



بررسی عددی تأثیرات جابجایی طبیعی در فرآیند ذوب و انجماد PCM داخل یک مخزن مستطیلی په‌دار به کمک LBM

محمد تقیلو¹، فرامرز طلعتی کلاس^{2*}

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

* صندوق پستی 5166616471، talati@tabrizu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 26 اردیبهشت 1395

پذیرش: 26 تیر 1395

ارائه در سایت: 24 مرداد 1395

کلید واژگان:

تغییر فاز جامد - مایع

جابجایی طبیعی

ماده تغییر فاز دهنده

روش بولتزمن شبکه‌ای

چکیده

استفاده از مواد تغییر فاز دهنده به منظور افزایش ظرفیت ذخیره/ آزادسازی انرژی، موضوع مورد مطالعه بسیاری از تحقیقات نوین در زمینه مدیریت عرضه انرژی است. مطالعه چنین سیستم‌هایی مستقیماً با مسئله تغییر فاز جامد- مایع در ارتباط است. به طوری که محاسبه توزیع دما، موقعیت جبهه تغییر فاز و کسر ماده جامد یا مایع شده به موضوع اساسی در این مسائل تبدیل می‌شود. بررسی فرآیند انجماد و ذوب با در نظر گرفتن پدیده انتقال گرمای جابجایی آزاد در فاز مایع، هدف اصلی مقاله حاضر است. بدین منظور یک مخزن مستطیلی په‌دار حاوی ماده تغییر فاز دهنده، در نظر گرفته شده است. وجود پره به منظور افزایش آهنگ انتقال گرما در نظر گرفته شده است. غوطه ور شدن فاز جامد داخل فاز مایع لزوم در نظر گرفتن شرط مرزی شناوری را روی مرز فاز جامد سبب می‌شود. از این رو فرآیند ذوب با در نظر گرفتن اثرات جابجایی طبیعی و حرکت فاز جامد داخل فاز مایع مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین اثرات جابجایی طبیعی در فرآیند انجماد نیز مطالعه شده است. با این تفاوت که در فرآیند انجماد نیازی به اعمال شرط مرزی شناوری وجود ندارد. روش عددی مورد استفاده روش بولتزمن شبکه‌ای بوده و نتایج براساس اعداد بی‌بعد گزارش شده است. براساس نتایج به‌دست آمده، اثرات جابجایی طبیعی در فرآیند انجماد قابل صرف‌نظر است. در حالی که در نظر گرفتن اثرات جابجایی طبیعی تغییر چشم‌گیری در مدت زمان موردنیاز برای ذوب کامل ماده تغییر فاز دهنده ایجاد می‌کند.

Numerical investigation of natural convection effects on the melting and solidification of PCM within a rectangular finned container using LBM

Mohammad Taghilou, Faramarz Talati*

Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

* P.O.B. 5166616471, Tabriz, Iran, talati@tabrizu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 15 May 2016
Accepted 16 July 2016
Available Online 14 August 2016

Keywords:

Solid-liquid phase-change
Natural convection
Phase change material
Lattice Boltzmann method

ABSTRACT

The use of phase change material to enhance the capacity of energy storage/ release is the subject of many new researches on the management of energy supply. Study of these systems is directly related to the solid-liquid phase-change problem, in which the evaluation of temperature distribution, position of phase-change front and liquid or solid fraction becomes a basic problem. Study of freezing and melting process with regard to natural convection in the liquid phase is the main purpose of the present paper. For this purpose, a rectangular finned container of phase change material is intended. Fins are used to enhance the heat transfer rate. This fact necessitates the use of immersed boundary condition on the solid phase. Hence, the melting process considering both the effects of natural convection and movement of solid phase is studied. The freezing process is also studied taking into account the natural convection with no need to impose the immersed boundary condition. Lattice Boltzmann method is used as a numerical method and results are reported based on the dimensionless parameters. Based on the results, the effects of natural convection are negligible during freezing process, while imposing the effects of natural convection provides a significant change in the required time for complete melting of the phase change material.

1- مقدمه

سیستم‌های ذخیره انرژی خورشیدی [4,5]، خنک‌کاری تجهیزات الکترونیکی، پمپ‌های گرمایی و کاربردهای فضایی استفاده می‌شوند.

فرآیند ذخیره/ آزادسازی انرژی داخل مخزن حاوی ماده تغییر فاز دهنده¹ (PCM)، با مسئله تغییر فاز همراه است. محاسبه توزیع دما در دو فاز جامد و مایع، سرعت تغییر فاز و در نتیجه موقعیت جبهه انجماد/ ذوب مسئله

مطالعه فرآیند انجماد و ذوب به علت کاربرد گسترده آن در سیستم‌های ذخیره انرژی، و نقش مواد تغییر فاز دهنده به‌عنوان عامل ذخیره و هدایت آن، همواره مورد توجه محققین قرار داشته است. چنانچه به طور گسترده در کاربردهای مهندسی از قبیل سیستم‌های تهویه مطبوع ساختمان‌ها [1-3]،

¹ Phase change material

فاز پرداختند. برای این کار آن‌ها با استفاده از مفهوم روش آنتالپی، و پس از حل میدان دما، موقعیت جبهه انجماد را به دست آوردند. از آن‌جا که در مدل آن‌ها از اثرات انتقال گرمای جابجایی صرف‌نظر شده، برای محاسبه میدان دما تنها یک تابع توزیع f برای حل معادله انرژی معرفی شده است. همچنین آن‌ها با استفاده از بسط چاپمن-انساکاک نشان دادند که با افزودن جمله چشمه گرمایی به معادله بولتزمن گسسته، معادله ماکروسکوپی انرژی به همراه جمله چشمه به دست خواهد آمد. هانگ و همکاران [16] با در نظر گرفتن اثرات جابجایی طبیعی به ارائه مدل بولتزمن شبکه‌ای برای شبیه‌سازی فرآیند ذوب و انجماد پرداختند. در مدل آن‌ها، از دو تابع توزیع یکی برای در نظر گرفتن میدان سرعت و دیگری برای محاسبه میدان دما استفاده شده است.

در مقاله حاضر به بررسی فرآیند ذوب و انجماد PCM در یک مخزن مستطیلی پره‌دار با در نظر گرفتن اثرات جابجایی طبیعی پرداخته می‌شود. از آن‌جا که در مخزن پره تعبیه شده است، لذا در فرآیند ذوب، فاز جامد در داخل فاز مایع شناور شده و لازم است تا تغییر تکانه فاز جامد در محاسبات گنجانده شود. از این رو سه حالت مختلف در حین ذوب یعنی ذوب با فرض رسانش خالص، ذوب در حضور جابجایی طبیعی و بدون حرکت فاز جامد و ذوب با در نظر گرفتن حرکت فاز جامد شبیه‌سازی، و نتایج با هم مقایسه شده‌اند. همچنین فرآیند انجماد در دو حالت مختلف یعنی انجماد با فرض رسانش خالص و نیز انجماد با حضور جابجایی طبیعی شبیه‌سازی شده و اثرات جابجایی طبیعی مورد ارزیابی قرار گرفته است.

2- تعریف مسئله

مخزن مستطیلی حاوی PCM به ارتفاع l_c و عرض l_f را مطابق "شکل 1" در نظر بگیرید که در آن پره‌های آلومینیومی به ضخامت δ قرار داده شده‌اند. دیواره‌های بالا و پایین مخزن عایق و دیواره‌های جانبی آن دارای شرط مرزی دما ثابت T_w می‌باشد. در ابتدا PCM به صورت مایع یا جامد و در دمای اولیه یکنواخت T_i قرار دارد. البته دمای دیواره به نحوی انتخاب خواهد شد که با توجه به شرایط اولیه، فرآیند انجماد یا ذوب رخ دهد. مخزن مورد اشاره دارای ضخامت پره $\delta = 0.5 \text{ mm}$ می‌باشد.

3- روش بولتزمن شبکه‌ای

1-3- مدل LBM با ضرب رها سازی منفرد¹ SRT

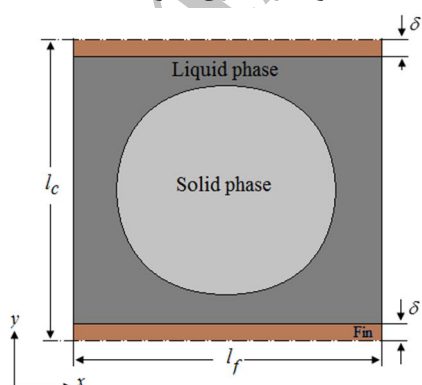


Fig. 1 A schematic of PCM phase-change (solid-liquid) through a rectangular finned container

شکل 1 طرح‌واره مسئله تغییر فاز (جامد-مایع) PCM داخل مخزن مستطیلی پره‌دار

اصلی در زمینه تغییر فاز است. از آن‌جا که ارائه پاسخ تحلیلی دارای محدودیت گسترده‌ای است، توسعه روش‌های عددی کمک شایانی برای حل مسائل تغییر فاز خواهد کرد. هسو و همکاران [6] روشی عددی براساس حجم کنترل برای حل مسائل پخش با شرط مرزی گذرا ارائه کردند. هدف اصلی کار آن‌ها تبدیل مسئله با مرز متحرک به مرز ثابت بوده است. گام نخست برای این کار به دست آوردن معادله انرژی در سیستم مختصات غیرمتعامد و در قالب حجم کنترل است. سپس معادله انتگرالی به صورت گسسته نوشته می‌شود. با این کار معادله حاکم به مجموعه معادلات جبری تبدیل می‌شود. در معادلات به دست آمده در مختصات جدید برخلاف ماهیت پخش مسئله، جملات جابجایی نیز ظاهر می‌شوند. البته در اغلب مسائل با مرز متحرک، جمله جابجایی در مقایسه با جملات پخش، کوچک بوده و به صورت ساده می‌توان معادله را گسسته کرد. زیوکویچ و فوجی [7] برای حل مسئله تغییر فاز هم‌دما، یک مدل عددی ساده ارائه کردند. در این روش که براساس روش آنتالپی است، تنها مجهول مسئله، دمای جسم می‌باشد. این مدل برای مخازن مکعبی و استوانه‌ای اعمال شده است. علاوه بر موارد ذکر شده، مطالعات عددی متعددی در خصوص شبیه‌سازی عددی سیستم‌های ذخیره انرژی وجود دارد. وجه اشتراک اکثر این مطالعات صرف‌نظر کردن از جابجایی طبیعی است. برای مثال می‌توان به کارهای کوزاک و همکاران [8] و طلعتی و تقی‌لو [9] اشاره کرد. در ادامه به تحقیقاتی اشاره خواهد شد که اثرات جابجایی طبیعی را نیز در نظر گرفته‌اند.

یکی از مهم‌ترین روش‌های ارائه شده برای شبیه‌سازی فرآیند تغییر فاز، روش برنت و همکاران [10] است. این روش که با نام روش آنتالپی-تخلخل شناخته شده است، از روش آنتالپی برای محاسبه موقعیت جبهه انجماد استفاده می‌کند. همچنین برای در نظر گرفتن ناحیه خمیری شکل در فصل مشترک دو فاز، از مفهوم محیط متخلخل و نفوذپذیری استفاده شده است. در این روش میدان سرعت با حل معادله تکانه اصلاح شده به دست می‌آید. برای اصلاح معادله تکانه، جمله چشمه به صورت تابع تخلخل میدان وارد معادله می‌شود. مقایسه نتایج عددی به دست آمده با نتایج ذوب گالیوم عملکرد قابل قبول روش ارائه شده را نشان داده است. پهم‌لی و همکاران [11] مسئله سه بعدی ذوب PCM در یک میدل دو لوله‌ای را به کمک روش آنتالپی-تخلخل شبیه‌سازی کرده و اثرات جابجایی طبیعی بر جبهه ذوب را بررسی نمودند. در کار آن‌ها فاز جامد، ساکن فرض شده و از اثرات حرکت آن صرف نظر شده است. وینچی و کیمورا [12] تأثیرات جابجایی طبیعی را در فرآیند انجماد در داخل محفظه مستطیلی مطالعه کردند. بدین منظور آن‌ها با در نظر گرفتن شرایط مرزی دما ثابت برای دیواره‌های عمودی و عایق برای دیواره‌های افقی، به ارائه مدل عددی و تحلیلی خود پرداختند.

از میان روش‌های مختلف حل عددی مسئله استفان، توسعه روش بولتزمن شبکه‌ای به عنوان راهکار دیگر حل این مسئله می‌تواند مورد توجه قرار گیرد. ژانگ و همکاران [13] روش بولتزمن شبکه‌ای را جهت شبیه‌سازی فرآیند تغییر فاز به کمک روش آنتالپی توسعه دادند. بدین منظور آن‌ها با افزودن یک جمله به معادله برخورد، اثرات تغییر فاز را به صورت یک جمله چشمه وارد محاسبات نمودند. همچنین آن‌ها به کمک بسط چاپمن-انساکاک تطابق میان معادله بولتزمن گسسته شده و معادله انرژی را نشان دادند. براساس نتایج آن‌ها، جمله چشمه اضافه شده به معادله برخورد با جمله اضافه شده به معادله انرژی در روش زیوکویچ و فوجی [7] یکسان است. چترجی و چکربورتی [14, 15] با توسعه معادله گسسته بولتزمن، به مطالعه فرآیند تغییر

¹ Single Relaxation Time (SRT)

اساس مدل MRT، انتقال بردار تابع توزیع از فضای سرعت به فضای کمیت‌های متوسط به کمک ماتریس انتقال M است. به عبارت دیگر ماتریس M بردار f را به فضای متوسط \hat{f} و به عکس، ماتریس M^{-1} بردار \hat{f} را از فضای متوسط به بردار f باز می‌گرداند. به عبارت دیگر:

$$\hat{f}_i = M_{ij} f_j \quad (9)$$

$$f_i = M_{ij}^{-1} \hat{f}_j \quad (10)$$

به کمک ماتریس انتقال، معادله (8) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f_i(\vec{r} + \vec{c}_i \Delta t, \vec{c}_i, t + \Delta t) - f_i(\vec{r}, \vec{c}_i, t) = M_{ij}^{-1} S_{kj}^f (\hat{f}_i - \hat{f}_i^{eq}) \quad (11)$$

برای شبکه D2Q9 بردار انتقال یافته \hat{f} در فضای متوسط به صورت رابطه (12) داده می‌شود [18]:

$$\hat{f} = [\rho, e, e^2, j_x, q_x, j_y, q_y, p_{xx}, p_{xy}]^T \quad (12)$$

در رابطه (12)، چگالی، ρ انرژی، e انرژی، e^2 مجذور انرژی، j_x و j_y تکانه در جهت‌های x و y ، q_x و q_y شار انرژی جهت‌های x و y ، p_{xx} و p_{xy} عناصر قطری و غیرقطری تانسور تنش هستند. همچنین ماتریس انتقال M به صورت رابطه (13) ارائه می‌شود [18]:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

مقادیر تعادلی تابع \hat{f} نیز به صورت زیر گزارش شده است [18]:

$$\hat{f}^{eq} = \begin{bmatrix} \rho \\ -2\rho + 3(j_x^2 + j_y^2) \\ \rho - 3(j_x^2 + j_y^2) \\ j_x \\ -j_x \\ j_y \\ -j_y \\ (j_x^2 - j_y^2) \\ j_x j_y \end{bmatrix} \quad (14)$$

مقادیر چگالی، تکانه در جهت x ، j_x و تکانه در جهت y ، j_y توسط روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\rho = \sum_i f_i \quad (15)$$

$$j_x = \rho u_x = \sum_i f_i c_{ix} \quad (16)$$

$$j_y = \rho u_y = \sum_i f_i c_{iy} \quad (17)$$

ماتریس قطری S نیز به شکل زیر خلاصه می‌شود:

$$S^f = \text{diag}(1.0 \quad 1.4 \quad 1.4 \quad s_3 \quad 1.2 \quad s_5 \quad 1.2 \quad s_7 \quad s_8) \quad (18)$$

در رابطه (18)، $s_7 = s_8 = 2/(1 + 6v)$ و مقادیر s_3 و s_5 به صورت دلخواه و معمولاً یک فرض می‌شوند.

3-3- شبیه‌سازی میدان دما

محاسبه میدان دما نیز مشابه میدان سرعت و به طور مجزا از هم توسط تابع توزیع مربوطه مشخص خواهد شد. اگر تلفات گرمایی در اثر لزجت و تراکم پذیرند اندک باشد، معادله انرژی مطابق زیر به دست می‌آید [19]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{T} = \nabla \cdot (\alpha \nabla \vec{T}) \quad (19)$$

با کنار گذاشتن جمله نیروهای خارجی، معادله انتقال بولتزمن به صورت زیر نوشته می‌شود [17]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{c} \cdot \nabla \vec{f} = -\frac{f - f^{eq}}{\tau} \quad (1)$$

با گسسته کردن فضای مکان در جهت‌های i کمیت‌های ریز مقیاس مکان، سرعت و تابع توزیع را به صورت f_i و c_i ، r_i نمایش می‌دهیم. همچنین ضریب رهاسازی منفرد در معادله (1) با τ نشان داده شده است. حال با در نظر گرفتن گام زمانی Δt ، معادله (1) به صورت زیر در فضای زمان و مکان گسسته می‌شود:

$$f_i(\vec{r} + c_i \Delta t, \vec{c}_i, t + \Delta t) - f_i(\vec{r}, \vec{c}_i, t) = -\frac{\Delta t}{\tau} (f_i(\vec{r}, \vec{c}_i, t) - f_i^{eq}(\vec{r}, \vec{c}_i, t)) \quad (2)$$

برای گسسته‌سازی فضای مکان در روش بولتزمن، از شبکه D2Q9 که بیشترین کاربرد را در حل معادله بولتزمن دارد، استفاده می‌شود. برای شبکه D2Q9 سرعت گسسته شده بی‌بعد شبکه $\vec{c}_i = \vec{c}_i/c$ به صورت رابطه (3) داده شده است [17]:

$$\begin{cases} \vec{c}_0 = (0,0) \\ \vec{c}_{2i+1} = \left[\cos\left(\frac{i\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{i\pi}{4}\right) \right], & i = 0,1,2,3 \\ \vec{c}_{2i} = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{2i-1}{4}\pi\right), \sin\left(\frac{2i-1}{4}\pi\right) \right], & i = 1,2,3,4 \end{cases} \quad (3)$$

که در آن $c = \Delta x/\Delta t$ است.

جهت حل عددی معادله (2) نیاز است تا فرم گسسته شده تابع توزیع تعادلی (معادله ماکسول-بولتزمن) به دست آید. نشان داده می‌شود تابع توزیع تعادلی به شکل رابطه (4) به دست می‌آید [17]:

$$f_i^{eq} = \rho w_i \left[1 + \frac{3}{c^2} \vec{c}_i \cdot \vec{u} + \frac{9}{2c^4} (\vec{c}_i \cdot \vec{u})^2 - \frac{3}{c^2} \vec{u} \cdot \vec{u} \right] \quad (4)$$

در رابطه فوق w_i ضریب وزنی است که برای شبکه D2Q9 به صورت رابطه (5) خواهد بود [17]:

$$w_i = \begin{cases} \frac{4}{9}, & i = 9 \\ \frac{1}{9}, & i = 1,2,3,4 \\ \frac{1}{36}, & i = 5,6,7,8 \end{cases} \quad (5)$$

3-2- مدل ضریب رهاسازی چند گانه¹ MRT

با بسط تابع توزیع حول حالت تعادلی و خطی‌سازی ترم برخورد Ω ، و استفاده از تعریف برخورد BGK می‌توان به مدل MRT دست یافت [17]. لذا داریم:

$$\Omega_i = \Omega_i|_{f^{eq}} + \frac{\partial \Omega_i}{\partial f_j} \Big|_{f^{eq}} \delta f_j + O(\delta f_j^2) \quad (6)$$

در رابطه (6)، $\delta f = f - f^{eq}$ می‌باشد. همچنین جمله اول سمت راست معادله (6) به کمک رابطه برخورد BGK حذف می‌شود، چرا که $-\frac{f-f^{eq}}{\tau}$ به ازای $f_i = f_i^{eq}$ صفر خواهد شد. لذا معادله (6) به شکل ساده شده زیر تبدیل می‌شود:

$$\Omega_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial f_j} \Big|_{f^{eq}} \delta f_j = \Lambda_{ij} \delta f_j \quad (7)$$

در رابطه (7)، Λ_{ij} ماتریس برخورد نامیده می‌شود. سمت راست معادله (7)، جایگزین جمله برخورد در معادله بولتزمن (سمت راست معادله (2)) خواهد شد. به عبارت دیگر:

$$f_i(\vec{r} + \vec{c}_i \Delta t, \vec{c}_i, t + \Delta t) - f_i(\vec{r}, \vec{c}_i, t) = \Lambda_{ij} \delta f_j \quad (8)$$

¹ Multi-Relaxation Time (MRT)

روی دیواره را به‌دست آورد.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i,1} = \frac{4T_{i,2} - T_{i,3} - 3T_{i,1}}{2\Delta y} = 0 \quad (25)$$

با به‌دست آمدن مقدار دما در روی دیواره، مشابه حالت قبل می‌توان توابع توزیع مجهول را بدست آورد.

4- روش ردگیری جبهه

در کنار مسئله شبیه‌سازی جابجایی طبیعی، محاسبه موقعیت جبهه انجماد/ذوب چالشی مهم در مسائل تغییر فاز است، که این موضوع به دو روش قابل بررسی است. در روش اول، اثرات تغییر فاز به صورت جمله چشمه (انجماد) یا چاه (ذوب) گرمایی وارد معادله انرژی می‌شود. در این روش اگر معادله انرژی به بیان آنتالپی نوشته شود، و اثرات تغییر فاز با تغییرات آنتالپی همراه شود، در این صورت، روش به‌دست آمده به روش آنتالپی موسوم خواهد بود. مزیت عمده این روش (روش آنتالپی) عدم نیاز به ردگیری جبهه تغییر فاز است. با این وجود در مواردی که نیاز به ردگیری جبهه انجماد/ذوب وجود دارد، استفاده از این روش با مشکل مواجه خواهد شد. به عنوان مثال فرآیند ذوب PCM در یک مخزن مستطیلی پره دار را در نظر بگیرید. در این مسئله مدتی بعد از آغاز فرآیند ذوب، فاز جامد در فاز مایع شناور خواهد شد. در این حالت نیاز است تا نیروهای ناشی از انتقال تکانه بین فاز مایع و فاز جامد محاسبه شده و بعد از آن موقعیت جدید فاز جامد به‌دست آید. در این قبیل مسائل شبیه‌سازی فرآیند تغییر فاز به کمک روش ردگیری جبهه انجام خواهد گرفت. به عبارت دیگر در روش دوم، در آغاز هر گام زمانی بقاء انرژی در فصل مشترک دو فاز اعمال شده و برآیند سرعت جبهه انجماد/ذوب در اثر تغییر فاز و سرعت ناشی از انتقال تکانه محاسبه شده و به کمک آن موقعیت فاز جامد به‌دست می‌آید. بنابراین در کنار دشواری نسبی انجام این روش مزیت عمده آن قابلیت اعمال شرط مرزی شناوری در فصل مشترک دو فاز است.

4-1- معادلات حاکم

معادله پیوستگی برای جریان تراکم‌ناپذیر دوبعدی به‌صورت رابطه (26) نوشته می‌شود:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (26)$$

معادلات تکانه با در نظر گرفتن نیروهای خارجی f_x و f_y برای حالتی که شرط مرزی شناوری وجود دارد به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho(f_{b,x} + f_{s,x}) \quad (27)$$

معادله تکانه در جهت x :

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho(f_{b,y} + f_{s,y}) \quad (28)$$

در معادلات (27) و (28) زیرنویس s و b به ترتیب اشاره به نیروهای سطحی و حجمی دارند. نیروی حجمی \vec{f}_b محدود به نیروی گرانش است در حالی که نیروی سطحی \vec{f}_s باید به گونه‌ای محاسبه شوند که شرط مرزی عدم لغزش در روی مرز شناور برقرار گردد. در کنار معادلات تکانه، معادله انرژی نیز در حضور شرط مرزی شناوری، برای جریان تراکم‌ناپذیر دو بعدی و با صرف‌نظر از تلفات لزجی به صورت معادله (29) اصلاح خواهد شد:

معادله (19)، با استفاده از تابع توزیع دما h مشابه تابع توزیع چگالی قابل حل است. در این حالت تابع تعادلی دما h_i^{eq} به صورت رابطه (20) تعریف می‌شود:

$$h_i^{eq} = Tw_i \left[1 + \frac{3}{c^2} \vec{c}_i \cdot \vec{u} + \frac{9}{2c^4} (\vec{c}_i \cdot \vec{u})^2 - \frac{3}{c^2} \vec{u} \cdot \vec{u} \right] \quad (20)$$

معادله بولتزمن گسسته نیز به صورت رابطه (21) به دست می‌آید:

$$h_i(\vec{r} + \vec{c}_i \Delta t, \vec{c}_i, t + \Delta t) = h_i(\vec{r}, \vec{c}_i, t) - \frac{\Delta t}{\tau_t} (h_i(\vec{r}, \vec{c}_i, t) - h_i^{eq}(\vec{r}, \vec{c}_i, t)) \quad (21)$$

τ_t زمان رهاش برای تابع توزیع دما است. همچنین مقدار دما در هر نقطه توسط مجموع تابع توزیع ذرات $T = \sum_0^8 h_i$ محاسبه می‌گردد. همچنین در این حالت ضریب نفوذ گرمایی α به‌صورت $\alpha = (\tau_t - 0.5)/3$ با زمان رهاش ارتباط داده می‌شود.

3-4- شرایط مرزی

الف) شرط مرزی بازگشت به عقب²

متداول‌ترین شرط مرزی مورد استفاده در LBM، شرط مرزی بازگشت به عقب نام دارد. این شرط مرزی در دیواره‌ها و جهت اعمال شرط عدم لغزش در آن به کار می‌رود. نحوه اعمال به این صورت است که هر تابع توزیعی که به دیواره برخورد می‌کند در راستای حرکت خود منعکس می‌شود. شبه کد مربوط به این روش به صورت رابطه (22) است.

$$f_i(x, 1) = f_j(x, 1), i = 2, 5, 6, j = 4, 7, 8 \quad (22)$$

ب) شرط مرزی دما ثابت

فرض کنید دیواره پایینی در "شکل 2" در دمای ثابت T_b قرار دارد. بعد از هر مرحله جاری شدن مقادیر h_2, h_5 و h_6 مجهول هستند. فرض می‌شود که این توابع توزیع مجهول با مقادیر h_2^{eq}, h_5^{eq} و h_6^{eq} در آن نقطه برابرند. برای به‌دست آوردن مقادیر تعادلی کافی است معادله (20) را به‌کار برد. مجموع این سه تابع توزیع تعادلی به صورت رابطه (23) به‌دست می‌آید [19].

$$h_2 + h_5 + h_6 = \frac{1}{6} T' (1 + 3u_y + 3u_y^2) \quad (23)$$

از طرفی با جانشانی رابطه (23) در رابطه $T_b = \sum_0^8 h_i$ رابطه‌ای برای محاسبه T' به‌دست می‌آید [19].

$$T' = \frac{6}{1 + 3u_y + 3u_y^2} (T_b - h_0 - h_1 - h_3 - h_4 - h_7 - h_8) \quad (24)$$

با توجه به رابطه فوق اگر مقدار T' معلوم باشد، در این صورت توابع توزیع مجهول محاسبه می‌شوند.

ج) شرط مرزی عایق

بعد از مرحله جاری شدن مقدار دما در داخل میدان قابل محاسبه می‌باشد. حال با استفاده از روش گسسته‌سازی با دقت مرتبه دوم می‌توان مقدار دما در

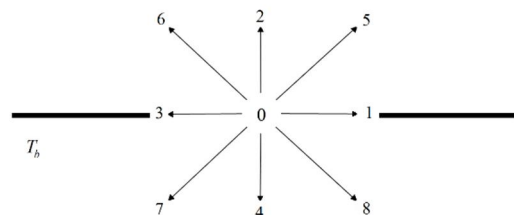


Fig. 2 A schematic of thermal boundary condition on the bottom wall
شکل 2 طرح‌واره مربوط به شرط مرزی دمایی در دیواره پایین

¹ Particle Distribution Functions

² Bounce back

در رابطه (36) بالانویس av و d به ترتیب نشان دهنده مقادیر متوسط گیری شده و دلخواه می باشند. برای محاسبه سرعت متوسط گیری شده در روی نقاط لاگرانژی رابطه (37) به کار می رود:

$$\vec{U}_s^{av}(s, t + \Delta t) = \sum_{x,y} \vec{u}^*(\vec{x}, t + \Delta t) \times D[\vec{x} - \vec{X}(s, t + \Delta t)] \Delta x^2 \quad (37)$$

در رابطه (37)، علامت * نشان دهنده در نظر گرفته نشدن اثرات حضور مرز شناور است. از این رو میدان سرعت اوپلری $\vec{u}^*(\vec{x}, t + \Delta t)$ با استفاده از رابطه (38) به دست می آید:

$$\vec{u}^*(\vec{x}, t) = \frac{1}{\rho(\vec{x}, t)} \left(\sum_{i=0}^8 f_i c_i \right) + \frac{\Delta t}{2} \vec{f}_b(\vec{x}, t) \quad (38)$$

جمله $\vec{f}_b(\vec{x}, t)$ در معادله (38)، نیروی حجمی گرانشی وارد بر مسئله است. مقدار سرعت دلخواه $\vec{U}_s^d(s, t + \Delta t)$ نیز همان سرعت حرکت نقاط لاگرانژی در روی فصل مشترک دو فاز است که به کمک رابطه (59) محاسبه می شود.

در نهایت میدان سرعت در انتهای فرآیند برخورد به صورت رابطه (39) محاسبه خواهد شد [21]:

$$\vec{u}(\vec{x}, t + \Delta t) = \vec{u}^*(\vec{x}, t + \Delta t) + \frac{\Delta t}{2} \vec{f}_s(\vec{x}, t + \Delta t). \quad (39)$$

لازم به یادآوری است که جمله آخر در معادله (39) به کمک معادله (32) محاسبه می شود. همچنین میدان سرعت $\vec{u}(\vec{x}, t)$ به کمک روش MRT و با افزودن جمله نیروی خارجی به معادله بولتزمن (11)، و در دو مرحله جاری شدن و برخورد حل می شود:

$$f_i(\vec{r} + \vec{c}_i \Delta t, \vec{c}, t) = f_i(\vec{r}, \vec{c}, t) \quad (40)$$

(ب) برخورد:

$$f_i(\vec{r} + \vec{c}_i \Delta t, \vec{c}, t + \Delta t) = f_i(\vec{r} + \vec{c}_i \Delta t, \vec{c}, t) - M_{ij}^{-1} S_{ij} (\hat{f}_i - \hat{f}_i^{eq}) + M_{ij}^{-1} \left(1 - \frac{S_{kj}^f}{2} \right) \vec{F}_j(\vec{x}, t) \Delta t \quad (41)$$

جمله آخر در سمت راست معادله (41) اثر نیروهای خارجی را نشان می دهد. این نیروی خارجی مجموع نیروهای حجمی گرانشی \vec{f}_b و سطحی \vec{f}_s در روی نقاط مرزی می باشد که به صورت رابطه (42) نوشته می شود [21]:

$$\vec{F}_j = [0, 6\vec{f} \cdot \vec{u}, -6\vec{f} \cdot \vec{u}, f_{x^i} - f_{x^i}, -f_{y^i}, -f_{y^i}, 2f_x u_x - 2f_y u_y, f_x u_y + f_y u_x] \quad (42)$$

در رابطه (42)، $\vec{f} = \vec{f}_b + \vec{f}_s$ که در آن $\vec{f} = -[\beta(T - T_0)] \vec{g}$ است.

3-4- محاسبه میدان دما

مشابه میدان سرعت، مدل SRT بیان شده در قسمت رابطه 3-3 را می توان به صورت MRT برای محاسبه تابع توزیع h_i برای محاسبه میدان دما توسعه داد:

الف: جاری شدن

$$h_i(\vec{r} + \vec{c}_i \Delta t, \vec{c}, t) = h_i(\vec{r}, \vec{c}, t) \quad (43)$$

ب: برخورد

$$h_i(\vec{r} + \vec{c}_i \Delta t, \vec{c}, t + \Delta t) = h_i(\vec{r} + \vec{c}_i \Delta t, \vec{c}, t) - M_{ij}^{-1} S_{ij}^h (\hat{h}_i(\vec{x}, \vec{c}, t) - \hat{h}_i^{eq}(\vec{x}, \vec{c}, t)) + M_{ij}^{-1} \left(1 - \frac{S_{kj}^h}{2} \right) Q_j(\vec{x}, t) \Delta t \quad (44)$$

در معادله (44)، \hat{h} بردار تابع توزیع دمای h بوده که به صورت $\hat{h} =$

$$\frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c u T)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c v T)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \rho c (q_b + q_s) \quad (29)$$

در معادله (29)، q_b بیانگر چشمه/چاه گرمایی خارجی است که در کار حاضر مقدار آن صفر در نظر گرفته شده است. همچنین q_s مربوط به اثرات گرمایی مرز شناور در داخل جریان می باشد. این جمله باید به نحوی تعیین شود که شرط دمایی دلخواه در روی آن برقرار باشد. در ادامه به معرفی معادلات لازم برای محاسبه جملات q_s و \vec{f}_s پرداخته می شود.

4-2- محاسبه نیروی سطحی در مرز جامد-مایع

بین نیروی لاگرانژی $\vec{F}_s(s, t)$ در روی نقاط شناور روی سطح Γ (شکل 3) و نیروی اوپلری $\vec{f}_s(\vec{x}, t)$ در میدان جریان Ω رابطه (30) برقرار است [20]:

$$\vec{f}_s(\vec{x}, t) = \int \vec{F}_s(s, t) \delta(\vec{x} - \vec{X}(s, t)) ds \quad (30)$$

در رابطه (30) تابع دلتای دیراک می باشد. به طور مشابه مقادیر سرعت در روی نقاط لاگرانژی $\vec{U}_s(s, t)$ به کمک درون یابی زیر به میدان سرعت اوپلری مربوط می شود:

$$\vec{U}_s(s, t) = \int \vec{u}(\vec{x}, t) \delta(\vec{x} - \vec{X}(s, t)) d\vec{x} \quad (31)$$

معادلات (30) و (31)، را می توان به ترتیب به شکل معادلات گسسته (32) و (33) زیر نوشت:

$$\vec{f}_s(\vec{x}, t + \Delta t) = \sum_s \vec{F}_s(s, t + \Delta t) \times D[\vec{x} - \vec{X}(s, t)] \Delta s \quad (32)$$

$$\vec{U}_s(s, t + \Delta t) = \sum_{x,y} \vec{u}(\vec{x}, t + \Delta t) \times D[\vec{x} - \vec{X}(s, t)] \Delta x^2 \quad (33)$$

در روابط بالا $D(\vec{x})$ تابع توزیع پیوسته کرنل، تقریبی برای تابع دلتا است، که به صورت رابطه (34) داده شده است:

$$D(\vec{x}) = \frac{1}{\Delta x^2} d\left(\frac{x}{\Delta x}\right) d\left(\frac{y}{\Delta x}\right), \quad (34)$$

که در آن عبارت $d(r)$ به صورت رابطه (35) تقریب زده می شود [20]:

$$d(r) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi|r|}{2}\right) \right), & |r| \leq 2 \\ 0, & |r| > 2 \end{cases} \quad (35)$$

نشان داده می شود که برای محاسبه نیروی لاگرانژی $\vec{F}_s(s, t + \Delta t)$ می توان از رابطه (36) استفاده نمود [22,21]:

$$\vec{F}_s(s, t + \Delta t) = 2 \frac{\vec{U}_s^d(s, t + \Delta t) - \vec{U}_s^{av}(s, t + \Delta t)}{\Delta t} \Delta x \quad (36)$$

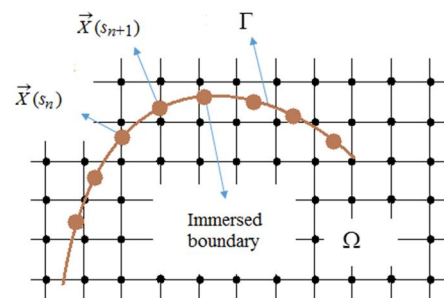


Fig. 3 A schematic of Lagrangian point through the Eulerian ones

شکل 3 طرحواره ای از نقاط لاگرانژی در میان نقاط اوپلری

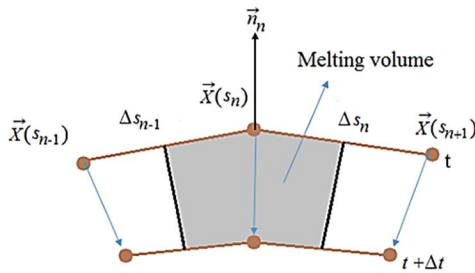


Fig. 4 Energy conversion on the finite control volume
شکل 4 اعمال بقاء انرژی روی فصل مشترک برای حجم کنترل نشان داده شده

شود. اعمال بقاء انرژی در طی فرآیند ذوب برای نقطه دلخواه با موقعیت $\vec{X}(s_n)$ به رابطه زیر منجر می‌شود [21]:

$$-\rho_s L (\vec{U}(s_n) \cdot \vec{n}_n) \Delta t \Delta s_n = -\rho_s C_{p,s} Q_s(s_n, t + \Delta t) \Delta t \Delta s_n \quad (53)$$

در معادله (53)، L گرمای نهان تغییر فاز و $C_{p,s}$ گرمای ویژه در فشار ثابت فاز جامد است. با ضرب عبارت \vec{n}_n به طرفین معادله (53) و ساده‌سازی به رابطه (54) برای محاسبه سرعت تغییر فاز در هر نقطه می‌رسیم:

$$\vec{U}(s_n) = \frac{C_{p,s} Q_s(s_n, t + \Delta t)}{L} \vec{n}_n \quad (54)$$

در پایان هر گام زمانی باید تغییر موقعیت فاز جامد به دلیل انتقال ممنتوم بین دو فاز جامد و مایع محاسبه شود. برای این کار بقاء ممنتوم خطی و زاویه‌ای برای فاز جامد اعمال می‌شود.

$$\vec{F}_t = - \sum_s \vec{F}_s(s_n, t) \Delta s_n \quad (55)$$

$$\vec{T}_t = - \sum_s [\vec{X}(s_n, t) - \vec{X}_c] \times \vec{F}_s(s_n, t) \Delta s_n \quad (56)$$

که در آن \vec{X}_c مرکز جرم فاز جامد است که به کمک رابطه (57) به دست می‌آید:

$$\vec{X}_c = \frac{\iint \vec{x} \rho_s dx dy}{M_s} \quad (57)$$

توجه به این نکته ضروری است که المان انتگرال‌گیری در رابطه (57) یک مربع به ابعاد $1 \times 1 \text{ lu}^2$ می‌باشد. همچنین M_s جرم فاز جامد است. در آخر سرعت خطی مرکز جرم نیز به صورت (58) محاسبه می‌شود:

$$\vec{U}_c^{k+1} = \vec{U}_c^k + \frac{\vec{F}_t}{m} \Delta t \quad (58)$$

با به‌دست آمدن سرعت مرکز جرم و نیز سرعت تغییر فاز (معادله (54))، سرعت نقاط لاگرانژی در روی فصل مشترک به کمک سرعت زاویه‌ای ω_s به صورت رابطه (59) به دست می‌آید:

$$\vec{U}_s^{k+1}(s_n) = \vec{U}_c^{k+1}(s_n) + \vec{U}_c^{k+1} + \omega_s^{k+1} \times [\vec{X}(s, t) - \vec{X}_c] \quad (59)$$

در رابطه (59)، $\vec{U}_s(s_n)$ سرعت کلی نقاط لاگرانژی است. همچنین سرعت زاویه‌ای ω_s توسط رابطه (60) قابل محاسبه خواهد بود:

$$\omega_s^{k+1} = \omega_s^k + \frac{\vec{T}_t}{I} \Delta t \quad (60)$$

در معادله (60) اینرسی زاویه‌ای فاز جامد است.

قبل از ارائه صحت‌سنجی و نتایج کد نوشته شده، مراحل حل مسئله به همراه معادلات مورد استفاده در "شکل 5" آورده شده است. همان‌طور که در این شکل نیز نشان داد شده است، بعد از هر بار به روزرسانی مرز فاز جامد، معادلات حاکم دوباره و برای مرز جدید اعمال می‌شوند.

$M_{ij} h_j$ محاسبه می‌شود. همچنین ماتریس رهاسازی است که به صورت معادله (45) داده شده است [21].

$$S^h = \begin{bmatrix} S_0^h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_e^h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_g^h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_j^h & (S_j^h/2 - 1)S_q^h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_q^h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_j^h & (S_j^h/2 - 1)S_q^h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_q^h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_p^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_p^h \end{bmatrix} \quad (45)$$

در رابطه (44)، بردار تعادلی تابع توزیع \vec{h}_i^{eq} مطابق رابطه زیر به دست می‌آید [21]:

$$\vec{h}_i^{\text{eq}} = [T, -2T, 2T, Tu_x, -Tu_x, Tu_y, -Tu_y, 0, 0]^T \quad (46)$$

جمله آخر در معادله (44) برای در نظر گرفتن جمله چاه/چشمه گرمایی است که این جمله به صورت $Q = Q_b + Q_s$ نوشته می‌شود. Q_b بیانگر چاه یا چشمه خارجی است که به طور کلی در این مقاله صفر در نظر گرفته شده است. تنها چشمه گرمایی که باید در معادله انرژی جهت ایجاد شرط دمایی دلخواه بر روی مرز شناور در نظر گرفته شود، عبارت چشمه گرمایی سطحی Q_s است که به صورت رابطه (47) محاسبه می‌شود [21]:

$$Q_s(s, t + \Delta t) = 2 \frac{T_s^d(s, t + \Delta t) - T_s^{\text{av}}(s, t + \Delta t)}{\Delta t} \Delta x, \quad (47)$$

در معادله (47)، $T_s^d(s, t + \Delta t)$ دمای دلخواه بر روی فصل مشترک دو فاز است که مقدار آن با دمای تغییر فاز T_m برابر است. همچنین دمای متوسط‌گیری شده در روی فصل مشترک با رابطه (48) به دست می‌آید:

$$T_s^{\text{av}}(s, t + \Delta t) = \sum_{x,y} T^*(\vec{x}, t + \Delta t) D [\vec{x} - \vec{X}(s, t)] \Delta x^2 \quad (48)$$

در معادله (48)، $T^*(\vec{x}, t + \Delta t)$ میدان دمای به دست آمده بدون در نظر گرفتن چشمه گرمایی سطحی است.

$$T^*(\vec{x}, t + \Delta t) = \sum_{i=0}^8 h_i(\vec{x}, t + \Delta t), \quad (49)$$

همچنین برای انتقال چشمه گرمایی سطحی از روی نقاط لاگرانژی به نقاط اوپلری x از درونیایی زیر استفاده می‌شود:

$$Q_s(\vec{x}, t + \Delta t) = \sum_s Q_s(s, t + \Delta t) D [\vec{x} - \vec{X}(s, t)] \Delta s \quad (50)$$

سرانجام توزیع دما در انتهای فرآیند برخورد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$T(\vec{x}, t + \Delta t) = T^*(\vec{x}, t + \Delta t) + \frac{\Delta t}{2} Q_s(\vec{x}, t + \Delta t). \quad (51)$$

5- شبیه‌سازی تغییر فاز

این بخش به جزئیات روش ردگیری جبهه در محاسبه و موقعیت یابی جبهه تغییر فاز می‌پردازد. برای محاسبه موقعیت فصل مشترک در اثر تغییر فاز از رابطه (52) استفاده می‌شود:

$$\vec{X}^{k+1}(s_n) = \vec{X}^k(s_n) + \vec{U}^k(s_n) \Delta t \quad (52)$$

در رابطه (52)، $\vec{X}(s_n)$ نشان دهنده موقعیت n امین نقطه گسسته بر روی مرز شناور، $\vec{U}(s_n)$ سرعت تغییر فاز فصل مشترک و بالانویس k نشان دهنده k امین مرحله زمانی است. برای محاسبه سرعت تغییر فاز $\vec{U}(s_n)$ باید قانون بقاء انرژی برای هر کدام از نقاط روی مرز مطابق "شکل 4" اعمال

در معادلات بالا $X(t)$ موقعیت جبهه انجماد و $\varepsilon = \sqrt{\alpha_l/\alpha_s}$ جذر نسبت پخشندگی گرمایی دو فاز مایع و جامد می‌باشد. همچنین مقدار λ از حل معادله غیرجبری (64) به دست می‌آید [23]:

$$\frac{St_s}{\exp(\lambda^2) \operatorname{erf}(\lambda)} - \frac{St_l}{\varepsilon \exp(\varepsilon^2 \lambda^2) \operatorname{erfc}(\varepsilon \lambda)} = \lambda \sqrt{\pi} \quad (64)$$

حال برای بررسی صحت مدل LBM گزارش شده، شبیه‌سازی عددی فرآیند انجماد صورت می‌پذیرد. بدین منظور یک میدان محاسباتی در ابعاد 401×21 واحد شبکه که متناظر با یک میدان $0.2 \text{ m} \times 0.01 \text{ m}$ است به عنوان محیط نیمه محدود در نظر گرفته می‌شود. برای ایجاد شرایط محیط نیمه محدود نیز علاوه بر شرط دما ثابت در موقعیت $x=0$ از شرط مرزی عایق در وجوه دیگر میدان محاسباتی استفاده شده است. همچنین در شبیه‌سازی فرآیند انجماد از ماده آلومینیوم خالص با خواص ترموفیزیکی داده شده در جدول 1 استفاده شده است.

از آن‌جا که دمای تغییر فاز آلومینیوم 660°C در نظر گرفته شده است، برای آغاز فرآیند انجماد دمای دیواره سمت چپ در 600°C و دمای اولیه 700°C فرض می‌شود. برای انتقال ابعادی از فضای فیزیکی به فضای بولتزن اعداد بی‌بعد تعریف و بین دو فضای فیزیکی و بولتزن یکسان قرار داده می‌شود.

$$St_l = \frac{C_{p,l}(T_w - T_m)}{L}, \quad St_s = \frac{C_{p,s}(T_m - T_{in})}{L}, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{\alpha_l}{\alpha_s}}, \quad \xi = \frac{x}{W}$$

$$Fo = \frac{\alpha_l t}{W^2}, \quad R = \frac{X(t)}{W}, \quad \theta(x, t) = \mp \frac{T(x, t) - T_m}{T_{in} - T_m}$$

دقت شود که در تعریف $\theta(x, t)$ ، علامت مثبت در فرآیند انجماد و علامت منفی در فرآیند ذوب به کار می‌رود. برای اجرای فرآیند عددی، برای دو فاز جامد و مایع، مقدار دلخواهی به عنوان چگالی در فضای بولتزن در نظر گرفته می‌شود. که در کار حاضر این مقدار $\rho_s^{\text{lattice}} = \rho_l^{\text{lattice}} = 1$ قرار داده شده است. همچنین مقدار دلخواه $k_l^{\text{lattice}} = 1$ برای رسانایی گرمایی و مقدار دلخواه $\alpha_s^{\text{lattice}} = 0.033$ برای پخشندگی گرمایی تعیین می‌شوند. با داشتن رابطه بین پخشندگی گرمایی و ضریب رهاسازی منفرد، $\alpha_{s,l}^{\text{lattice}} = (0.5 - \tau_{s,l})/3$ قرار داده شده است. نتایج بدست آمده در این قسمت متناظر با حالت‌های $\varepsilon = 0.5$ ، $\varepsilon = 0.707$ ، $\varepsilon = 1$ ، $\varepsilon = 1.414$ و $\varepsilon = 2$ بوده که در "شکل‌های 7 و 8" نشان داده شده‌اند. "شکل 7" تغییرات دمای چهار نقطه مجزا را برای حالت $\varepsilon = 1$ برحسب زمان نشان می‌دهد. همچنین تغییرات دمای نقطه‌ای واقع در فاصله 1 میلی‌متر از دیواره سمت چپ در "شکل 8" آورده شده است. چنانچه در "شکل‌های 7 و 8" نشان داده شده است، مقایسه نتایج LBM و تحلیلی به خوبی صحت روش عددی را نشان می‌دهند.

جدول 1 خواص ترموفیزیکی آلومینیوم و گالیوم

Table 1 Thermo-physical properties of aluminum and paraffin		خاصیت
آلومینیوم	گالیوم	چگالی، ρ (kg m^{-3})
2710	6093	
---	381.5	ظرفیت گرمایی فاز مایع، $C_{p,l}$ ($\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$)
935	385	ظرفیت گرمایی فاز جامد، $C_{p,s}$ ($\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$)
177	32	رسانایی گرمایی، k ($\text{W m}^{-1}\text{K}^{-1}$)
386900	80160	گرمای نهان تغییر فاز، L (J kg^{-1})
660	29.78	دمای تغییر فاز، T_m ($^\circ\text{C}$)
---	1.2×10^{-4}	ضریب انبساط حجمی، β (K^{-1})
---	1.81×10^{-3}	لزجت دینامیکی، μ ($\text{Pa} \cdot \text{s}$)

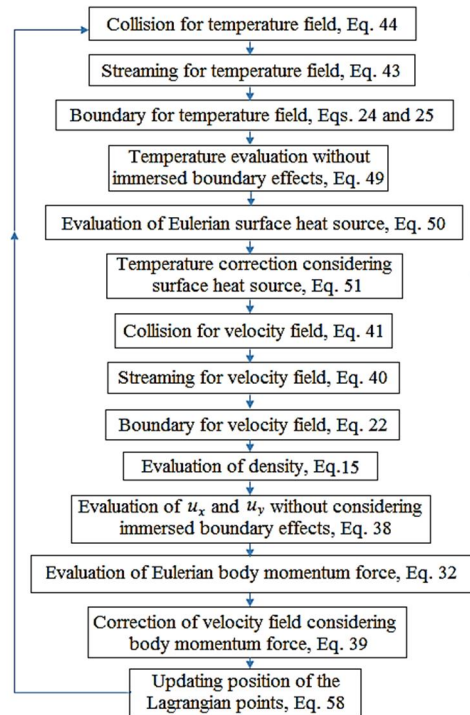


Fig. 5 Flowchart for solution of melting/freezing problem with corresponding equations

شکل 5 مراحل حل مسئله ذوب/انجماد به همراه معادلات مورد استفاده

6- بحث و نتایج

1-1- اعتبارسنجی برای حالت رسانش خالص

قبل از بحث پیرامون انجماد و ذوب PCM داخل مخزن پره‌دار صحت مدل عددی باید مورد تأیید قرار گیرد. از این رو انجماد PCM در یک محیط نیمه محدود $0 \leq x < \infty$ که در دمای اولیه یکنواخت $T_{in} \geq T_m$ قرار دارد، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. بدین منظور مطابق "شکل 6" در موقعیت $x=0$ شرط مرزی دما ثابت $T_w < T_m$ در لحظه $t = 0$ اعمال می‌شود. با فرض ثابت بودن تمام خواص ترموفیزیکی ρ ، $C_{p,l}$ ، $C_{p,s}$ ، k_l و k_s حل تشابهی به صورت زیر ارائه می‌شود [23]:

$$X(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_s t} \quad (61)$$

$$T_s(x, t) = T_{in} - (T_{in} - T_m) \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}}\right)}{\operatorname{erf}(\lambda)} \quad (62)$$

فاز جامد، $0 \leq x < X, t > 0$

$$T_l(x, t) = T_w + (T_m - T_w) \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}}\right)}{\operatorname{erfc}(\varepsilon \lambda)} \quad (63)$$

فاز مایع، $X \leq x < \infty, t > 0$

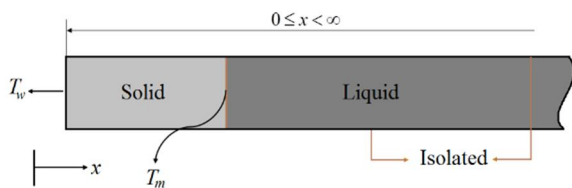


Fig. 6 Melting a semi-infinite slab, $0 \leq x < \infty$, initially solid at a uniform temperature of T_{in}

شکل 6 طرحواره مسئله انجماد دو فاز در محیط نیمه محدود

جبهه ذوب شده است. همچنین چنانچه در "شکل 9" نشان داده شده است، اختلاف اندکی میان نتایج عددی و تجربی وجود دارد، که این اختلاف با توجه به پیچیده بودن الگوی جریان در این حالت و همچنین خطای آزمایش قابل توجیه است. این اختلاف میان داده‌های عددی و تجربی توسط سایر محققین از جمله [25] گزارش شده است. "شکل 10" نیز خطوط جریان متناظر با "شکل 9" را نشان می‌دهد. میدان جریان به دست آمده با نتایج [10] همخوانی دارد.

3-6- اثرات جابجایی طبیعی در فرآیند انجماد

مخزنی با نسبت منظری $\gamma = l_c/l_f = 2$ ، دمای مرز $\theta_w = -3$ حاوی PCM با عدد $St_l = 0.07253$ را در نظر بگیرید. فرآیند انجماد در حالت اول بدون در نظر گرفتن جابجایی طبیعی بوده و نتایج آن در "شکل 11" نشان داده شده است.

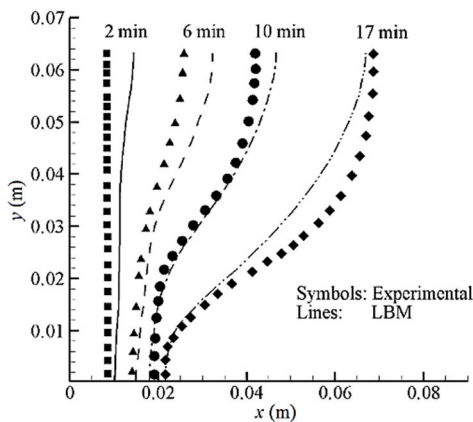


Fig. 9 Melting interface for pure gallium at four instances of 2, 6, 10 and 17 min

شکل 9 موقعیت جبهه ذوب گالیوم در چهار زمان مختلف

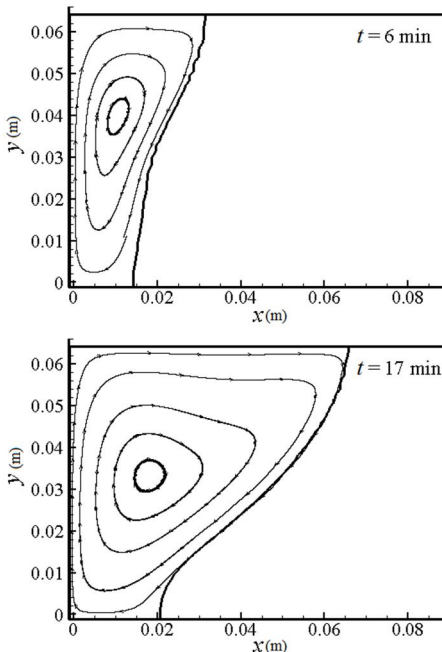


Fig. 10 Streamlines for gallium melting at four times of 2, 6, 10 and 17 min

شکل 10 خطوط جریان در طی فرآیند ذوب گالیوم در چهار زمان مختلف

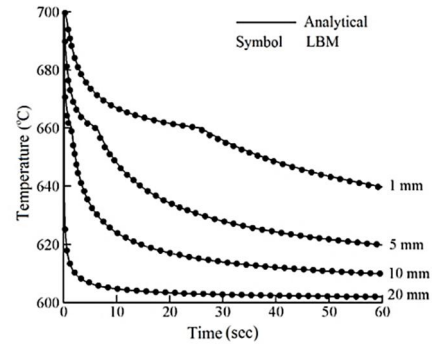


Fig. 7 Temperature history of four points inside the slab for the case of $\varepsilon = 1$

شکل 7 تغییرات دمای چهار نقطه داخل محیط نیمه محدود برای حالت $\varepsilon = 1$

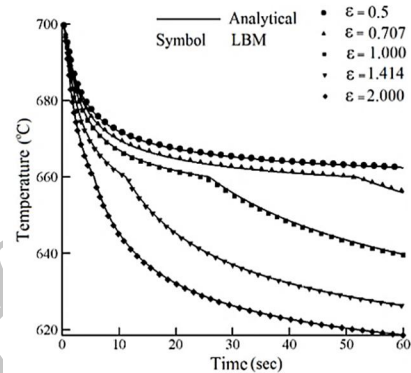


Fig. 8 Temperature variation for a point located 1 mm long aside the left wall

شکل 8 تغییرات دمای نقطه‌ای واقع در فاصله 1 میلی‌متر از دیواره سمت چپ

2-6- اعتبارسنجی در حضور جابجایی طبیعی

قبل از ارائه نتایج مربوط به فرآیند انجماد و ذوب، صحت‌سنجی مدل عددی برای شرایطی که در آن جابجایی طبیعی حضور دارد، صورت می‌پذیرد. بدین منظور از نتایج آزمایشگاهی گائو و ویسکانتا [24] که برای مسئله ذوب گالیوم ارائه شده است، استفاده می‌شود. در این مسئله یک مخزن مستطیلی با ارتفاع $h = 6.35$ cm و عرض $W = 8.89$ cm که در ابتدا حاوی گالیوم در فاز جامد است، در نظر گرفته می‌شود. دیواره‌های جانبی چپ و راست به ترتیب در دماهای ثابت $T_c = 28.3$ °C و $T_h = 38.35$ °C و دیواره‌های بالایی و پایینی در شرایط عایق قرار داده شده‌اند. همچنین دمای اولیه مخزن به صورت $T_{in} = T_c = 32$ °C فرض شده است. خواص ترموفیزیکی گالیوم خالص در دمای 32 °C نیز در جدول 1 آورده شده است.

مشابه قسمت 1-6 برای ایجاد ارتباط میان فضای فیزیکی و فضای بولتزمن، اعداد بی‌بعد تعریف و بین دو فضای فیزیکی و بولتزمن یکسان قرار داده می‌شوند:

$$Ra = \frac{|\bar{g}|\beta(T_w - T_m)l_c^3}{\alpha_l \nu} \quad Fo = \frac{\alpha_s t}{l_c l_f} \quad \beta_1 = \frac{C_{p,s}}{C_{p,l}}$$

$$\beta_2 = \frac{k_s}{k_l} \quad \beta_3 = \frac{k_s}{k_f} \quad \beta_4 = \frac{\alpha_s}{\alpha_l} \quad \beta_5 = \frac{\alpha_s}{\alpha_f}$$

$$\xi_1 = \frac{x}{l_f} \quad \xi_2 = \frac{y}{l_f} \quad \xi_3 = \frac{\delta}{l_f}$$

همان‌طور که در "شکل‌های 9 و 10" مشاهده می‌شود، در حین فرآیند ذوب حضور جابجایی طبیعی سبب افزایش و تغییر آهنگ انتقال گرما شده در امتداد جبهه ذوب می‌شود، که این موضوع سبب دو بعدی شدن موقعیت

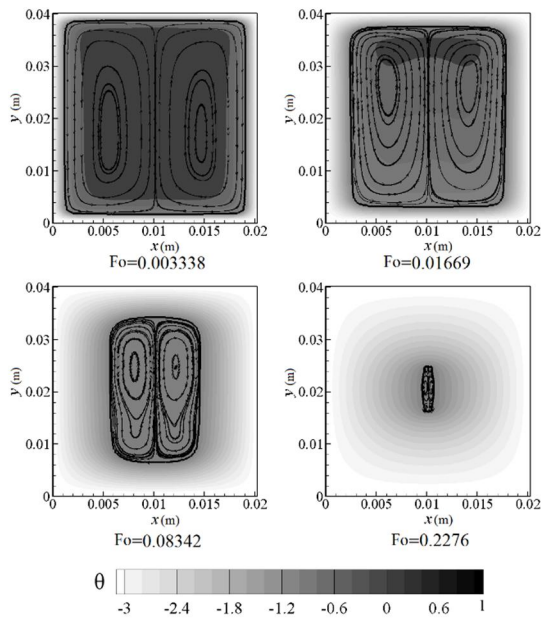


Fig. 12 Dimensionless temperature distribution, streamlines and phase-change position for the case of, $Ra = 10^6$

شکل 12 میدان دمای بی‌بعد، موقعیت جبهه انجماد و خطوط جریان برای حالت $Ra = 10^6$

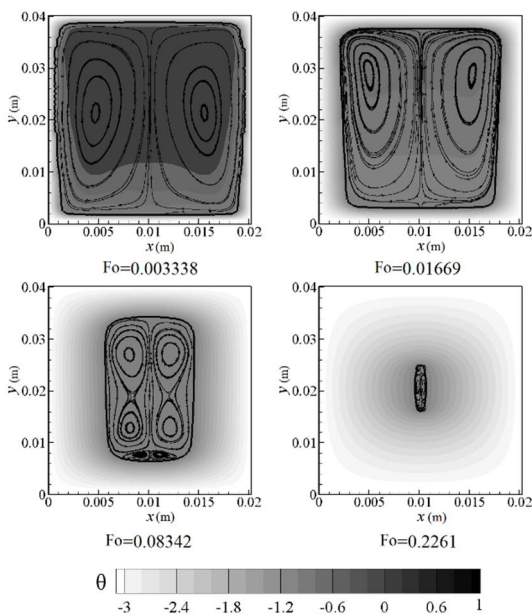


Fig. 13 Dimensionless temperature distribution, streamlines and phase-change position for the case of, $Ra = 6 \times 10^6$

شکل 13 میدان دمای بی‌بعد، موقعیت جبهه انجماد و خطوط جریان برای حالت $Ra = 6 \times 10^6$

قسمت تحت شرایط زیر می‌باشد:

$$St_l = 0.0967, Ra = 166800, Pr = 39.76, \beta_1 = 0.75, \beta_2 = 1$$

$$\beta_3 = 1.045 \times 10^{-3}, \beta_4 = 1.333, \beta_5 = 1.91 \times 10^{-3},$$

$$\theta(0, t) = 1, \theta(l_f, t) = 1$$

همچنین نتایج برای سه نسبت منظری $\gamma = 1$ ، $\gamma = 0.5$ و $\gamma = 2$ به گونه‌ای ارائه شده است که حجم مخزن با هم مساوی و برابر با $V = 8\text{cm}^3$ باشد. برای شرایط رسانش خالص، میدان دما و موقعیت جبهه ذوب کاملاً متقارن بوده و مشابه "شکل 11" به‌دست می‌آید. که برای رعایت اختصار از ذکر نتایج آن خود داری شده است. این تقارن با اعمال شرایط جابجایی در فاز مایع به هم خواهد خورد. این موضوع در "شکل 15" با نمایش موقعیت

میدان دما، موقعیت جبهه انجماد و خطوط جریان برای حالت $Ra = 10^6$ در "شکل 12" نشان داده شده‌اند. چنانچه در "شکل 12" دیده می‌شود، علی‌رغم بالا بودن نسبی عدد رایلی که به معنای بالا بودن اثرات جابجایی طبیعی است، تفاوت محسوسی در موقعیت جبهه انجماد این حالت با حالت رسانش خالص دیده نمی‌شود. این بدین معناست که تا عدد رایلی $Ra = 10^6$ اثرات جابجایی طبیعی برای شرایط مورد مطالعه قابل اغماض است. با این حال و برای بررسی بیشتر، نتایج مربوط به فرآیند انجماد در حالت $Ra = 6 \times 10^6$ نیز در "شکل 13" آورده شده‌اند. مقایسه "شکل‌های 12 و 13" حاکی از اختلاف بسیار جزئی موقعیت جبهه انجماد در زمان‌های اولیه (زمان‌های $Fo = 0.003338$ و $Fo = 0.01669$ را به هم مقایسه کنید)، و کاهش این اختلاف با افزایش زمان است، که این موضوع به دلیل کوچک شدن ناحیه فاز مایع و تضعیف میدان جریان با افزایش خواهد بود. نتیجه به‌دست آمده در این قسمت با نتایج [27,26] همخوانی کاملی دارد.

در انتهای این بخش تغییرات کسر PCM منجمد شده برحسب زمان بی‌بعد برای سه حالت $Ra = 0$ ، $Ra = 10^6$ و $Ra = 6 \times 10^6$ در "شکل 14" نشان داده شده است. مطابق با این شکل اختلاف بسیار ناچیزی میان نتایج به‌دست آمده، وجود دارد.

4-6- اثرات جابجایی طبیعی در فرآیند ذوب

در این قسمت اثرات جابجایی طبیعی در فرآیند ذوب PCM در مخزن مستطیلی پره‌دار بررسی می‌شود. از آن‌جا که مخزن مورد استفاده دارای پره فلزی برای افزایش آهنگ انتقال گرما است، از این‌رو با گذشت زمان، فاز جامد اولیه داخل مخزن در فاز مایع ذوب شده و شناور می‌گردد. مطالعه این فرآیند در سه حالت صورت خواهد پذیرفت. در حالت اول فرآیند ذوب بدون در نظر گرفتن جابجایی طبیعی (رسانش خالص) بررسی می‌شود. در حالت دوم اثرات جابجایی طبیعی با فرض ساکن بودن فاز جامد و در حالت سوم فرآیند ذوب فاز جامد شناور در فاز مایع شبیه‌سازی می‌گردد. نتایج ارائه شده در این

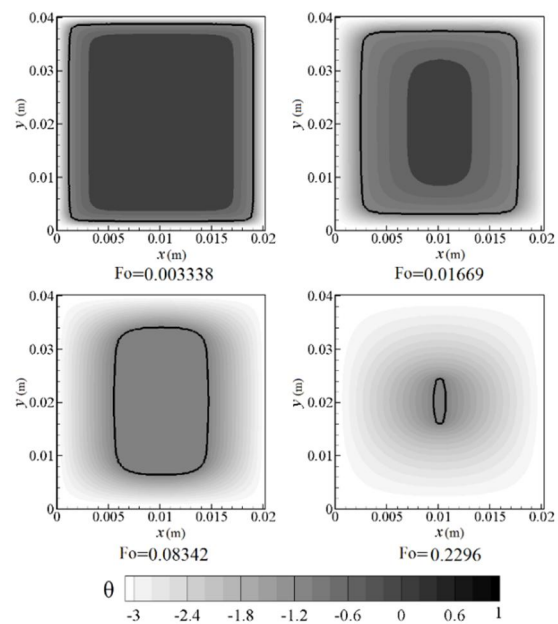


Fig. 11 Dimensionless temperature distribution and phase-change position for the case of pure condition, $Ra=0$

شکل 11 میدان دمای بی‌بعد و موقعیت جبهه انجماد برای حالت رسانش خالص، $Ra=0$

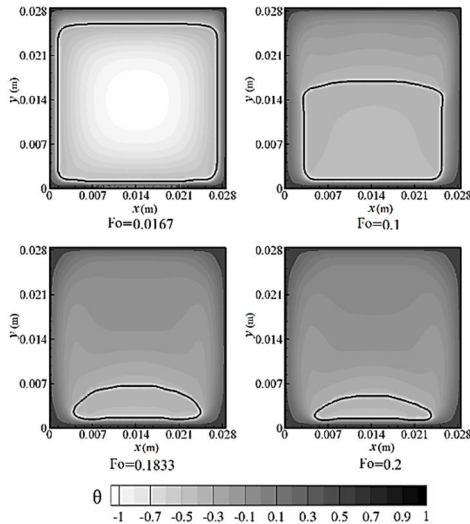


Fig. 16 Dimensionless temperature field and position of melting front for the case of free solid phase melting related to $\gamma = 1$
 شکل 16 میدان دمای بی‌بعد و موقعیت جبهه ذوب در شرایط جابجایی طبیعی حول فاز جامد متحرک برای $\gamma = 1$

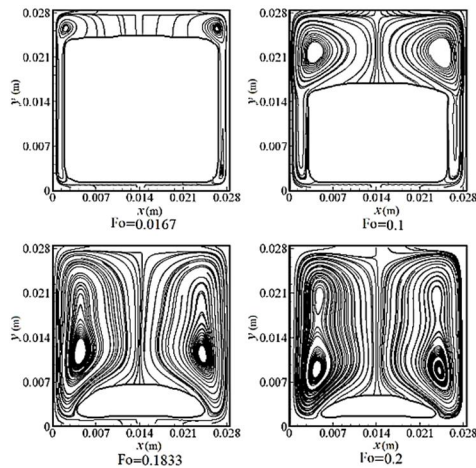


Fig. 17 Streamlines around the free solid phase during melting, $\gamma = 1$
 شکل 17 خطوط جریان حول فاز جامد متحرک در طی فرآیند ذوب PCM برای $\gamma = 1$

می‌شود. در کنار این موضوع، حرکت فاز جامد به سمت پایین سبب برخورد آن با پره فلزی گرم و شدت گرفتن ذوب PCM می‌گردد. مقایسه نتایج ذوب PCM در دو حالت متفاوت یعنی حالتی که فاز جامد ساکن باشد با حالتی که فاز جامد در فاز مایع متحرک است در زمان $Fo=0.2$ حاکی از تأثیر چشم‌گیر حرکت فاز جامد در سرعت ذوب PCM دارد. برای مقایسه اثرات جابجایی طبیعی و حرکت فاز جامد در سرعت ذوب PCM، تغییرات کسر PCM ذوب شده برحسب زمان برای سه نسبت منطقی $\gamma = 0.5$ ، $\gamma = 1$ و $\gamma = 2$ به ترتیب در "شکل‌های 18 تا 20" ترسیم شده است. براساس نتایج به‌دست آمده در این شکل‌ها زمان لازم برای ذوب کامل PCM با صرف‌نظر کردن از جابجایی طبیعی بسیار بیشتر از حالتی است که در آن اثرات جابجایی طبیعی در نظر گرفته شده است. این بدین معنا است که برای شبیه‌سازی فرآیند ذوب برخلاف فرآیند انجماد نمی‌توان از اثرات جابجایی طبیعی صرف‌نظر کرد. همچنین با مقایسه زمان لازم برای ذوب PCM در دو حالت فاز جامد ساکن و فاز جامد متحرک مشاهده می‌شود که

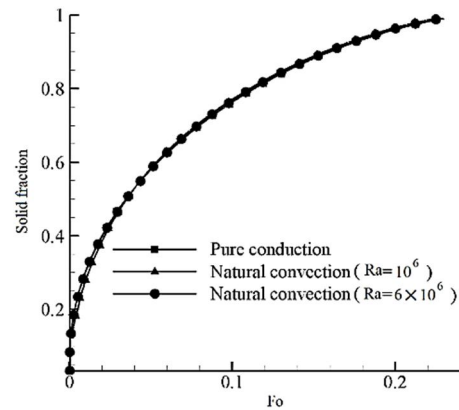


Fig. 14 Solid-fraction history of PCM respect to dimensionless time

شکل 14 تغییرات کسر PCM منجمد شده برحسب زمان بی‌بعد

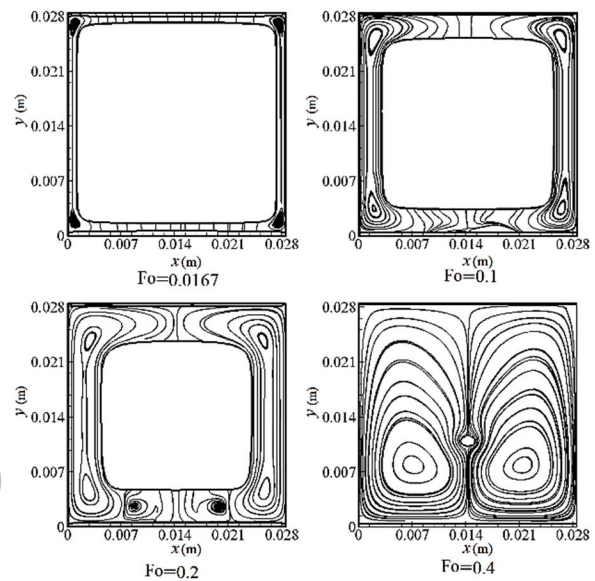


Fig. 15 Streamlines around the fixed solid phase during melting, $\gamma = 1$
 شکل 15 خطوط جریان حول فاز جامد ساکن در طی فرآیند ذوب PCM برای $\gamma = 1$

جبهه ذوب و خطوط جریان حول فاز جامد ساکن به روشنی نشان داده شده است.

چنانچه در "شکل 15" مشخص شده است، حضور جابجایی طبیعی در فاز مایع علاوه بر نامتقارن کردن موقعیت جبهه ذوب، سبب افزایش آهنگ انتقال گرما و در نتیجه افزایش آهنگ ذوب PCM می‌شود. که این موضوع در ادامه بررسی خواهد شد. همچنین دیده می‌شود که تأثیر جابجایی آزاد در زمان‌های ابتدایی کم و با افزایش زمان بیشتر می‌شود، که این موضوع با توجه به تقویت میدان سرعت با گذشت زمان قابل توجیه است. "شکل‌های 16 و 17" توزیع دما، موقعیت جبهه ذوب و خطوط جریان حول فاز جامد متحرک را نشان می‌دهند. قبل از بررسی نتایج لازم به یادآوری است که نتایج این بخش با فرض یکسان بودن چگالی فازهای جامد و مایع به‌دست آمده است. براساس نتایج به‌دست آمده، مشاهده می‌شود که حرکت جریان در قسمت بالای مخزن رو به پایین بوده که سبب پایین آمدن فاز جامد می‌گردد. این موضوع به دو دلیل سبب افزایش آهنگ انتقال گرما و ذوب سریع‌تر PCM می‌شود. اول آن که حرکت فاز جامد در فاز مایع سبب بهم ریختگی بیشتر جریان و افزایش ضریب انتقال گرمایی جابجایی در فصل مشترک دو فاز

نظر گرفتن فرآیند تغییر فاز و همچنین از روش بولتزمن شبکه‌ای برای حل میدان دما و سرعت استفاده شده است. بررسی‌های انجام شده براساس مقایسه سه حالت مختلف شامل: تغییر فاز با فرض رسانش خالص، تغییر فاز با در نظر گرفتن جابجایی طبیعی حول فاز جامد ساکن و تغییر فاز به همراه جابجایی طبیعی حول فاز جامد متحرک، صورت پذیرفته است. بر این اساس نتایج زیر به دست آمد:

- در فرآیند انجماد PCM اثرات جابجایی طبیعی قابل چشم‌پوشی است. این مسئله با بررسی نتایج انجماد تا عدد $Ra = 6 \times 10^5$ مورد تأیید قرار گرفت.
- در فرآیند ذوب به همراه جابجایی طبیعی که در آن فاز جامد ثابت در نظر گرفته شده، زمان مورد نیاز برای ذوب کامل PCM نسبت به حالت رسانش خالص کاهش قابل توجهی می‌یابد. این موضوع بدان معناست که در فرآیند ذوب از اثرات جابجایی طبیعی نمی‌توان صرف‌نظر کرد.
- در فرآیند ذوب به همراه جابجایی طبیعی حول فاز جامد متحرک، زمان مورد نیاز برای ذوب کامل PCM نسبت به ذوب حول فاز جامد ساکن، مجدداً کاهش قابل توجهی می‌یابد. این موضوع بدین معناست که شرایطی که فاز جامد در فاز مایع غوطه‌ور می‌شود، مانند شرایطی که در مخزن پره قرار داده شده است، نمی‌توان از اثرات حرکت فاز جامد چشم‌پوشی کرد.

8- مراجع

- [1] A. H. Mosaffa, F. Talati, H. Basirat Tabrizi, M. A. Rosen, Analytical modeling of PCM solidification in a shell and tube finned thermal storage for air conditioning systems, *Energy and Buildings*, Vol. 49, pp. 356–361, 2012.
- [2] J. R. Turnpenny, D. W. Etheridge, D. A. Reay, Novel ventilation cooling system for reducing air conditioning in buildings. Part I: testing and theoretical modelling, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 20, pp. 1019–1037, 2000.
- [3] V. V. Tyagi, D. Buddhi, R. Kothari, S. K. Tyagi, Phase change material (PCM) based thermal management system for cool energy storage application in building: An experimental study, *Energy and Buildings*, Vol. 51, pp. 248–254, 2012.
- [4] L. A. Chidambaram, A. S. Ramana, G. Kamaraj, R. Velraj, Review of solar cooling methods and thermal storage options, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Vol. 15, pp. 3220–3228, 2011.
- [5] M. Esen, A. Durmus, A. Durmus, Geometric design of solar-aided latent heat store depending on various parameters and phase change materials, *Solar Energy*, Vol. 62, pp. 19–28, 1998.
- [6] C. F. Hsu, E. M. Sparrow, S. V. Patankar, Numerical solution of moving boundary problems by boundary immobilization and a Control-Volume-Based finite-difference scheme, *International journal of heat and mass transfer*, Vol. 24, pp. 1335–1343, 1981.
- [7] B. Zivkovic, I. Fujii, An analysis of isothermal phase change of phase change material within rectangular and cylindrical containers, *Solar Energy*, Vol. 70, No. 1, pp. 51–61, 2001.
- [8] Y. Kozak, B. Abramzon, G. Ziskind, Experimental and numerical investigation of a hybrid PCM–air heat sink, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 59, pp. 142–152, 2013.
- [9] F. Talati, M. Taghilou, Lattice Boltzmann application on the PCM solidification within a rectangular finned container, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 83, pp. 108–120, 2015.
- [10] A. D. Brent, V. R. Voller, K. J. Reid, Enthalpy–porosity technique for melting convection–diffusion phase change: Application to the melting of a pure metal, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 13, pp. 297–318, 1988.
- [11] Y. Pahamli, S. M. J. Hosseini Khasari, A. Ranjbar, Investigating geometrical and flow parameters in behavior of melting Phase Change Material in double pipe heat exchanger, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 10, pp. 183–191, 2015. (in Persian)
- [12] M. Vynnycky, S. Kimura, An analytical and numerical study of coupled transient natural convection and solidification in a

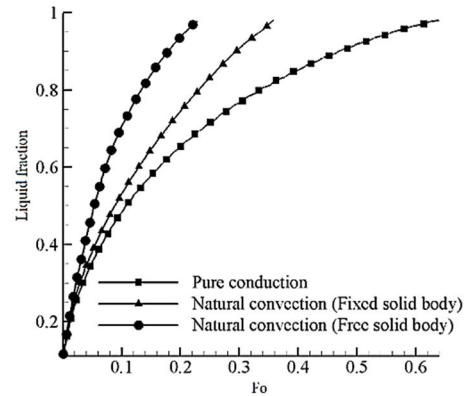


Fig. 18 Liquid fraction history for $\gamma = 2$

شکل 18 تغییرات کسر ماده ذوب شده برای حالت $\gamma = 2$

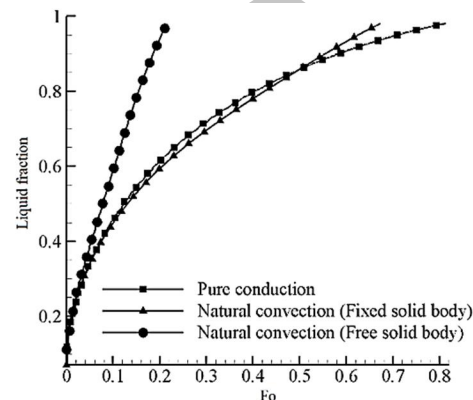


Fig. 19 Liquid fraction history for $\gamma = 1$

شکل 19 تغییرات کسر ماده ذوب شده برای حالت $\gamma = 1$

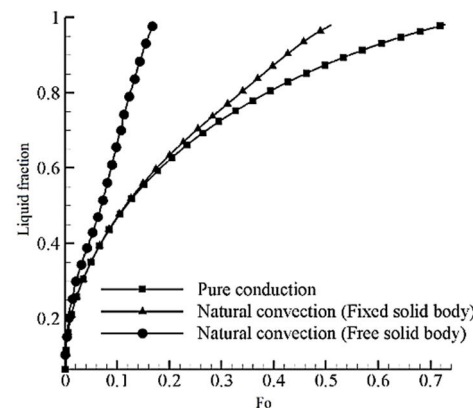


Fig. 20 Liquid fraction history for $\gamma = 0.5$.

شکل 20 تغییرات کسر ماده ذوب شده برای حالت $\gamma = 0.5$

با صرف‌نظر کردن از اثرات حرکت فاز جامد، زمان لازم برای ذوب PCM بیشتر گزارش می‌شود. همچنین مشاهده می‌شود که در آغاز فرآیند ذوب فرض رسانش خالص قابل اعمال می‌باشد. بنابراین پاسخ تحلیلی برای مطالعه مسئله ذوب محدود به زمان‌های ابتدایی خواهد بود.

7- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسئله تغییر فاز جامد-مایع به همراه جابجایی طبیعی در فاز مایع مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور از روش ردگیری جبهه برای در

- technique, *Journal of computational physics*, Vol. 169, No. 2, pp. 427–462, 2001.
- [21] R. Huang, H. Wu, An immersed boundary-thermal lattice Boltzmann method for solid-liquid phase change, *Journal of Computational Physics*, Vol. 277, pp. 305–319, 2014.
- [22] S. K. Kang, Y. A. Hassan, A direct-forcing immersed boundary method for the thermal lattice Boltzmann method, *Computers & Fluids*, Vol. 49, pp. 36–45, 2011.
- [23] V. Alexiades, A. D. Solomon, *Mathematical Modelling of Melting and Freezing Processes*, pp. 46–48, Washington DC: Hemisphere Publishing Corporation, 1993.
- [24] C. Gau, R. Viskanta, Melting and solidification of a pure metal on a vertical wall, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 108, pp. 174–181, 1986.
- [25] M. M. Cerimele, D. Mansutti, F. Pistella, Numerical modelling of liquid/solid phase transitions Analysis of a gallium melting test, *Computers & Fluids*, Vol. 31, pp. 437–451, 2002.
- [26] F. L. Tan, K. C. Leong, An experimental investigation of solidification in a rectangular enclosure under constant heat transfer condition, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 26, No. 7, pp. 925–934, 1999.
- [27] P. G. Kroeger, The solution of a two dimensional freezing problem including convection effects in the liquid region, *International journal of heat and mass transfer Transfer*, Vol. 17 pp. 1191–1207, 1974.
- rectangular enclosure, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 50, pp. 5204–5214, 2007.
- [13] W. S. Jiaung, J. R. Ho, C. P. Kuo, Lattice Boltzmann method for the heat conduction problem with phase change, *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 39, pp. 167–187, 2001.
- [14] D. Chatterjee, S. Chakraborty, An enthalpy-based lattice Boltzmann model for diffusion dominated solid-liquid phase transformation, *Physics Letters A*, Vol. 341, pp. 320–330, 2005.
- [15] D. Chatterjee, S. Chakraborty, An enthalpy-source based lattice Boltzmann model for conduction dominated phase change of pure substances, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 47, pp. 552–559, 2008.
- [16] R. Huang, H. Wu, P. Cheng, A new lattice Boltzmann model for solid-liquid phase change, *International journal of heat and mass transfer Transfer*, Vol. 59, pp. 295–301, 2013.
- [17] F. J. Higuera, S. Succi, and R. Benzi, Lattice gas dynamics with enhanced collisions, *Europhysics Letters*, Vol. 9, No. 4, pp. 345–349, 1989.
- [18] A. A. Mohamad, *Lattice Boltzmann Method Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes*, pp. 101–104, New York: Springer, 2011.
- [19] P. Yuan, *thermal lattice Boltzmann two-phase flow model for fluid dynamics*, PhD Thesis, University of Pittsburgh, Pittsburgh, 2005.
- [20] H. H. Hu, N. A. Patankar, M. Y. Zhu, Direct numerical simulations of fluid-solid systems using the arbitrary Lagrangian-Eulerian

Archive of SID