مجله مهندسی مکانیک مدرس، آبان 1395، دوره 16، شماره 8، ص‌ص 185-195

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بررسی تداخل غیرخطی بین مودهای نامتقارن ورق ساندویچی ویسکوالاستیک تحت بار اتفاقی با پهنای باند وسیع

سعید محمودخانی[1*]، حسن حدادپور[2]

1- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

2- استاد، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

* تهران، صندوق پستی 19839-4716، s_mahmoudkhani@sbu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 27 اردیبهشت 1395

پذیرش: 24 تیر 1395

ارائه در سایت: 31 مرداد 1395

کلید واژگان:

ورق ساندویچی

تداخل غیرخطی

ارتعاشات اتفاقی

روش بستن ممان غیرگوسی

کرنش‌ها و دوران‌های متوسط

چکیده

در این مطالعه، ارتعاشات غیرخطی ورق ساندویچی با لایه میانی ویسکوالاستیک، تحت اثر بار عرضی اتفاقی با پهنای باند وسیع مورد بررسی قرار گرفته است. به‌طور ویژه، اثر تشدید داخلی ناشی از نزدیکی فرکانس‌های طبیعی مودهای نامتقارن ورق با طول و عرض نزدیک به هم، در پاسخ مورد توجه قرار گرفته و امکان بروز پاسخ دو مودی و پدیده‌هایی همانند آشکار-نهانی اتفاقی مورد بررسی قرارگرفته است. مدلسازی لایه میانی ورق، برپایه فرض بزرگی نسبی کرنش و برش‌های عرضی بوده که منجر به حضور عبارات غیرخطی مادی و هندسی در معادلات حاکم شده است. برای رابطه ساختاری غیرخطی ماده ویسکوالاستیک لایه میانی نیز از مدلی تک‌انتگرالی استفاده شده است. برای میدان جابجایی درنظرگرفته شده برای لایه میانی نیز، تغییرات در راستای ضخامت، به‌شکل خطی برای مولفه‌های درون‌صفحه‌ای و به‌شکل تابع درجه دو برای مولفه برون‌صفحه‌ای درنظرگرفته شده است. به‌علاوه، لایه‌های بیرونی به‌دلیل ضخامت کمتر، با استفاده از تئوری کیرشهف به‌همراه فرضیات ون‌کارمن مدلسازی شده‌اند. حل مسئله در گام اول به‌کمک روش گالرکین در کنار روش اغتشاشی انجام شده که منجر به تشکیل معادلات گسسته غیرخطی زمانی با عبارات انتگرالی شده است. این معادلات، با استفاده از روش بستن ممان گوسی و غیرگوسی حل شده، و امکان بروز انشعاب در پاسخ پایا با روش تعقیب مسیر شبه‌کمانی مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین از شبیه‌سازی عددی مونت‌کارلو برای ارزیابی حل تحلیلی و همچنین بررسی پاسخ زمانی ورق استفاده شده است. نتایج عددی در نهایت، برای تعیین پاسخ دومودی و تعیین کمترین بار لازم برای وقوع اندرکنش بین مودها ارائه شده است.

Nonlinear modal interaction between asymmetric modes of sandwich plates under wide-band random excitation

Saeed Mahmoudkhani[1*], Hassan Haddadpour[2]

1- Aerospace Department, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

2- Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

* P.O.B. 4716-19839, Tehran, Iran, s_mahmoudkhani@sbu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 16 May 2016
Accepted 14 July 2016
Available Online 21 August 2016

Keywords:
Sandwich plate
Nonlinear interaction
random vibration
Non-Gaussian moment closure
Moderate rotations and strains

ABSTRACT

The nonlinear vibration of sandwich viscoelastic plates under wide-band random excitation is investigated. The main focus is on the influence of the one-to-one internal resonance, arisen from the close natural frequencies of the asymmetric modes of a near-square plate on the response. The multi-modal response and the on-off intermittency phenomenon are especially considered. The mathematical modeling of the mid-layer is based on the moderate transverse shear strains and rotations, which have led to both geometrical and material nonlinearities. For the nonlinear constitutive equation of the mid layer, a single integral viscoelastic model is used. The displacement field in the thickness direction is also assumed to be linear for the in-plane components and quadratic for the out-of-plane components. Moreover, the Kirchhoff theory with the von-Karman nonlinearities is used for the outer layers. The solution is initiated by applying the perturbation method along with the Galerkin's method to obtain integro-differential ordinary equations in time. These equations are then solved using the Gaussian and non-Gaussian closure methods and the results are used to investigate the occurrence of the bifurcation with the aid of the Pseudo-arclength continuation method. Numerical results are presented for the multi-modal response and the minimum excitation intensity required for the nonlinear interaction between asymmetric modes.

1- مقدمه

سازه‌های ساندویچی یکی از انواع سازه‌های مهندسی با قابلیت کاربرد در صنایع مختلف مهندسی همانند صنایع هوافضا، صنایع دریایی و صنایع عمرانی هستند. ساختار این نوع سازه‌ها شامل سه لایه روی‌هم قرار گرفته

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

S. Mahmoudkhani, H. Haddadpour, Nonlinear modal interaction between asymmetric modes of sandwich plates under wide-band random excitation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 8, pp. 185-195, 2016 (in Persian)

است که لایه‌های بیرونی به‌طور معمول از سفتی و چگالی بیشتری نسبت به لایه میانی (هسته) برخوردار هستند که همین امر موجب افزایش سفتی ویژه این نوع سازه می‌شود. به‌علاوه در صورت استفاده از مواد ویسکوالاستیک برای لایه میانی، سازه از میرایی بالایی به‌علت بروز کرنش‌های برشی عرضی قابل توجه در لایه مقید شده مابین لایه‌های با سفتی بیشتر برخوردار خواهد شد. این دو ویژگی موجب افزایش کارایی سازه‌های ساندویچی با لایه ویسکوالاستیک در معرض انواع بارهای دینامیکی شده و لذا در بسیاری از سازه‌های هوافضایی و عمرانی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

با توجه به ماهیت اتفاقی بسیاری از بارهایی که سازه‌های مهندسی در طول کارکرد خود متحمل می‌شوند، بررسی اثر این نوع بارها بر سازه، یکی از زمینه‌های مورد توجه در مطالعات انجام گرفته است. در این ارتباط می‌توان به مطالعات اخیر صورت گرفته توسط ایرانی و همکاران [1] روی ارتعاشات غیرخطی تیر با مقطع متغیر تحت بار اتفاقی، مطالعه صورت گرفته توسط عابدی و اصنافی [2] و اصنافی و عابدی [3] برای تعیین نواحی بروز ناپایداری دینامیکی در ورق با خواص هدفمند و تحت بار اتفاقی اشاره کرد. در ارتباط با سازه‌های ساندویچی نیز می‌توان به مطالعه راماچاندرا ردی و همکاران [4] و همچنین گریسون و همکاران [5] اشاره کرد. در مرجع [4] پاسخ خطی ورق ساندویچی با لبه گیردار تحت بار تصادفی با استفاده از روش‌های تحلیلی به‌دست آمده و با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده است. مدلسازی سازه‌ای در این مطالعه باصرف‌نظر از کرنش‌های نرمال راستای ضخامت انجام گرفته است. در مرجع [5] نیز از روش‌های تحلیلی برای تعیین پاسخ خطی به بار تصادفی با پهنای باند وسیع استفاده شده است. اما برای شبیه‌سازی، تغییر طول در راستای ضخامت هسته نیز درنظرگرفته شده است. همچنین سازه در شرایطی که لایه ویسکوالاستیک و لایه مقید کننده بالای آن، تنها بخشی از سطح لایه پایین را دربرگرفته باشند، مورد بررسی قرار گرفته است. باید توجه داشت که فرض خطی بودن رفتار سازه در بسیاری از موارد کاربردی، منطبق با واقعیت نبوده و لذا قادر به پیش بینی درست رفتار سازه نخواهد بود. این امر به‌ویژه در صورت اتفاقی بودن بارهای اعمالی اهمیت بیشتری می‌یابد چرا که در چنین شرایطی امکان بروز رفتارهای پیچیده در سازه همانند پدیده پرش تصادفی[1] و یا پدیده مشابهی با نام آشکار-نهانی تناوبی[2] [6] خواهد بود. پیش‌بینی این رفتارها، علیرغم اثر قابل توجه، البته با استفاده از مدل خطی شده امکان‌پذیر نبوده و شبیه‌سازی غیرخطی سازه را لازم می‌نماید. مطالعات غیرخطی در این زمینه نیز توسط وایکایتیس و همکاران [7] با مطالعه روی پاسخ تیر و ورق ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک الکتریکی[3] به بار تصادفی با محتوای فرکانسی وسیع انجام گرفته است. منشاء رفتار غیرخطی در این مطالعه روابط غیرخطی هندسی بر مبنای رابطه ون‌کارمن درنظرگرفته شده است. معادلات حاکم در این مطالعات با استفاده از روش گالرکین، گسسته شده و سپس با شبیه‌سازی‌های عددی پاسخ زمانی و همچنین تابع چگالی توان طیفی[4] و مجذور میانگین مربعات پاسخ محاسبه شده است. بررسی اثر بارهای تصادفی بر تیرهای ساندویچی در مطالعه لی [8] با شبیه‌سازی غیرخطی ماده ویسکوالاستیک، مورد توجه قرار گرفته است. در این مقاله نیز پاسخ زمانی سازه با حل عددی معادلات، مورد مطالعه قرار گرفته است. تاکید ویژه‌ای اما، در هیچ‌یک از مطالعات یاد شده در این زمینه بر بروز پدیده‌های متفاوت در حضور همزمان بارهای تصادفی و رفتار غیرخطی نشد. مطالعه دیگر در این زمینه توسط محمودخانی و حدادپور [9] با هدف بررسی بروز پدیده پرش اتفاقی و دومودی شدن تابع چگالی احتمال پاسخ جابجایی در ورق ساندویچی تحت اثر بارهای اتفاقی با پهنای باند باریک صورت گرفته است. در این مطالعه، معادلات فوکرپلانک[5] مربوط به معادلات دامنه-فاز حاصل از اعمال روش اغتشاشی مقیاس‌های چندگانه[6]، با استفاده از روش اختلاف محدود، حل شده و از آن برای تعیین پاسخ فرکانسی سازه و همچنین تعیین تابع چگالی احتمال پاسخ استفاده شده است.

مطالعات اشاره شده در بالا تنها بخشی از از رفتارغیرخطی ارتعاشی ورق‌های ساندویچی را دربر می‌گیرند و این امر انجام مطالعات بیشتر در این زمینه را لازم می‌نماید. یکی از موارد مهم در این ارتباط بررسی رفتار سازه تحت اثر بارهای اتفاقی با پهنای باند وسیع است که در صورت برقرار بودن شرایط تشدید داخلی در سازه منجر به پدیده‌های رفتاری خاص در سازه می‌شود. بر همین مبنا، مطالعه حاضر اثر تداخل غیرخطی مودهای نامتقارن ورق ساندویچی را تحت بارهای اتفاقی با پهنای باند بالا و توزیع گوسی به‌شکل تحلیلی مورد توجه قرار می‌دهد. مودهای نامتقارن ورق در شرایط نزدیکی ابعاد طولی و عرضی ورق (شکل نزدیک به مربع) دارای فرکانس‌های طبیعی نزدیک به هم هستند که همین امر شرایط اندرکنش بین این مودها را ایجاد می‌کند. در این شرایط تحریک مستقیم یکی از این مودها منجر به تحریک غیرمستقیم و در نتیجه انتقال انرژی به مود نامتقارن دیگر خواهد شد که با توجه به اتفاقی بودن بارها منجر به پدیده آشکار-نهانی تناوبی می‌گردد. برای انجام این کار، معادلات حاکم بر مبنای فرض بزرگی نسبی دوران و کرنش‌های عرضی لایه میانی که در مراجع [10,9] توسعه داده شده، با استفاده از روش اغتشاشی درکنار روش گالرکین، تبدیل به معادلات دیفرانسیلی معمولی شده است. پس از آن مقادیر مربوط به مجذور میانگین مربعات پاسخ با استفاده از روش تحلیلی بستن ممان غیرگوسی[7] بدست آمده و با مقادیر حاصل از روش بستن گوسی مقایسه شد. در ارتباط با روش بستن ممان لازم به توجه است که این روش یکی از روش‌های تحلیلی حل معادلات دیفرانسیلی تصادفی بر پایه استخراج معادلات مربوط به ممان‌های مرتبه‌های مختلف از معادلات فوکر-پلانک است. در این روش در صورت غیرخطی بودن معادلات، سلسله‌ای بی‌نهایت از معادلات مربوط به ممان ایجاد می‌شود، به‌طوری‌که در معادلات به‌دست آمده در هر مرتبه، ممان‌های با مرتبه‌های بالاتر ظاهر خواهند شد که این امر حل متوالی معادلات با مراتب متوالی را با مشکل روبرو می‌کند. بر این اساس نیاز به روابط بیشتری برای تعیین مقادیر ممان‌های مرتبه‌های بالاتر بر حسب سایر ممان‌ها خواهد بود که این روابط از طریق روش بستن ممان فراهم خواهند شد. همچنین مرتبه‌های معادلات ممان درنظرگرفته شده نیز تا مقداری محدود درنظرگرفته خواهد شد. در ساده‌ترین حالت از این روش، تنها معادلات تا مرتبه دو درنظرگرفته می‌شوند که این حالت معادل با فرض گوسی بودن پاسخ است و به‌همین علت به روش بستن ممان‌ها تا مرتبه دو، بستن ممان گوسی گفته می‌شود. در صورت احتساب مرتبه‌های بالاتر ممان نیز از نام روش بستن ممان غیرگوسی استفاده می‌شود. در مطالعه حاضر به‌علت بروز پدیده تداخل بین مودها، روش بستن گوسی از دقت لازم برخوردار نبود و لذا از روش بستن ممان غیرگوسی تا مرتبه چهارم استفاده خواهد شد. همچنین به‌منظور ارزیابی درستی حل

[1] Stochastic jump
[2] On-off intermittency
[3] Electrorheological (ER)
[4] Power Spectral Density (PSD)

[5] Fokker–Planck–Kolmogorov (FPK)
[6] Method of Multiple Scales (MMS)
[7] Non-Gaussian moment closure (NGMC)

تحلیلی، شبیه سازی عددی مونت کارلو نیز در این مطالعه مورد استفاده قرار گرفته است.

در بخش‌های بعدی، ابتدا معادلات حرکت حاکم بر سیستم که شامل هفت معادله مشتقات جزئی غیرخطی و دو معادله جبری مربوط به شرط تراکم‌ناپذیری ماده ویسکوالاستیک است استخراج شده است. این معادلات با درنظرگرفتن تغییرات جابجایی‌ها در راستای ضخامت، به‌شکل خطی برای مولفه‌های درون-صفحه‌ای و به‌شکل تابع درجه دو برای مولفه برون-صفحه‌ای (عرضی) لایه میانی بدست آمده‌اند. برای لایه‌های بیرونی ورق ساندویچی نیز از فرضیات کیرشهف به علت ضخامت کم و سفتی زیاد این لایه‌ها استفاده شده است. پس از استخراج معادلات، نحوه اعمال روش اغتشاشاتی در کنار روش گالرکین و همچنین روش بستن ممان غیرگوسی شرح داده شده و در نهایت معادلات حاصل برای ممان با استفاده از روش عددی شبه‌کمانی[1] برای بررسی تغییرات میانگین مربعات پاسخ پایا[2] با تغییرات چگالی بار تحریک حل شده‌اند. همچنین از روش عددی مونت‌کارلو[3] برای ارزیابی و بررسی نتایج حل تحلیلی بهره گرفته شده است. توجه ویژه در این قسمت به میزان شدت بار لازم برای تحریک غیرمستقیم مود نامتقارن و بروز انشعاب[4] در پاسخ شده است.

2- روابط حاکم

نمای ورق ساندویچی مورد بررسی به‌همراه دستگاه‌های مختصاتی که به‌طور جداگانه برای هر لایه درنظرگرفته شده، در شکل 1 نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است، صفحه x_1x_2 مربوط به دستگاه مختصات هر لایه منطبق بر صفحه میانی آن لایه شده و مرکز آن بر روی گوشه ورق قرار گرفته است. همچنین لازم به ذکر است که بالانویس و یا زیرنویس t ، c و b که در شکل 1 نشان داده شده، به ترتیب، نمایانگر مقادیر مرتبط با لایه بالایی، میانی و پایینی هستند. این قرارداد در باقی روابط و نمادهای ریاضی استفاده شده در بخش‌های بعد نیز برقرار خواهد بود.

2-1- روابط سینماتیک

میدان جابجایی درنظرگرفته درکار حاضر برای لایه میانی به‌شکل زیر خواهد بود:

$$U_\alpha\left(x_1,x_2,x_3^{(c)},t\right)=\overset{0}{u}{}_\alpha^{(c)}\left(x_1,x_2,+x_3^{(c)}\overset{1}{u}{}_\alpha^{(c)}\left(x_1,x_2,t\right),\right.\tag{1}$$

$$U_3\left(x_1,x_2,x_3^{(c)},t\right)=\overset{0}{u}{}_3^{(c)}\left(x_1,x_2,+x_3^{(c)}\overset{1}{u}{}_3^{(c)}\left(x_1,x_2,t\right)\right.+\left(x_3^{(c)}\right)^2\overset{2}{u}{}_3^{(c)}\left(x_1,x_2,t\right)\tag{2}$$

که U_α برای $\alpha=1,2$ نشان‌دهنده جابجایی‌های درون‌صفحه‌ای در

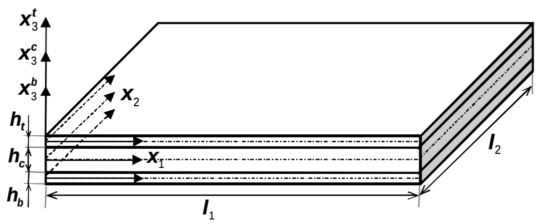


Fig. 1 The geometry of a sandwich plate and the coordinate systems adopted

شکل 1 نمای ورق ساندویچی سه لایه و دستگاه‌های مختصات درنظرگرفته شده

راستای x_1 و x_2، و U_3 جابجایی در راستای x_3 هستند. به‌علاوه، عبارت $\overset{j}{u}{}_i^{(c)}$ مرتبه jاُم از بسط مولفه جابجایی هسته در راستای x_i است. رابطه ساده شده کرنش-جابجایی برای مولفه‌های کرنش، بر اساس فرض بزرگی نسبی کرنش و دوران‌های عرضی هسته که در مراجع [10,9]، با بهره‌گیری از روش نظام‌مند ردی [11]، توسعه داده شده است، مطابق زیر خواهد بود:

$$E=\sum_{k=0}^{2}\overset{k}{E}\left(x_3^{(c)}\right)^k\tag{3}$$

که:

$$\begin{aligned}
&\overset{0}{E}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\overset{0}{u}{}_{\alpha,\beta}^{(c)}+\overset{0}{u}{}_{\beta,\alpha}^{(c)}+\overset{0}{u}{}_{3,\alpha}^{(c)}\overset{0}{u}{}_{3,\beta}^{(c)}\right)\\
&\overset{1}{E}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\overset{1}{u}{}_{\alpha,\beta}^{(c)}+\overset{1}{u}{}_{\beta,\alpha}^{(c)}\right),\overset{2}{E}_{\alpha\beta}=0\\
&\overset{0}{E}_{\alpha3}=\frac{1}{2}\left(\overset{1}{u}{}_{\alpha}^{(c)}+\overset{0}{u}{}_{3,\alpha}^{(c)}+\overset{1}{u}{}_{3}^{(c)}\overset{0}{u}{}_{3,\alpha}^{(c)}+\sum_{i=1,2}\overset{0}{u}{}_{i,\alpha}^{(c)}\overset{1}{u}{}_{i}^{(c)}\right)\\
&\overset{1}{E}_{\alpha3}=\frac{1}{2}\left(\overset{1}{u}{}_{3,\alpha}^{(c)}+\sum_{i=1,2}\overset{1}{u}{}_{i,\alpha}^{(c)}\overset{1}{u}{}_{i}^{(c)}\right),\overset{2}{E}_{\alpha3}=\frac{1}{2}\overset{2}{u}{}_{3,\alpha}^{(c)},\\
&\overset{0}{E}_{33}=\overset{1}{u}{}_{3}^{(c)}+\frac{1}{2}\sum_{i=1,2}\left(\overset{1}{u}{}_{i}^{(c)}\right)^2,\overset{1}{E}_{33}=2\overset{2}{u}{}_{3}^{(c)},\overset{2}{E}_{33}=0
\end{aligned}\tag{4}$$

به‌علاوه با توجه به تراکم‌ناپذیر بودن ماده ویسکوالاستیک لایه میانی، شرط تراکم‌پذیری منجر به دو معادله زیر خواهد شد [10]:

$$\begin{aligned}
&\overset{1}{u}{}_{3}^{(c)}+\sum_{i=1,2}\overset{0}{u}{}_{i,i}^{(c)}-\sum_{i=1,2}\overset{1}{u}{}_{i}^{(c)}\overset{0}{u}{}_{3,i}^{(c)}=0\\
&2\overset{2}{u}{}_{3}^{(c)}+\overset{1}{u}{}_{i,i}^{(c)}=0
\end{aligned}\tag{5}$$

برای لایه‌های بیرونی نیز با توجه به ضخامت کم و سفتی زیاد این لایه نسبت به هسته، از فرضیات کیرشهف در کنار عبارات غیرخطی ون‌کارمن استفاده شده است. لازم به توجه است که عبارات جابجایی مربوط به لایه‌های بالا و پایین، با استفاده از روابط مربوط به لزوم عدم لغزش بین لایه‌ها [10] بر حسب عبارات جابجایی لایه میانی قابل بیان خواهند بود.

2-2- روابط ساختاری

در این مطالعه، با توجه به فرض تراکم‌ناپذیری و همسانگرد بودن ماده ویسکوالاستیک، شکل ساده شده رابطه گرین-ریولین[5] که توسط پیپکین [12] برای مواد ویسکوالاستیک تراکم‌ناپذیر و همسانگرد ارائه شده است، به‌کار خواهد رفت. رابطه گرین-ریولین بین تنش دوم پایولا-کیرشهف[6]، S و کرنش گرین، E، پس از اعمال روش استیفورد [13] و نامبودیریپاد و نیس [14] و همچنین اعمال فرض بزرگی نسبی کرنش‌ها و دوران‌های عرضی به شکل رابطه تک‌انتگرالی زیربه‌دست خواهد آمد [10]:

$$\begin{aligned}
&S_{ij}(X,t)=-p(X,t)\delta_{ij}+S_{ij}^e(X,t)\\
&\quad-\frac{(1-\gamma)}{t_R}\int_0^t S_{ij}^e(X,\tau)\,e^{-\frac{t-\tau}{t_R}}d\tau\\
&i,j=1,2,3,\ X=x_1,x_2,x_3^{(c)}
\end{aligned}\tag{6}$$

که t_R نمایانگر زمان آزادسازی تنش و γ نسبت مدول استاتیکی به مدول اولیه در الگوی جامد استاندارد[7] ماده ویسکوالاستیک هستند. به‌علاوه S_{ij}^e مربوط به بخش الاستیک رابطه ساختاری است که مطابق با رابطه زیر است:

[1] Pseudo-arclength continuation
[2] Steady-state
[3] Monte carlo
[4] Bifurcation

[5] Green-Rivlin
[6] Second Piola-Kirchhoff stress tensor
[7] Standard Solid Model (SSM)

$$S^e_{\alpha\beta}(X,t) = 2c_0(1+\mu)E_{\alpha\beta}(X,t) - 4c_0(1 + 2\mu)E_{\alpha3}(X,t)E_{\beta3}(X,t)$$
$$S^e_{\alpha3}(X,t) = [2p(X,t) + 2c_0(1+\mu)]E_{\alpha3}(X,t) - 4c_0(1 + 2\mu)\sum_{i=1,2,3}E_{\alpha i}(X,t)E_{i3}(X,t) + 16c_0(1 + \mu)E_{\alpha3}(X,t)\sum_{\beta=1,2}E_{\beta3}(X,t)^2 \qquad (7)$$

c_0 و μ ضرایب ثابت ماده در الگوی ماده مونی-ریولین[1] هستند، همچنین در رابطه (7)، p فشار هیدرستاتیکی مجهولی است که در نتیجه اعمال قید تراکم‌ناپذیری ماده ویسکوالاستیک ظاهر شده است و وابستگی آن به مختصه راستای ضخامت به‌شکل زیر قابل بیان است:

$$p(X,t) = \overset{0}{p}(x_1,x_2,t) + \overset{1}{p}(x_1,x_2,t)x_3^{(c)} \qquad (8)$$

که $\overset{0}{p}$ و $\overset{1}{p}$ به‌همراه عبارات جابجایی لایه میانی ($\overset{j}{u}{}_i^{(c)}$) تعداد 9 تابع مجهول را تشکیل می‌دهند.

رابطه ساختاری برای لایه‌های بالا و پایین ورق نیز به‌کمک رابطه هوک در شرایط تنش صفحه‌ای قابل بیان هستند که روابط آن در مرجع [15] آمده است.

2-3- معادلات حرکت

معادلات حرکت با استفاده از روابط بیان شده در بخش‌های قبل و به‌کمک اصل همیلتون استخراج شده‌اند که به‌قرار زیر هستند:

$$\delta\overset{0}{u}_\alpha:\ -\sum_{j=b,c,t}\sum_{i=1,2}\overset{0}{N}{}^{(j)}_{\alpha i,i} - \sum_{i=1,2}\left(\overset{0}{N}{}^{(c)}_{i3}\overset{1}{u}_\alpha\right)_{,i} + \sum_{i=b,c,t}I_0^{(t)}\overset{0}{\ddot u}{}^{(i)}_\alpha = 0 \qquad \text{(9-الف)}$$

$$\delta\overset{1}{u}_\alpha:\ -\sum_{i=1,2}\overset{1}{N}_{\alpha i,i} + \overset{0}{N}_{\alpha3} + \sum_{i=1,2}(\overset{0}{N}{}^{(b)}_{\alpha i,i} - \overset{0}{N}{}^{(t)}_{\alpha i,i})\frac{h_c}{2} + \overset{0}{N}_{33}\overset{1}{u}_\alpha + \frac{h_c}{2}(I_0^{(t)}\overset{0}{\ddot u}{}^{(t)}_\alpha - I_0^{(b)}\overset{0}{\ddot u}{}^{(b)}_\alpha) + I_2^{(c)}\overset{1}{\ddot u}_\alpha = 0 \qquad \text{(9-ب)}$$

$$\delta\overset{0}{u}_3:\ \sum_{k=1,2}\sum_{j=1,2}\left(-\overset{0}{N}{}^{(t)}_{jk,jk}\frac{h_t}{2} + \overset{0}{N}{}^{(b)}_{jk,jk}\frac{h_b}{2}\right) - \sum_{k=1,2}\sum_{j=1,2}\sum_{i=t,b}\overset{1}{N}{}^{(i)}_{jk,jk} - \sum_{i=1,2}\overset{0}{N}_{i3,i} + \sum_{i=b,c,t}I_0^{(i)}\overset{0}{\ddot u}{}^{(j)}_3 + I_2^{(c)}\overset{2}{\ddot u}_3 + \sum_{i=1,2}[\frac{1}{2}(I_0^{(t)}h_t\overset{0}{\ddot u}{}^{(t)}_{i,i} - I_0^{(b)}h_b\overset{0}{\ddot u}{}^{(b)}_{i,i}) - I_2^{(t)}\overset{0}{\ddot u}{}^{(t)}_{3,ii} - I_2^{(b)}\overset{0}{\ddot u}{}^{(b)}_{3,ii}] - \tilde q = 0 \qquad \text{(9-ج)}$$

$$\delta\overset{1}{u}_3:\ -\sum_{i=1,2}\overset{1}{N}_{i3,i} + \overset{0}{N}_{33} - \sum_{k=1,2}\sum_{j=1,2}\sum_{i=t,b}\left(-\overset{0}{N}{}^{(i)}_{jk,jk}\frac{h_i}{2}\right)\frac{h_c}{2} - \sum_{k=1,2}\sum_{j=1,2}(\overset{1}{N}{}^{(b)}_{jk,jk} - \overset{1}{N}{}^{(t)}_{jk,jk})\frac{h_c}{2} + \sum_{i=1,2}\overset{0}{N}_{i3}\overset{0}{u}_{3,i} + (I_0^{(t)}\overset{0}{\ddot u}{}^{(t)}_3 - I_0^{(b)}\overset{0}{\ddot u}{}^{(b)}_3)\frac{h_c}{2} + \sum_{i=1,2}\frac{h_c}{2}[(\frac{I_0^{(t)}h_t}{2}\overset{0}{\ddot u}{}^{(t)}_{i,i} + \frac{I_0^{(b)}h_b}{2}\overset{0}{\ddot u}{}^{(b)}_{i,i}) + (-I_2^{(t)}\overset{0}{\ddot u}{}^{(t)}_{3,ii} + I_2^{(b)}\overset{0}{\ddot u}{}^{(b)}_{3,ii})] + I_2^{(c)}\overset{1}{\ddot u}_3 - \tilde q\frac{h_c}{2} = 0 \qquad \text{(9-د)}$$

$$\delta\overset{2}{u}_3:\ -\sum_{i=1,2}\overset{2}{N}_{i3,i} + 2\overset{1}{N}_{33} - \sum_{k=1,2}\sum_{j=1,2}(-\overset{0}{N}{}^{(t)}_{jk,jk}\frac{h_t}{2} + \overset{0}{N}{}^{(b)}_{jk,jk}\frac{h_b}{2})(\frac{h_c}{2})^2 - \sum_{k=1,2}\sum_{j=1,2}\sum_{i=t,b}\overset{1}{N}{}^{(i)}_{jk,jk}(\frac{h_c}{2})^2 + \sum_{i=1,2}(\frac{h_c}{2})^2[\frac{1}{2}(I_0^{(t)}h_t\overset{0}{\ddot u}{}^{(t)}_{i,i} - I_0^{(b)}h_b\overset{0}{\ddot u}{}^{(b)}_{i,i})) - (I_2^{(t)}\overset{0}{\ddot u}{}^{(t)}_{3,ii} + I_2^{(b)}\overset{0}{\ddot u}{}^{(b)}_{3,ii} + I_2^{(c)}\overset{0}{\ddot u}_3 + I_4^{(c)}\overset{2}{\ddot u}_3 - \tilde q(\frac{h_c}{2})^2 = 0 \qquad \text{(9-ه)}$$

که در رابطه (9) و همچنین روابط بعدی این مطالعه، بالانویس c مربوط به عبارات جابجایی لایه میانی، به‌منظور ساده شدن روابط حذف شده است. عبارات $\overset{k}{N}{}^l_{ij}$ نیز نشان‌دهنده تنش‌های منتجه هستند که طبق رابطه زیر تعریف می‌شوند:

$$\overset{k}{N}{}^l_{ij} = \int_{-\frac{h_k}{2}}^{h_k/2}\left(x_3^{(l)}\right)^k S_{ij}\,dx_3^{(l)}, \quad k = 0,1,2,\ l = c,t,b \qquad (10)$$

همچنین در رابطه (9)، $\tilde q(x_1,x_2,t)$ نشان‌دهنده فشار اعمالی به سطح بالایی ورق است که به سمت بالا مثبت درنظرگرفته شده است. فشار اعمالی در مطالعه حاضر به‌شکل نویز سفید در زمان درنظرگرفته شده است:

$$\tilde q(x_1,x_2,t) = q(x_1,x_2)\varsigma(t) \qquad (11)$$

که $\varsigma(t)$ نویز سفید با تابع چگالی توان ثابت $\tilde S_0$ بوده و $q(x_1,x_2)$ تابعی معین و غیرتصادفی است که به‌شکل زیر درنظرگرفته شده است:

$$q(x_1,x_2) = \sin(\frac{\pi x_1}{l_1})\sin(\frac{2\pi x_2}{l_2}) \qquad (12)$$

که با هدف تحریک مستقیم مود نامتقارن با تعداد نیم‌موج یک و دو در راستای x_1 و x_2 (مود (1,2)) است. علت اتخاذ چنین فرضی، ایجاد امکان بررسی تحلیلی انتقال انرژی از مود (1,2) به مود نامتقارن (2,1) بر اثر تشدید داخلی است. شرایط مرزی متناظر با معادلات حرکت نیز با استفاده از اصل همیلتون قابل استخراج خواهد بود که برای شرایط تکیه‌گاه ساده با لبه‌های آزاد در راستاهای درون‌صفحه‌ای در مرجع [10,9] ارائه شده است.

3- حل معادلات

در این بخش ابتدا روش گسسته‌سازی و تبدیل معادلات مشتقات جزئی حاکم به معادلات دیفرانسیلی معمولی برحسب زمان تشریح خواهد شد، پس

[1] Mooney-Rivlin

از آن نیز روش بستن ممان به اختصار ارائه می‌گردد.

3-1- گسسته‌سازی معادلات

برای گسسته‌سازی معادلات به‌دست آمده در رابطه (9)، روش گالرکین به رابطه مربوط به $\overset{0}{u}_3$ (رابطه (9-ج)) اعمال خواهد شد. برای این منظور $\overset{0}{u}_3$ با توجه به شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده طبق بسط زیر درنظرگرفته خواهد شد:

$$\overset{0}{u}_3 = \varepsilon\overset{0}{\widetilde{w}}_{12}(t)\sin\left(\frac{\pi x_1}{l_1}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_2}{l_2}\right) + \varepsilon\overset{0}{\widetilde{w}}_{21}(t)\sin\left(\frac{2\pi x_1}{l_1}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{l_2}\right) \quad (13)$$

که ε کمیت با مقدار کوچک در روش اغتشاشی مقیاس‌های چندگانه است. علت انتخاب این دو مود در حل حاضر، تحریک مستقیم مود متقارن (1,2) است که به‌علت تشدید داخلی ناشی از شکل مربعی ورق منجر به تحریک غیرمستقیم مود (2,1) خواهد شد. باید توجه داشت که به‌علت عدم حضور عبارات غیرخطی با مراتب زوج در معادله گسسته شده نهایی مربوط به $\overset{0}{u}_3$، دو جمله در نظرگرفته شده در رابطه (13) برای $\overset{0}{u}_3$ کافی خواهد بود. برای توابع مجهول دیگر، سایر معادلات حرکت با استفاده از روش اغتشاشی بر حسب $\overset{0}{\widetilde{w}}_{ij}(t)$ به‌دست خواهند آمد. برای این منظور می‌توان نوشت:

$$\overset{j}{p}(x_1, x_2, t) = \sum_{k=1}^{N_p} \varepsilon^k \overset{j}{p}^{(k)}(x_1, x_2, t)$$
$$\overset{j}{u}_i(x_1, x_2, t) = \sum_{k=1}^{N_p} \varepsilon^k \overset{j}{Z}^{(k)}(x_1, x_2, t)$$
$$j = 0,1,\ i = 1,2 \quad (14)$$

و

$$\overset{j}{u}_3(x_1, x_2, t) = \sum_{k=1}^{N_p} \varepsilon^k \overset{j}{\widetilde{w}}^{(k)}(x_1, x_2, t)$$
$$j = 1,2 \quad (15)$$

که $\overset{j}{Z}^{(k)}$ نماینده $\overset{j}{\widetilde{u}}^{(k)}$ برای $i = 1$، و نماینده $\overset{j}{\widetilde{v}}^{(k)}$ برای $i = 2$ خواهد بود.

همچنین N_p نشان‌دهنده مرتبه حل اغتشاشی است که برابر با 3 درنظرگرفته شده است. قبل از جایگذاری روابط (13) تا (15) در معادلات حاکم، نیاز به اعمال مجموعه‌ای از مقیاس‌بندی‌های متداول در روش‌های اغتشاشی خواهد بود. برای این کار، عبارات انتگرالی موجود که منبع میرایی در سیستم هستند و همچنین تمام عبارات مربوط به اینرسی به‌جز $\overset{0}{\ddot{u}}_3$ در ε^2 ضرب خواهند شد که با توجه به فاصله زیاد فرکانس مود خمشی از سایر مودهای ورق، منطبق بر واقعیت حاکم بر سازه خواهد بود. پس از آن روابط (13) تا (15) در معادلات حرکت حاکم (رابطه (9)) به جز معادله مربوط به $\overset{0}{u}_3$ و همچنین دو معادله مربوط به تراکم ناپذیری (رابطه (5))، جایگذاری شده و با جداکردن ضرایب با توان‌های برابر ε، تعداد 3 دسته معادلات مشتقات جزئی خطی ناهمگن به‌دست خواهد آمد که هر دسته شامل 8 معادله به‌همراه معادلات شرایط مرزی مربوطه خواهد بود. برای حل این معادلات، از روش بسط توابع ویژه استفاده شده که مشروح آن در مراجع [10,9] آمده است. تنها موضوع متفاوت نسبت به حل ارائه شده در این مراجع، شکل توابع در درنظرگرفته شده برای شرایط مرزی در معادلات مرتبه دوم است. لازم به توضیح است که شرایط مرزی مربوط به شرط صفر بودن تنش‌های منتجه درون‌صفحه‌ای (به‌علت آزاد بودن لبه‌های در راستای درون-صفحه‌ای) منجر به روابطی غیرخطی خواهند شد که در طول اعمال روش اغتشاشی به‌شکل رابطه‌ای خطی و ناهمگن در مرتبه دوم روش می‌شوند. در این حالت جهت ارضای شرایط مرزی، نیاز به افزودن عباراتی به بسط توابع ویژه جابجایی‌های درون‌صفحه‌ای خواهد بود که شرح کامل آن در مرجع [10] آمده است. این توابع به‌شکل زیر خواهند بود:

$$\overset{i}{\widetilde{u}}_{nh} = \sum_{p,r}^{Nm}\sum_{q,s}^{Nn}[\overset{i}{\widetilde{U}}_{pqrs} \sin\left(\frac{\pi x_1(p+r)}{l_1}\right)\sin\left(\frac{\pi q x_2}{l_2}\right)\sin\left(\frac{\pi s x_2}{l_2}\right)] \quad \text{(16-الف)}$$

$$\overset{i}{\widetilde{v}}_{nh} = \sum_{p,r}^{Nm}\sum_{q,s}^{Nn}[\overset{i}{\widetilde{V}}_{pqrs} \sin\left(\frac{\pi x_2(q+s)}{l_2}\right)\sin\left(\frac{\pi p x_1}{l_1}\right)\sin\left(\frac{\pi r x_1}{l_1}\right)] \quad \text{(16-ب)}$$

که $\overset{i}{\widetilde{u}}_{nh}$ و $\overset{i}{\widetilde{v}}_{nh}$ شرایط مرزی غیرهمگن مرتبه دوم را ارضا می‌کنند و $\overset{i}{\widetilde{U}}_{pqrs}$ و $\overset{i}{\widetilde{V}}_{pqrs}$ توابع معلوم از متغیرهای $\overset{0}{\widetilde{w}}_{ij}(t)$ و همچنین خواص هندسی و فیزیکی سازه مورد مطالعه هستند. جزئیات بیشتر درباره این توابع در مرجع [10] آمده است. نکته لازم به توجه اینکه Nm و Nn تعداد جملات لازم در بسط بالا را نشان می‌دهند که مقدار آنها برای رسیدن به همگرایی، بسته به خواص ورق تغییر می‌کند. در نهایت با حل هشت معادله مراتب مختلف، توابع جابجایی مجهول بر حسب $\overset{0}{\widetilde{w}}_{ij}(t)$ به‌دست خواهند آمد. با جایگذاری مقادیر به‌دست آمده به‌همراه رابطه (13) در معادله مربوط به $\overset{0}{u}_3$، و اعمال روش گالرکین، دو معادله دیفرانسیلی معمولی به‌شکل زیر به‌دست خواهند آمد:

$$\left(\varepsilon + \varepsilon^3 CI_{ij}\right)\frac{d^2\overset{0}{\widetilde{w}}_{ij}}{dt^2} + \varepsilon\omega_{ij}^2\overset{0}{\widetilde{w}}_{ij} + \varepsilon^3\sum_{n,p,r,}\sum_{n,q,s} R_{mnpqrs}\overset{0}{\widetilde{w}}_{mn}\overset{0}{\widetilde{w}}_{pq}\overset{0}{\widetilde{w}}_{rs} + \varepsilon^3 Q_{1ij}\int_0^t e^{-\eta(t-\tau)}\overset{0}{\widetilde{w}}_{ij}(\tau)d\tau - \varepsilon^3 q_{ij}\varsigma(t) = 0$$
$$(i,j) = (1,2), (2,1) \quad (17)$$

که ω_{ij} نشان دهنده فرکانس طبیعی ijام بوده و ضریب ثابت CI_{ij} نشان‌دهنده اثر اینرسی مربوط به عبارات دیگر جابجایی است. ضرایب R_{mnpqrs} و Q_{1ij} نیز، ضرایب ثابت وابسته به خواص مواد و هندسه سازه هستند. همچنین q_{ij} در رابطه بالا نماینده تحریک با خاصیت تصادفی در زمان است و برابر است با: $q_{ij} = ct\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} q(x_1,x_2)\ \overset{0}{\phi}{}^{w}_{ij}dx_1dx_2$.

دو معادله نشان داده شده با رابطه (17)، در نهایت با استفاده از روش بستن ممان گوسی و غیرگوسی حل خواهند شد. جهت ایجاد امکان استفاده از این روش، عبارت انتگرالی رابطه (17) $\left(\int_0^t e^{-\eta(t-\tau)}\overset{0}{\widetilde{w}}_{ij}(\tau)d\tau\right)$ نیز با تابع مجهول جدید $z_{ij}(t)$ جایگزین و در عوض، معادلات دیفرانسیلی دیگری به شکل زیر اضافه می‌شوند:

$$\dot{z}_{ij}(t) = -\eta z_{ij}(t) + \overset{0}{\widetilde{w}}_{ij},\ (i,j) = (1,2), (2,1) \quad (18)$$

3-2- اعمال روش بستن ممان

معادلات ممان در حالت کلی به‌شکل زیر قابل بیان خواهند بود [17,16]:

$$\frac{d(m_{p_1p_2\dots p_{nv}})}{dt} = \sum_{i=1}^{N} E[\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\tilde{\sigma}_i \prod_{i=1}^{6} y_i^{p_i}\right)] + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}E[\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}(\tilde{b}_{ij}\prod_{i=1}^{6} y_i^{p_i})] \quad (19)$$

که y_i عناصر بردار مربوط به فضای حالت را نشان می‌دهد که به‌شکل زیر درنظرگرفته شده است:

$$y = \{\overset{0}{\widetilde{w}}_{12}, d\overset{0}{\widetilde{w}}_{12}, z_{12}, \overset{0}{\widetilde{w}}_{21}, d\overset{0}{\widetilde{w}}_{21}, z_{21}\} \quad (20)$$

همچنین $\tilde{\sigma}_i$ و $\tilde{b}_{ij}$ طبق رابطه زیر به‌دست می‌آیند:

$$\tilde{\sigma}_i = G_i(y,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial H_{ik}}{\partial y_j}H_{jk}$$
$$\tilde{b}_{ij} = [H(y,t)H(y,t)^{\mathrm{T}}]_{ij} \quad (21)$$

که G_i عناصر بردار زیر را نشان می‌دهد:

$$G = \{\tilde{G}_1^{12}, \tilde{G}_2^{12}, \tilde{G}_3^{12}, \tilde{G}_1^{21}, \tilde{G}_2^{21}, \tilde{G}_3^{21}\}^{\mathrm{T}} \quad (22)$$

و

$$\tilde{G}_1^{ij} = d\overset{0}{\widetilde{w}}_{ij}$$
$$\tilde{G}_2^{ij} = \frac{1}{(\varepsilon + \varepsilon^3 CI_{ij})}[-\varepsilon\omega_{ij}^2\overset{0}{\widetilde{w}}_{ij} - \varepsilon^3 Q_{1ij}z_{ij}(t)$$
$$-\varepsilon^3\sum_{n,p,r}\sum_{n,q,s}R_{1mnpqrs}\overset{0}{\widetilde{w}}_{mn}\overset{0}{\widetilde{w}}_{pq}\overset{0}{\widetilde{w}}_{rs}]$$
$$\tilde{G}_3^{ij} = -\eta z_{ij}(t) + \overset{0}{\widetilde{w}}_{ij} \quad (23)$$

همچنین ماتریس H طبق رابطه زیر است:

$$\mathrm{H} = \mathrm{diag}[\widetilde{\mathrm{H}}^{ij}] \quad (24)$$

که

$$\widetilde{\mathrm{H}}^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q_{ij}}{(\varepsilon + \varepsilon^3 CI_{ij})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

به‌علاوه در رابطه (19)، $E[]$ نشان‌دهنده میانگین عملیاتی[1] است، همچنین $m_{p_1p_2\dots p_{nv}}$ ممان با مرتبه (np) برابر با مجموع توان‌های y_i ها بوده $(np = \sum_{i=1}^{6} p_i)$ و با رابطه $m_{p_1p_2\dots p_6} = E[\prod_{i=1}^{6} y_i^{p_i}]$ تعیین می‌شود. از رابطه (19) می‌توان برای تعیین ممان با مقادیر مختلف np استفاده کرد اما نکته‌ای که باید توجه داشت این‌که به‌علت وابستگی $\tilde{\sigma}_i$ و $\tilde{b}_{ij}$ به y_iها، طبق روابط (21) تا (25)، در صورت وجود عبارات غیرخطی، ممان‌های با مراتب بالاتر از np در سمت راست رابطه (19) حاصل می‌شوند. لذا همواره تعداد ممان‌های مجهول از تعداد معادلات ممان موجود بیشتر خواهند بود، حل این مشکل با بستن ممان انجام می‌گیرد که در ادامه مورد توجه قرار گرفته است.

جهت تعیین مقادیر ممان‌های با مراتب بالا بر حسب ممان‌های مراتب پایین، مقادیر کامیولنت با مراتب بالاتر از مقدار مشخصی برابر با صفر نهاده خواهند شد. کامیولنت با مرتبه np با نماد $\kappa_{p_1p_2\dots p_6}$ مشخص می‌شود و برابر با ضرایب بسط تیلور لگاریتم طبیعی تابع مشخصه چگالی احتمال $(\Theta(\omega))$ است، بنابراین می‌توان نوشت [18]:

$$\Theta(\omega) = \exp(\sum_{sm=1}^{\infty}\frac{I^{sm}}{sm!}\sum_{\substack{p_1,\dots,p_6=1 \\ p_1+\dots+p_6=sm}}^{sm}\kappa_{p_1p_2\dots p_{nv}}\omega_1^{p_1}\omega_2^{p_2}\dots\omega_6^{p_3}\frac{sm!}{p_1!\,p_2!\dots p_6!}) \quad (26)$$

لازم به توجه است که رابطه بالا در مقایسه با رابطه ارائه شده در مرجع [18]، به‌شکل متفاوتی نوشته شده است. $\Theta(\omega)$ در واقع تابع فوریه چند بعدی تابع چگالی احتمال پاسخ‌هاست که بسط تیلور آن تا مرتبه دوم حول $\omega = 0$ ، متناظر با تابع چگالی احتمال توزیع گوسی خواهد بود [18]. لازم به توجه است که بولد شدن کمیت ω به معنی برداری بودن آن است. بنابراین در صورت صفرکردن کامیولنت‌های با مرتبه بالای دو، روش به نام روش بستن ممان گوسی خوانده می‌شود. با درنظرگرفتن جملاتی بیشتر از بسط تیلور، اثر غیرگوسی بودن تابع احتمال پاسخ تا اندازه‌ای لحاظ خواهد شد که به دقت بیشتر حل می‌انجامد. در نهایت برای تعیین روابط بین ممان‌های مرتبه پایین و بالا از طریق صفرکردن کامیولنت، نیاز به تعیین رابطه کامیولنت‌ها با ممان خواهد بود که با استفاده از رابطه زیر قابل انجام خواهد بود [18]:

$$m_{p_1p_2\dots p_6} = (-I)^{sm}(\frac{\partial^{sm}\Theta(\omega)}{\partial\omega_1^{p_1}\partial\omega_2^{p_2}\dots\partial\omega_6^{p_6}})_{\omega=0} \quad (27)$$

با جایگذاری رابطه (26) در رابطه (27) رابطه بین ممان‌ها و کامیولنت‌ها به‌دست خواهد آمد. در مطالعه حاضر کامیولنت‌های با مرتبه بیشتر از 4 برابر با صفر نهاده شده که در این حالت نیاز به تعیین کامیولنت‌های تا مرتبه 6 خواهد بود.

در نهایت با تعیین ممان‌های با مراتب بالا بر حسب ممان‌های مرتبه پایین می‌توان معادلات حاکم بر ممان‌ها را که به‌شکل معادلات دیفراسیلی غیرخطی مرتبه اول وابسته به‌هم هستند، حل کرد. همچنین در صورتی که تنها پاسخ پایا مدنظر باشد، می‌توان مشتق زمانی ممان‌ها $(\dot{m}_{p_1p_2\dots p_6})$ را برابر با صفر قرار داده و معادلات جبری حاصل را حل نمود. در مطالعه حاضر، با توجه به تعداد 6 مولفه فضای حالت، تعداد معادلات در صورت استفاده از روش بستن گوسی (صفر کردن کامیولنت‌های مراتب بالای دو)، برابر با 27 می‌شود. در صورت استفاده از روش بستن غیرگوسی مرتبه چهارم (صفر کردن کامیولنت‌های مراتب بالای چهار) نیز تعداد معادلات برابر با 209 خواهد شد. برای حل عددی این معادلات در شرایط پایا (که به‌شکل معادلات غیرخطی جبری هستند)، به‌علت وجود نواحی چند-جوابی، نیاز به استفاده از روش‌های تعقیب مسیر[2] خواهد بود که در مطالعه حاضر از روش شبه کمانی[3] جهت دنبال کردن پاسخ با افزایش چگالی طیفی تحریک، استفاده شده است.

4- تحلیل نتایج عددی

در این بخش نتایج حاصل از حل معادلات حاکم جهت بررسی تداخل بین مودهای نامتقارن سازه ارائه شده است. به‌منظور بررسی صحت معادلات و حل نیز، با توجه به ارزیابی‌های انجام شده در مراجع [10,9]، تنها نتایج مربوط به حل معادلات گسسته شده زمانی با استفاده از روش بستن ممان مورد بررسی قرار گرفته است که در ادامه خواهد آمد.

[1] Ensemble average

[2] Continuation

[3] Pseudo-arclength continuation

4-1- ارزیابی حل بستن ممان

ارزیابی درستی نتایج روش بستن ممان با مقایسه با نتایج حاصل از حل عددی معادلات رابطه (17) و (18) انجام شده است. مساله بررسی شده، مربوط به تحریک مستقیم مود (1,2) در ورق ساندویچی مربع‌شکل است که خواص مربوط به آن به قرار زیر است:

$E_b = E_t = 70\text{GPa}, c_0 = 5\text{MPa}$
$\rho_b = \rho_t = 2700\text{kg/m}^3, \rho_c = 1000\text{kg/m}^3$
$\nu_t = \nu_b = 0.3, \mu = 0.25$
$l_1 = l_2 = 1\text{ m}, \frac{h_b}{l_1} = \frac{h_t}{l_1} = 0.001, \frac{h_c}{l_1} = 0.01,$
$t_R = 0.001\text{ se}, \gamma = 0.6$

نتیجه به‌دست آمده برای میانگین مربعات پاسخ مود (1,2)، به‌ازای چگالی بار کمتر از بار لازم برای تحریک غیرمستقیم مود (2,1) (بار انشعاب[1]) در شکل 2 نشان داده شده است. نتایج ناشی از اعمال بار با مقدار بیشتر از بار انشعاب نیز در شکل 3 برای میانگین مربعات جابجایی دو مود (1,2) و (2,1) ارائه شده است.

در این شکل‌ها از نماد $E[W_{12}^2]$ برای میانگین مربعات پاسخ مود (1,2) و از نماد $E[W_{21}^2]$ برای مود (2,1)، با حذف بالانویس 0 و ~ استفاده شده است. همچنین مقدار چگالی بی‌بعد $\bar{S}_0$ برابر است با $\bar{S}_0 = \tilde{S}_0\omega_{12}^{sq}/c_0$ که ω_{12}^{sq} فرکانس مود (1,2) برای ورق ساندویچی مربع‌شکل است. همان‌طور که مشخص است نتایج به‌دست آمده از هر دو روش گوسی، غیرگوسی و مونت-کارلو، در شرایط بار کمتر از بار انشعاب، از انطباق خوبی برخوردار هستند که این امر درستی اجرای روش در مطالعه حاضر را تایید می‌کند. عدم انطباق قابل مشاهده برای نتایج حاصل از بار بیش‌تر از بار انشعاب در زمان‌های ابتدایی نیز مربوط به محدودیت در کارایی روش بستن گوسی و غیرگوسی در این ناحیه بوده و در بررسی‌های مرجع [16] نیز مشاهده شده است. لازم به توجه است که مقادیر حاصل از حل غیرگوسی در این ناحیه، به‌ویژه برای مود دوم بهتر از حل گوسی نیست که همان‌طور که گفته شد، در نتایج مرجع [19] نیز گزارش شده است. با توجه به نتایج به‌دست آمده به نظر می رسد که حل تحلیلی به‌کار برده شده تا حد معقولی قادر به تخمین صحیح پاسخ سیستم است. لازم به ذکر است که در حالت کلی و طبق نتایج مطالعات

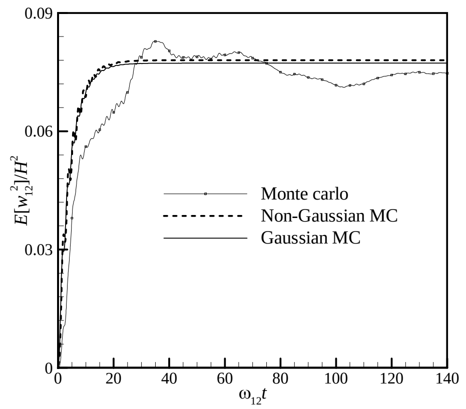


Fig. 2 Comparison of the response mean square (MS) obtained with Non-Gaussian MC, Gaussian MC and the numerical simulation, when the load PSD is lower than the bifurcation load.

شکل 2 مقایسه تابع زمانی میانگین مربعات پاسخ حاصل از روش بستن ممان گوسی و غیرگوسی با نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی برای چگالی بار کمتر از بار انشعاب

[1] Bifurcation load

متعدد، حل غیرگوسی در بیشتر مسائل غیرخطی بهتر از حل گوسی قادر به تخمین بار انشعاب است. به‌علاوه، حل غیرگوسی در بیشتر مسائل چند مودی قادر به تخمین قابل قبول مقادیر ایستای میانگین مربعات پاسخ بوده، هرچند تغییرات ممان با زمان قبل از رسیدن به پاسخ ایستا در بیشتر مسائل بررسی شده از دقت خوبی برخوردار نیستند.

4-2- بررسی تداخل غیرخطی بین مودهای نامتقارن

هدف اصلی در این بخش، تعیین پاسخ دو مودی پایای حاصل از ترکیب مودهای (1,2) و (2,1) در ورق ساندویچی با طول و عرض نزدیک به‌هم، تحت تحریک مستقیم مود (1,2) است. برای دستیابی به نتایج این بخش، همچنین تعداد جملات $Nn = Nm = 5$، برای رسیدن به پاسخ با همگرایی مناسب در حل توابع مجهول معادلات حاکم بر حسب بسط دومودی $\overset{0}{u}_3$، درنظرگرفته شده است. مقادیر اتخاذ شده برای خواص مختلف ورق ساندویچی نیز برابر با مقادیر درنظرگرفته در زیربخش قبلی بوده و در صورت تغییر، مقدار جدید آن در کنار نتایج ارائه شده است.

در ابتدای کار منحنی تغییرات میانگین مربعات جابجایی مود (1,2) و (2,1) ورق ساندویچی مربع شکل، با افزایش $\bar{S}_0$ در 0شکل 4 برای $\gamma = 0.6$

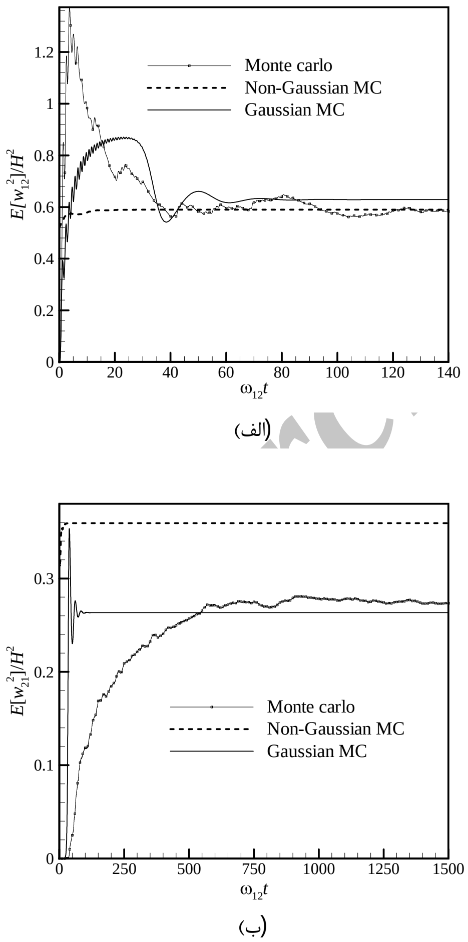


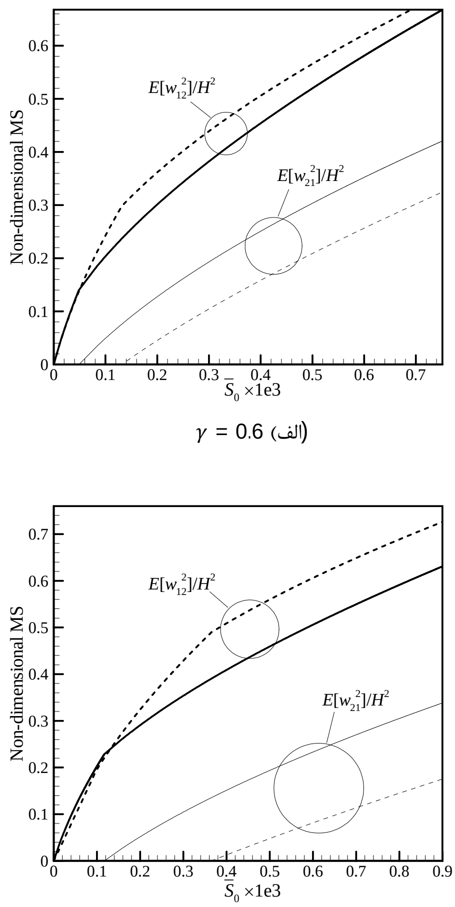
Fig. 3 Comparison of the response RMS obtained with Non-Gaussian MC, Gaussian MC and the numerical simulation, when the load PSD is higher than the bifurcation load

شکل 3 مقایسه تابع زمانی میانگین مربعات پاسخ حاصل از روش بستن ممان گوسی و غیرگوسی با نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی برای چگالی بار بیشتر از بار انشعاب

و $\gamma = 0.4$ رسم شده است. همان‌طور که در این نمودارها می‌توان دید، روند افزایشی پاسخ مربوط به مود (1,2)، با افزایش شدت تحریک، در نقطه‌ای معین به‌طور ناگهانی کاهش یافته و در مقابل، مود (2,1) شروع به رشد می‌کند.

مقایسه بین نتایج حاصل از روش گوسی و غیرگوسی در این نمودارها نیز حاکی از مقادیر کمتر بار مربوط به انشعاب در حل غیرگوسی است. ضمن این‌که مقادیر بیشتری برای $E[W_{12}^2]$ با روش گوسی پیش‌بینی می‌شود، مقدار به‌دست آمده برای $E[W_{21}^2]$، اما در مقایسه با روش غیرگوسی کمتر است. بار مربوط به انشعاب در هسته با میرایی کمتر نیز ($\gamma = 0.6$) دارای مقدار بیشتری نسبت به حالت دوم است که البته با توجه به اثر میرایی در اتلاف انرژی و ممانعت از انتقال آن به مود (2,1)، طبیعی به‌نظر می‌رسد.

در 0شکل‌های 5 و 6 برای دستیابی به دید بهتر در ارتباط با نحوه بروز انشعاب و تحریک ناگهانی مود (2,1)، نتایج حاصل از حل عددی معادلات تصادفی حاکم برای مقادیر مختلف $\bar{S}_0$ به‌دست آمده است. همان‌طور که در شکل 5 مشخص است، به‌ازای بار $\bar{S}_0 = 9.84e-5$ و $\bar{S}_0 = 17.48e-5$، جابجایی بسیار کوچکی در مود (2,1) ظاهر شده و سپس ناپدید می‌شود، مقادیر میانگین مربعات پاسخ در این شرایط کوچک هستند.

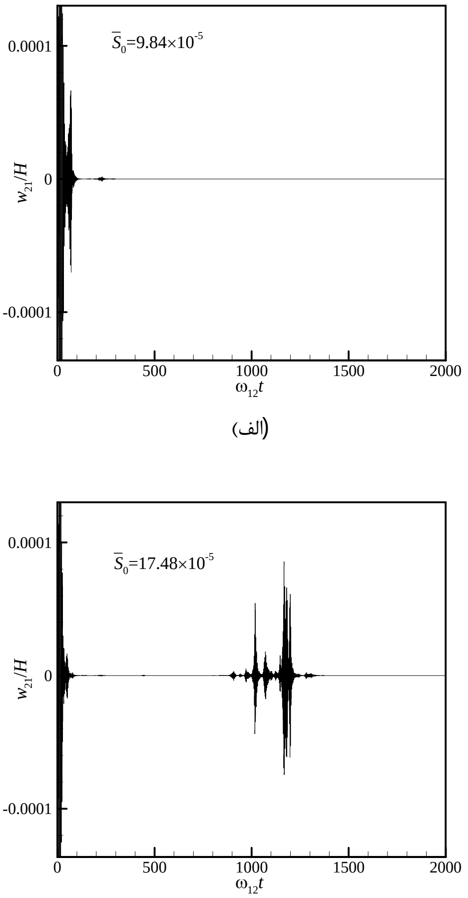


$\gamma = 0.6$ (الف)

$\gamma = 0.4$ (ب)

Fig. 4 Variation of the mean square (MS) response of the modes (1,2) and (2,1) with the excitation PSD; Solid line: Non-Gaussian MC, Dashed line: Gaussian MC.

شکل 4 تغییرات میانگین مربعات مود (1,2) و (2,1) ورق ساندویچی مربع شکل با افزایش چگالی طیفی تحریک ($\bar{S}_0$)؛ خط ممتد: حل غیرگوسی؛ خط‌چین: حل گوسی



(الف)

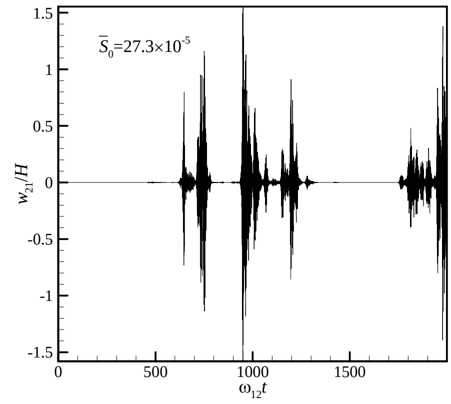
(ب)

Fig. 5 Time history of the mean square response of the mode (2,1), which is indirectly excited by the mode (1,2) (for excitations with lower PSD)

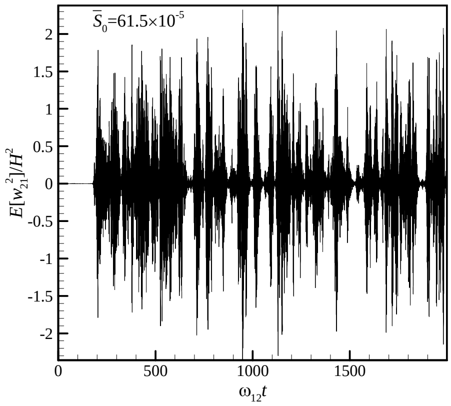
شکل 5 پاسخ زمانی مود (2,1) که به‌طور غیر مستقیم توسط مود (1,2) تحریک شده است (برای تحریک‌های تصادفی با مقادیر چگالی بار کوچک).

با افزایش بیشتر بار در شکل 6-الف، وقوع تحریک در نقاط بیشتری از زمان، و همچنین با مقادیر میانگین مربعات بیشتری ظاهر می‌شود. اما پاسخ همچنان بین مقدار صفر و مقادیر غیرصفر تغییر می‌کند. به این پدیده، آشکار-نهانی تناوبی گفته می‌شود که در واقع، در نتیجه انتقال اتفاقی انرژی از مود اول به مود دوم، رخ می‌دهد. با افزایش بیشتر چگالی بار تحریک همان‌طور که در شکل 6-ب مشخص است، پاسخ تصادفی در مود (2,1) به‌طور کامل توسعه یافته است. این نواحی از پاسخ در مطالعات چنگ و ابراهیم [16] و ایکدا و ابراهیم [20] مورد توجه قرارگرفته‌اند.

برای نمایش اثر تغییرات نسبت عرض به طول (l_2/l_1) در تسریع وقوع انشعاب و تحریک مود (2,1)، تغییرات چگالی طیفی در نقطه وقوع انشعاب ((S_b)) با تغییر l_2/l_1 در شکل 7 رسم شده‌اند. تغییرات فرکانس طبیعی مود (1,2) و همچنین فاصله فرکانس دو مود درگیر (σ_{IR}) نیز در 0شکل 8، نشان داده شده که طبق آن همان‌طور که انتظار می‌رود، σ_{IR} در حالت l_2/l_1 برابر با صفر بوده و با تغییر l_2/l_1 از 0.85 تا 1.15، از مقدار 0.11- تا 0.11، به‌طور خطی تغییر می‌کند. کمترین بار لازم برای وقوع انشعاب نیز آن‌چنان‌که در شکل 7 مشهود است، دارای نقطه کمینه است، که البته این نقطه، نه در حالت $l_2/l_1 = 1$ و بلکه در نزدیکی آن اتفاق می‌افتد. مقادیر بار



(الف)



(ب)

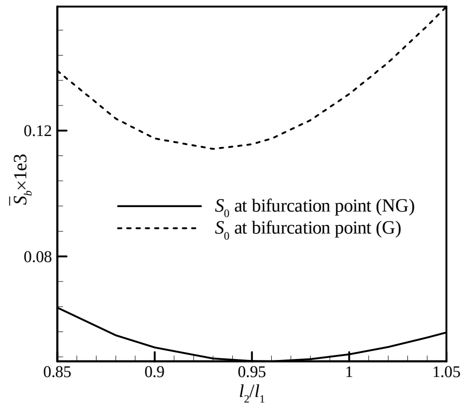
Fig. 6 Time history of the mean square response of the mode (2,1), which is indirectly excited by the mode (1,2) (for excitations with higher PSD)

شکل 6 پاسخ زمانی مود (2،1)، که به‌طور غیر مستقیم توسط مود (1،2) تحریک شده است (برای تحریکهای تصادفی با مقادیر چگالی بار بزرگ).

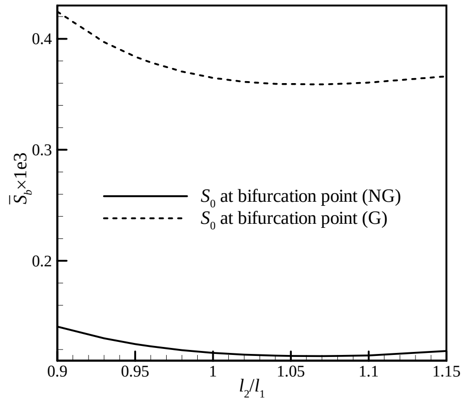
انشعاب به‌دست آمده از حل گوسی نیز طبق این شکل، بیشتر از مقدار پیش‌بینی شده با روش حل غیرگوسی است، ضمن آن‌که نسبت عرض به طول در نقطه کمینه نمودار حاصل از حل گوسی به‌اندازه کوچکی کمتر از مقدار آن در نمودار حاصل از حل غیرگوسی است. این نقطه همچنین، با افزایش میرایی هسته (کاهش γ)، در l_2/l_1 بزرگ‌تری اتفاق می‌افتد. افزایش میرایی همچنین موجب افزایش بار لازم برای تحریک غیرمستقیم مود (2،1) شده که در شکل 4 نیز مشاهده شد.

در شکل 9 تغییرات میانگین مربعات پاسخ در نقطه انشعاب ($E[W_{b12}^2]$) با تغییر نسبت عرض به طول نشان داده شده است که نمایان‌گر افزایش این مقدار با افزایش l_2/l_1 است. این روند، با توجه به کاهش فرکانس طبیعی سازه در شکل 8، قابل توجیه است. مقدار پیش‌بینی شده با حل گوسی در اینجا نیز بیشتر از مقدار حاصل از حل غیرگوسی است.

از مقادیر به‌دست آمده برای $E[W_{b12}^2]$ در شکل 9، برای نرمال‌سازی میانگین مربعات پاسخ مود (1،2) و (2،1) در شکل 10 استفاده شده است. در این شکل چگونگی تغییرات مقدار نرمال‌شده میانگین مربعات پاسخ مودهای درگیر، با نزدیک شدن به ناحیه وقوع تشدید نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است، با دور شدن از مقادیر l_2/l_1 نزدیک به یک،



γ = 0.6 (الف)



γ = 0.4 (ب)

Fig. 7 Variation of the bifurcation load PSD with the length to width ratio; Solid line: Non-Gaussian (NG) MC, Dashed line: Gaussian (G) MC.

شکل 7 تغییرات چگالی بار در نقطه انشعاب بر حسب نسبت عرض به طول ورق ساندویچی، خط ممتد: حل غیرگوسی؛ خط‌چین: حل گوسی.

پاسخ در مود دوم به صفر میل می‌کند. همچنین طبق این شکل، مقادیر میانگین مربعات نرمال شده در هر دو مود در حالت l_2/l_1 = 0.96 به بیشترین مقدار خود می‌رسند که این نقطه منطبق بر نقطه کمینه در منحنی تغییرات چگالی طیفی بار انشعاب با l_2/l_1 است (شکل 7-الف).

5- نتیجه‌گیری

ارتعاشات غیرخطی ورق ساندویچی با لایه میانی ویسکوالاستیک تحت بار اتفاقی با پهنای باند وسیع با استفاده از روش تحلیل بستن ممان غیرگوسی بررسی شده و بروز پاسخ چند مودی به‌علت وجود تشدیدهای داخلی مورد توجه قرار گرفت. مدلسازی ورق با فرض بزرگی نسبی کرنش و دوران عرضی بزرگ صورت گرفت که منجر به غیرخطی شدن روابط ساختاری و همچنین روابط سینماتیکی حاکم بر سازه شد. معادلات حاکم شامل هفت معادله ناشی از اصل همیلتون در کنار دو معادله تراکم‌پذیری بود که بر مبنای تغییرات خطی جابجایی‌های درون‌صفحه‌ای و تغییرات مرتبه دوم جابجایی‌های برون صفحه‌ای در راستای ضخامت به‌دست آمد. حل معادلات با اعمال روش اغتشاشی و روش گالرگین آغاز شد که منجر به دو معادله غیرخطی زمانی با عبارات انتگرالی شد، برای حل معادلات زمانی از روش بستن ممان غیرگوسی

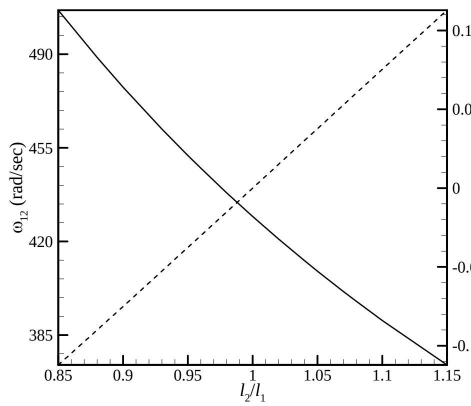


Fig. 8 Variation of the natural frequency of the mode (1,2) (solid line) and also variation of frequency difference between modes (1,2) and (2,1) (dashed line) with the length to width ratio of the plate

شکل 8 تغییرات فرکانس طبیعی مود (1,2) (خط ممتد) و تغییرات فاصله فرکانس مربوط به دو مود (1,2) و (2,1) (خطچین) با نسبت طول به عرض ورق.

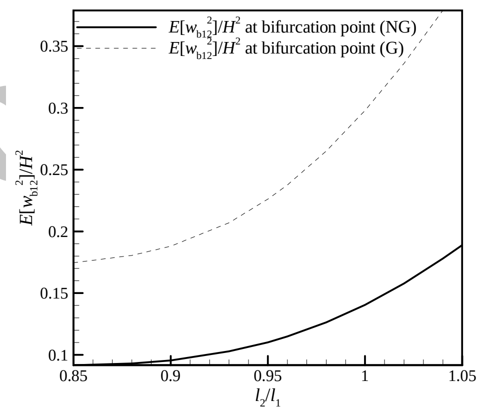


Fig. 9 Variation of the mean square response of the mode (1,2) with the length to width ratio for $\gamma = 0.6$; Solid line: Non-Gaussian MC, Dashed line: Gaussian MC.

شکل 9 تغییرات میانگین مربعات مود (1,2) در نقطه وقوع انشعاب با نسبت عرض به طول برای $\gamma = 0.6$، خط ممتد: حل غیرگوسی؛ خطچین: حل گوسی.

و همچنین شبیه‌سازی عددی مونت‌کارلو استفاده شد. اهم نتایج به‌دست آمده به قرار زیر است:

- در ورق ساندویچی با طول و عرض نزدیک به‌هم، علیرغم تحریک تنها یکی از مودهای نامتقارن سازه، امکان بروز پاسخ مرکب از هر دو مود نامتقارن، به‌علت تداخل غیرخطی مودها وجود خواهد داشت.
- مقدار بار لازم برای انشعاب، همواره در شرایط شکل مربعی کامل اتفاق نیفتاده و با تغییر میرایی، جابجا می‌شود.
- وقوع انشعاب و در نتیجه پاسخ دو مودی تنها برای نسبت طول به عرض بین 0.88 و 1.05 رخ داده و با دور شدن مقدار ابعاد طولی و عرضی، اثر اندرکنش غیرخطی در ایجاد پاسخ چندمودی حذف می‌شود.

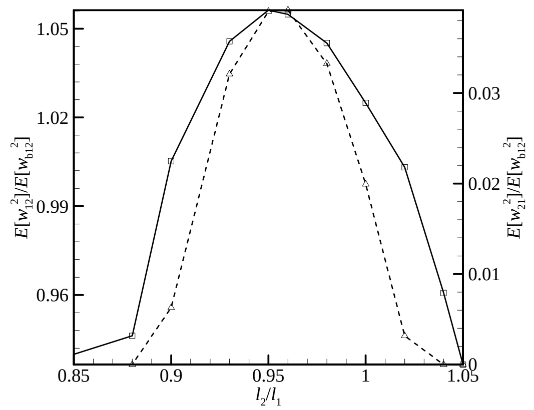


Fig. 10 Variations of the normalized MS response of the modes (1,2) (solid line) and (2,1) (dashed line) with the length to width ratio ($\gamma = 0.6$).

شکل 10 تغییرات مقادیر نرمال شده میانگین مربعات دامنه پاسخ در مود (1,2) (خط ممتد) و (2,1) (خطچین) بر حسب نسبت عرض به طول ($\gamma = 0.6$).

- مقادیر به‌دست آمده از روش بستن ممان گوسی برای بار انشعاب همواره بیشتر از بار پیش‌بینی شده با روش بستن ممان غیرگوسی خواهد بود. علت این امر عدم انطباق تابع چگالی پاسخ با تابع چگالی گوسی است.
- وقوع پاسخ چند مودی با بروز پدیده آشکار-نهانی متناوب همراه خواهد بود که طی آن مود نامتقارنی که به‌طور مستقیم تحریک نشده، در بازه‌های کوچکی از زمان مقادیر غیر صفر یافته و دوباره صفر می‌شود. این رفتار تنها از طریق شبیه‌سازی عددی قابل مشاهده بوده و روش‌های تحلیلی به‌کارگرفته شده قادر به پیش‌بینی آن نیستند.

6- مراجع

[1] S. Irani, S. Sazesh, Random vibration of cantilever tapered beam under stochastic excitation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 3, pp. 138-154, 2013. (in Persian فارسی)

[2] M. Abedi, A. Asnafi, To reduce the instability region in the nonlinear transverse vibration of randomly excited plates using orthotropic P-FG material, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 80, No. 3, pp. 1413-1430, 2015.

[3] A. Asnafi, M. Abedi, A comparison between the dynamic stability of three types of nonlinear orthotropic functionally graded plates under random lateral loads, *Journal of Vibration and Control*, November 25, 2015.

[4] C. V. R. Reddy, N. Ganesan, B. V. A. Rao, Response of clamped sandwich panels with viscoelastic core under random acoustic excitation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 75, No. 4, pp. 481-494, 1981.

[5] M. R. Garrison, R. N. Miles, J. Q. Sun, W. Bao, Random response of a plate partially covered by a constrained layer damper, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 172, No. 2, pp. 231-245, 1994.

[6] R. A. Ibrahim, Recent Results in Random Vibrations of Nonlinear Mechanical Systems, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 117, No. B, pp. 222-233, 1995.

[7] S. L. R. Vaicaitis, E. Jotautiene,, Nonlinear random vibrations of a sandwich beam adaptive to electrorheological materials, *Mechanika*, Vol. 3, pp. 1207-1392, 2008.

[8] H. H. Lee, Non-linear vibration of a multilayer sandwich beam with viscoelastic layers, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 216, No. 4, pp. 601-621, 1998.

[9] S. Mahmoudkhani, H. Haddadpour, Nonlinear vibration of viscoelastic sandwich plates under narrow-band random excitations, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 74, No. 1, pp. 165-188, 2013.

[10] S. Mahmoudkhani, H. Haddadpour, H. M. Navazi, The effects of nonlinearities on the vibration of viscoelastic sandwich plates, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 62, pp. 41-57, 2014.

[11] J. N. Reddy, A small strain and moderate rotation theory of elastic anisotropic plates, *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 54, No. 3, pp. 623-626, 1987.
[12] A. C. Pipkin, Small finite deformations of viscoelastic solids, *Reviews of Modern Physics,* Vol. 36, No. 4, pp. 1034-1041, 1964.
[13] R. O. Stafford, On mathematical forms for the material functions in nonlinear viscoelasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids,* Vol. 17, No. 5, pp. 339-358, 1969.
[14] K. B. M. Nambudiripad, V. V. Neis, Determination of mechanical response of non-linear viscoelastic solids based on frechet expansion, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Vol. 11, No. 2, pp. 135-145, 1976.
[15] S. Mahmoudkhani, H. Haddadpour, H. M. Navazi, Free and forced random vibration analysis of sandwich plates with thick viscoelastic cores, *Journal of Vibration and Control,* Vol. 19, No. 14, pp. 2223-2240, 2012.
[16] W. K. Chang, R. A. Ibrahim, Multiple internal resonance in suspended cables under random in-plane loading, *Nonlinear Dynamics,* Vol. 12, No. 3, pp. 275-303, 1997.
[17] I. Cicek, *Vibration absorbers for flexible structures under random excitation*: *theory and experiments,* PhD Thesis, Texas Tech University, 1999.
[18] J. B. Roberts, P. D. Spanos, *Random Vibration and Statistical Linearization*, pp. 293-305, New York: John Wiley & Sons, 1990.
[20] Y. J. Yoon, R. A. Ibrahim, Parametric random excitation of nonlinear coupled oscillators, *Nonlinear Dynamics,* Vol. 8, No. 3, pp. 385-413, 1995.
[21] T. Ikeda, R. A. Ibrahim, Nonlinear random responses of a structure parametrically coupled with liquid sloshing in a cylindrical tank, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 284, No. 1–2, pp. 75-102, 2005.