مجله مهندسی مکانیک مدرس، آبان 1395، دوره 16، شماره 8، ص‌ص 229-238

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

پیچیدگی مود در یک طناب با تحریک هارمونیک پایه با در نظر گرفتن فنر- دمپر موضعی نامتقارن

صالح جمعه‌زاده خضربیگی[1]، امیر جلالی[2*]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

* شاهرود، صندوق پستی 3619995161، amirjalali@shahroodut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 10 اردیبهشت 1395

پذیرش: 04 تیر 1395

ارائه در سایت: 07 شهریور 1395

کلید واژگان:

دینامیک حالت پایدار

پیچیدگی مود

فاصله فرکانسی

موج درحال حرکت

چکیده

در این مطالعه به بررسی تحلیلی دینامیک حالت پایدار یک رشته طناب خطی، همگن و نامیرا پرداخته شده است که یک سیستم فنر و دمپر خطی موضعی به آن متصل گردیده است. همچنین هر دو انتهای طناب به طور همزمان و یکسان با حرکت نوسانی، تحریک شده است. میرایی موضعی منجر به پیچیدگی مود در طناب شده که این امر باعث ظهور فاصله فرکانسی بین ماکزیمم دامنه‌ی نقاط مختلف طناب و تغییرات فاز گردیده است که نشان دهنده‌ی محدوده‌ی شکل‌گیری پیچیدگی مود در طناب است. در این تحقیق نشان داده شده است که ترکیب‌های مختلفی از سفتی فنر و میرایی موضعی وجود دارد که در آن‌ها پیچیدگی مود به بیشترین حد خود می‌رسد. از همه مهم‌تر این‌که این ترکیب در هر فرکانس تحریک بی‌بعد مشخص، منحصر به فرد می‌باشد. در این ترکیب‌ها میرایی محدوده‌ی مشخصی دارد، اما با بزرگ‌تر شدن فرکانس مقدار سفتی فنر افزایش می‌یابد. در این حالت تمام مودهای نرمال ارتعاشات طناب از بین رفته و در عوض حرکت موج در طناب رخ می‌دهد. نتیجه با اهمیت دیگر این‌که میرایی که منجر به بیشترین فاصله فرکانسی می‌شود، الزاما با میرایی که به ازای آن بیشترین پیچیدگی مود و یا همان حرکت امواج رخ می‌دهد، برابر نیست.

Mode Complexity in a Harmonically Forced String Considering an Asymmetric Local Spring-Damper

Saleh Jomezade Khazarbeygi, Amir Jalali*

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

* P.O.B. 3619995161, Shahrood, Iran, amirjalali@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 29 April 2016
Accepted 24 June 2016
Available Online 28 August 2016

Keywords:
Steady-state dynamic
Mode complexity
Frequency shift
Traveling wave

ABSTRACT

In this study the steady-state dynamic of a linear, homogeneous, un-damped string, coupled with a locally connected spring-dashpot system is analytically investigated. Both ends of the string are assumed to be excited with identical and synchronous harmonic motion. It is shown that the damper introduces mode complexity and leads to frequency shift between the peak amplitudes in different locations of the string. Also, it causes phase variations which indicates mode complexity domain. In this study, it is shown that there are different combinations of spring and damper constants in which the mode complexity attains its maximum level. Surprisingly, the combination is unique in each given excitation frequency ratio. In this situation, the damping constant is bounded in a specified range, but the spring constant is increased as the excitation frequency ratio is increased. In such case, all vibration normal modes of the string are completely destroyed and, in turn, traveling waves are formed. Also, it is shown that the damping constant which leads to the maximum frequency shift is not necessarily equal to the one that introduces the maximum mode complexity.

1- مقدمه

به طور کلی سیستم‌های خطی همراه با سیستم میرایی متصل شده به آن‌ها، می‌توانند دارای مودهای مختلط به جای مودهای نرمال طبیعی باشند. مودهای مختلط می‌توانند به دلایل متفاوتی از قبیل اثرات ژیروسکوپی، اثرات آیرودینامیکی، عبارات غیرخطی و یا نویزهای محیطی و همچنین ماهیت نامتناسب بودن میرایی ایجاد شوند.

در ارتباط با تحلیل ارتعاشات سیستم‌های خطی به همراه میرایی، مطالعات گسترده‌ای با روش‌های مختلف صورت گرفته است. اهمیت ارتعاشات سیستم پیوسته طناب کشیده شده به همراه میرایی خارجی در کاهش ارتعاشات سازه‌های انعطاف پذیری چون پل‌ها به وضوح تایید شده است [1] و در مرجع [2] به کاربردی بودن تحلیل ارتعاشات غیرخطی کابل با سیستم جرم، فنر و دمپر برای استفاده در تحلیل و طراحی تله‌کابین، جرثقیل کابلی و غیره اشاره شده است.

رویکرد سنتی برای حل این مسأله‌ها براساس حل مسأله مقدار ویژه مختلط مربوط به سیستم بنا شده است. اما حل مسأله مقدار ویژه به دفعات مکرر برای مقادیر ثابت میرایی مختلف و موقعیت‌های مختلف آن، از نظر

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

S. Jomezade Khazarbeygi, A. Jalali, Mode Complexity in a Harmonically Forced String Considering an Asymmetric Local Spring-Damper, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 8, pp. 229-238, 2016 (in Persian)

محاسباتی بسیار وقت‌گیر و طاقت‌فرسا است. از طرفی ارائه‌ی حل تحلیلی برای این نوع مسائل بسیار مشکل بوده و نیز روش‌های تقریبی برای آن‌ها معمولا موجود نمی‌باشد. لذا عموما از روش‌های عددی برای حل استفاده می‌کنند. از تئوری ارتعاشات خطی می‌دانیم که سیستم‌های خطی نامیرا دارای مودهای نرمال هستند که در هر مود نرمال، تمام قسمت‌های مختلف سیستم در یک فاز مشابه ارتعاش می‌کنند. در سیستم‌های خطی میرا، در صورتی که ماتریس میرایی را بتوان با استفاده از ماتریس مودال سیستم نامیرا قطری کرد، سیستم میرا باز هم دارای مودهای نرمال خواهد بود که این مدل میرایی، به عنوان میرایی تناسبی یا میرایی کلاسیک شناخته می‌شود. در برخی مطالعات انجام شده از جمله مرجع [3]، شرایط عمومی وجود مودهای نرمال برای چنین سیستم‌هایی ارائه شده است. در غیر این‌صورت در سیستم میرا مودهای مختلط ظهور خواهد کرد. به عنوان نمونه ظهور مودهای مختلط به جای مودهای نرمال در سیستم‌های خطی با میرایی ویسکوز و غیر ویسکوز نامتناسب توسط ادهیکاری نشان داده شده است و بیان شده که به وجود آمدن این مودها تحلیل را بسیار پیچیده می‌کند [4]. از طرفی نشان داده شده است که تقریب زدن مودهای نرمال با استفاده از اندازه‌گیری مودهای مختلط منجر به بروز خطا در مسأله خواهد شد و باید از تکنیک خاصی برای از بین بردن این خطا استفاده نمود [5].

در بررسی ارتعاشات سازه‌ها با در نظر گرفتن میرایی، فرکانس‌ها و شکل مودهای مختلط در ارتعاشات یک سازه ناپیوسته با چندین دمپر ویسکوز توسط کرنک مطالعه شده و یک حل تقریبی با درون‌یابی بین حل دو مسأله مقدار ویژه مشخص، به منظور تسهیل در قراردادن بهینه تعداد دمپرها و مقدار دمپرها در سازه پیشنهاد شده است [6].

در تحلیلی دیگر ارتعاشات آزاد یک کابل کشیده شده به همراه یک دمپر ویسکوز متمرکز، با استفاده از مودهای مختلط توسط کرنک تحلیل شده است و یک حل ساده تکراری از معادله فرکانسی برای همه‌ی فرکانس‌های ویژه مختلط پیشنهاد شده است. نسبت میرایی نیز با روش حل مجانبی و روش حل تقریبی تکرارشونده برای مودهای ابتدایی محاسبه شده است [7]. همچنین در برخی تحقیق‌ها، ارتعاشات آزاد یک طناب کشیده شده با دمپر خارجی متصل به آن بررسی شده و به نقش مهم فاصله فرکانسی ایجاد شده توسط میرایی در توصیف سیستم، پرداخته شده است و بر تاثیرگذاری آن تاکید گردیده است [8]. اخیرا نیز رفتار پیچیدگی مود در شرایط کاملا متقارن یک طناب کشیده توسط بلنچارد و همکاران بررسی شده است. طناب کشیده شده خطی بوده و فنر و دمپر متصل به آن در وسط آن فرض شده است. در این تحقیق وابستگی فرکانس تشدید سیستم به موقعیت قرارگیری دمپر مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شده است که در هر مقدار سفتی فنر، یک مقدار بحرانی برای دمپر وجود دارد که در این مقدار، میزان فاصله فرکانسی سیستم به حداکثر خود می‌رسد و در همین مقدار بیشترین پیچیدگی مود و تبدیل ارتعاشات به حرکت امواج در طناب اتفاق می‌افتد و باعث حذف مودهای نرمال در طناب می‌شود [9]. تلاش برای درک بیشتر اثر میرایی نامتناسب در سازه‌های پیوسته محدود به طناب‌ها نمی‌شود، بلکه اثر میرایی خارجی در تیرها و میله‌ها به طور گسترده تحقیق شده است. به عنوان مثال می‌توان به بررسی اثر میرایی دورانی ویسکوز در یک تیر اویلر-برنولی با تکیه‌گاه ساده [10]، بررسی تیر اویلر-برنولی یک سر گیردار مجهز به دمپرهای انتقالی و یا پیچشی [11]، تحقیق در زمینه تیر اویلر-برنولی یک سر گیردار به همراه یک دمپر ویسکوز در وسط، یک جرم متمرکز در انتها و تحریک نوسانی روی آن [12] و بدون در نظر گرفتن جرم متمرکز انتهای تیر [13] اشاره نمود. ارتعاشات طولی میله‌ها نیز همانند کابل‌ها صورت می‌گیرد. از این رو در مورد ارتعاشات طولی یک میله با شرط مرزی دمپر ویسکوز متصل شده در یک انتهای آن، نشان داده شده است که می‌توان مودهای ارتعاشی مختلط را از حل فرم بسته محاسبه نمود [14].

هدف اصلی این تحقیق بررسی رفتار دینامیکی طناب حاوی فرکانس‌های مختلط ناشی از میرایی ویسکوز می‌باشد. بدین منظور در ابتدا معادلات حرکت طناب با فنر و دمپر موضعی متصل شده به فاصله مشخص از یک سمت طناب (نامتقارن) و تحریک نوسانی یکسان در دو سر طناب در یک فرم مناسب استخراج شده است سپس با استفاده از روش جدایش متغیرها معادلات حرکت حل شده و دامنه ارتعاشات به‌دست آمده است. سپس اثر میرایی روی دامنه ارتعاشات و به وجود آمدن فاصله فرکانسی بین قله‌های بیشینه نقاط مختلف طناب بررسی شده است و مقدار میرایی که باعث بیشترین فاصله فرکانسی بین نقاط مختلف طناب می‌شود محاسبه گردیده است. در ادامه معادلات فاز برای هر دو سمت چپ و راست طناب بدست آمده است و نقاط ثابتی در فاز طناب که مستقل از میزان میرایی هستند به صورت عددی و تحلیلی محاسبه شده‌اند که به درک بهتر پیچیدگی مود در طول طناب کمک می‌کند. در نهایت میرایی که باعث بیشترین پیچیدگی مود در طناب می‌شود محاسبه شده و نشان داده شده است که در این حالت ارتعاشات در طناب به حرکت امواج در طناب تبدیل می‌شود.

2-توصیف و مدل‌سازی

2-1-معادله حرکت

سیستم مورد تحلیل شامل یک طناب الاستیک خطی با طول L می‌باشد که یک فنر و میراگر خطی در فاصله 1/4 از انتهای سمت چپ طناب به آن متصل شده است و سمت دیگر آن‌ها به زمین متصل می‌باشد. هر دو انتهای طناب با حرکت نوسانی به‌صورت یکسان و همزمان تحریک شده است (شکل 1).

در این شکل، m جرم بر واحد طول طناب و T نیروی کشش ثابت طناب می‌باشد. موقعیت افقی هر نقطه از طناب با z و موقعیت عمودی آن‌ها با $y(z,t)$ معرفی می‌شود، که t بیان‌گر زمان می‌باشد. هر دو انتهای طناب با یک جابجایی یکسان و همزمان $\tilde{A}e^{i\Omega t}$ تحریک شده است، که $\tilde{A}$ دامنه‌ی ثابت تحریک اجباری است و Ω فرکانس تحریک می‌باشد. سفتی k_0 و میرایی c_0 برای فنر و دمپر در نظر گرفته شده است، که نیروی خود را فقط در $z=L/4$ اعمال می‌کنند. معادله‌ی حرکت این طناب به شکل زیر به‌دست آورده شده است:

$$my_{,tt}(z,t) - Ty_{,zz}(z,t) = -\left[k_0 y(L/4,t) + c_0 y_{,t}(L/4,t)\right]\delta(z-L/4) \quad (1)$$

شرایط مرزی در این حالت به شکل زیر خواهد بود:

$$y(0,t) = \tilde{A}e^{i\Omega t} \quad (2)$$

$$y(L,t) = \tilde{A}e^{i\Omega t} \quad (3)$$

با توجه به این‌که معادله (1)، یک معادله ناهمگن است برای راحتی تحلیل در سمت چپ طناب از اندیس 1 و در سمت راست طناب از اندیس 2 استفاده شده است. همچنین مبدأ این مختصات‌ها در دو طرف طناب فرض شده است. معادله حرکت طناب به دو معادله همگن و دو شرط مرزی و دو

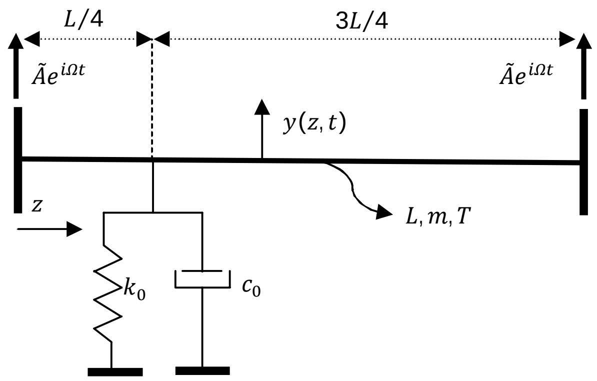


Fig. 1 Schematic representation of the string coupled with a spring-dashpot system located at $z=L/4$

شکل 1 بیان شماتیک طناب متصل شده به سیستم فنر-دمپر در فاصله $z=L/4$

شرط پیوستگی در $z=L/4$ تبدیل می‌شود.

$$Ty_{1,zz}(z_1,t) - my_{1,tt}(z_1,t) = 0\ ,\ \ 0 \le z_1 \le L/4 \tag{4}$$

$$Ty_{2,zz}(z_2,t) - my_{2,tt}(z_2,t) = 0\ ,\ \ 0 \le z_2 \le 3L/4 \tag{5}$$

شرایط مرزی:

$$y_1(0,t) = \tilde{A}e^{i\Omega t} \tag{6}$$

$$y_2(0,t) = \tilde{A}e^{i\Omega t} \tag{7}$$

شرایط پیوستگی:

$$y_1(L/4,t) = y_2(3L/4,t) \tag{8}$$

$$T\left(y_{1,z}(L/4,t) + y_{2,z}(3L/4,t)\right) = -\left[k_0 y_1(L/4,t) + c_0 y_{1,t}(L/4,t)\right] \tag{9}$$

معادله (8)، بیانگر جابجایی عمودی یکسان دو طرف طناب در نقطه‌ی $z=L/4$ و معادله (9) بیانگر تعادل نیرویی در نقطه‌ی $z=L/4$ می‌باشد. برای بی بعد سازی مساله متغیرهای بی‌بعد به صورت رابطه (10) تعریف می‌شود.

$$\tau \overset{\text{def}}{=} ct,\ x \overset{\text{def}}{=} \frac{z}{L},\ u \overset{\text{def}}{=} \frac{y}{L},\ c = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{T}{m}} \tag{10}$$

که c فرکانس مرجع را بیان می‌کند و ثابت‌های فنر و میرایی به ترتیب $k=k_0L/T$ و $\sigma=c_0cL/T$ می‌باشند. همچنین $\omega=\Omega/c$ و $A=\tilde{A}/L$ تعریف می‌شوند. با جایگذاری رابطه (10) در معادلات حرکت (4) و (5)، شکل بی‌بعد معادلات به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$u_{1,xx}(x_1,\tau) - u_{1,\tau\tau}(x_1,\tau) = 0\ ,\ \ 0 \le x_1 \le 1/4 \tag{11}$$

$$u_{2,xx}(x_2,\tau) - u_{2,\tau\tau}(x_2,\tau) = 0\ ,\ \ 0 \le x_2 \le 3/4 \tag{12}$$

شرایط مرزی و پیوستگی بی‌بعد شده نیز به ترتیب به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$u_1(0,\tau) = Ae^{i\omega\tau} \tag{13}$$

$$u_2(0,\tau) = Ae^{i\omega\tau} \tag{14}$$

$$u_1(1/4,\tau) = u_2(3/4,\tau) \tag{15}$$

$$u_{1,x}(1/4,\tau) + u_{2,x}(3/4,\tau) = -\left[ku_1(1/4,\tau) + \sigma u_{1,\tau}(1/4,\tau)\right] \tag{16}$$

2-2- حل تحلیلی معادلات حرکت

در این تحقیق از روش جدایش متغیرها به جای حل وابسته به ارتعاشات آزاد مسأله‌ی مقدار ویژه مختلط [6]، برای بررسی اثر میرایی استفاده شده است. این روش، میرایی که منجر به گذر از ارتعاشات به امواج است را به خوبی مشخص می‌کند. پاسخ معادلات (11) و (12) را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت:

$$u_1(x_1,\tau) = \varphi_1(x_1)e^{i\omega\tau} \tag{17}$$

$$u_2(x_2,\tau) = \varphi_2(x_2)e^{i\omega\tau} \tag{18}$$

که:

$$\varphi_1(x_1) = C_1e^{i\omega x_1} + C_2e^{-i\omega x_1} \tag{19}$$

$$\varphi_2(x_2) = C_3e^{i\omega x_2} + C_4e^{-i\omega x_2} \tag{20}$$

شرایط مرزی (13) و (14) به شکل زیر ساده می‌شوند:

$$\varphi_1(0) = A \tag{21}$$

$$\varphi_2(0) = A \tag{22}$$

شرایط پیوستگی (15) و (16) نیز به شکل زیر تبدیل می‌شوند:

$$\varphi_1(1/4) = \varphi_2(3/4) \tag{23}$$

$$\varphi_{1,x}(1/4) + \varphi_{2,x}(3/4) = -(k + i\omega\sigma)\varphi_1(1/4) \tag{24}$$

با توجه به دو شرط مرزی (21) و (22) و دو شرط پیوستگی (23) و(24)، ثابت‌های C_1، C_2، C_3 و C_4 برحسب k، σ و ω به‌دست آمده‌اند:

$$C_1 = A\frac{e^{-i\omega}\left(k + i\omega(\sigma - 2)\right) - e^{i\omega/4}(k + i\omega\sigma) + 2i\omega}{2(k + i\omega\sigma)(\cos\sigma - \cos(\omega/4)) - 4\omega\sin\omega} \tag{25}$$

$$C_2 = A\frac{e^{i\omega}\left(k + i\omega(\sigma + 2)\right) - e^{-i\omega/4}(k + i\omega\sigma) - 2i\omega}{2(k + i\omega\sigma)(\cos\sigma - \cos(\omega/4)) - 4\omega\sin\omega} \tag{26}$$

$$C_3 = A\frac{e^{-i\omega}\left(k + i\omega(\sigma - 2)\right) - e^{-i\omega/4}(k + i\omega\sigma) + 2i\omega}{2(k + i\omega\sigma)(\cos\sigma - \cos(\,\omega/4)) - 4\omega\sin\omega} \tag{27}$$

$$C_4 = A\frac{e^{i\omega}\left(k + i\omega(\sigma + 2)\right) - e^{i\omega/4}(k + i\omega\sigma) - 2i\omega}{2(k + i\omega\sigma)(\cos\sigma - \cos(\omega/4)) - 4\omega\sin\omega} \tag{28}$$

3- فاصله فرکانسی

همان‌طور که مشاهده می‌شود پاسخ به شکل ترکیب خطی از توابع نمایی مختلط با چهار ثابت مختلط ظاهر می‌شود. پدیده پیچیدگی به دلیل حضور ثابت‌ها اتفاق می‌افتد که قطعا به‌دلیل وجود میرایی خارجی در سیستم است. بررسی‌ها ابتدا روی دامنه پاسخ فرکانسی سیستم صورت گرفته است. بنابراین:

$$|u_1(x_1,\tau)| = |\varphi(x_1)| = A\sqrt{(\epsilon_1\sin(\omega x_1))^2 + (\cos(\omega x_1) + \rho_1\sin(\omega x_1))^2} \tag{29}$$

$$|u_2(x_2,\tau)| = |\varphi(x_2)| \\ = A\sqrt{(\epsilon_2 \sin(\omega x_2))^2 + (\cos(\omega x_2) + \rho_2 \sin(\omega x_2))^2} \quad (30)$$

به‌طوری که:

$$A\epsilon_1 = \mathrm{Re}(C_1) - \mathrm{Re}(C_2) \quad (31)$$

$$A\rho_1 = -\mathrm{Im}(C_1) + \mathrm{Im}(C_2) \quad (32)$$

$$A\epsilon_2 = \mathrm{Re}(C_3) - \mathrm{Re}(C_4) \quad (33)$$

$$A\rho_2 = -\mathrm{Im}(C_3) + \mathrm{Im}(C_4) \quad (34)$$

که همگی تابعی از ω، σ و k هستند.

همان‌طور که در معادلات (29) و (30) قابل مشاهده است اگر در سیستم دمپر وجود نداشته باشد (σ=0) دو معادله به یک معادله تبدیل شده و در یک فرکانس تشدید واگرا می‌شوند که فرکانس تشدید در معادله (35) صدق می‌کند:

$$k = -\frac{2\omega \sin(\omega)}{1-\cos(\omega)} \quad (35)$$

در این حالت بیشترین دامنه فرکانسی، وابسته به موقعیت x روی طناب نیست، به عبارت دیگر در هر فرکانس تشدید تمام نقاط طناب بیشترین دامنه خود را در همان فرکانس تجربه می‌کنند. در ادامه نشان داده خواهد شد که با اضافه شدن میرایی به سیستم، این‌گونه نخواهد بود.

3-1-حالت‌های ممکن

دو حالت میرایی خیلی کوچک و میرایی خیلی بزرگ برای نشان دادن اثر میرایی روی دامنه پاسخ فرکانسی در نظر گرفته شده است.

در ابتدا فرض می‌شود سفتی فنر در یک مقدار کوچک k=0.01 ثابت باشد، بنابراین از اثر آن روی دینامیک سیستم صرف نظر شده است. شکل مودهای بی‌بعد شده‌ی $|\varphi(x)/A|$ در موقعیت‌های مختلف روی طناب برحسب فرکانس بی‌بعد شده‌ی ω/ω_0، برای مقادیر میرایی کم و زیاد به ترتیب در "شکل‌های 2 و 3" رسم شده‌اند، که در این شکل‌ها ω_0 اولین فرکانس طبیعی سیستم می‌باشد.

همان‌طور که در "شکل 2" مشاهده می‌شود در حالتی که میرایی کم است، شکل مودها در نزدیکی فرکانس تحریک بی‌بعد ω/ω_0 =1 هم محور شده‌اند و سیستم به یک طناب ساده که از دو طرف تحریک شده است، کاهش پیدا کرده است. این نتیجه ارتباطی به مکان قرارگیری فنر و دمپر ندارد و درست همانند زمانی است که فنر و دمپر در وسط طناب قرار بگیرند.

در شکل ناحیه‌های سفید رنگ بیان‌گر دامنه تشدید سیستم و ناحیه‌های سیاه رنگ نشان دهنده‌ی دامنه‌ی ناچیز در طول طناب می‌باشند.

از طرف دیگر زمانی که میرایی مقدار بزرگی دارد (شکل 3) یا به عبارتی به بینهایت میل می‌کند، سیستم در دو فرکانس تحریک بی‌بعد اولیه و ثانویه به یک طناب با طول 3/4 طول اولیه خود کاهش پیدا کرده است.

از آن‌جا که طول طناب به دو قسمت نامساوی تقسیم شده است، پاسخ فرکانسی در ω/ω_0 =4/3 اتفاق افتاده و همچنین افزایش دامنه فقط در سمتی از طناب که طول بیشتری دارد مشاهده می‌شود. البته می‌توان حالتی را نیز متصور شد که میرایی ناچیز باشد و میزان سفت فنر از مقدار کوچک تا مقدار خیلی بزرگ افزایش یابد. در این حالت همان نتایج یحالت قبل (سفتی ناچیز) رخ می‌دهد اما دامنه پاسخ فرکانسی بیشتر خواهد بود.

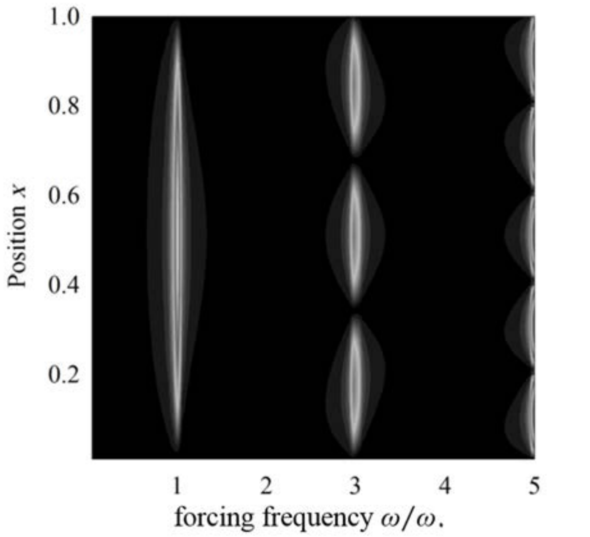


Fig. 2 Evolution of $|\varphi(x)/\mathrm{A}|$ in terms of position x and forcing frequency ratio ω/ω_0 for k=0.01 and σ=0.05

شکل 2 تکامل $|\varphi(x)/A|$ برحسب موقعیت x و فرکانس تحریک بی‌بعد ω/ω_0 به ازای k=0.01 و σ=0.05

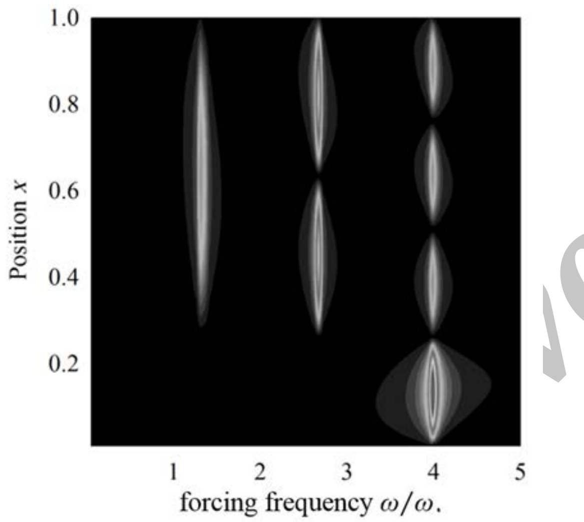


Fig. 3 Evolution of $|\varphi(x)/\mathrm{A}|$ in terms of position x and forcing frequency ratio ω/ω_0 for k=0.01 and σ=0.05

شکل 3 تکامل $|\varphi(x)/A|$ برحسب موقعیت x و فرکانس تحریک بی‌بعد ω/ω_0 به ازای k=0.01 و σ=100

3-2-اثر سفتی فنر

برای درک بهتر اثر سفتی در دامنه فرکانسی و فاصله فرکانسی، میرایی در یک مقدار خیلی کوچک ثابت شده و مقدار سفتی از مقدار خیلی کم تا بزرگ متغیر فرض شده است. زمانی که مقدار سفتی از مقادیر کوچک به بزرگ در حال افزایش است، بیشترین دامنه فرکانسی نقاط مختلف طناب به صورت همزمان جابه‌جا می‌شوند و هیچ‌گونه فاصله فرکانسی بین نقاط مختلف طناب مشاهده نمی‌شود، همان‌طور که در بخش قبل نیز به‌صورت تحلیلی در معادله (35) اثبات شد، بیشترین دامنه در فرکانس‌های تحریک بی‌بعد مختلف تابع x نخواهد بود، به عبارت دیگر جابجایی بیشترین دامنه برحسب فرکانس، یکنواخت است.

3-3-اثر میرایی

برای مشخص شدن بهتر اثر میرایی روی دامنه پاسخ فرکانسی و فاصله

فرکانسی، سفتی در یک مقدار دلخواه ناچیز ثابت شده است و میرایی از مقادیر بسیار کم تا مقادیر بسیار بزرگ تغییر می‌کند. افزایش میرایی دو اثر قابل ملاحظه روی پاسخ فرکانسی به وجود می‌آورد. اولین تأثیر آن بر روی دامنه پاسخ فرکانسی می‌باشد، که با افزایش میرایی دامنه‌ی پاسخ فرکانسی کاهش می‌یابد، به طوری که نقاط سمت چپ فنر و دمپر با افزایش میرایی روند کاهشی خود را تا کمینه دامنه فرکانسی حفظ می‌کنند و همان‌طور که قبلا نیز اشاره شد در میرایی‌های خیلی بزرگ دامنه پاسخ فرکانسی سمت چپ در اولین فرکانس تشدید از بین می‌رود. افزایش میرایی باعث کاهش دامنه فرکانسی نقاط سمت راست شده و در σ=2 کمینه خود را تجربه می‌کنند و سپس با افزایش میرایی مجدد افزایش می‌یابند تا در فرکانس تشدید سیستم هم محور می‌شوند. به عنوان دومین اثر قابل ملاحظه (شکل 4) مشاهده می‌شود که در زمان افزایش میرایی، یک فاصله فرکانسی بین قله‌های مختلف سمت راست طناب ظاهر می‌شود. به این معنی که ماکزیمم دامنه نوسان در موقعیت های مختلف از طناب به ازای فرکانس تحریک بی-بعد مختلف اتفاق می افتد. "شکل 4" نشان می‌دهد که دامنه ماکزیمم در فرکانس تحریک بی‌بعد یکسان، به ازای مقادیر مختلف x اتفاق می‌افتد. شکل 5 فاصله فرکانسی برحسب میرایی‌های خیلی کوچک تا خیلی بزرگ را نشان می‌دهد. این شکل نشان می‌دهد که یک مقدار خاص برای میرایی وجود دارد که به ازای آن فاصله فرکانسی بیشترین مقدار خود را دارد.

4-تغییرات فاز

رابطه مربوط به توابع فاز برای سمت چپ و راست طناب به شکل زیر به‌دست آمده است:

$$\arg(\varphi_1) = \arctan\left(\frac{\epsilon_1 \tan(\omega x_1)}{1+\rho_1 \tan(\omega x_1)}\right) \quad (36)$$

$$\arg(\varphi_2) = \arctan\left(\frac{\epsilon_2 \tan(\omega x_2)}{1+\rho_2 \tan(\omega x_2)}\right) \quad (37)$$

که در روابط (36) و (37)، $\arg(\varphi_1)$ بیان‌گر رابطه فاز در سمت چپ و $\arg(\varphi_2)$ بیان‌گر رابطه فاز در سمت راست طناب می‌باشد، همچنین پارامترهای ϵ_1، ρ_1، ϵ_2 و ρ_2 همان پارامترهای تعریف شده در قسمت قبل هستند.

در ادامه نشان داده خواهد شد که در بررسی تحلیلی روابط فوق، نقاط ثابتی به‌دست می‌آیند که می‌توانند به درک بهتر انتشار پیچیدگی مود در طناب با تغییر سفتی و میرایی متصل شده به آن، کمک کنند.

برای نشان دادن این نقاط ثابت مقادیر ω/ω_0=4/3، k=3.2 و k=10.7 را در نظر می‌گیریم، به ازای هر مقدار k ذکر شده، σ را در یک بازه وسیع تغییر داده و تابع فاز را رسم می‌کنیم. "شکل‌های 6 و 7" بیانگر تغییرات فاز بر حسب موقعیت طناب می باشد، برای هردو مقدار k، سمت چپ مانند یک طناب ساده رفتار کرده و میرایی در آن اثری نداشته است، لذا می‌توان نتیجه گرفت که میرایی‌های خیلی بزرگ در سمت چپ تأثیرگذار خواهند بود. اما در سمت راست طناب اثر میرایی به وضوح مشخص است، همچنین:

- به ازای مقدار بی‌بعد k=3.2 در تابع فاز سمت راست طناب سه نقطه ثابت ایجاد می‌شود که به ازای میرایی‌های خیلی کوچک تا خیلی بزرگ مکان آن‌ها تغییر نمی‌کند، یعنی نقاط (0.25,-π)، (0.91,-π/2) و (1,0). همچنین در سمت چپ طناب، تابع فاز به ازای مقادیر مختلف میرایی تقریبا شکل ثابتی دارد. یعنی سه

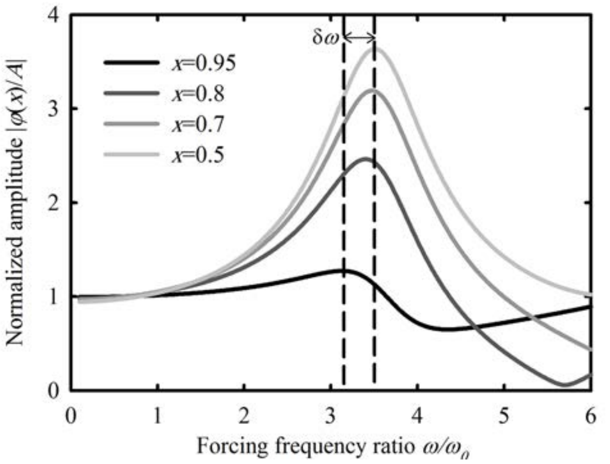


Fig. 4 The frequency shift for k=0.5 and σ=1.4

شکل 4 فاصله فرکانسی برای k=0.5 و σ=1.4

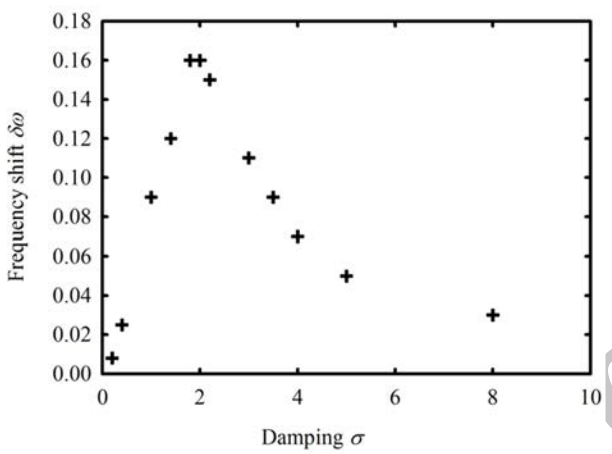


Fig. 5 Evolution of the frequency shift |δω| versus damping σ for k=0.01

شکل 5 تکامل فاصله فرکانسی |δω| بر حسب میرایی σ به ازای k=0.01

- نقطه (0,0) و (0.25,-π) و نقطه‌ی x=0.125 که از 0 به π− گذر ناگهانی داشته است. در بخش‌های بعد نشان داده خواهد شد که این نقطه در نمودار دامنه پاسخ فرکانسی در طول زمان، بیان‌گر یک گره است.
- به ازای مقدار بی‌بعد k=10.7 تابع فاز دقیقا رفتاری مشابه رفتار حالت قبل دارد، به طوری که نقاط (0,0)، (1,0) و (0.25,-π) و نیز نقطه‌ی x=0.125 همچنان ثابت خواهند ماند. اما نقطه‌ی (0.91,-π/2) به نقطه‌ی (0.95,-π/2) منتقل شده است.

در "شکل 8" نمودار تابع فاز طناب برای مقادیر ω/ω_0=4.421 و k=1.4، به ازای گستره‌ی وسیعی از میرایی خیلی کوچک تا میرایی خیلی بزرگ رسم شده است. همانطور که مشخص است نقطه ثابت x=0.25 که محل قرارگیری فنر و دمپر است از بین رفته است.

بررسی‌های فوق نتیجه می‌دهد که در نمودار فاز دو نوع نقطه‌ی ثابت وجود دارد. اول نقاطی که وابسته به مقدار k و z هستند (شکل 6 و 7). دوم نقاطی که فقط وابسته به فرکانس تحریک بی‌بعد هستند، مانند نقاط x=0.125 و (0.25,-π).

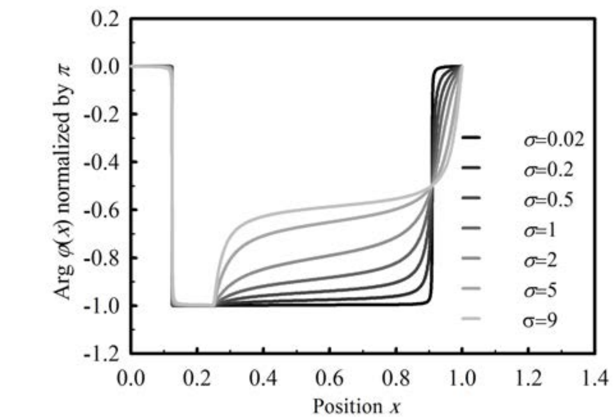


Fig. 6 Invariant points for the ω/ω_0 =4/3 and k=3.2

شکل 6 نقاط ثابت برای ω/ω_0 =4/3 و k=3.2

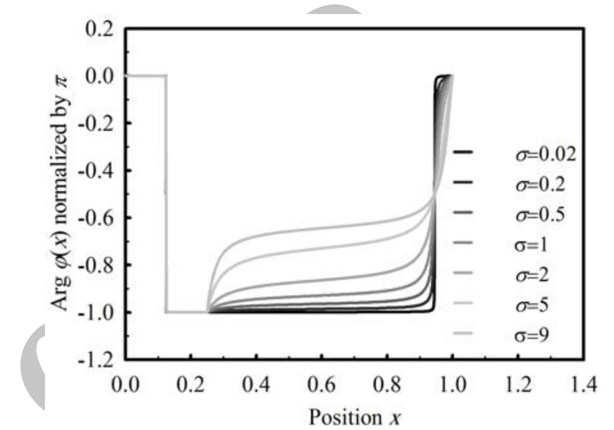


Fig. 7 Invariant points for the ω/ω_0 =4/3 and k=10.7

شکل 7 نقاط ثابت برای ω/ω_0 =4/3 و k=10.7

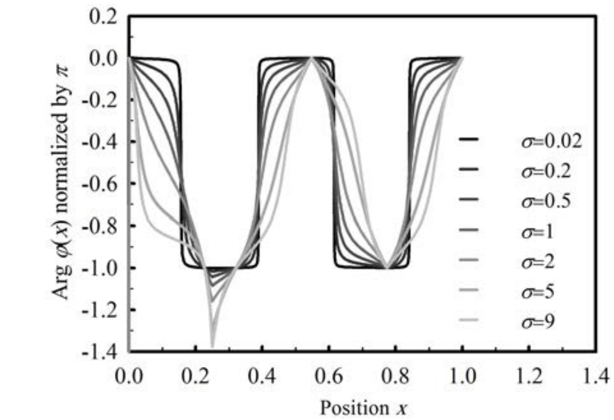


Fig. 8 Invariant points for the ω/ω_0 =4.421 and k=1.4

شکل 8 نقاط ثابت برای ω/ω_0 =4.421 و k=1.4

برای به‌دست آوردن تحلیلی نقاط ثابت باید دو رابطه زیر برقرار باشند:

$$\frac{\partial \arg(\varphi)}{\partial k} = 0 \qquad (38)$$

$$\frac{\partial \arg(\varphi)}{\partial \sigma} = 0 \qquad (39)$$

که به دو معادله مشابه ساده خواهند شد:

$$\tan(\omega x)\left[(1+\rho\tan(\omega x))\frac{\partial \epsilon}{\partial k} - \epsilon\tan(\omega x)\frac{\partial \rho}{\partial k}\right] = 0 \qquad (40)$$

$$\tan(\omega x)\left[(1+\rho\tan(\omega x))\frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma} - \epsilon\tan(\omega x)\frac{\partial \rho}{\partial \sigma}\right] = 0 \qquad (41)$$

از حل قسمت اول معادله‌های (40) و (41) داریم:

$$\tan(\omega x) = 0 \leftrightarrow x \in \left(0, \frac{\omega_0}{\omega}, 2\frac{\omega_0}{\omega}, \dots\right) \qquad (42)$$

در نقاط فوق ω فرکانس نرمالایز شده ω/ω_0 می‌باشد و x اجتماع نقاط بدست آمده برای دو طرف طناب است. این نقاط مستقل از k و σ هستند و فقط به فرکانس تحریک بی‌بعد وابسته هستند.

از حل قسمت دوم معادلات (40) و (41) برای سمت چپ طناب معادله‌ای برای x برحسب ω، k و σ داریم که اگر در این معادله ω/ω_0 = 4/3 قرار دهیم، نقطه ثابت x=0.125 را به ما می‌دهد و این نکته را یادآور می‌شود که این نقطه فقط به فرکانس تحریک بی‌بعد وابسته است. همچنین برای سمت راست طناب نیز از حل قسمت دوم معادلات (40) و (41) دو معادله خواهیم‌داشت که معادله اول فقط برحسب ω و k است و معادله دوم برحسب σ نیز می‌باشد. در معادله اول با قرار دادن ω/ω_0 =4/3 مقدار x=1 را می‌دهد که جزء نقاط ثابت بود و معادله دوم با قرار دادن ω/ω_0 =4/3 عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$x = 1 - \frac{3}{4\pi}\arctan\left(\frac{4\pi}{4\sqrt{3}\pi + 3k}\right) \qquad (43)$$

این معادله در حقیقت نقاط ثابتی که وابسته به k هستند را مشخص می‌کند. به‌گونه‌ای که اگر k=3.2 باشد، نقطه‌ی ثابت x=0.91 در "شکل 6" و اگر k=10.7 باشد نقطه‌ی x=0.95 در "شکل 7" ایجاد می‌شود.

همچنین این معادله موقعیت محدوده‌ی پیچیدگی را که در بخش بعد توضیح داده می‌شود، نشان می‌دهد.

5- محدوده‌ی پیچیدگی مود و انتشار آن

5-1- محدوده‌ی پیچیدگی مود

نتیجه جالب توجه دیگر در فاز، اثر پیچیدگی مود است. اگر میرایی در مکان x=0.25 وجود نداشته باشد، پیچیدگی مود ظاهر نخواهد شد. بدیهی است که فاز در طول طناب ثابت است (برای مثال 0 یا π−). "شکل 9" تغییرات فاز به ازای افزایش میرایی را نشان می‌دهد. در زمانی که میرایی وجود ندارد در نمودار فاز گسستگی‌هایی در نقاط x=0.125 و در اطراف x=0.9 مشاهده می‌شود (شکل 1-9). این نقاط که نشان‌گر تغییر موضعی از 0 به π− هستند، در حقیقت بیان‌گر گره در شکل مود می‌باشند (یعنی $u(x,t)$=0). با ثابت نگه‌داشتن میزان سفتی و اضافه کردن مقدار بسیار کمی میرایی به سیستم، نمودار فاز از حالت گسسته در نزدیکی x=0.9 خارج شده و پیوسته می‌شود (شکل 2-9). این نقطه اکنون به یک نقطه عطف تبدیل شده است. در این حالت یک محدوده ایجاد شده است که در داخل این محدوده (محدوده‌ی نزدیک x=0.9) فاز در حال تغییرات شدید است و در خارج این محدوده فاز همچنان ثابت باقی مانده است (0 یا π−). در حقیقت نقاط خارج این محدوده در طول زمان ثابت هستند و نقاط داخل این محدوده به طور ناهمزمان نوسان می‌کنند. در ادامه نشان داده می‌شود که این محدوده مربوط به شروع پیچیدگی مود خواهد بود. برای مقادیر کوچک میرایی این محدوده بسیار کوچک است و اثر آن روی دامنه پاسخ فرکانسی به سختی قابل مشاهده است (شکل 2-10). با افزایش بیشتر میرایی، نه تنها محدوده‌ی ذکر شده در طول طناب گسترش می‌یابد، بلکه دامنه جابجایی‌ها در این محدوده افزایش می‌یابد

(شکل 3-9 و 3-10).

بنابراین محدوده‌ی پیچیدگی مود با افزایش میرایی، در طول طناب گسترش می‌یابد. این محدوده می‌تواند آن‌قدر گسترش یابد که تمام طول طناب را در بر بگیرد. برای مثال از x=0.25 تا x=1 ، در این صورت نمودار فاز نیز به یک خط تبدیل خواهد شد. بنابراین می‌توانیم حدس بزنیم که به ازای هر مقدار k یک مقدار میرایی وجود دارد که در گذر از مقدار کم به زیاد σ، یک بیشینه محدوده پیچیدگی مود را خواهیم داشت. در این صورت بیشترین پیچیدگی مود را در طناب مشاهده خواهیم کرد و ترکیب مودهای مجاور را شاهد خواهیم بود. در قسمت بعد نشان داده شده است ترکیب‌های ممکن و مختلف از k و σ وجود خواهد داشت که فاز خطی خواهد بود و این امر با حرکت امواج در طول طناب و حذف مودهای نرمال ارتعاشات، مرتبط خواهد بود.

لازم به توضیح است که برای حالتی که فنر و دمپر در وسط طناب متصل شده باشد یک ترکیب منحصر به فرد بدست می آید که در آن بیشترین فاصله فرکانسی و نیز بیشترین پیچیدگی مود را در دامنه پاسخ فرکانسی خواهیم داشت [9]. در ادامه نشان داده خواهد شد که برای مسأله مورد بحث در این مطالعه نه تنها ترکیب منحصر به فرد وجود ندارد بلکه الزاما ترکیبی که بیشترین فاصله فرکانسی را می‌دهد منجر به بیشترین پیچیدگی مود نمی‌شود. لازم به ذکر است که در تحقیق حاضر به ازای جایگزینی محل قرار گیری فنر و دمپر از $L/2$ به $L/4$، تمامی روابط و نتایج مرجع [9] قابل استخراج است.

2-5- حرکت امواج

با توجه به نتایج بخش قبل، تنها در صورتی بیشترین پیچیدگی مود را خواهیم داشت که یک خط کاملا راست نقاط ثابت را در نمودار فاز- موقعیت به یکدیگر وصل کند. برای دست یافتن به این نتیجه بسط تیلور تابع فاز برحسب x در معادلات (36) و (37) نوشته شده و ضرایب غیرخطی مساوی صفر قرار داده شده است. بسط تیلور تابع فاز- موقعیت برای هر دو طرف طناب به صورت زیر خواهد بود:

$$\arg(\varphi) = \epsilon\omega x - \epsilon\rho\omega^2 x^2 + \left(\frac{1}{3}\epsilon\omega^3 + \epsilon\rho^2\omega^3 - \frac{1}{3}\epsilon^3\omega^3\right)x^3 \quad (44)$$

بنابراین برای صفر شدن عوامل غیرخطی باید:

$$\epsilon = \pm 1 \quad (45)$$

$$\rho = 0 \quad (46)$$

در صورت برقراری روابط فوق فاز کاملا خطی شده و بیشترین پیچیدگی مود اتفاق می‌افتد. در این مطالعه سمت راست طناب در نظر گرفته شده است.

در سمت راست طناب به ازای مقدار مثبت ϵ، میرایی همواره منفی خواهد بود. بنابراین:

$$\begin{cases}\epsilon_2 = -1\\ \rho_2 = 0\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}k = -2\omega\sin(\omega/2)\\ \sigma = 2\cos(\omega/2) + 2\end{cases} \leftrightarrow \arg(\varphi_2) = -\omega x \quad (47)$$

بنابراین مقدار k و σ که منجر به بیشترین پیچیدگی در سمت راست طناب می‌شود، منحصر به فرد نیست. یعنی به ازای هر فرکانس تحریک بی-بعد دلخواه یک مقدار متفاوت برای k و σ وجود خواهد داشت که منجر به بیشترین پیچیدگی در سمت راست طناب می‌شود. این نتیجه به عنوان مهم‌ترین نتیجه در مسأله مورد بحث می‌باشد، چرا که همان‌طور که قبلا گفته شد این دو مقدار وابسته به فرکانس تحریک بی‌بعد، الزاما برابر با ترکیبی که منجر به بیشترین فاصله فرکانسی می‌شود، نیستند.

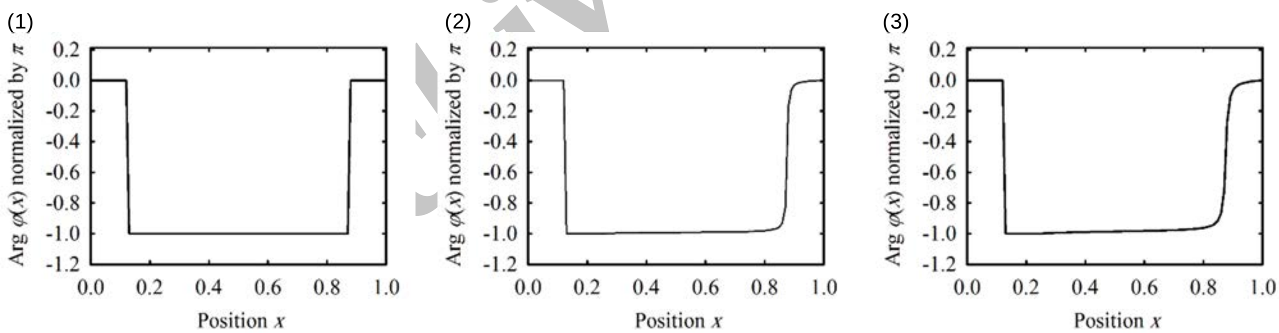


Fig. 9 Evolution of the phase of steady-state vibration throughout the string for first mode with stiffness set to k=0.01 and (1) σ=0 (2) σ=0.05 (3) σ=0.1

شکل 9 تکامل فاز ارتعاشات حالت پایدار در طناب در مود اول با سفتی فنر ثابت k=0.01 و میرایی (1) σ=0 و (2) σ=0.05 و (3) σ=0.1

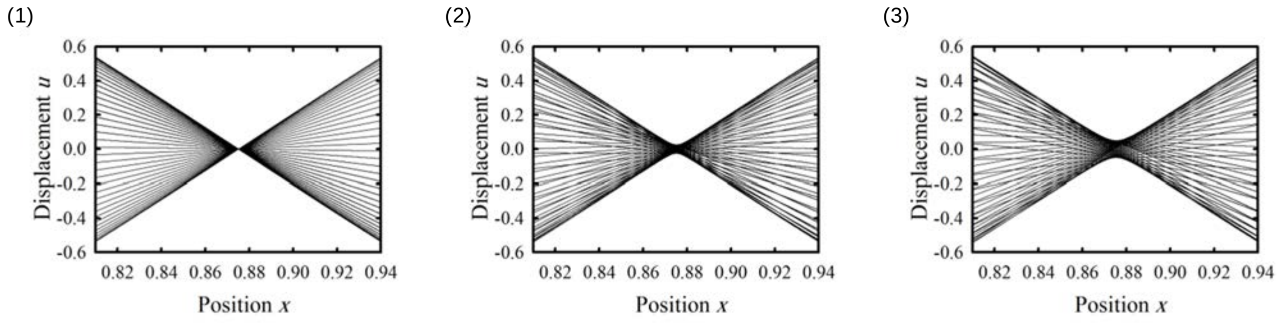


Fig.10 Steady-state vibration of the string at fifty time ($\Delta\tau$=0.04) for first mode, stiffness set to k=0.01, damping set to (1) σ=0, (2) σ=0.05, (3) σ=0.1

شکل 10 ارتعاشات حالت پایدار طناب در 50 زمان ($\Delta\tau$=0.04) متفاوت برای فرکانس مود اول، سفتی k=0.01 و میرایی (1) σ=0 و (2) σ =0.05 (3) σ=0.1

در روابط k و σ مقادیری قابل قبول هستند که مقدار مثبت داشته باشند. در "شکل 11" مقادیر k و σ برحسب فرکانس تحریک بی‌بعد ω/ω_0 رسم شده است. همچنین می‌دانیم که به ازای k=0 و σ =0 (مانند آنچه در ω/ω_0 =2 اتفاق می‌افتد) سیستم به یک طناب ساده بدون فنر و میرایی تبدیل می‌شود، در این حالت فاز به صورت خط‌های افقی در 0 و π- است و در این نقطه پیچیدگی مود اتفاق نمی‌افتد. همچنین همان‌طور که در "شکل 11" مشاهده می‌شود، به ازای افزایش فرکانس تحریک بی‌بعد، k رفتاری واگرا و σ رفتاری نوسانی با دوره تناوب 4π دارد. می‌توان نشان داد که به ازای تمام مقادیر قابل قبول k و σ پدیده پیچیدگی مود را خواهیم داشت. در این وضعیت رفتار پاسخ سیستم ارتعاشی نبوده و به موج تبدیل می‌شود. به عنوان مثال پاسخ حالت پایدار سیستم به ازای مقادیر ω/ω_0 =2.5 ، k=2.5$\sqrt{2}\pi$ و σ=2-$\sqrt{2}$ به صورت زیر به‌دست آمده است.

$$u(x,\tau) = Ae^{-i(2.5)(1-x)}e^{i(2.5)\tau} \quad , \quad 1/4 \leq x \leq 3/4 \tag{48}$$

این معادله، معادله‌ی موج درحال حرکت است که فقط برای محدوده‌ای از مقادیر ω که در "شکل 11" مشخص است، صادق است.

با توجه به نتایج حاصل شده، شرایط زیر معادل یکدیگر هستند:

- بیشترین پیچیدگی مود
- تبدیل نمودار فاز به خط کاملا راست
- ظهور موج درحال حرکت به ازای محدوده فرکانسی مشخص

در "شکل 12" حرکت موج تشکیل شده در سمت راست طناب به سمت چپ طناب نشان داده شده است، در مکان x=0.25 امواج در حال انتشار با نوسانات سمت چپ طناب برخورد می‌کند و در سمت راست طناب از بین می‌روند.

برای نشان‌دادن اثر چشمگیر نامتقارن بودن محل قرارگیری فنر- دمپر روی ایجاد ماکزیمم پیچیدگی مود در طناب، مقادیر k و σ در محل‌های مختلف قرارگیری فنر- دمپر، محاسبه شده است. جدول 1 مقادیر k و σ را برای آنکه تابع فاز در سمت راست فنر-دمپر به صورت خطی درآید و در نتیجه ماکزیمم پیچیدگی مود و ایجاد امواج در حال حرکت در طناب اتفاق بیافتد را به ازای قرار گرفتن فنر-دمپر از $L/2$ تا L را نشان می‌دهد. به ازای قرارگیری فنر-دمپر در مکان $L/2$، همان مقادیر مرجع [9] به‌دست آمد که نشان دهنده بی‌اثر بودن فنریت روی پیچیدگی مود و عدد 2 برای میرایی بیان‌گر خاص‌ترین حالت ممکن است. نتیجه حائز توجه این است که به ازای سایر حالات نامتقارن، میرایی و فنریت هردو اثرگذار و تابع فرکانس تحریک بی‌بعد بوده و به ازای قرارگیری در شرط مرزی، مقادیری برای k و σ وجود ندارد.

در مطالعه حاضر تمامی بررسی‌ها برای نمونه روی حالت نامتقارن سطر سوم از جدول 1 صورت گرفته است.

6-نتیجه گیری

در مطالعه حاضر دینامیک حالت پایدار یک طناب به همراه سیستم فنر و دمپر متصل شده به فاصله یک چهارم از انتهای سمت چپ آن و تحریک نوسانی و همزمان در دو انتهای طناب بررسی شده است. در این تحقیق نشان داده شده است که میرایی متصل شده به سیستم، رفتار دینامیکی سیستم را به‌واسطه ظهور پدیده‌هایی مانند پیچیدگی مود در طناب کاملا متفاوت از سیستم بدون میرایی می‌کند. همچنین در این مساله اگرچه سفتی فنر متصل

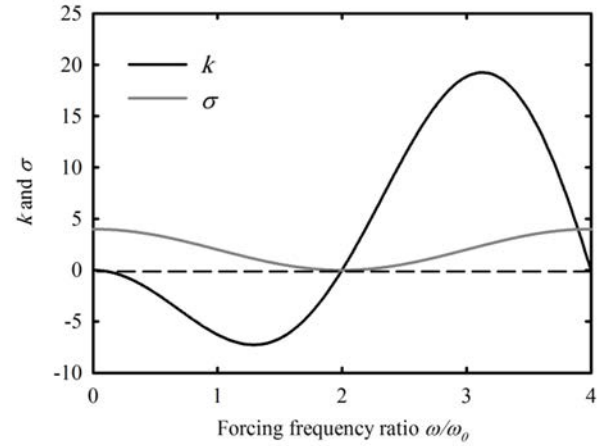


Fig. 11 The functions of k and σ versus forcing frequency ratio ω/ω_0 for maximum mode complexity

شکل 11 توابع k و σ برحسب فرکانس تحریک بی‌بعد ω/ω_0 برای حداکثر پیچیدگی مود

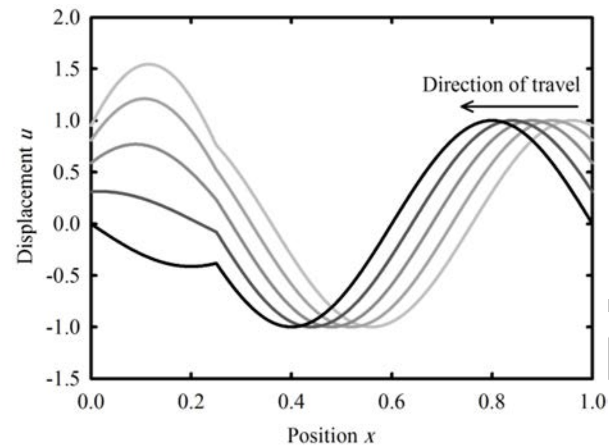


Fig. 12 Traveling wave in the string at five time instance $\Delta\tau$=0.04 for ω/ω_0 = 2.5 and k=2.5$\sqrt{2}\pi$ and σ=2-$\sqrt{2}$

شکل 12 حرکت موج در طناب در فاصله 5 زمانی $\Delta\tau$=0.04 برای ω/ω_0 =2.5 و k=2.5$\sqrt{2}\pi$ و σ=2-$\sqrt{2}$

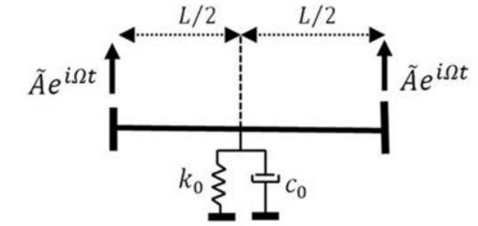
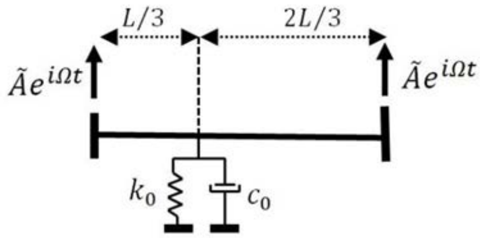
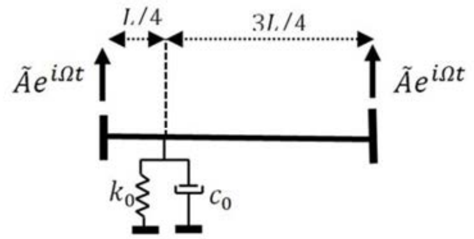
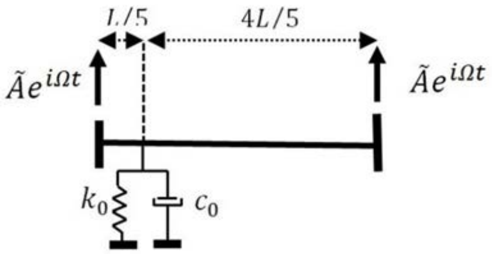
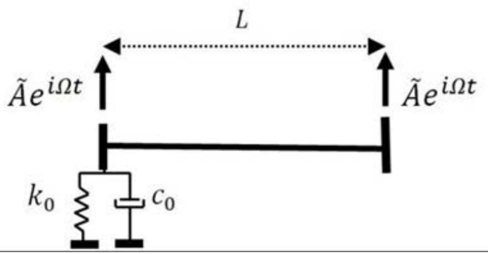
شده به طناب اثر قابل توجهی در پاسخ فرکانسی سیستم نمی گذارد، اما میرایی موجود باعث ایجاد فاصله فرکانسی می گردد. به این معنی که ماکزیمم دامنه نوسان در موقعیت های مختلف از طناب به ازای فرکانس تحریک بی‌بعد مختلف اتفاق می افتد. بعلاوه می‌توان گفت که به ازای هر سفتی فنر، یک مقدار میرایی وجود خواهد داشت که بیشترین فاصله فرکانسی را ایجاد می‌کند.

فاز نیز با اضافه شدن میرایی، همانند حالت بدون میرایی ثابت نیست بلکه در طول طناب تغییر می‌کند. البته نقاط ثابتی در نمودار فاز برحسب طول طناب وجود دارد که مستقل از میرایی و سفتی فنر هستند. زمانی که میرایی کوچک است، در مجاورت این نقاط محدوده‌ای ظاهر می‌شود که با افزایش بیشتر میرایی پیچیدگی مود ظاهر می‌شود و در سراسر طناب گسترش می‌یابد. این امر منجر به پاسخ فرکانسی متفاوت در طول زمان می‌شود.

در این تحقیق نشان داده شده است که یک ماکزیمم مطلق از پیچیدگی مود وجود خواهد داشت و زمانی اتفاق می‌افتد که فاز به صورت خطی تغییر

جدول 1 مقادیر سفتی فنر و میرایی متناظر با ماکزیمم پیچیدگی مود به ازای قرار گیری فنر-دمپر در مکان‌های مختلف در طول طناب

Table 1 spring and damping constants related to maximum mode complexity for various locations of spring-dashpot system

فاصله فنر-دمپر از انتهای سمت راست	ثابت فنریت بی‌بعد k	ثابت میرایی بی‌بعد σ	شماتیک مسأله
$L/2$	0	2	
$2L/3$	$-\frac{\omega\sin\left(\frac{\omega}{3}\right)\left(2\cos\left(\frac{\omega}{3}\right)+1\right)}{\cos\left(\frac{\omega}{3}\right)+1}$	$2\cos\left(\frac{\omega}{3}\right)+1$	
$3L/4$	$-2\omega\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$	$2\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)+2$	
$4L/5$	$\frac{\omega\left(8\cos\left(\frac{\omega}{5}\right)^4-8\cos\left(\frac{\omega}{5}\right)^2-\cos\left(\frac{\omega}{5}\right)+1\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{5}\right)}$	$8\cos\left(\frac{\omega}{5}\right)^3-4\cos\left(\frac{\omega}{5}\right)+1$	
L	وجود ندارد	وجود ندارد	

کند. با ظاهر شدن بیشترین پیچیدگی مود در سمت راست طناب، انتشار موج از سمت راست به سمت چپ طناب رخ می‌دهد. با انتشار موج در سمت راست طناب در حقیقت مودهای نرمال ارتعاشات ازبین رفته و رفتار طناب به صورت کیفی تغییر کرده است.

نتایج حاصله دینامیکی نشان می‌دهد که برای ایجاد ماکزیمم پیچیدگی و گذر ارتعاشات به امواج، میرایی و فنریت هر دو تأثیرگذار هستند، به گونه‌ای که هر دو متناسب با فرکانس تحریک تغییر می‌کنند. میرایی با افزایش فرکانس تحریک، رفتاری پریودیک و فنریت رفتار سفت شوندگی را از خود نشان می‌دهند. این نتیجه در طراحی سیستم در فرکانس تحریک موردنظر، بسیار حائز اهمیت است و باید مورد توجه ویژه قرار بگیرد.

7- مراجع

[1] T. Soong, B. Spencer, Supplemental energy dissipation: state-of-the-art and state-of-the-practice, *Engineering Structures*, Vol. 24, No. 3, pp. 243-259, 2002.

[2] A. shahani, M. ghadiri, Investigation of nonlinear vibration of cable system containing mass, spring and damper under effect of attached mass accelerating motion *Journal of Sharif*, Vol. 51, 2007. (in Persian فارسی)

[3] T. Caughey, M. O'kelly, Classical normal modes in damped linear dynamic systems, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 32, No. 3, pp. 583-588, 1965.

[4] S. Adhikari, Optimal complex modes and an index of damping non-proportionality, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 18, No. 1, pp. 1-27, 2004.

[5] S. R. Ibrahim, Computation of normal modes from identified complex modes, *Aiaa Journal,* Vol. 21, No. 3, pp. 446-451, 1983.
[6] S. Krenk, Complex modes and frequencies in damped structural vibrations, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 270, No. 4, pp. 981-996, 2004.
[7] S. Krenk, Vibrations of a taut cable with an external damper, *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 67, No. 4, pp. 772-776, 2000.
[8] J. Main, N. Jones, Free vibrations of taut cable with attached damper. I: Linear viscous damper, *Journal of Engineering Mechanics,* Vol. 128, No. 10, pp. 1062-1071, 2002.
[9] A. Blanchard, O. V. Gendelman, D. M. McFarland, L. A. Bergman, A. F. Vakakis, Mode complexity in a harmonically forced string with a local spring–damper and transitions from vibrations to waves, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 334, pp. 282-295, 2015.
[10]G. Oliveto, A. Santini, E. Tripodi, Complex modal analysis of a flexural vibrating beam with viscous end conditions, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 200, No. 3, pp. 327-345, 1997.
[11]K. Engelen, H. Ramon, W. Saeys, W. Franssens, J. Anthonis, Positioning and tuning of viscous damper on flexible structure, *Journal of sound and vibration,* Vol. 304, No. 3, pp. 845-862, 2007.
[12]M. Gürgöze, H. Erol, On the frequency response function of a damped cantilever simply supported in-span and carrying a tip mass, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 255, No. 3, pp. 489-500, 2002.
[13]M. Gürgöze, H. Erol, Dynamic response of a viscously damped cantilever with a viscous end condition, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 298, No. 1, pp. 132-153, 2006.
[14]A. Hull, A closed form solution of a longitudinal bar with a viscous boundary condition, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 169, No. 1, pp. 19-19, 1994.