیط متخلخل است. این ناپایداری زمانی اتفاق می‌افتد که سیالی با ویسکوزیته کمتر، درون محیط متخلخلی که از سیالی با ویسکوزیته بیشتر اشباع شده است، تزریق شود. سطح مشترک بین دو سیال به علت اختلاف ویسکوزیته موجود ناپایدار شده و با گذشت زمان طرح‌هایی

<sup>1</sup> Viscous fingering instability

در سال 1964، پی [15] نشان داد که افزودن مقدار کمی پلیمر قابل انحلال به آب می‌تواند نسبت تحرک آنرا به مقدار قابل ملاحظه‌ای کاهش دهد، بنابراین پلیمرزنی به عنوان ابزاری کارآمد در فرایند ازدیاد برداشت نفت مورد توجه قرار گرفت. به طوریکه در دهه 80 میلادی بیش از 200 پروژه در سراسر جهان برای افزایش بازیابی نفت از این روش استفاده نمودند [16]. به طور معمول در صورت حل نمودن پلیمر در سیال نیوتنی (جز در محلول‌های بسیار رقیق)، سیالی ویسکوالاستیک به دست خواهد آمد. سیال ویسکوالاستیک سیالی غیرنیوتنی با ویژگی‌های رفتاری مابین سیال و جامد است. از این رو مطالعه ناپایداری انگشتی در جابجایی جریان سیال ویسکوالاستیک می‌تواند نقش مهمی در درک بهتر و ارائه راه‌کارهای مناسب برای کنترل این ناپایداری داشته باشد.

در این مطالعه به بررسی ناپایداری انگشتی در حضور سیال ویسکوالاستیک پرداخته شده است. جریان سیالات، مخلوط‌شدنی در نظر گرفته خواهد شد و بنابراین از اثر کشش سطحی صرف‌نظر می‌شود. برای مدل‌سازی سیال ویسکوالاستیک از معادله ساختاری کریمینال-اریکسن-فیلیپ<sup>6</sup> استفاده خواهد شد. منظور از معادله ساختاری، معادله‌ای است که قادر به بیان رابطه نیرو (تنش) و تغییر شکل (برش) یک ماده مشخص باشد. به دلیل ذات پیچیده‌ی سیالات ویسکوالاستیک، تاکنون معادلات ساختاری زیادی برای این منظور پیشنهاد شده که هر یک از آن‌ها دارای مزایا و معایبی برای بیان رابطه واقعی بین تنش و برش است. معادله ساختاری کریمینال-اریکسن-فیلیپ، یک معادله ساختاری غیرخطی است که قادر به ارائه ویسکوزیته و اختلاف تنش‌های نرمال وابسته به نرخ برش است. از دیگر مزایای این مدل آن است که بواسطه فرم صریح آن، می‌توان از هر نوع تابع غیرخطی وابسته به نرخ برش برای ویسکوزیته و اختلاف تنش‌های نرمال استفاده نمود. در این مطالعه برای نمایش این وابستگی از مدل کارویو-یاسودا [17] استفاده خواهد شد. بررسی تأثیر خواص رئولوژیک سیال ویسکوالاستیک (مخصوصاً وجود اختلاف تنش نرمال در این نوع سیال) بر این ناپایداری، از مهمترین اهداف این مطالعه محسوب می‌شود. از معایب این مدل آن است که دقت مدل تنها در اعداد دوبرای کوچک بالا است و لذا بیشتر برای ناحیه ویسکومتریکی دیاگرام پیپکین مناسب است. لذا پاسخ‌های این مدل برای محلول‌های رقیق پلیمری مناسبتر است و برای محلول‌های غلیظ و مذابها دچار خطا می‌شود. خوشبختانه در مسائل مهندسی مربوط به ناپایداری انگشتی در حضور سیال غیرنیوتنی مانند مسأله ازدیاد برداشت نفت از طریق سیلاب زنی شیمیایی، سیال عامل (محلول آب و پلیمر) یک محلول پلیمری رقیق بوده و لذا نتایج مطالعه حاضر برای این منظور می‌تواند مناسب باشد.

## 2- معادلات حاکم

معادلات حاکم برای جابجایی دوبعدی سیالات تراکم‌ناپذیر به صورت روابط (1-3) شامل معادله پیوستگی، معادله دارسی-برینکمن و کانوکشن-دیفیوژن<sup>7</sup> برای غلظت خواهد بود.

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \tau = \frac{\mu}{K} \vec{V} \quad (2)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla c = \nabla \cdot (D \nabla c) \quad (3)$$

در معادلات بالا،  $\vec{V}$  بردار سرعت،  $\tau$  تانسور تنش و  $\mu$  ویسکوزیته

توجه به کمتر بودن ویسکوزیته آب نسبت به نفت، با مرور زمان ناپایداری انگشتی در سطح تماس دو سیال مشاهده خواهد شد و این عامل کاهش بهره‌وری را بدنبال خواهد داشت. بنابراین مطالعه ناپایداری انگشتی جهت شناخت و کنترل این پدیده از دیرباز توجه بسیاری را به خود جلب کرده است. علاوه بر فرایند ازدیاد برداشت نفت، ناپایداری انگشتی در علوم مربوط به بررسی پراکندگی آلودگی‌های زیست محیطی ناشی از مواد هیدروکربنی در مخازن و همچنین در مطالعات مربوط به علوم آزمایشگاهی و شیمی در بررسی آزمایش‌های مربوط به لوله‌های کروماتوگرافی به طور ویژه مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در میان مطالعات انجام شده در زمینه ناپایداری انگشتی، بررسی این پدیده در حضور سیالات نیوتنی حجم وسیعی را به خود اختصاص داده است.

بررسی ناپایداری انگشتی لزج در جریان مخلوط‌شدنی نیوتنی نخستین بار توسط هیل [2] در سال 1952 گزارش شد. پس از آن مطالعات به‌وسیله‌ی محققان بسیاری ادامه یافت. در سال 1987، جمع‌بندی کاملی از مطالعات انجام شده تا آن زمان توسط هومسی [3] ارائه شد، در این مطالعه به مرور بیش از 80 مقاله ارائه شده در زمینه ناپایداری انگشتی پرداخته شده است. تا سال 1988، مطالعات انجام شده در زمینه رفتار غیرخطی ناپایداری انگشتی به کمک روش‌های عددی کم دقت در این زمینه (مانند روش تفاضل محدود [5,4]) انجام می‌شد. در این سال تن و هومسی [6] با معرفی روش طیفی به مطالعه رفتار غیرخطی انگشتی‌های لزج در جابجایی سیال نیوتنی اختلاط‌پذیر پرداختند. در این مطالعه به معرفی مکانیزم‌های مختلفی که انگشتی در حین پیشروی زمانی با آن درگیر هستند مانند انتشار<sup>1</sup> و اثر پوششی<sup>2</sup> پرداخته شده است. همچنین پدیده شکافتگی نوک انگشتی<sup>3</sup> برای نخستین بار در شبیه‌سازی آنها مشاهده شد. از جمله مطالعات اخیر بر روی این پدیده و در حضور سیالات نیوتنی می‌توان به مطالعه انجام شده توسط نوروزی و شوقی [7] اشاره نمود. در این مطالعه اثر ناهمسانگردی بر روی ناپایداری انگشتی در جابجایی اختلاط‌پذیر مورد بررسی قرار گرفت. نتایج آنها نشان دهنده افزایش ناپایداری در نتیجه‌ی افزایش نرخ پراکندگی و کاهش نرخ نفوذپذیری است.

مطالعات انجام شده بر روی پدیده ناپایداری انگشتی در حضور سیالات غیرنیوتنی به مراتب کمتر از سیال نیوتنی است. مارشال و همکاران [8] از نخستین کسانی بودند که به بررسی جریان سیالات ویسکوالاستیک در محیط متخلخل پرداختند. ویلسون [9] تأثیر خواص غیرنیوتنی بر روی ناپایداری انگشتی را در سلول هل-شاو مورد بررسی قرار داد. سینگ و عزایز [10] با استفاده از روش طیفی و با کمک تبدیلات هارتلی، ناپایداری انگشتی جریان شامل سیال غیرنیوتنی باریک‌شونده<sup>4</sup> اختلاط‌پذیر را شبیه‌سازی نمودند. در این مطالعه برای مدل‌سازی سیال غیرنیوتنی از مدل کارویو<sup>5</sup> استفاده شد. آنها در ادامه همان مسأله رو مورد آنالیز پایداری خطی قرار دادند و نشان دادند که اثر باریک‌شوندگی تأثیر قابل ملاحظه‌ای در این ناپایداری خواهد داشت [11]. از جمله مطالعات دیگری که به بررسی اثر باریک‌شوندگی با استفاده از مدل کارویو بر روی این ناپایداری پرداخته‌اند، می‌توان به نتایج ارائه شده توسط لی و همکاران [12]، کیم و چوی [13] و نوروزی و شوقی [14] اشاره نمود.

<sup>1</sup> Spreading

<sup>2</sup> Shielding

<sup>3</sup> Tip-splitting

<sup>4</sup> Shear thinning

<sup>5</sup> Carreau model

<sup>6</sup> Criminale- Eriksen-Filbey model (CEF)

<sup>7</sup> Convection-dispersion

می‌باشد. همچنین پارامترهای  $K$  و  $D$  به ترتیب نشان‌دهنده نفوذپذیری محیط متخلخل و پراکندگی است.

همچنین معادله (4) نشان‌دهنده معادله ساختاری سیال CEF خواهد بود [17].

$$\tau = -PI + \mu(\dot{\gamma})\gamma_{(1)} - \frac{1}{2}\alpha_1(\dot{\gamma})\gamma_{(2)} + \alpha_2(\dot{\gamma})\{\gamma_{(1)} \cdot \gamma_{(1)}\} \quad (4)$$

در معادله (4)، پارامترهای  $\alpha_1(\dot{\gamma})$  و  $\alpha_2(\dot{\gamma})$  به ترتیب نشان‌دهنده ضرایب اختلاف تنش‌های نرمال اول و دوم هستند. همچنین  $\gamma_{(1)}$  و  $\gamma_{(2)}$  مشتق‌های زمانی پادهمبسته نرخ برش می‌باشند و به صورت معادلات (5,6) تعریف خواهند شد [17].

$$\gamma_{(1)} = (\nabla\vec{V}) + (\nabla\vec{V})^T \quad (5)$$

$$\gamma_{(2)} = \frac{D\gamma_{(1)}}{Dt} + \{(\nabla\vec{V}) \cdot \gamma_{(1)} + \gamma_{(1)} \cdot (\nabla\vec{V})^T\} \quad (6)$$

همچنین همان‌گونه که ذکر شد وابستگی توابع رئولوژیک به نرخ برش برای سیال CEF با کمک مدل کاربو-یاسودا و به صورت روابط (7-9) نمایش داده خواهد شد [17]:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = [1 - (\lambda\dot{\gamma})^2]^{\frac{(n-1)}{2}} \quad (7)$$

$$\alpha_1 = 2\lambda_1\mu_0[1 + (\lambda\dot{\gamma})^2]^{\frac{(m-1)}{2}} \quad (8)$$

$$\alpha_2 = -\chi\alpha_1 \quad (9)$$

در معادلات (7-9)،  $\mu_0$  ویسکوزیته در نرخ برش صفر،  $\lambda$  و  $\lambda_1$  ثابت‌های زمانی و  $m$  و  $n$  شاخص‌های توانی هستند که شیب تغییرات تابع رئولوژیک مورد نظر را نشان می‌دهند. همچنین پارامتر  $\dot{\gamma}$  نشان‌دهنده نرخ برش تعمیم یافته است. معمولاً ضریب اختلاف تنش نرمال دوم به طور جداگانه محاسبه نمی‌شود و ضریبی از اختلاف تنش نرمال اول در نظر گرفته خواهد شد. این ضریب در معادله (9)، با پارامتر  $\chi$  نمایش داده شده است که می‌تواند در حدود 10 تا 20 درصد در نظر گرفته شود.

جاگذاری رابطه (4) در معادله (2)، رابطه (10) را نتیجه خواهد داد:

$$\nabla P = -\frac{\mu}{K}\nabla\cdot\left(\mu(\dot{\gamma})\gamma_{(1)} - \frac{1}{2}\alpha_1\gamma_{(2)} + \alpha_2\{\gamma_{(1)} \cdot \gamma_{(1)}\}\right) \quad (10)$$

همچنین شرایط مرزی و اولیه به صورت معادلات (11-13) خواهد بود [6]:

$$x = 0; \quad u = U; \quad v = 0; \quad c = C_1 \quad (11)$$

$$x = L; \quad u = U; \quad v = 0; \quad c = 0 \quad (12)$$

$$(\vec{V}, c)(x, 0, t) = (\vec{V}, c)(x, H, t) \quad (13)$$

$$u(x, y, t = 0) = U; \quad v(x, y, t = 0) = 0$$

$$c(x, y, t = 0) = C_0$$

برای تشریح کامل مسأله و مشخص شدن روابط حاکم بر ناپایداری باید رابطه‌ی بین ویسکوزیته و اختلاف تنش‌های نرمال با غلظت را نیز تعیین نمود. این ارتباط برای ویسکوزیته توسط زیرمن و هومسی [18] و به صورت رابطه نمائی پیشنهاد شده است، قابل ذکر است محدودیتی برای این رابطه وجود ندارد و می‌توان از هر رابطه یکنواخت دیگری استفاده نمود. بر این اساس در این مطالعه رابطه ویسکوزیته و غلظت به صورت معادله (14) تعریف خواهد شد:

$$\frac{\mu}{\mu_1} = Ae^{R_{st}(1-\frac{c}{c_1})} \quad (14)$$

همچنین رابطه (15) را برای ضریب اختلاف تنش نرمال اول پیشنهاد خواهیم نمود:

$$\frac{\alpha_1}{\mu_1 D/U} = e^{RR_{st}(\frac{c}{c_1} + \beta)} - 1 \quad (15)$$

مقادیر  $R_{st}$ ،  $RR_{st}$ ،  $A$  و  $\beta$  براساس نوع سیال جابجاشونده و جابجا

کننده تعیین خواهد شد.

## 1-2- بی‌بعد سازی

برای بی‌بعد سازی طول، زمان و سرعت به ترتیب از پارامترهای  $D/U$ ،  $D/U^2$  و  $U$  استفاده خواهد شد. همچنین ویسکوزیته و غلظت به ترتیب به وسیله ویسکوزیته سیال جابجا کننده در نرخ برش صفر ( $\mu_{10}$ ) و غلظت سیال جابجا کننده ( $C_1$ ) بی‌بعد خواهند شد. برای بی‌بعد سازی  $\alpha$  و  $K$  از پارامترهای  $D/U$  و  $\mu_{10}D/U^2$  استفاده خواهد شد. فشار نیز توسط پارامتر  $\mu_{10}U^2/D$  بی‌بعد می‌شود. قابل ذکر است از یک سیستم لاگرانژی برای بیان معادلات استفاده می‌شود. این سیستم با سرعت  $U$  در جهت جریان حرکت خواهند نمود. صورت بی‌بعد معادلات حاکم به صورت معادلات (16-19) خواهد بود.

$$\nabla \cdot \vec{V}^* = 0 \quad (16)$$

$$\nabla P^* = -\frac{\mu^*}{K^*}(\vec{V}^* + i) + \nabla \cdot \left( \mu^* \gamma_{(1)}^* - \frac{1}{2} \alpha_1^* \gamma_{(2)}^* + \alpha_2^* \{ \gamma_{(1)}^* \cdot \gamma_{(1)}^* \} \right) \quad (17)$$

$$\frac{\partial c^*}{\partial t^*} + \vec{V}^* \cdot \nabla c^* = \nabla^2 c^* \quad (18)$$

در معادله (17)،  $i$  بردار یکه در راستای  $x$  است که در نتیجه استفاده از سیستم لاگرانژی به وجود آمده است. شرایط مرزی نیز به صورت روابط (19-20) خواهد بود.

$$x^* = -t^*; \quad u^* = 1; \quad v^* = 0; \quad c^* = 1 \quad (19)$$

$$x^* = Pe - t^*; \quad u^* = 1; \quad v^* = 0; \quad c^* = 0 \quad (20)$$

در معادله (19-20)،  $Pe = LU/D$  همان عدد پکلت است که در زمینه نفوذ یا انتقال جرمی مورد بحث قرار می‌گیرد و  $A = L/W$ ، نسبت طول به عرض محیط مورد مطالعه است. قابل ذکر است شرایط سرعت بر روی مرزها شرایط متناوب در نظر گرفته می‌شود [6] و می‌توان تابع و مشتقات آن را (تا یک مرتبه پایین‌تر از مرتبه معادله اصلی) برای مرزهای مقابل هم برابر قرار داد. همچنین در ادامه جهت سهولت کار، بالانویس ستاره از پارامترهای بی‌بعد حذف خواهد شد.

روابط ویسکوزیته و اختلاف تنش به صورت معادلات (21,22) خواهد بود:

$$\mu = \left[ 1 + (\lambda\dot{\gamma})^2 \right]^{c\frac{(n-1)}{2}} e^{R(1-c)} \quad (21)$$

$$\alpha_1 = \exp \left( c \ln \left( 2\lambda_1 \left[ 1 + (\lambda\dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{(m-1)}{2}} + 1 \right) \right) - 1 \quad (22)$$

در معادله (21)، پارامتر  $R$  برابرست با  $\ln(\mu_2/\mu_{10})$  که در آن  $\mu_2$  ویسکوزیته سیال نیوتنی جابجاشونده و  $\mu_{10}$  ویسکوزیته سیال ویسکوالاستیک جابجا کننده در نرخ برش صفر است.

## 2-2- روش عددی

با کرل گرفتن از معادله مومنتم (معادله (10)) ترم فشار حذف خواهد شد و در نهایت برای حل ساده‌تر معادلات حاکم بر مسأله، این معادلات را به صورت تابع جریان - ورتیسیت نوشته خواهد شد. روابط مورد نیاز برای این تبدیل به صورت معادلات (23-24) است.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (23)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (24)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial c} = \ln \left( 2\lambda_1 \left[ 1 + (\lambda \bar{V})^2 \right]^{\frac{(m-1)}{2}} + 1 \right) (\alpha_1 + 1) \quad (34)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial V^2} = \frac{2c\lambda_1 \lambda^2 \left( \frac{m-1}{2} \right) \left[ 1 + (\lambda \bar{V})^2 \right]^{\frac{(m-1)}{2}} (\alpha_1 + 1)}{(1 + (\lambda \bar{V})^2) (2\lambda_1 \left[ 1 + (\lambda \bar{V})^2 \right]^{\frac{(m-1)}{2}} + 1)} \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial c^2} = \ln \left( 2\lambda_1 \left[ 1 + (\lambda \bar{V})^2 \right]^{\frac{(m-1)}{2}} + 1 \right)^2 (\alpha_1 + 1) \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial (V^2)^2} = \frac{2(\alpha_1 + 1)c\lambda_1 \left[ 1 + (\lambda \bar{V})^2 \right]^{\frac{(m-1)}{2}} \lambda^4 \cdot \frac{\left( \frac{m-1}{2} \right)}{(1 + (\lambda \bar{V})^2) (2\lambda_1 \left[ 1 + (\lambda \bar{V})^2 \right]^{\frac{(m-1)}{2}} + 1)} \left[ \frac{\left( \frac{m-3}{2} \right)}{2\lambda_1 \left[ 1 + (\lambda \bar{V})^2 \right]^{\frac{(m-1)}{2}} \left( \frac{m-1}{2} \right) (1-c)} - \frac{2\lambda_1 \left[ 1 + (\lambda \bar{V})^2 \right]^{\frac{(m-1)}{2}} \left( \frac{m-1}{2} \right) (1-c)}{\left( 2\lambda_1 \left[ 1 + (\lambda \bar{V})^2 \right]^{\frac{(m-1)}{2}} + 1 \right)} \right]}{(37)}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial c \partial V^2} = (1 + c \ln \left( 2\lambda_1 \left[ 1 + (\lambda \bar{V})^2 \right]^{\frac{(m-1)}{2}} + 1 \right)) \cdot \frac{2\lambda_1 \left[ 1 + (\lambda \bar{V})^2 \right]^{\frac{(m-1)}{2}} \left( \frac{m-1}{2} \right) \lambda^2 (\alpha_1 + 1)}{(1 + (\lambda \bar{V})^2) (2\lambda_1 \left[ 1 + (\lambda \bar{V})^2 \right]^{\frac{(m-1)}{2}} + 1)} \quad (38)$$

در این مطالعه به منظور شبیه‌سازی غیرخطی ناپایداری انگشتی براساس معادلات حاکم از روش طیفی و تبدیلات هارتلی بهره برده می‌شود. مزیت این روش نسبت به سایر روش‌های موجود دقت بالای این آن می‌باشد. همچنین به کمک این روش معادلات مشتق جزئی به معادلات دیفرانسیلی معمولی تبدیل خواهد شد. تبدیل دوبعدی هارتلی برای یک تابع دلخواه به صورت رابطه (39) خواهد بود:

$$H(g(x, y)) = \frac{1}{\sqrt{N_x N_y}} \sum_x \sum_y g(x, y) \text{cas} \left( \frac{2\pi x k_x}{N_x} + \frac{2\pi x k_y}{N_y} \right) \quad (39)$$

در این معادله  $N_x$  و  $N_y$  به ترتیب نشان‌دهنده تعداد گره‌های محاسباتی در جهت  $x$  و  $y$  است. همچنین  $k_x$  و  $k_y$  اعداد موج در جهت  $x$  و  $y$  می‌باشد. CAS نیز به صورت مجموع کسینوس و سینوس تعریف می‌شود.

برای استفاده از تبدیل هارتلی نیاز به شرایط مرزی متناوب است. با توجه به شرایط مرزی، تنها پارامتر غلظت در جهت  $x$  متناوب نیست، برای رفع این مشکل از روش پیشنهادی توسط منیکام و هومسی [19] استفاده خواهد شد و تابع غلظت، به دو بخش اغتشاشی و حالت پایه مانند رابطه (40) تقسیم شود:

$$c(x, y, t) = \bar{c}(x, t) + \hat{c}(x, y, t) \quad (40)$$

در رابطه (40)،  $\hat{c}(x, y, t)$  ترم اغتشاشی برای غلظت و  $\bar{c}(x, t)$  جواب معادله یک‌بعدی معادله کانوکشن - دیفیوژن می‌باشد و به صورت معادله (41) بیان می‌شود:

$$\bar{c}(x, t) = \frac{1}{2} [1 - \text{erf}(x/\sqrt{4t})] \quad (41)$$

بنابراین در روند شبیه‌سازی به جای استفاده از غلظت کل، فقط جمله اغتشاشی غلظت را محاسبه نموده و برای بدست آوردن غلظت کل در معادله (40) جایگزین می‌شود. همچنین شرایط اولیه غلظت به صورت معادله

در این معادلات  $\psi$  تابع جریان و  $\omega$  تابع ورتیسیتته است. بدین ترتیب معادله پیوستگی از فهرست معادلات حذف خواهد شد و معادله کانوکشن - دیفیوژن (معادله (18)) به شکل معادله (25) در خواهد آمد:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial y} = \nabla^2 c \quad (25)$$

همچنین معادله حاصل از کرل معادله (17) به صورت معادله (26) خواهد بود:

$$\omega = \frac{K}{\mu} [-\alpha_1 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^3 \partial x} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right) + 2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right) - 2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x \partial y} \left( \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 \right) - \left( \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right) + \frac{\partial \mu}{\mu \partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\mu \partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + 1 \right) K \left( \frac{\partial^2 \mu}{\mu \partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\mu \partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - 4 \frac{\partial^2 \mu}{\mu \partial x \partial y} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right) \right)] \quad (26)$$

همچنین:

$$\frac{\partial \mu}{\mu \partial x} = \frac{\partial \mu}{\mu \partial c} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\mu \partial V^2} \frac{\partial V^2}{\partial x} \quad (27)$$

$$\frac{\partial \mu}{\mu \partial y} = \frac{\partial \mu}{\mu \partial c} \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\mu \partial V^2} \frac{\partial V^2}{\partial y} \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial c^2} \left( \frac{\partial c}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial c \partial V^2} \frac{\partial V^2}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial (V^2)^2} \left( \frac{\partial V^2}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial c} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial V^2} \frac{\partial^2 V^2}{\partial x^2} \quad (29)$$

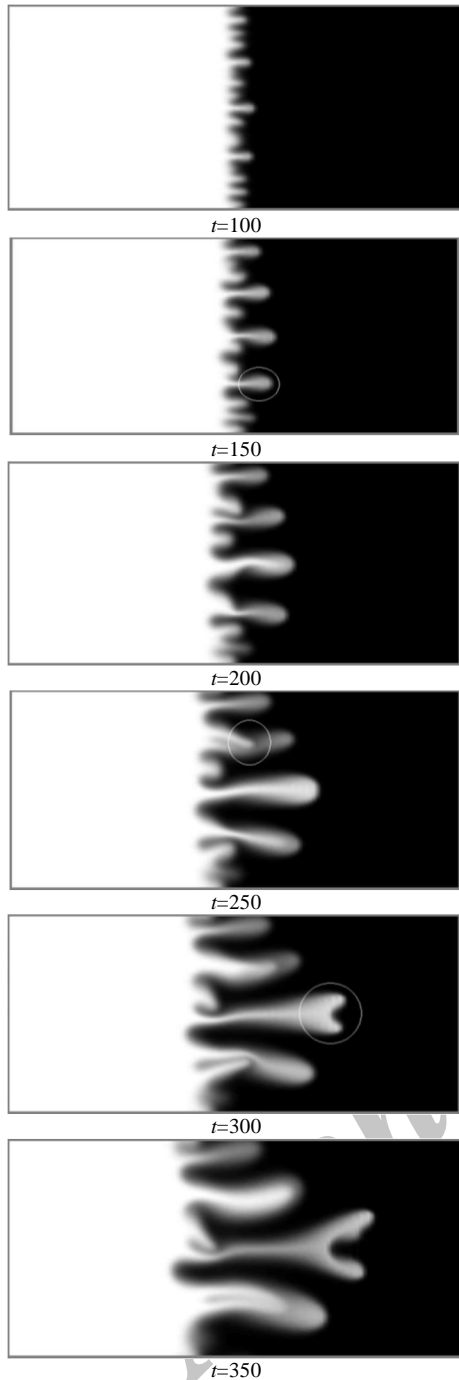
$$\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial c^2} \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial c \partial V^2} \frac{\partial V^2}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial (V^2)^2} \left( \frac{\partial V^2}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial c} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial V^2} \frac{\partial^2 V^2}{\partial y^2} \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial c^2} \frac{\partial c}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial c \partial V^2} \left( \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial V^2}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{\partial V^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial (V^2)^2} \frac{\partial V^2}{\partial y} \frac{\partial V^2}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial c} \frac{\partial^2 c}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial V^2} \frac{\partial^2 V^2}{\partial y \partial x} \quad (31)$$

باقی ترم‌ها نیز با روندی مشابه روابط (28-31) قابل استخراج است. پارامترهای موجود در این روابط براساس معادلات (32-38) تعریف می‌شود.

$$\frac{\partial \mu}{\mu \partial c} = \frac{(n-1)}{2} \ln(1 + (\lambda V)^2) - R \quad (32)$$

$$\frac{\partial \mu}{\mu \partial V^2} = \frac{c \left( \frac{n-1}{2} \right) \lambda^2}{1 + (\lambda V)^2} \quad (33)$$



**Fig. 1** Concentration iso-contours in the displacement of a Newtonian fluid by a CEF fluid

شکل 1 کانته‌های غلظت در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال CEF

است. در این فرایند، نوک انگشتی تا حدی پهن شده که در آن موج ایجاد خواهد شد. به دلیل وجود جریان، گرادیان غلظت در این موج پرسیب شده و در نتیجه آن، با گذشت زمان و رشد موج، نوک انگشتی شکافته می‌شود.

### 2-3- میانگین غلظت عرضی

بررسی منحنی‌های بدست آمده از مقادیر میانگین غلظت عرضی، یکی از متداول‌ترین مطالعات آزمایشگاهی و عددی در بررسی ناپایداری انگشتی می‌باشد. از میانگین غلظت عرضی برای بدست آوردن طول اختلاط استفاده می‌شود. در شکل 2 منحنی‌های میانگین غلظت عرضی برای جابجایی سیال

(42) تعریف می‌شود.

$$c(x, y, t = t_0) = \bar{c}(x, t_0) + \delta \cdot \text{rand}(y) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \quad (42)$$

در معادله (42)،  $\delta$  ضریبی است که شدت مقادیر تصادفی را مشخص می‌نماید و معمولاً از مرتبه 0.01 انتخاب می‌شود.  $\text{rand}(y)$  مجموعه‌ای از اعداد تصادفی است که بین 1 تا -1 انتخاب می‌شود و  $\sigma$  پارامتری است که شدت نفوذ پراکنده‌گی‌ها را از مرز جلویی نشان می‌دهد. پیشرفت زمانی در مسأله با استفاده از روش حدس-اصلاح آدامز-بشفورس<sup>1</sup> صورت می‌گیرد.

### 3- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش به شبیه‌سازی غیرخطی ناپایداری انگشتی در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال CEF پرداخته می‌شود. موارد مورد مطالعه شامل کانته‌های غلظت، منحنی‌های میانگین غلظت عرضی، طول اختلاط و بازده جارویی خواهد بود. قابل ذکر است در تمام شبیه‌سازی‌ها  $Pe = 1000$ ،  $K = 1$ ،  $R = 3$ ،  $A = 2$ ،  $\lambda = 0.5$  و  $\lambda_1 = 0.6$  و  $m = n = 0.6$  لحاظ شده است، مگر در مواردی که خلاف آن ذکر شود.

#### 3-1- کانته‌های غلظت

کانته‌های غلظت برای جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال CEF در شکل 1 نمایش داده شده است. در این ناپایداری، انگشتی‌ها با اعمال یک اغتشاش تصادفی در زمان ابتدایی و پیشروی زمانی شکل خواهند گرفت و به درون سیال با ویسکوزیته بیشتر نفوذ خواهند نمود. قابل ذکر است در کانته‌ها رنگ سفید و سیاه به ترتیب، نشان‌دهنده سیال ویسکوالاستیک جابجا کننده و سیال نیوتنی جابجا شونده است. از آنجا که جریان اختلاط‌پذیر در نظر گرفته شده است، در ناحیه تماس دو سیال و شکل‌گیری انگشتی‌ها، بر اساس نسبت اختلاط، شدت رنگ کانته‌ها تغییر خواهد نمود.

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، در فریم‌های ابتدایی تعداد انگشتی‌ها زیاد و البته بسیار باریک و ریز هستند، در حالی که با گذشت زمان در فریم‌های بعدی از تعداد آن‌ها کاسته شده ولی در عوض شاهد انگشتی‌هایی پهن‌تر و بزرگ‌تر هستیم. چگونگی رشد و شکل‌گیری این انگشتی‌ها متفاوت خواهد بود. در شکل 1، برخی از فرایندهای که در روند رشد و شکل‌گیری انگشتی‌ها رخ می‌دهند به خوبی قابل مشاهده است.

فرایند انتشار<sup>2</sup>:

یکی از ساده‌ترین فرایندها در روند شکل‌گیری انگشتی‌ها، فرایند انتشار است. در این فرایند به دلیل حرکت‌های بسیار کوچک عمود بر جهت جریان، انگشتی‌ها با گذشت زمان فرم افقی خود را از دست داده و پهن‌تر می‌شوند. این فرایند در زمان  $t=150$  قابل مشاهده است. فرایند بهم‌پیوستگی<sup>3</sup>:

نمونه این فرایند در زمان  $t=250$  قابل مشاهده است. در این فرایند نوک یک انگشتی به سمت انگشتی مجاورش خم شده و سپس با آن ادغام می‌شود، در نتیجه این ترکیب، انگشتی بزرگ‌تر و با ضخامت بیشتری شکل می‌گیرد.

فرایند شکافتگی نوک انگشتی<sup>4</sup>:

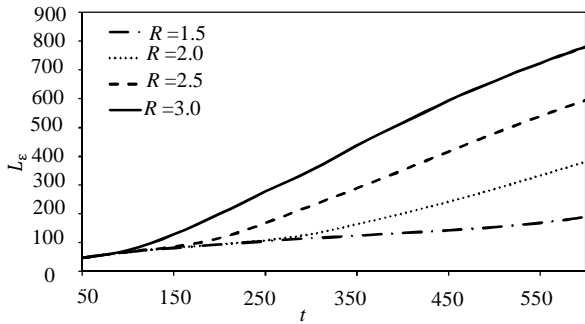
فرایند شکافتگی نوک انگشتی در زمان  $t=300$  به وضوح قابل مشاهده

<sup>1</sup> Adams-Bashforth predictor-corrector method

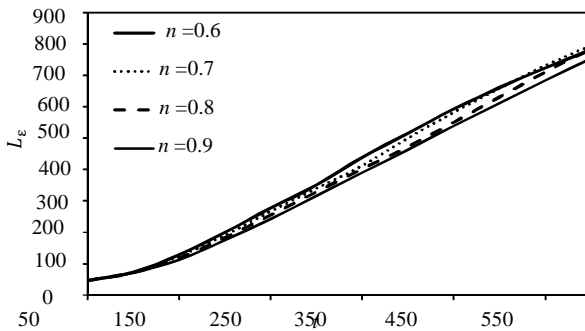
<sup>2</sup> Spreading

<sup>3</sup> Coalescence

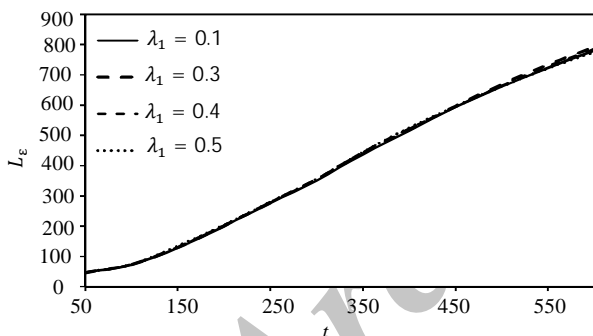
<sup>4</sup> Tip-Splitting



**Fig. 3** Mixing length profiles for different values of  $R$   
 شکل 3 منحنی‌های طول اختلاط در مقادیر مختلف پارامتر  $R$



**Fig. 4** Mixing length profiles for different values of power index ( $n$ )  
 شکل 4 منحنی‌های طول اختلاط در مقادیر مختلف شاخص‌های توانی ( $n$ )



**Fig. 5** Mixing length profiles for different values of  $\lambda_1$   
 شکل 5 منحنی‌های طول اختلاط در مقادیر مختلف پارامتر  $\lambda_1$

از روش ارائه شده توسط قسمت و عزیز [20] بهره برده شده است. در این روش بازده جاروبی از تقسیم تعداد گره‌هایی که غلظت آن‌ها مساوی یا بزرگتر از 0.5 است بر تعداد کل گره‌های موجود در محیط محاسباتی حاصل می‌شود.

شکل 6 نشان دهنده تغییرات بازده جاروبی بر حسب زمان برای شاخص‌های توانی ( $n$ ) مختلف است. همان‌طور که انتظار می‌رود، تقریباً در هر زمان بیشترین بازده جاروبی مرتبط با بیشترین شاخص توانی ( $n$ ) خواهد بود زیرا با افزایش این پارامتر اختلاف ویسکوزیته بین سیال جابجاکننده و جابجاشونده به عنوان مهمترین عامل ایجاد ناپایداری کاهش خواهد یافت. همچنین در زمان‌های آغازی، بازده نزدیک به یک خواهد بود با گذشت زمان و شکل‌گیری انگشتی‌ها از بزرگی این پارامتر کاسته می‌شود. تغییرات بازده جاروبی برای  $\lambda_1$  های مختلف در شکل 7 نشان داده شده است. با توجه به

نیوتنی به وسیله‌ی سیال CEF و در زمان‌های مختلف رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در زمان‌های ابتدایی شروع ناپایداری، منحنی به صورت خطی بدون پستی و بلندی می‌باشد. با افزایش زمان و رشد انگشتی‌ها، پستی و بلندی‌های موجود بر منحنی‌ها نیز افزایش پیدا می‌کنند.

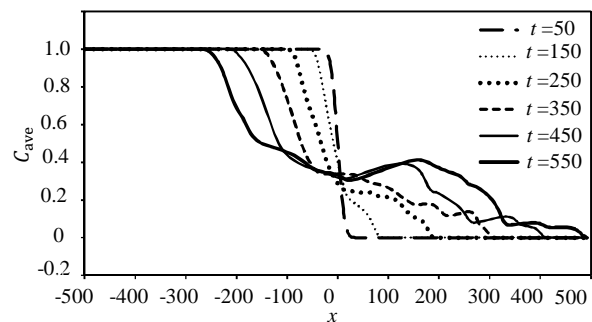
### 3-3- طول اختلاط

همان‌گونه که در قسمت قبل ذکر شد، با استفاده از مقادیر بدست آمده برای میانگین غلظت عرضی، نتایج مهم‌تری مانند طول اختلاط به دست خواهد آمد. به بیان کلی میزان ناحیه مخلوط شدن دو سیال درگیر در جابجایی مخلوط‌شدنی را طول اختلاط می‌نامند. طول اختلاط را می‌توان میزان پیشرفت سیال با ویسکوزیته کمتر درون سیال با ویسکوزیته بیشتر، تعریف نمود. برای بدست آوردن این طول، روش‌های مختلفی ارائه شده است. در مطالعه حاضر با استفاده از روش زیرمن و هومسی [18] این کمیت اندازه‌گیری می‌شود. در این روش فاصله بین  $C_{ave} = \varepsilon$  و  $C_{ave} = 1 - \varepsilon$  محاسبه شده و به عنوان طول اختلاط ( $L_e$ ) در نظر گرفته می‌شود.  $\varepsilon$  یک عدد مثبت کوچک است که در این مطالعه مقدار آن 0.01 در نظر گرفته می‌شود.

شکل 3 نشان‌دهنده طول اختلاط برای  $R$  های مختلف است. همان‌گونه که انتظار می‌رود با افزایش  $R$  و در نتیجه افزایش اختلاف ویسکوزیته دو سیال، ناپایداری افزایش یافته و در هر زمان طول اختلاط افزایش خواهد یافت. تأثیر شاخص توانی  $n$  بر روی طول اختلاط در شکل 4 نمایش داده شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود با افزایش این پارامتر، طول اختلاط کاهش خواهد یافت. در واقع با توجه به رابطه (7) افزایش این پارامتر، افزایش ویسکوزیته سیال CEF را در پی خواهد داشت و در نتیجه اختلاف ویسکوزیته بین سیال جابجاکننده و جابجاشونده (به عنوان عامل اصلی ایجاد این ناپایداری) کاهش یافته و از شدت ناپایداری کاسته خواهد شد. شکل 5 نشان دهنده اثر پارامتر  $\lambda_1$  بر روی طول اختلاط است. با توجه به شکل این پارامتر تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر روی طول اختلاط نخواهد داشت.

### 3-4- بازده جاروبی

از جمله پارامترهای مورد توجه در بررسی ناپایداری انگشتی بازده جاروبی است. این پارامتر نشان دهنده نسبت حجم سیال جابجا شده به حجم کل سیال موجود در محیط متخلخل است. در مطالعات پیشین برای به دست آوردن این پارامتر از روش‌های مختلفی استفاده شده است. در مطالعه حاضر



**Fig. 2** Transversely averaged concentration profiles contours in the displacement of a Newtonian fluid by a CEF fluid

شکل 2 منحنی‌های میانگین غلظت عرضی در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال CEF

تغییرات منحنی بازده جارویی برای  $\lambda$  های مختلف در شکل 9 قابل مشاهده است. با افزایش این پارامتر ویسکوزیته و ضریب اختلاف تنش نرمال اول سیال CEF هر دو کاهش خواهند یافت و بازده جارویی کاهش می‌یابد.

#### 4- نتیجه‌گیری

در این مطالعه به شبیه‌سازی غیرخطی ناپایداری انگشتی لزج در جابجایی مخلوط‌شدنی سیال نیوتنی توسط سیال ویسکوالاستیک به کمک روش پر دقت طیفی و تبدیلات هارتلی پرداخته شده است. برای مدل‌سازی سیال ویسکوالاستیک از معادله ساختاری کریمینال - اریکسن-فلیبی (CEF) استفاده شد. این معادله ساختاری در عین سادگی، قادر به شبیه‌سازی وابستگی توابع رئولوژیک به نرخ برش است. لازم به ذکر است در این مطالعه این وابستگی به کمک مدل کاریو-یاسودا اعمال شده است. نتایج شامل کانتورهای غلظت، نشان‌دهنده مکانیزم‌های مختلفی است که انگشتی‌ها در روند شکل‌گیری و رشد خود با آن مواجه‌اند. این مکانیزم‌ها شامل انتشار، بهم پیوستگی و شکافتگی نوک انگشتی‌هاست که پیشتر توسط محققان بسیاری در جابجایی سیالات مختلف گزارش شده است. دیاگرام میانگین غلظت عرضی متناسب با پیشروی زمانی و بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر روی عوامل مشخص‌کننده ناپایداری شامل طول اختلاط و بازده جارویی از جمله نتایج ارائه شده در این مطالعه است. نتایج همان‌گونه که انتظار میرفت نشان‌دهنده افزایش طول اختلاط و کاهش بازده جارویی با افزایش نسبت تحرک می‌باشد. همچنین مشاهده می‌شود با افزایش شاخص توانی ویسکوزیته در مدل کاریو، جریان پایدارتر خواهد شد و طول اختلاط کاهش و بازده جارویی افزایش می‌یابد. همچنین بررسی تأثیر اختلاف تنش نرمال اول بر ناپایداری به وسیله افزایش پارامترهای  $m$  و  $\lambda_1$  صورت گرفت. با افزایش این پارامترها، ابتدا بازده جارویی افزایش و در زمان‌های پایانی کاهش خواهد یافت. این درحالیست که منحنی طول اختلاط تغییر محسوسی نخواهد داشت. همچنین افزایش مقدار پارامتر  $\lambda$  که موجب کاهش ویسکوزیته و ضریب اختلاف تنش نرمال اول در سیال CEF می‌شود، ناپایدارتر شدن جریان و کاهش بازده جارویی را در پی خواهد داشت.

در مطالعات پیشین، بررسی اثر عوامل تأثیرگذار بر نسبت ویسکوزیته دو سیال جایگزیننده و جایگزیننده به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است. هدف از این مطالعه بررسی خاصیت الاستیسیته سیال ویسکوالاستیک بر این ناپایداریست. انتخاب معادله ساختاری CEF برای شبیه‌سازی این نوع سیال هر چند دقیق‌ترین انتخاب موجود نیست اما می‌تواند بهترین انتخاب ممکن برای شروع شبیه‌سازی ناپایداری انگشتی ویسکوالاستیک با کمک

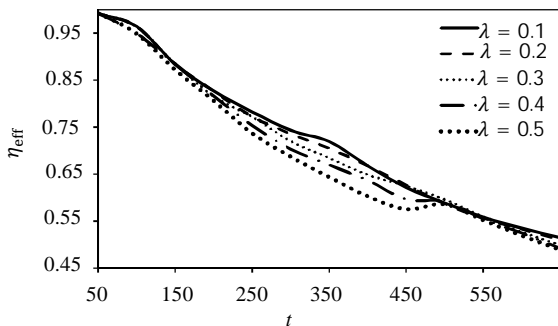


Fig. 9 Sweep efficiency profiles for different values of  $\lambda$   
شکل 9 منحنی‌های بازده جارویی در مقادیر مختلف  $\lambda$

رابطه (8)، با افزایش این پارامتر ضریب اختلاف تنش نرمال اول در سیال CEF افزایش خواهد یافت. به عبارت دیگر اثر الاستیسیته افزایش می‌یابد. نتایج نشان می‌دهد، این عامل ابتدا سبب افزایش بازده جارویی خواهد شد و در زمان‌های بالاتر و با پیشروی انگشتی‌ها اثر معکوس داشته و بازده را کاهش خواهد داد. به منظور بررسی بهتر، منحنی تغییرات بازده جارویی برای شاخص‌های توانی ( $m$ ) در رابطه‌ی ضریب اختلاف تنش نرمال اول، در شکل 8 نمایش داده شده است. با افزایش این پارامتر، ضریب اختلاف تنش نرمال اول سیال CEF جابجاکننده افزایش خواهد یافت. قابل ذکر است. با توجه به رابطه (8) تأثیر پارامتر  $m$  بر روی ضریب اختلاف تنش نرمال اول به مراتب کمتر از تأثیر پارامتر  $\lambda_1$  خواهد بود. با این وجود می‌توان نتیجه‌ای مشابه شکل 7 را مشاهده نمود. افزایش این پارامتر سبب افزایش هرچند بسیار اندک در بازده جارویی در آغاز و سپس کاهش آن خواهد شد.

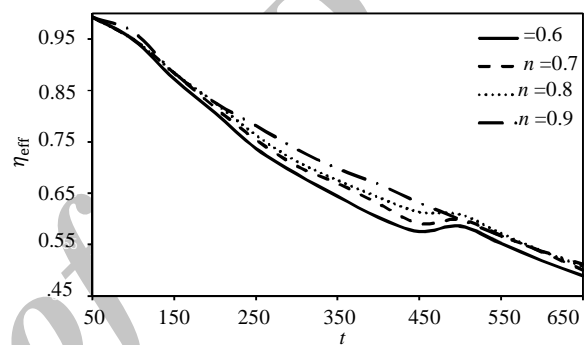


Fig. 6 Sweep efficiency profiles for different values of power index ( $n$ )  
شکل 6 منحنی‌های بازده جارویی در مقادیر مختلف شاخص‌های توانی ( $n$ )

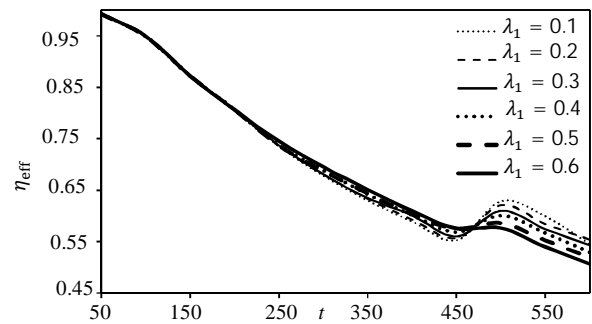


Fig. 7 Sweep efficiency profiles for different values of  $\lambda_1$   
شکل 7 منحنی‌های بازده جارویی در مقادیر مختلف پارامتر  $\lambda_1$

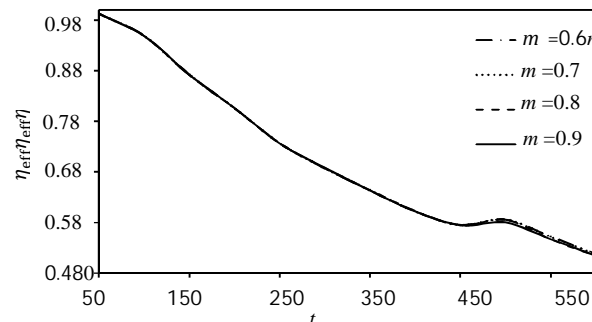


Fig. 8 Sweep efficiency profiles for different values of power index ( $m$ )  
شکل 8 منحنی‌های بازده جارویی در مقادیر مختلف شاخص‌های توانی ( $m$ )

شبیه‌سازی غیرخطی و حداقل براساس روش با دقت بالای مورد استفاده در این مطالعه باشد.

دانشگاه تشکر و قدردانی می‌نماید.

### 7- مراجع

- [1] M. A. Nilsson, R. Kulkarni, L. Gerberich, R. Hammond, R. Singh, E. Baumhoff, J. P. Rothstein, Effect of fluid rheology on enhanced oil recovery in a microfluidic sandstone device, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 202, No. 1, pp. 112-119, 2013.
- [2] S. Hill, Channeling in packed columns, *Chemical Engineering Science*, Vol. 1, No. 6, pp. 247-253, 1952.
- [3] G. M. Homsy, Viscous fingering in porous media, *Annual review of fluid mechanics*, Vol. 19, No. 1, pp. 271-311, 1987.
- [4] D. Peaceman, H. Rachford Jr, Numerical calculation of multidimensional miscible displacement, *Society of Petroleum Engineers Journal*, Vol. 2, No. 04, pp. 327-339, 1962.
- [5] M. Christie, D. Bond, Detailed simulation of unstable processes in miscible flooding, *SPE Reservoir Engineering*, Vol. 2, No. 04, pp. 514-522, 1987.
- [6] C. Tan, G. Homsy, Simulation of nonlinear viscous fingering in miscible displacement, *Physics of Fluids (1958-1988)*, Vol. 31, No. 6, pp. 1330-1338, 1988.
- [7] M. Norouzi, M. Shoghi, A numerical study on miscible viscous fingering instability in anisotropic porous media, *Physics of Fluids (1994-present)*, Vol. 26, No. 8, pp. 084102, 2014.
- [8] R. Marshall, A. Metzner, Flow of viscoelastic fluids through porous media, *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, Vol. 6, No. 3, pp. 393-400, 1967.
- [9] S. Wilson, The Taylor-Saffman problem for a non-Newtonian liquid, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 220, No. 1, pp. 413-425, 1990.
- [10] B. K. Singh, J. Azaiez, Numerical simulation of viscous fingering of shear-thinning fluids, *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 79, No. 6, pp. 961-967, 2001.
- [11] J. Azaiez, B. Singh, Stability of miscible displacements of shear thinning fluids in a Hele-Shaw cell, *Physics of Fluids (1994-present)*, Vol. 14, No. 5, pp. 1557-1571, 2002.
- [12] H. Li, B. Maini, J. Azaiez, Experimental and numerical analysis of the viscous fingering instability of shear-thinning fluids, *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 84, No. 1, pp. 52-62, 2006.
- [13] M. C. Kim, C. K. Choi, Linear analysis on the stability of miscible dispersion of shear-thinning fluids in porous media, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 166, No. 21, pp. 1211-1220, 2011.
- [14] M. Nourozi, M. Shoghi, Nonlinear simulation of non-Newtonian viscous fingering instability in anisotropic porous media, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 7, pp. 11, 2015. (in Persian)
- [15] D. J. Pye, Improved secondary recovery by control of water mobility, *Journal of Petroleum Technology*, Vol. 16, No. 08, pp. 911-916, 1964.
- [16] J. Avendano, N. Pannacci, B. Herzhaft, P. Gateau, P. Coussot, Enhanced displacement of a liquid pushed by a viscoelastic fluid, *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol. 410, No. 1, pp. 172-180, 2013.
- [17] R. B. Bird, C. F. Curtiss, R. C. Armstrong, O. Hassager, *Dynamics of Polymer Liquids*, Second Edition, pp. 171, 491-503, New York: Wiley, 1987.
- [18] W. Zimmerman, G. Homsy, Nonlinear viscous fingering in miscible displacement with anisotropic dispersion, *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics (1989-1993)*, Vol. 3, No. 8, pp. 1859-1872, 1991.
- [19] O. Manickam, G. Homsy, Fingering instabilities in vertical miscible displacement flows in porous media, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 288, No. 1, pp. 75-102, 1995.
- [20] K. Ghesmat, J. Azaiez, Viscous fingering instability in porous media: effect of anisotropic velocity-dependent dispersion tensor, *Transport in Porous Media*, Vol. 73, No. 3, pp. 297-318, 2008.

### 5- فهرست علائم

$c$	غلظت
$C_{ave}$	میانگین غلظت عرضی
$D$	پراکندگی ( $m^2 s^{-1}$ )
$K$	نفوذپذیری ( $m^2$ )
$L_e$	طول اختلاط
$m$	شاخص توانی در رابطه اختلاف تنش نرمال اول
$n$	شاخص توانی در رابطه ویسکوزیته
$P$	فشار ( $kgm^{-1}s^{-2}$ )
$Pe$	عدد پکلت
$R$	لگاریتم نسبت ویسکوزیته‌ها
$u$	سرعت در جهت محور $x$ ( $ms^{-1}$ )
$v$	سرعت در جهت محور $y$ ( $ms^{-1}$ )
<b>علائم یونانی</b>	
$\alpha_1$	ضریب اختلاف تنش نرمال اول
$\alpha_2$	ضریب اختلاف تنش نرمال دوم
$\dot{\gamma}$	نرخ برش تعمیم یافته ( $s^{-1}$ )
$\eta_{eff}$	بازده جارویی
$\lambda$	ثابت زمانی (s)
$\lambda_1$	ثابت زمانی (s)
$\mu$	لزجت دینامیکی ( $kgm^{-1}s^{-1}$ )
$\rho$	چگالی ( $kgm^{-3}$ )
$\psi$	تابع جریان ( $m^2 s^{-1}$ )
$\omega$	ورتیسیته ( $s^{-1}$ )
<b>زیرنویس‌ها</b>	
1	سیال ویسکوالاستیک جابجا کننده
0	پارامتر در نرخ برش صفر

### 6- تقدیر و تشکر

این مقاله مستخرج از یک طرح پژوهشی است که از سوی دانشگاه صنعتی شاهرود مورد حمایت است. لذا نویسندگان از حمایت های مالی و معنوی