



## رویکرد نظری در پایداری دینامیکی تیرهای قوسی کم عمق ساخته شده از مواد مدرج تابعی توانی

علی اصغر عطایی<sup>1\*</sup>، مهدی علیزاده<sup>2</sup>

1- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

2- کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

\* تهران، صندوق پستی 1155-4563، aataee@ut.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 11 اردیبهشت 1395

پذیرش: 10 تیر 1395

ارائه در سایت: 07 شهریور 1395

کلید واژگان:

پایداری دینامیکی

مواد مدرج تابعی

فروجهش دینامیکی

تیرهای قوسی کم عمق

### چکیده

یکی از ویژگی‌های مهم تیرهای قوسی کم عمق تحت بارگذاری جانبی، پدیده فروجهش است که طی آن سازه دچار یک تغییر هندسی ناگهانی به سوی ساختار تعادلی جدیدی می‌شود. با استفاده از مواد مدرج تابعی در تیرهای قوسی، می‌توان سازه‌هایی با مشخصات پایداری مطلوب‌تری برای شرایط خاص ایجاد کرد. در این تحقیق بررسی جامع به صورت تحلیلی بر رفتار دینامیکی تیرهای قوسی کم عمق با مواد مدرج تابعی صورت گرفته است. یک تیر قوسی کم عمق با شکل اولیه سینوسی و دارای تکیه‌گاه‌های لولایی فرض شده که تحت تأثیر یک نیروی ضربی قرار گرفته است و تغییرات مواد مدرج تابعی آن به صورت تابع توانی در راستای ضخامت است. روابط غیرخطی حاکم بر تیر قوسی کم عمق با فرض تیر اویلر برنولی استخراج شده و معادله حرکت آن به شکل یک معادله دیفرانسیلی-انتگرالی غیرخطی بیان شده و با در نظر گرفتن یک پاسخ فوری به حل معادله حرکت پرداخته شده است. رویکرد اتخاذ شده در تحلیل ناپایداری دینامیکی، استفاده از انرژی کل سیستم و صفحه فازی است. با در نظر گرفتن پارامترهای مؤثر بر نحوه توزیع ناهمگنی، اثر هریک از آن‌ها بر ناحیه پایداری در مقابل فروجهش دینامیکی و همین‌طور میزان نیروی ضربه ای اعمالی بر تیر قوسی جهت بروز پدیده فروجهش به دست آمده است.

## Dynamic stability of power law FG shallow arches: a theoretical approach

Ali Asghar Atai\*, Mehdi Alizadeh

School of Mechanical Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Iran.

\* P.O.B. 11155-4563 Tehran, Iran, aataee@ut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 30 April 2016  
Accepted 30 June 2016  
Available Online 28 August 2016

**Keywords:**  
Shallow arch  
Dynamic stability  
Snap through  
Functionally graded material

### ABSTRACT

One of the remarkable concerns in Shallow arches' behavior under lateral loading is snap-through, a phenomenon which can make the structure collapse or displace to another stable configuration. Introducing functionally graded materials in recent years has led to some interesting results, for instance, using functionally graded materials in shallow arches can produce structures with favorable stability properties. In this work, we investigate dynamic stability of the pinned-pinned functionally graded sinusoidal shallow arch under impulsive loading. Material properties vary through the thickness by power law function. Nonlinear governing equations are derived using Euler-Bernoulli beam assumption and equations of motion are expressed by a nonlinear differential-integral equation. The solution utilizes a Fourier form of response. The procedure to analyze dynamic stability followed here uses total energy of the system and Lyapunov function in the phase space. We find the stable region against dynamical snap-through under material properties' variation in the thickness direction of shallow arch. We also proceed to find the sufficient critical load in order to make the dynamical snap-through occur. The results are analyzed in detail and illustrated in some diagrams.

### 1- مقدمه

آن باشد در این صورت تیر قوسی را کم عمق می‌نامند. پس از تخطی نیروی جانبی از سطح نیروی بحرانی، تیر قوسی کم عمق به طور ناگهانی از یک حالت تعادلی پایدار به یک ساختار تعادلی پایدار غیرمجاور آن جهش می‌کند. این پدیده ناپایداری، فروجهش نامیده می‌شود که یک مشخصه مهم از تیرهای قوسی کم عمق است. پارامتر نیرویی که این تغییر زیاد در پاسخ را ایجاد کند، نیروی بحرانی نامیده می‌شود. پژوهش‌ها در بررسی پایداری تیرهای قوسی کم عمق با توجه به چگونگی بار عرضی اعمال شده بر آن‌ها می‌تواند به دو دسته پایداری استاتیکی و پایداری دینامیکی تقسیم‌بندی شود. در بحث

تیرهای قوسی کم عمق کاربردهای وسیعی به عنوان یک سازه در مهندسی راه و ساختمان، یا زیر سازه برای سازه‌های بسیار پیچیده در مهندسی مکانیک و هوافضا و یا تجهیزات الکترومکانیکی برای تغییر وضعیت بین چندین وضعیت تعادلی و غیره دارند. آن‌چه که در تیرهای قوسی کم عمق حائز اهمیت است ناپایداری هندسه آن‌ها تحت بارهای جانبی است که می‌تواند منجر به تخریب سازه یا جابه‌جایی‌های بیش از حد شود. اگر ارتفاع اولیه یک تیر قوسی شکل بسیار کوچک‌تر از فاصله دو تکیه‌گاه

در رویکرد دوم در تحلیل معادلات حرکت این سیستم‌ها انرژی کلی سیستم مطالعه شده است. در این رویکرد به دو طریق به مطالعه سیستم پرداخته می‌شود. در روش نخست انرژی کلی سیستم در صفحه فازی بررسی می‌شود [11] که در آن شرایط بحرانی سیستم به مشخصات صفحه فازی آن وابسته است. در روش دوم که براساس اصل پایستاری انرژی استوار است [12] با استفاده از معادله انرژی کلی سیستم، شرایط بحرانی و نیروهای بحرانی تعیین می‌شوند. نخستین محاسبه تئوری نیروی کماتش دینامیکی به وسیله هاف و بروس [13]، انجام گرفت. سو و همکارانش [11, 14, 15]، از سال 1966 تا 1968 در تعدادی مقاله مسئله پایداری دینامیکی تیر قوسی سینوسی و اثر پارامترهای مختلف روی پایداری آن را با تکیه‌گاه‌های منعطف که تحت نیروی ضربه‌ای و سایر نیروهای مختلف زمانی قرار داشت بررسی کردند. در این مقالات آن‌ها پایداری دینامیکی سیستم‌های پیوسته را با مطالعه رفتار خطوط سیر و استفاده از معیار انرژی در فضای حالت تابعی تحقیق کردند. سیمتسر [12] در کتاب خود یک نگاه جامع بر پایداری دینامیکی تیرهای قوسی کم‌عمق و همین‌طور سایر سازه‌هایی چون پوسته استوان‌های و کلاهک کروی داشت و با استفاده از رویکرد انرژی کلی سیستم، نیروی کماتش دینامیکی تیر قوسی کم‌عمق با فرضیات شکل اولیه سینوسی، تکیه‌گاه‌های لولایی یا گیردار که تحت بار ناگهانی سینوسی قرار گرفته بود، به‌دست آورد. لین و چن [16, 17] در سال‌های بین 2003 تا 2006 در تعدادی مقاله رفتار دینامیکی تیرهای قوسی در مقابل فروجهش دینامیکی را با انواع بارگذاری‌ها از قبیل حرکت تکیه‌گاه یا حرکت بار عرضی وارده با سرعت ثابت به کمک روش انرژی بررسی کردند. پی و برادفورد نیز در تعدادی مقاله [18-20]، یک تحلیل جامع با استفاده از روش انرژی بر رفتار دینامیکی تیرهای قوسی کم‌عمق و دایروی انجام دادند. آن‌ها در این مقالات به بررسی تیرهای قوسی با تکیه‌گاه‌های مختلف اعم از لولایی، گیردار و لولایی-گیردار، که تحت تأثیر انواع بارهای گرمای یکنواخت و نیروی شعاعی یکنواخت و ناگهانی قرار گرفته بود، پرداختند. ها [21] و همکارانش یک حل دقیق برای تیر قوسی که شکل اولیه و بار اعمالی آن با یک ترکیب خطی از تابع سینوسی معین است، ارائه کردند. رضائی‌پژند و علیدوست [22] پایداری دینامیکی یک تیر کامپوزیت چند لایه تحت اثر نیروی دنبال‌کننده را مورد بررسی قرار داده‌اند. با استفاده از معادله اساسی خمش حاکم بر تیرها و محاسبه ممان خمشی وارده بر تیر معادله پایداری را تعیین کرده‌اند و با معادل‌سازی تیر کامپوزیتی با تیر همسان‌گرد به تحلیل ناپایداری آن پرداخته و نتایج را با روش المان محدود مقایسه کرده‌اند.

با معرفی مواد مدرج تابعی در سال‌های اخیر و استفاده از آن در تیرهای قوسی، می‌توان سازه‌هایی با مشخصات پایداری مطلوب ایجاد کرد. از این‌رو بررسی رفتار این نوع تیرهای قوسی ضرورت می‌یابد که در این زمینه پژوهش‌هایی صورت گرفته که بیشتر به بحث پایداری استاتیکی پرداخته‌اند. راستگو [23] و همکارانش نیروی کماتش گرمایی یک تیر خمیده از مواد مدرج تابعی با شرایط تکیه‌گاهی لولایی که تحت بارگذاری حرارتی است را تعیین کردند برای حل معادله حرکت از روش گلرکین برای تعیین نیروی کماتش گرمایی بحرانی استفاده کردند. اکسی و شیرانگ [24] فرضیاتی چون کیرشلف، افزایش طول محوری، انحنای اولیه و کوپل خمش - کشش بر تیر قوسی تغییر شکل یافته در نظر گرفته و به‌صورت هندسی معادلات غیرخطی حاکم بر تیرهای قوسی با مواد مدرج تابعی که تحت بارگذاری مکانیکی و گرمایی قرار گرفته بود استخراج کردند و نیروی کماتش بحرانی را با روش

پایداری استاتیکی فرض می‌شود که بارگذاری عرضی در یک حالت شبه استاتیکی اعمال شده است، اما زمانی که نیروهای عرضی به جای حالت شبه استاتیکی، به‌طور ناگهانی اعمال شوند، این حالت بارگذاری دینامیکی بوده و پیچیده‌تر است. مهم‌تر این‌که نیروهای بحرانی محاسبه‌شده متفاوت از حالت استاتیکی خواهند بود. به‌طوری که اگر یک نیروی عرضی به‌طور ناگهانی اعمال شود نیروی بحرانی حدود 80% حالت نیروی شبه استاتیکی خواهد بود [1]. همچنین فروجهش تیر قوسی به یک ساختار تعادلی دیگر نیز سریع‌تر از حالت شبه استاتیکی اتفاق خواهد افتاد.

نخستین مطالعات نظری بر نیروی بحرانی استاتیکی تیرهای قوسی به وسیله تیموشنکو [2] صورت گرفت و در ادامه سایر پژوهش‌گران کار مقدماتی تیموشنکو را بسط دادند. فونگ و کاپلن [3] پایداری استاتیکی تیر قوسی کم‌عمق با تکیه‌گاه لولایی را به‌طور جامع مطالعه کردند. با توجه به اهمیت پایداری دینامیکی سازه‌ها، به‌طورکلی در برآورد پاسخ دینامیکی سازه‌های الاستیک که دارای بارگذاری دینامیکی هستند، پژوهش‌گران در دو رویکرد به مطالعه این نوع سیستم‌ها پرداخته‌اند، تعدادی از محققین با استفاده از رویکرد روش‌های عددی به تحلیل معادلات حرکت این سیستم‌ها پرداخته‌اند. لاک [4] به بررسی رفتار دینامیکی یک تیر قوسی کم‌عمق سینوسی با تکیه‌گاه‌های لولایی که تحت تأثیر نیروی فشاری یکنواخت سینوسی ذپله‌ای قرار گرفته بود پرداخت و نیروی فشاری بحرانی را به وسیله انتگرال‌گیری عددی از معادله حرکت و تحلیل پایداری بی‌نهایت کوچک تعیین کرد. لویاتس و همکارانش [5] کارهای تئوری و آزمایشگاهی روی پاسخ‌های غیرخطی دینامیکی تیرهای قوسی کم‌عمق انجام دادند. آن‌ها با استفاده از نگاشت سلولی پوانکاره که یک ابزار عددی برای تحلیل جامع سیستم‌های دینامیکی غیرخطی است، به مطالعه رفتار دینامیکی تیر قوسی کم‌عمق الاستیک پرداختند. مالون [6] و همکارانش تأثیر انحنای اولیه تیر قوسی کم‌عمق نازک را بر میزان نیروی کماتش ضربه‌ای دینامیکی آزمایش کردند. آن‌ها با به‌کارگیری روش‌های عددی و یک مدل نیمه تحلیلی چند درجه آزادی، تحلیل‌های شبه استاتیکی و دینامیکی گذرای غیر خطی را انجام دادند تا نیروی کماتش دینامیکی را تعیین کنند. چن و رو [7] با روش‌های عددی پاسخ فروجهش دینامیکی یک تیر قوسی کم‌عمق سینوسی با تکیه‌گاه لولایی که تحت یک جفت گشتاور مساوی و مخالف جهت هم که به‌طور ناگهانی در دو انتها اعمال شده بود را به‌دست آوردند. چاندر [8] و همکارانش یک بررسی عددی بر رفتار دینامیکی تیر قوسی کم‌عمق سینوسی تحت بارگذاری سینوسی که پدیده فروجهش را نیز تجربه کرده بود انجام دادند. آن‌ها مسئله تیر قوسی را به‌صورت سیستم یک درجه آزادی ساده کردند و نتایج حاصل را با نتایج به‌دست‌آمده از مدل المان محدود مقایسه کردند. الهامی و زینلی [9] پایداری دینامیکی یک تیر دو سر آزاد تحت نیروی ناپایستار محوری را مورد بررسی قرار داده‌اند. با استفاده از تحلیل مودال و روش المان محدود ارتعاشات عرضی تیر در حالت آزاد مورد بررسی قرار گرفته و شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی آن تعیین شده است. در ادامه معادله حاکم بر مسئله به کمک روش گلرکین حل شده است. بتاینه و یونیس [10] یک بررسی بر رفتار استاتیکی و دینامیکی یک میکرو تیر پلی‌سیلیکون با تکیه‌گاه‌های گیردار - گیردار که تحت تحریک الکترواستاتیکی قرار دارد، انجام دادند تا عیوب حاصل از ساخت آن را تعیین کنند. با استفاده از روش گلرکین نیز مسئله مقدار ویژه حاکم بر فرکانس‌های طبیعی برای به‌دست‌آوردن پاسخ استاتیکی و دینامیکی حل شده است.

چگالی که نشان دهنده میزان تغییر مواد در طول ضخامت لایه مواد مدرج تابعی است. با تعریف ضریب نسبت ناهمگنی که با حرف  $\gamma$  نشان داده می شود و بیانگر ارتباط بین  $E_u, E_l$  است  $E_u = \gamma E_l$  رابطه (1) به صورت رابطه (2) ساده خواهد شد.

$$E(z) = E_l \left\{ \left[ \frac{(2z+h)}{2h} \right]^m (\gamma - 1) + 1 \right\}, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (2)$$

تغییر مقدار  $m$  حالت های بی شماری برای توزیع اجزا سازنده مواد مدرج تابعی تولید می کند که این توزیع در شکل 2 به ازای  $\gamma > 1$  و  $\gamma < 1$  نشان داده شده است.

در تعیین معادلات حرکت از تئوری تیر اویلر برنولی استفاده شده است. با توجه به این که در تیرهای قوسی کم عمق شعاع انحنای تیر در مقایسه با عمق تیر بزرگ است و از طرفی از آن جایی که در تئوری مزبور صفحات عمود بر خط مرکزی پس از بارگذاری نیز نسبت به خط مرکز عمود باقی می ماند؛ بنابراین کرنش محوری در راستای ضخامت تیر قوسی به صورت خطی تغییر می کند. معادله کرنش محوری یک نقطه مادی تیر قوسی شکل با رابطه (3) بیان می شود.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + z\kappa \quad (3)$$

که در آن  $z$  مختصه در راستای ضخامت، و  $\varepsilon_0, \kappa$  به ترتیب کرنش محوری و تغییر در انحنای خط مرکزی تیر قوسی شکل هستند [25] که مطابق روابط (5,4) عبارتند از:

$$\varepsilon_0 = u' + \frac{(w'^2 - w_0'^2)}{2} \quad (4)$$

$$\kappa = -(w'' - w_0'') \quad (5)$$

در معادله (4) جابه جایی محوری خط مرکز تیر قوسی شکل است و جمله دوم سمت راست ناشی از تغییرات در راستای طول تیر قوسی به دلیل خمیدگی خط مرکزی آن است. رابطه تنش و کرنش برابر است با  $\sigma = E\varepsilon$ ؛ بنابراین نیروی محوری داخلی  $H$  مطابق رابطه (6) محاسبه می شود.

$$H = - \int_A \sigma dA = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\varepsilon_0 + z\kappa) E(z) dz = -B\varepsilon_0 - C\kappa \quad (6)$$

و همین طور ممان خمشی داخلی  $M$  که نتیجه توزیع تنش بر سطح مقطع تیر قوسی است از رابطه (7) به دست می آید.

$$M = - \int_A z\sigma dA = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\varepsilon_0 + z\kappa) E(z) z dz = -C\varepsilon_0 - D\kappa \quad (7)$$

ضرایب  $B, C$  و  $D$  به ترتیب نشان دهنده سفتی معادل محوری، سفتی کوپل محوری-خمشی و سفتی خمشی سطح مقطع مفروض در طول تیر

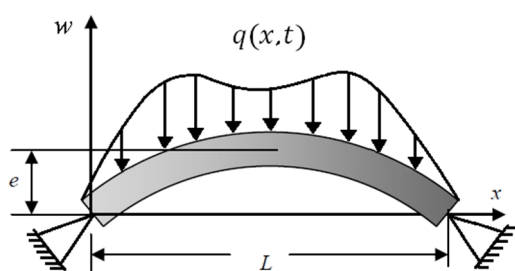


Fig. 1 pin-ended shallow arch under transverse nonuniform loading  
 شکل 1 تیر قوسی کم عمق با بارگذاری غیریکنواخت

عددی شویتنگ به دست آوردند. عطایی [25] و همکارانش، یک تیر قوسی کم عمق با مواد مدرج تابعی و شرایط تکیه گاهی لولایی که تحت بارگذاری یکنواخت عرضی قرار داشت، در نظر گرفتند. و نیروی فروجهش را با رویکرد ترکیب روش های تحلیلی- عددی به دست آوردند. عطایی و علیزاده [26] یک بررسی تحلیلی از پایداری دینامیکی یک تیر قوسی کم عمق سینوسی با تکیه گاه های لولایی و مواد مدرج تابعی با استفاده از روش انرژی و صفحه فازی ارائه کردند. آن ها موفق به ارائه راه حل تحلیلی برای توزیع ناهمگنی متقارن نسبت به مرکز تیر قوسی شکل شدند.

همان طور که ملاحظه می گردد، تحقیقات صورت گرفته در خصوص پایداری دینامیکی تیرهای ناهمگن بسیار محدود است و آخرین کار مربوط به مؤلفان همین مقاله، حالت خاص ناهمگنی متقارن را در نظر گرفته است. در این تحقیق، مؤلفان رفتار دینامیکی تیر قوسی کم عمق با مدل کلی تر مواد مدرج تابعی را، که در آن توزیع ناهمگنی به صورت تابع توانی در راستای ضخامت تیر قوسی است، مورد بررسی قرار می دهند. برای دستیابی به حل تحلیلی در این نوع توزیع ناهمگنی (که گستره وسیعی از توزیع ناهمگنی را برخلاف حالت توزیع متقارن ارائه شده در [26] شامل می شود) در تیرهای قوسی کم عمق یک روش ابتکاری ارائه شده است. شکل اولیه در نظر گرفته شده برای تحلیل، فرم سینوسی است که دارای تکیه گاه های لولایی در دو انتهای تیر است و تحت توزیع نیرویی ضربه ای قرار گرفته است. مشابه روش ارائه شده در [26] از همین نویسنده با در نظر گرفتن پاسخ های فوریه برای تغییر شکل تیر قوسی و بار اعمال شده بر آن و با استفاده از رویکرد انرژی کل سیستم و صفحه فازی به بررسی معادلات حاکم و تحلیل مسئله پرداخته شده است و کلیه نقاط تعادلی آن استخراج و با به کارگیری تابع لیپانوف پایداری دینامیکی این نقاط تعیین و میزان بار بحرانی اعمال شده بر تیر قوسی جهت پایداری در مقابل فروجهش دینامیکی محاسبه شده است. به کمک نمودارهای ارائه شده نشان داده خواهد شد که استفاده از مواد مدرج تابعی تأثیر به سزایی در افزایش یا کاهش ناحیه پایداری در مقابل پدیده فروجهش و میزان بار بحرانی اعمال شده بر آن دارد.

## 2- فرمول بندی مسئله

در شکل 1 یک تیر قوسی با تکیه گاه های لولایی، که تحت بارگذاری گسترده  $q(x,t)$  قرار دارد نشان داده شده است. مؤلفه  $x$  نشان دهنده مختصه افقی خط مرکز تیر قوسی بوده و مؤلفه  $z$  نشان دهنده مختصه یک نقطه روی سطح مقطع تیر قوسی است که فاصله آن مختصه را نسبت به خط مرکز تیر قوسی تعیین می کند. منحنی خط مرکز تیر پس و پیش از بارگذاری به ترتیب با توابع  $w_0(x)$  و  $w(x)$  بیان می شود. فاصله بین دو تکیه گاه تیر قوسی با حرف  $L$  و بیشینه مقدار ارتفاع اولیه مرکز تیر قوسی با حرف  $e$  نشان داده شده است. برای تیرهای قوسی کم عمق نسبت  $e/L$  کمتر از 0.35 در نظر گرفته می شود [25]. سطح مقطع تیر به صورت مستطیلی انتخاب شده و ارتفاع مقطع تیر با حرف  $h$  و عرض سطح مقطع تیر  $b$  (برابر واحد) در نظر گرفته شده است. جنس تیر از مواد مدرج تابعی است که براساس قانون توانی تنها در راستای ضخامت تیر قوسی متغیر است و با رابطه (1) بیان می شود [27].

$$E(z) = E_l \left\{ \left[ \frac{(2z+h)}{2h} \right]^m \left( \frac{E_u}{E_l} - 1 \right) + 1 \right\}, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1)$$

که در آن  $E_u, E_l$  به ترتیب مدول الاستیسیته در لایه بالایی (بیرونی) و لایه پایینی (درونی) تیر قوسی شکل است.  $h$  ضخامت سازه و  $m$  توان

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} \mu_0 \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \int_V \frac{1}{2} \sigma \varepsilon dV + \int_0^L q(x, t) (w - w_0) dx \quad (12)$$

### 3- تبدیل سری فوریه معادله حرکت

مطابق شکل 1 یک تیر قوسی کم عمق تحت بار گسترده را در نظر بگیرید. در صورتی می توان یک حل فوریه سینوسی برای وضعیت اولیه و شکل نهایی تیر قوسی پس از بارگذاری به عنوان پاسخ سیستم در نظر گرفت که پاسخ فوریه شرایط مرزی را در معادله (11) برآورده کند. اگر بتوان در معادله حرکت به گونه ای ضریب  $C$  را صفر کرد در این صورت می توان از حل فوریه استفاده کرد. باید توجه داشت که براساس رابطه (6)، صفر شدن این ضریب به مفهوم یافتن محل تار خنثی نیست، بلکه کوپل بین خمش و بار محوری را از بین می برد و به دست آمدن پاسخ تحلیلی کمک می کند. به دلیل خطی بودن کرنش در راستای ضخامت می توان در معادله (3) مقدار  $K, \varepsilon_0$  را در فاصله  $r$  از خط مرکز آن تعریف کرد. در این صورت ضرایب  $B, C, D$  در معادله حرکت تغییر خواهند کرد و می توان مقدار  $r$  را به گونه ای در نظر گرفت که ضریب  $C$  صفر شود. برای برآوردن شرایط تکیه گاهی مسئله نیز باید موقعیت تکیه گاه های دو انتهای تیر به فاصله  $r$  از مرکز تیر قوسی نصب شود؛ بنابراین مبنای مختصات در فاصله  $r$  از مرکز تیر قوسی تعریف خواهد شد و در روابط انتگرالی (7,6) حدود انتگرال به صورت  $-h/2 + r \leq z \leq h/2 + r$  تغییر خواهد کرد. البته باید توجه داشت که دامنه تغییرات متغیر  $z$  برای تابع توزیع ناهمگنی  $E(z)$  در حین انتگرال گیری در این روابط باید در همان بازه  $-h/2 < z < h/2$  تغییر کند. برای این منظور تابع ناهمگنی  $E(z)$  از رابطه (2) به صورت رابطه (13) باز تعریف می شود.

$$E(z) = E_l \left\{ \left[ \frac{(2z-2r+h)}{2h} \right]^m (\gamma - 1) + 1 \right\}, \quad -\frac{h}{2} + r \leq z \leq \frac{h}{2} + r \quad (13)$$

با صفر قرار دادن ثابت  $C$ ، پارامتر  $r$  به دست می آید و می توان ضرایب  $B$  و  $D$  را بر این اساس محاسبه کرد. با جای گذاری رابطه (13) در رابطه (8) و محاسبه انتگرال آن ضرایب  $B, C, D$  به صورت روابط (15,14) محاسبه خواهند شد.

$$B = \frac{hE_l(\gamma + m)}{m + 1} = \frac{AE_l(\gamma + m)}{m + 1} \quad (14)$$

$$C = \frac{E_l h (\gamma m h + 2 \gamma m r + 4 \gamma r - m h + 4 m r + 2 r m^2)}{2(m + 2)(m + 1)} \quad (15)$$

البته رابطه (14) نشان می دهد که ضریب  $B$  مستقل از متغیر  $r$  است. با مساوی صفر قرار دادن ضریب  $C$  مقدار  $r$  برابر با رابطه (16) است.

$$r = -\frac{hm(\gamma - 1)}{2(\gamma m + 2\gamma + 2m + m^2)} \quad (16)$$

با استفاده از رابطه (16) در رابطه (8) مقدار  $D$  به صورت رابطه (17) ساده خواهد شد.

$$D = \frac{IE_l[12\gamma^2 + (4\gamma + m)(m^3 + 4m^2 + 7m)]}{(m + 2)^2(m + 3)(\gamma + m)} \quad (17)$$

برای بی بعد سازی معادلات روابط (18) تعریف می شوند.

$$\bar{B} = \frac{B}{AE_l}, \quad \bar{D} = \frac{D}{IE_l}, \quad \xi = \frac{\pi x}{L}, \quad \bar{w} = \frac{w}{2} \left( \frac{A}{I} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{w}_0 = \frac{w_0}{2} \left( \frac{A}{I} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \tau = \left( \frac{E_l I \pi^4}{\mu_0 L^4} \right)^{\frac{1}{2}} t$$

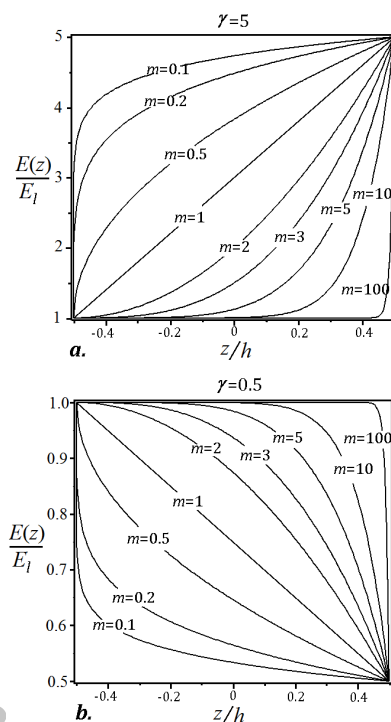


Fig. 2 the variation of non-homogeneity distribution for different  $m$ , a.  $\gamma > 1$  & b.  $\gamma < 1$

شکل 2 نمودار توزیع ناهمگنی به ازای مقادیر مختلف  $m$ . a. به ازای  $\gamma > 1$  و b.  $\gamma < 1$

قوسی شکل است که مقدار این ضرایب با استفاده از معادلات (7,6) مطابق رابطه (8) محاسبه می شوند.

$$B = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) dz, \quad C = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) z dz, \quad D = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) z^2 dz \quad (8)$$

با استفاده از رابطه (5,4) در جمله آخر رابطه (6)، با بازنویسی و انتگرال گیری از آن در طول تیر قوسی و اعمال شرایط مرزی  $u(0) = 0$  و حذف متغیر  $u$ ، رابطه (9) برای نیروی محوری حاصل خواهد شد.

$$H = \frac{1}{L} \int_0^L \left[ C(w'' - w_0'') - \frac{B}{2} ((w')^2 - (w_0')^2) \right] dx \quad (9)$$

معادله حرکت تیر قوسی شکل و شرایط مرزی آن و انرژی کلی سیستم ( $\Pi$ ) مطابق [26] به ترتیب برابر روابط (10-12) خواهد بود.

$$-\left( D - \frac{C^2}{B} \right) \frac{\partial^4}{\partial x^4} (w - w_0) - H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - q(x, t) = \mu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (10)$$

$$B.C: \quad w = 0, x = 0, L$$

$$M = \left( \frac{C}{B} \right) H + \left( D - \left( \frac{C^2}{B} \right) \right) (w'' - w_0'') = 0, \quad x = 0, L \quad (11)$$

که  $\mu_0$  جرم واحد طول افقی تیر قوسی شکل است.

$$G = -2\alpha_1\lambda_1 - \alpha_1^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \alpha_n^2 \quad (25)$$

با تعیین ریشه‌های معادله (25) مقادیر نقاط بحرانی مطابق موارد زیر به دست می‌آید:

1- به ازای  $0 < \lambda_1 < 2(\bar{D}/\bar{B})^{1/2}$  کلیه  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 0$  که

تنها نقطه بحرانی موجود در این بازه بوده و نشان‌دهنده حالت مرجع غیرفشرده یا شکل اولیه تیر قوسی است و تنها وضعیت تعادل استاتیکی است. این نقطه بحرانی با حرف  $p_0$  نشان داده می‌شود و به عنوان نقطه تعادل ذاتی سیستم شناخته می‌شود.

2- به ازای  $(9\bar{D}/2\bar{B})^{1/2} \leq \lambda_1 \leq (9\bar{D}/\bar{B})^{1/2}$  سه نقطه

بحرانی وجود دارد که نقطه بحرانی اول همان نقطه  $p_0$  است، دو نقطه بحرانی دیگر  $\alpha_{1-} = -1/2[3\lambda_1 - (\lambda_1^2 - 4\bar{D}/\bar{B})^{1/2}]$  و  $\alpha_{1+} = -1/2[3\lambda_1 + (\lambda_1^2 - 4\bar{D}/\bar{B})^{1/2}]$  و سایر مقادیر  $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = 0$  است. نقاط بحرانی جدید به ترتیب با  $p_1^{(1)}$  و  $p_1^{(2)}$  نشان داده می‌شود.

3- به ازای  $(64\bar{D}/7\bar{B})^{1/2} < \lambda_1 \leq (9\bar{D}/2\bar{B})^{1/2}$ ، دو نقطه بحرانی جدید علاوه بر  $p_0$ ،  $p_1^{(1)}$  و  $p_1^{(2)}$  به وجود خواهد آمد که در  $\alpha_1 = -4\lambda_1/3$  و  $\alpha_2 = \pm 4[2\lambda_1^2/9 - \bar{D}/\bar{B}]^{1/2}$  قرار دارند و سایر مقادیر  $\alpha_3 = \alpha_4 = \dots = 0$  هستند که نقاط بحرانی جدید با  $p_{1,2}^{(+)}$  و  $p_{1,2}^{(-)}$  نشان داده می‌شوند.

4- در حالت کلی به ازای مقدار  $\lambda_1$  در بازه

$$\left[ \frac{\bar{D}(j^2-1)^{1/2}}{\bar{B}(j^2-2)} \right] < \lambda_1 \leq \left[ \frac{\bar{D}((j+1)^2-1)^{1/2}}{\bar{B}((j+1)^2-2)} \right], j \neq 1, j = 2, 3, \dots$$

$2j+1$  نقطه بحرانی وجود دارد. که با  $p_1^{(1)}$ ،  $p_1^{(2)}$ ،  $p_{1,j}^{(-)}$ ،  $p_{1,j}^{(+)}$ ،  $p_{1,2j}^{(-)}$ ،  $p_{1,2j}^{(+)}$  که یک جفت نمونه جدید  $p_{1,j}^{(-)}$  و  $p_{1,j}^{(+)}$  در  $\alpha_1 = -j^2\lambda_1/(j^2-1)$  و  $\alpha_j = \pm j^2[(\lambda_1^2(j^2-2)/(j^2-1)^2) - \bar{D}/\bar{B}]^{1/2}$  قرار دارند و سایر مقادیر  $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{j-1} = \alpha_{j+1} = \dots = 0$  است.

مقدار انرژی نقاط بحرانی نیز از رابطه (24) برابر خواهد بود با:

1- برای نقطه بحرانی  $P_0$  کلیه  $\alpha_n$ ها برابر صفر بوده و در نتیجه انرژی کل سیستم در این حالت  $\bar{\Pi}(P_0) = 0$  خواهد بود.

2- برای نقطه بحرانی  $p_1^{(1)}$  که معادل  $\alpha_{1-}$  است، انرژی کل سیستم به صورت رابطه (26) می‌شود.

$$\bar{\Pi}(p_1^{(1)}) = \frac{1}{16} \left( 3\lambda_1 - \left( \lambda_1^2 - \frac{4\bar{D}}{\bar{B}} \right)^{1/2} \right)^2 \times \left( 2\bar{D} + \bar{B}\lambda_1^2 + \bar{B}\lambda_1 \left( \lambda_1^2 - \frac{4\bar{D}}{\bar{B}} \right)^{1/2} \right) \quad (26)$$

3- برای نقطه بحرانی  $p_1^{(2)}$  که معادل  $\alpha_{1+}$  است، انرژی کل سیستم برابر رابطه (27) است.

$$\bar{\Pi}(p_1^{(2)}) = \frac{1}{16} \left( 3\lambda_1 + \left( \lambda_1^2 - \frac{4\bar{D}}{\bar{B}} \right)^{1/2} \right)^2 \times \left( 2\bar{D} + \bar{B}\lambda_1^2 - \bar{B}\lambda_1 \left( \lambda_1^2 - \frac{4\bar{D}}{\bar{B}} \right)^{1/2} \right) \quad (27)$$

$$\bar{H} = \frac{HL^2}{\pi^2 E_I L}, \quad \bar{q} = \frac{1}{2} \left( \frac{A}{I} \right)^{1/2} \frac{L^4}{\pi^4 E_I L^2} q, \quad \bar{\Pi} = \frac{AL^3 \Pi}{\pi^4 E_I L^2} \quad (18)$$

که  $A$  سطح مقطع و  $I$  ممان اینرسی نسبت به مرکز تیر قوسی است. معادله حرکت در حالت بی‌بعد به صورت رابطه (19) بازنویسی می‌شود.

$$-\bar{D} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} (\bar{w} - \bar{w}_0) - \bar{H} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \xi^2} - \bar{q}(\xi, \tau) = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \tau^2}$$

$$\bar{H} = -\frac{2\bar{B}}{\pi} \int_0^\pi \left[ \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \right)^2 - \left( \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi \quad (19)$$

حل فوری برای شکل اولیه و پاسخ نهایی و بار اعمال شده بر تیر قوسی به صورت روابط بی‌بعد (20) بیان خواهد شد.

$$\bar{w}_0(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \lambda_n \sin(n\xi) \quad (20)$$

$$\bar{w}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\lambda_n + \alpha_n) \sin(n\xi) \quad (21)$$

$$\bar{q}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(\tau) \sin(n\xi) \quad (22)$$

در معادلات (20)  $\lambda_n$ ها ضرایب ثابت هستند و پارامتر تعیین‌کننده شکل اولیه تیر قوسی است و  $\alpha_n$ ها تابعی از زمان بوده و مجهول است و با تعیین آن‌ها شکل مود سیستم تغییر شکل یافته تعیین خواهد شد. با به کارگیری روابط (20) در معادله حرکت (19)، معادله حرکت به صورت رابطه (23) تبدیل می‌شود.

$$\frac{d\alpha_n}{d\tau} = n^2 \beta_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\frac{d\beta_n}{d\tau} = -\bar{D}n^2 \alpha_n + \bar{B}G(\lambda_n + \alpha_n) - \bar{Q}_n(\tau), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \lambda_n^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\lambda_n + \alpha_n)^2 \quad (23)$$

رابطه (23) مختصاتی از توابع فضای حالت را به وجود می‌آورد که جابجایی‌ها و سرعت‌های تعمیم‌یافته  $\alpha_n$  و  $\beta_n$ ،  $n = 1, 2, \dots$  در آن به کار رفته است و یک دستگاه کامل از معادله حرکت مرتبه اول برای تیر قوسی کم‌عمق فراهم می‌کند. انرژی کل سیستم در حالت بی‌بعد مطابق رابطه (24) بیان می‌شود.

$$\bar{\Pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \beta_n^2 + \bar{D}\alpha_n^2 + \frac{2}{n^2} \bar{Q}_n(\tau) \alpha_n \right) + \frac{\bar{B}G^2}{2} \quad (24)$$

#### 4- ساختار تعادلی و پایداری موضعی

##### 4-1- تعیین نقاط تعادلی و انرژی آن‌ها

تیر قوسی کم عمق را به شکل یک تابع سینوسی ساده که تحت بارگذاری ضربه‌ای بدون نیروی محوری اولیه قرار دارد در نظر بگیرید. در این صورت در معادله (23) همه مقادیر  $\lambda_n$  به جز  $\lambda_1$  برابر صفر خواهد بود. بار ضربه‌ای به ازای  $\bar{q}(\xi, \tau) = 0, \tau > 0$  خواهد بود و اثر آن ایجاد یک سرعت اولیه در طول تیر قوسی شکل است. برای تعیین نقاط تعادل (بحرانی) کافی است طرف دوم معادله حرکت رابطه (23) برابر صفر قرار داده شود که در نتیجه آن مجموعه روابط معادله (25) به دست خواهد آمد.

$$\beta_n = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\bar{D}\alpha_1 - \bar{B}G(\lambda_1 + \alpha_1) = 0$$

$$\alpha_n(\bar{D}n^2 - \bar{B}G) = 0 \quad n = 2, 3,$$

ضربه‌ای با دیمانسیون (kg/s) و  $\delta(t)$  تابع دلتای دیراک است. اگر نیروی ضربه‌ای با یک توزیع یکنواخت فضایی در نظر گرفته شود در این صورت  $\max |R(x)| = 1$  خواهد بود. تحت نیروی ضربه‌ای  $Q(t) = F\delta(t)$  سیستم تیر خمیده سرعت اولیه‌ای به دست می‌آورد که مطابق رابطه (34) محاسبه می‌شود:

$$\int_0^{\Delta t} F\delta(t) dx dt = \mu_0 \frac{\partial w}{\partial t} dx \rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{F}{\mu_0} \quad (34)$$

انرژی جنبشی که تحت تأثیر این بارگذاری به دست می‌آید برابر با رابطه (35) است.

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} \mu_0 \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{F^2 L}{2\mu_0} \quad (35)$$

مقدار آن در حالت بی‌بعد مطابق رابطه (36) بیان می‌شود.

$$\bar{T} = \frac{AL^4 F^2}{2\pi^4 \mu_0 E_l I^2} \quad (36)$$

چنانچه یک سیستم دارای بیش از یک ساختار تعادلی پایدار باشد یک ساختار تعادلی بهینه در میان آن‌ها وجود دارد که دارای میزان انرژی کمتری است و ساختار تعادلی ذاتی سیستم نامیده می‌شود که در این‌جا همان نقطه تعادلی  $p_0$  است. اگر سیستم تحت تأثیر یک اختلال اولیه یا اعمال نیرویی (ضربه‌ای) کوچک قرار گیرد، در نهایت سیستم به حالت تعادلی مرجع خود میل خواهد کرد و گفته می‌شود سیستم در مقابل پدیده فروجهش دینامیکی پایدار است، اما اگر اختلال یا نیروی اعمال شده به اندازه کافی بزرگ باشد امکان دارد در نهایت سیستم به یک ساختار تعادلی پایدار دیگری که متفاوت از این حالت مرجع است جهش کند. این جهش‌های بین ساختارهای تعادلی، ناپایداری فروجهش نامیده می‌شود. تابع لیپانوف را به صورت رابطه (37) حول نقطه تعادلی پایدار  $p_0$  در نظر می‌گیریم.

$$V(C) = \bar{\Pi}(C) - \bar{\Pi}(p_0) \quad (37)$$

با بسط سطح تراز انرژی حول نقطه تعادلی  $p_0$  به سطوح انرژی نقاط بحرانی دیگری خواهیم رسید و نخستین نقطه بحرانی که به این طریق با آن مواجه خواهیم شد  $p^*$  می‌نامیم. بدیهی است تمام نقاط  $C$  درون این سطح تراز که از  $p^*$  می‌گذرند در معادله  $V(C) < \bar{\Pi}(p^*)$  صدق می‌کنند؛ بنابراین شرط پایداری در مقابل فروجهش تحت نیروی ضربه‌ای با استفاده از رابطه  $V(C) < \bar{\Pi}(p^*)$  بیان می‌شود. مطالعه توزیع نقاط تعادل در فضای حالت مرتبط با سطوح تراز  $V(C)$  حول نقطه تعادلی ذاتی  $p_0$  برای تیر قوسی کم‌عمق منجر به نتایج زیر درباره نقطه بحرانی  $p^*$  خواهد شد.

1- به ازای  $0 < \lambda_1 < 2(\bar{D}/\bar{B})^{1/2}$ ، تنها یک ساختار تعادلی موضعی  $p_0$  وجود دارد و  $p^*$  در این بازه وجود ندارد؛ بنابراین در این ناحیه مهم نیست که نیرو چه اندازه بزرگ باشد، تیر قوسی در برابر پدیده فروجهش پایدار است.

2- به ازای  $\lambda_1 \leq (9\bar{D}/2\bar{B})^{1/2} \leq 2(\bar{D}/\bar{B})^{1/2}$  سه نقطه بحرانی وجود دارد  $p_0$ ،  $p_1^{(1)}$  و  $p_1^{(2)}$ . نخستین نقطه بحرانی که بسط سطح تراز  $V(C)$  حول  $p_0$  برخورد می‌کند نقطه بحرانی  $p_1^{(1)}$  است، پس  $p_1^{(1)}$ ،  $p^*$  است.

3- به ازای  $(9\bar{D}/2\bar{B})^{1/2} < \lambda_1 \leq (64\bar{D}/7\bar{B})^{1/2}$ ،  $p^*$  نقطه بحرانی  $p_{1,2}^{(+)}$  است.

4- در حالت کلی و به ازای  $\lambda_1 > (9\bar{D}/2\bar{B})^{1/2}$ ،  $p^*$  همیشه نقطه بحرانی  $p_{1,2}^{(+)}$  است. در این زمینه برای دسترسی به توضیحات کامل‌تر به [26] مراجعه شود.

4- برای نقاط بحرانی  $p_{1,j}^{(\pm)}$  که معادل  $\alpha_{j \neq 1}, \alpha_1$  انرژی کل سیستم برابر با رابطه (28) می‌شود.

$$\bar{\Pi}(p_{1,j}^{(\pm)}) = j^4 \bar{D} \left( \frac{\lambda_1^2}{j^2 - 1} - \frac{\bar{D}}{2\bar{B}} \right) \quad j = 2, 3, \dots \quad (28)$$

روابط بالا به ازای مقادیر واحد برای  $\bar{D}, \bar{B}$ ، تبدیل به روابط حالت همگن خواهد شد.

## 2-4- بررسی پایداری موضعی نقاط تعادلی

تعدادی از نقاط تعادلی (بحرانی) به طور موضعی پایدار و برخی دیگر به طور موضعی ناپایدار هستند. پایداری یا ناپایداری آن‌ها با استفاده از تابع لیپانوف بررسی می‌شود که مطابق رابطه (29) تعریف می‌شود.

$$V(C) = \bar{\Pi}(C) - \bar{\Pi}(p) \quad (29)$$

در آن  $C$  یک نقطه در فضای حالت تابعی و نقطه  $p$  هم یکی از نقاط تعادلی است. مختصات نقطه تعادلی  $p$  در فضای حالت به صورت رابطه (30) تعریف می‌شود.

$$\alpha_i = \bar{\alpha}_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \beta_1 = \beta_2 = \dots = 0 \quad (30)$$

برای نقطه  $C$  که در همسایگی نقطه بحرانی  $p$  قرار دارد مختصات آن به صورت رابطه (31) تعریف می‌شود.

$$\alpha_i = \bar{\alpha}_i + \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \beta_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (31)$$

با جای گذاری مختصات نقاط  $p$  و  $C$  در تابع لیپانوف رابطه (32) به دست می‌آید.

$$V(C) = \bar{\Pi}(C) - \bar{\Pi}(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 + J(C) + O(\xi_i^3) \quad (32)$$

که  $J(C)$  مطابق رابطه (33) است.

$$\begin{aligned} J(C) = & \xi_1^2 (\bar{D} + 2\bar{B}\lambda_1^2 + 6\bar{B}\bar{\alpha}_1\lambda_1 + 3\bar{B}\bar{\alpha}_1^2) \\ & + \bar{B} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{\bar{\alpha}_n^2}{n^2} \right) + \xi_1 \left( 4\bar{B}(\lambda_1 + \bar{\alpha}_1) \sum_{i=2}^{\infty} \left( \frac{\bar{\alpha}_n \xi_n}{n^2} \right) \right) \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{\xi_n^2}{n^2} \right) \left( \bar{D}n^2 + 2\bar{B}\lambda_1\bar{\alpha}_1 + \bar{B}\bar{\alpha}_1^2 + \frac{2\bar{B}\bar{\alpha}_n^2}{n^2} \right) \\ & + \bar{B} \sum_{j=2}^{\infty} \left( \frac{\bar{\alpha}_j^2}{j^2} \right) + 2\bar{B} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} \left( \frac{\bar{\alpha}_j \xi_j \bar{\alpha}_n \xi_n}{n^2 j^2} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

در یک همسایگی به اندازه کافی کوچک از نقطه بحرانی  $p$ ، روشن است که  $V(C)$  به ازای  $\beta_n, n = 1, 2, \dots$  همواره مثبت معین است؛ بنابراین کافی است فقط مقدار تابع  $J(C)$  محاسبه شود. برای این که یک نقطه بحرانی دارای پایداری موضعی باشد لازم است  $V(C)$  مثبت معین باشد. با این فرض با جای گذاری نقاط بحرانی در رابطه (33) دسته‌بندی زیر حاصل می‌شود.

1- نقطه بحرانی مرجع  $p_0$  همیشه پایدار است.

2- نقطه بحرانی  $p_1^{(1)}$  همواره ناپایدار است.

3- نقطه بحرانی  $p_1^{(2)}$  همیشه پایدار است.

4- نقطه بحرانی  $p_{1,j}^{(\pm)}$  همواره ناپایدار است.

## 5- بار بحرانی ضربه‌ای جهت تعیین پدیده فروجهش دینامیکی

بار گسترده  $q(x, t) = Q(t)R(x)$  با در نظر گرفتن  $Q(t) = F\delta(t)$  به عنوان نیروی ضربه‌ای بر تیر قوسی عمل می‌کند که  $F$  گنجالی نیروی

(39) و (40) به دست می آید که نمودار آن در شکل ترسیم شده است. کاملاً مشهود که یک ارتباط تقریباً خطی بین بار ضربه‌ای بحرانی  $\bar{F}$  و  $\lambda_1$  وجود دارد. این نتایج با نتایج حاصل از [11] منطبق است.

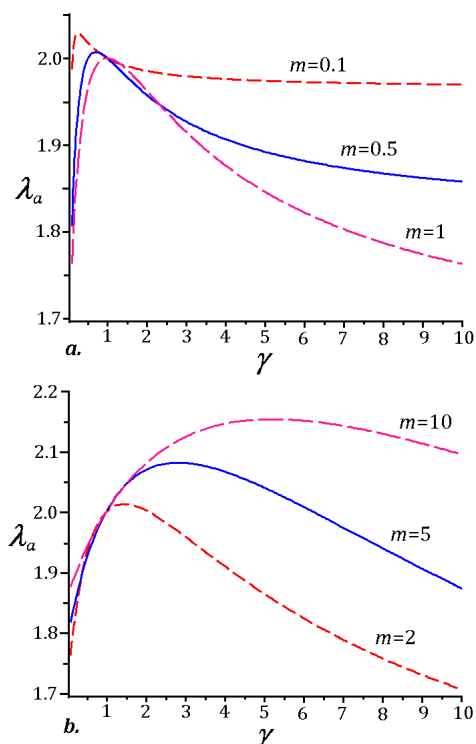


Fig. 3 variation of  $\lambda_a$  vs.  $\gamma$

شکل 3 نمودار مرز ناحیه پایدار  $\lambda_a$  بر حسب  $\gamma$

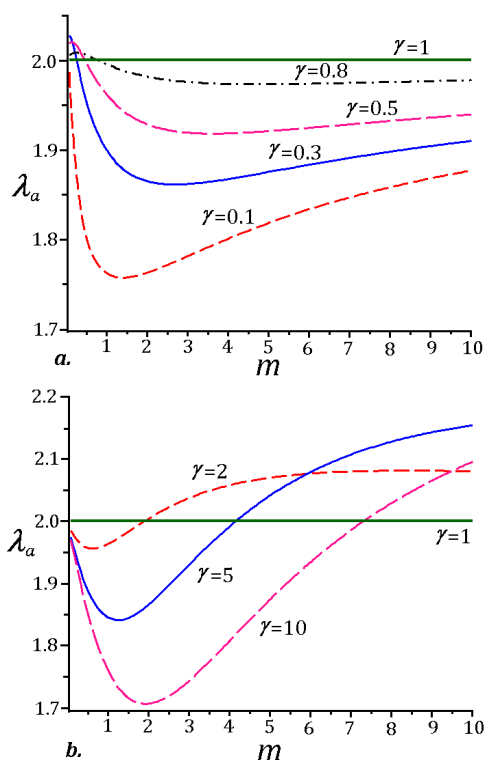


Fig. 4 variation of  $\lambda_a$  vs.  $m$

شکل 4 نمودار مرز ناحیه پایدار  $\lambda_a$  بر حسب  $m$

مقدار  $\bar{T}$  از رابطه (36) برابر  $V(C)$  کل انرژی دریافتی سیستم است. برای محاسبه بار بحرانی ضربه‌ای کافی است شرط  $V(C) \leq \bar{\Pi}(p^*)$  اعمال شود.  $\bar{\Pi}(p^*)$  نیز از روابط (26) و (28) محاسبه می‌شود. بار بحرانی ضربه‌ای در حالت بی‌بعد مطابق رابطه (38) بیان می‌شود.

$$\bar{F} = \frac{A^{1/2} L^2 F}{\pi^2 (\mu_0 E_l I^2)^{1/2}} \quad (38)$$

از این رو بار ضربه‌ای در حالت بی‌بعد به صورت روابط (39) به دست می‌آیند.

$$|\bar{F}| \leq \frac{1}{4} \left( 3\lambda_1 - \left( \lambda_1^2 - \frac{4\bar{D}}{\bar{B}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \times \left( 4\bar{D} + 2\bar{B}\lambda_1^2 + 2\bar{B}\lambda_1 \left( \lambda_1^2 - \frac{4\bar{D}}{\bar{B}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (39)$$

$$|\bar{F}| \leq 4 \left( 2\bar{D} \left( \frac{\lambda_1^2}{3} - \frac{\bar{D}}{2\bar{B}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda_1 > \left( \frac{9\bar{D}}{2\bar{B}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (40)$$

## 6- تحلیل پارامترهای مؤثر بر ناحیه پایدار در مقابل فروجهش دینامیکی

چنانچه مرز ناحیه پایدار و ناپایدار در برابر فروجهش، با رابطه  $\lambda_a = 2(\bar{D}/\bar{B})^{1/2}$  بیان شود. در شکل و شکل به ترتیب تغییرات  $\lambda_a$  و  $\gamma$  نسبت به  $\lambda_a$  نسبت به  $m$  ترسیم شده است. در شکل و شکل نیز توزیع ناهمگنی  $E(z)/E_l$  در طول ضخامت تیر  $z/h$  با استفاده از معادله (2) به ازای مقادیر  $\gamma$  و  $m$  متناسب با شکل و شکل ترسیم شده است.

بررسی نمودارهای ترسیم شده نشان می‌دهد که لزوماً مقدار بیشینه  $\lambda_a$  با بیشینه مقدار توزیع سفتی ارتباط ندارد. به طوری که مرز ناحیه پایدار در مقابل پدیده فروجهش برای تیرهای قوسی کم عمق همگن  $\lambda_a = 2$  است. این مرز پایدار برای مواد ناهمگن  $\lambda_a = 2(\bar{D}/\bar{B})^{1/2}$  است. چنانچه نسبت  $(AE_l \bar{B}/IE_l \bar{D})^{1/2}$  با شعاع ژیراسیون سفتی  $r_a$  نشان داده شود در این صورت برای مواد مدرج تابعی  $\lambda_a = 4\sqrt{3}r_a/h$  خواهد بود. شعاع ژیراسیون سفتی وابسته به مشخصات هندسی سطح مقطع تیرقوسی و نوع تابع ناهمگنی استفاده شده در تیر قوسی  $E(z)$  است. رابطه عمق اولیه تیر قوسی برابر  $e = \lambda_a h/\sqrt{3}$  است، که در این صورت برای مواد مدرج تابعی برابر  $e = 4r_a$  است. با استفاده از مواد مدرج تابعی با توزیع ناهمگنی تابع توانی در تیرهای قوسی مرز ناحیه پایدار در برابر فروجهش دینامیکی مقدار  $\lambda_a$  می‌تواند بیشتر یا کمتر از حالت همگن باشد. در واقع  $\lambda_a$  در بازه  $(1.7 < \lambda_a < 2.16)$  تغییر خواهد کرد. با به کارگیری ساختار مدرج تابعی می‌توان دامنه‌ای برای تعیین عمق اولیه تیر قوسی جهت پایداری در مقابل فروجهش دینامیکی متناسب با تغییر توزیع ناهمگنی علاوه بر تغییر در ضخامت به دست آورد.

## 7- تحلیل پارامترهای مؤثر بر میزان بار بحرانی ضربه‌ای تیرهای قوسی کم عمق

1-7 بررسی بار بحرانی ضربه‌ای برای تیرهای قوسی کم عمق همگن رابطه بار ضربه‌ای برای حالت همگن به ازای مقادیر واحد  $\bar{D}$  و  $\bar{B}$  از روابط



بحرانی در حالت بی بعد  $\bar{F}$  به ازای بیشینه مقدار  $E(z)/E_l$  به دست می آید و کمترین مقدار آن نیز در حالت کمینه  $E(z)/E_l$  حاصل می شود. در واقع برخلاف حالت همگن که میزان  $\bar{F}$  ارتباطی با خواص مکانیکی آن نداشت در مواد مدرج تابعی، میزان بار بحرانی  $\bar{F}$  به توزیع ناهمگنی آن وابسته است. به طوری که در این مواد می توان با در نظر گرفتن شکل اولیه یکسان (مقدار  $\lambda_1$  برابر برای حالت همگن و ناهمگن) و توزیع ناهمگنی متفاوت (تغییر مقادیر  $m, \gamma$ ) بار بحرانی متفاوتی به دست آورد.

همچنین با مقایسه نمودار بار بحرانی برای مواد مدرج تابعی با مواد همگن مشاهده می شود در موارد یکسان برای شکل هندسی اولیه تیر قوسی کم عمق می توان با تعیین مقادیر مناسب از  $m, \gamma$  برای توزیع تابع ناهمگنی، بار بحرانی بیشتری را نسبت به حالت همگن بر تیر قوسی کم عمق از مواد مدرج تابعی اعمال کرد تا در برابر فروجهش دینامیکی پایدار باشد، بالعکس

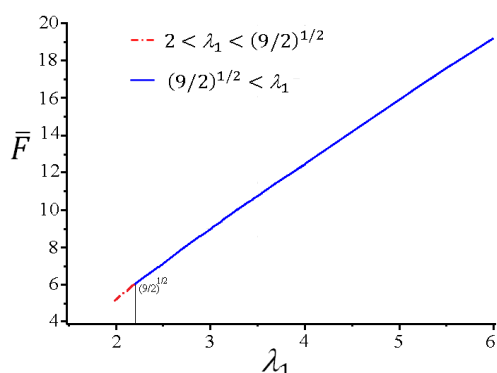


Fig. 7 variation of  $\bar{F}$  vs.  $\lambda_1$  for homogenous materials

شکل 7 نمودار بار بحرانی ضربه ای بر حسب  $\lambda_1$  برای حالت همگن

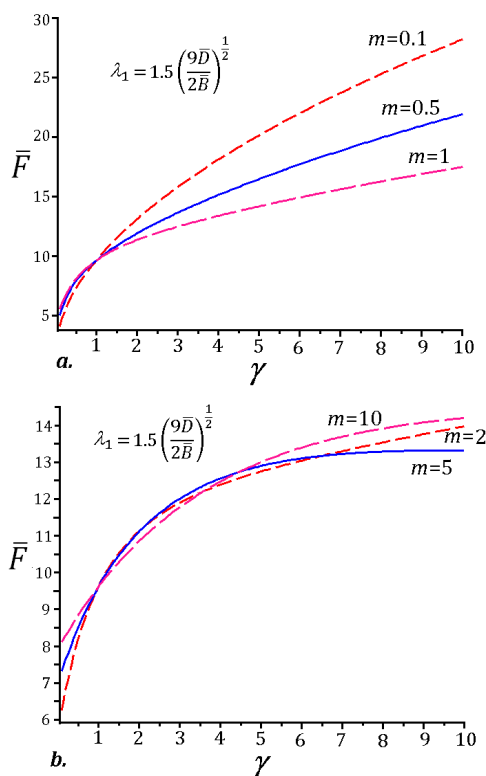


Fig. 8. variation of  $\bar{F}$  vs.  $\gamma$

شکل 8 نمودار بار بحرانی ضربه ای بر حسب  $\gamma$

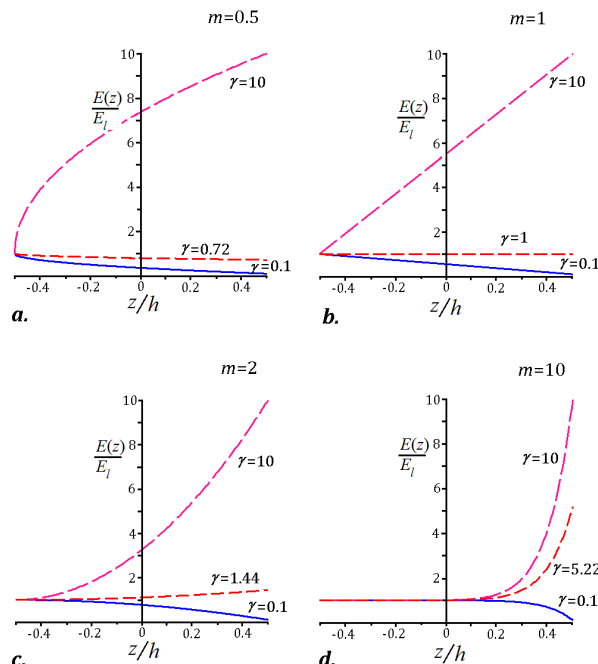


Fig. 5 variation of  $E(z)/E_l$  vs.  $z/h$  for different  $\gamma, m$  in fig. 3

شکل 5 نمودار توزیع ناهمگنی به ازای مقادیر مختلف  $m, \gamma$  از شکل 3

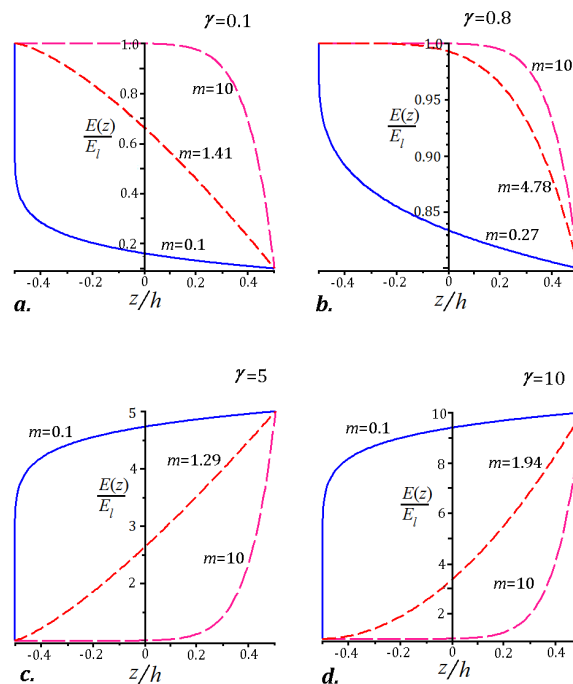


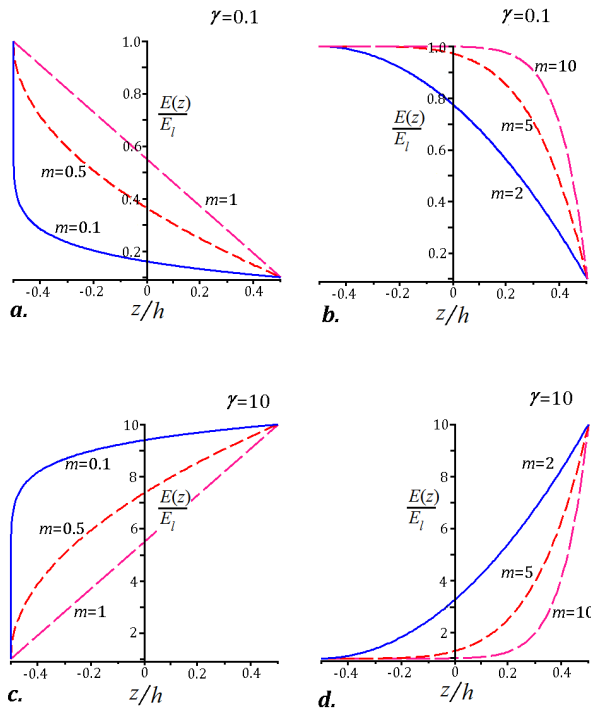
Fig. 6 variation of  $E(z)/E_l$  vs.  $z/h$  for different  $\gamma, m$  in fig. 4

شکل 6 نمودار توزیع ناهمگنی به ازای مقادیر مختلف  $m, \gamma$  از شکل 4

## 2-7- بررسی بار بحرانی ضربه ای برای تیرهای قوسی کم عمق ناهمگن

در شکل و شکل تغییرات  $\bar{F}$  بر حسب  $\gamma$  و  $\bar{F}$  بر حسب  $m$  با در نظر گرفتن شکل و شکل نیز توزیع ناهمگنی  $E(z)/E_l$  در ضخامت تیر  $z/h$  با استفاده از معادله (2) به ازای مقادیر  $\gamma$  و  $m$  متناسب با شکل و شکل ترسیم شده است. با بررسی نمودارهای ارائه شده به روشنی مشخص است که بیشترین بار




 Fig. 11 variation of  $E(z)/E_l$  vs.  $z/h$  for different  $\gamma, m$  in fig. 9

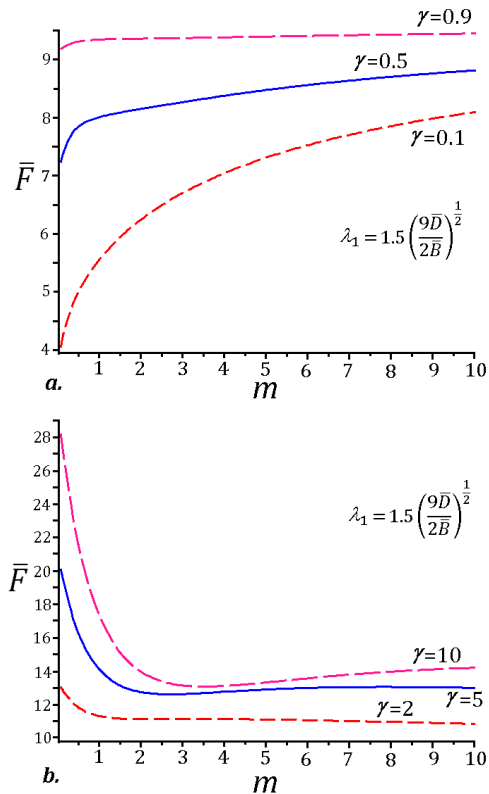
 شکل 11 نمودار توزیع ناهمگنی به ازای مقادیر مختلف  $\gamma, m$  از شکل 9

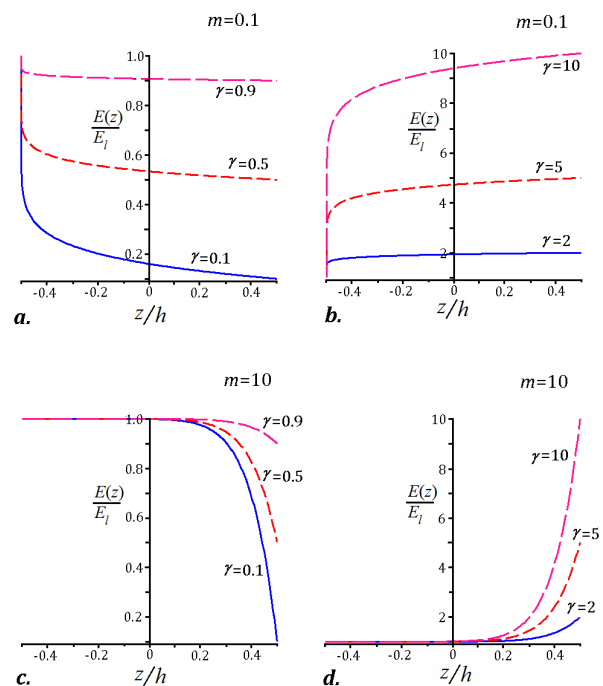
### 8- نتیجه گیری

در این تحقیق پایداری دینامیکی یک تیر قوسی کم عمق سینوسی با ساختار مواد مدرج تابعی که تحت بارگذاری ضربه ای قرار دارد بررسی شده است. توزیع ناهمگنی آن به صورت تابع تابعی در طول ضخامت تیر قوسی است. تمام ساختارهای تعادلی ممکن تیر قوسی کم عمق تعیین شدند و شرط لازم برای پایداری در مقابل فروجهش دینامیکی آن با استفاده از روش انرژی و تابع لیپانوف به دست آمده است. محدوده پایدار در مقابل فروجهش و بار بحرانی متناظر آن برای مواد مدرج تابعی محاسبه شد و نتایج زیر در مقایسه مواد مدرج تابعی با مواد همگن به دست آمده است:

- 1- مرز ناحیه پایدار در مقابل فروجهش دینامیکی تیر قوسی کم عمق، برای مواد همگن برابر عدد ثابت  $\lambda_a = 2$  است. این مرز برای مواد مدرج تابعی برابر  $\lambda_a = 2(\bar{D}/\bar{B})^{1/2}$  است که می تواند کمتر یا بیشتر حالت همگن باشد.
- 2- مقدار بیشینه یا کمینه  $\lambda_a$  با بیشینه یا کمینه مقدار تابع توزیع ناهمگنی  $E(z)$  ارتباطی ندارد.
- 3- فقط به ازای  $\lambda_1 \geq 2(\bar{D}/\bar{B})^{1/2}$  امکان بروز ناپایداری فروجهش دینامیکی وجود دارد و آن نیز تنها زمانی روی می دهد که انرژی دریافتی سیستم توسط بار ضربه ای  $\bar{F}$  بیش از مقدار انرژی نقطه بحرانی  $p^*$  باشد. در غیر این صورت پدیده فروجهش دینامیکی روی نخواهد داد و سیستم پایدار خواهد بود.

- 4- در تیرهای قوسی کم عمق همگن یک ارتباط خطی بین بار ضربه ای بحرانی  $\bar{F}$  و  $\lambda_1$  وجود دارد، در حالی که در تیر قوسی کم عمق با تابع ناهمگنی توانی، میزان بار بحرانی  $\bar{F}$  به توزیع ناهمگنی آن وابسته است. به طوری که به ازای مقدار  $\lambda_1$  یکسان برای هر دو حالت همگن و ناهمگن، با انتخاب مقادیر مختلف برای  $m, \gamma$  می توان بار بحرانی  $\bar{F}$


 Fig. 9. variation of  $\bar{F}$  vs.  $m$ 

 شکل 9 نمودار بار بحرانی ضربه ای بر حسب  $m$ 

 Fig. 10 variation of  $E(z)/E_l$  vs.  $z/h$  for different  $\gamma, m$  in fig. 8

 شکل 10 نمودار توزیع ناهمگنی به ازای مقادیر مختلف  $\gamma, m$  از شکل 8

اگر هدف از به کارگیری تیرهای قوسی کم عمق استفاده از خاصیت فروجهش آن به ساختار تعادلی دیگر باشد می توان با تعیین مقادیر مناسب از  $m, \gamma$ ، ساختاری از توزیع ناهمگنی به دست آورد که نیاز به بار بحرانی کمتری از حالت همگن داشته باشد.

مؤلفه افقی خط مرکز تیر قوسی بی بعد	$\xi$	را به مراتب بیشتر از حالت همگن و یا کمتر از آن به دست آورد.
انرژی کل سیستم $(J)$ $(kgm^2s^{-2})$	$\Pi$	5- با مقایسه نتایج به دست آمده در این تحقیق با مقاله [26] نشان
تنش نرمال $(kgm^{-1}s^{-2})$	$\sigma$	می دهد که نوع تابع ناهمگنی استفاده شده در تیرهای قوسی کم
متغیر زمان بی بعد	$\tau$	عمق نیز در بازه ناحیه پایدار $\lambda_a$ و میزان نیروی بحرانی $\bar{F}$ مؤثر است.

## 10- مراجع

## 9- فهرست علائم و نشانه ها

- |  |       |  |
|--|-------|--|
| [1] J. S. Chen, J. S. Lin, Stability of a shallow arch with one end moving at constant speed, <i>Non-Linear Mechanics</i> , Vol. 41, No. 5, pp. 706–715, 2006.   | A     | سطح مقطع تیر قوسی $(m^2)$                                    |
| [2] S. P. Timoshenko, Buckling of flat curved bars and slightly curved plates, <i>ASME Journal Applied Mechanics</i> , Vol. 2, pp. 17–20, 1935.  | b     | عرض سطح مقطع تیر قوسی $(m)$                                  |
| [3] Y. C. Fung, A. Kaplan, Buckling of low arches or curved beams of small curvature, <i>National Advisory Committee for Aeronautics</i> , 1952.   | B     | ضریب سفتی معادل محوری سطح مقطع در طول تیر قوسی               |
| [4] M. H. Lock, The snapping of a shallow sinusoidal arch under a step pressure load, <i>AIAA Journal</i> , Vol. 4, No. 7, pp. 1249–1256, 1966.  | C     | ضریب سفتی کوپل محوری - خمشی سطح مقطع در طول تیر قوسی         |
| [5] J. Levitas, J. Singer, T. Weller, Global dynamic stability of a shallow arch by Poincare-like simple cell mapping, <i>Non-Linear Mechanics</i> , Vol. 32, No. 2, pp. 411–424, 1997.  | D     | ضریب سفتی خمشی سطح مقطع در طول تیر قوسی                      |
| [6] N. J. Mallon, R. H. B. Fey, H. Nijmeijer, G. Q. Zhang, Dynamic buckling of a shallow arch under shock loading considering the effects of the arch shape, <i>Non-Linear Mechanics</i> , Vol. 41, No. 9, pp. 1057–1067, 2006.                | e     | ارتفاع اولیه مرکز تیر قوسی $(m)$                             |
| [7] J. S. Chen, W. C. Ro, Dynamic response of a shallow arch under end moments, <i>Sound and Vibration</i> , Vol. 326, No. 1, pp. 321–331, 2009.   | E     | مدول الاستیسیته $(kgm^{-1}s^{-2})$                           |
| [8] Y. Chandra, I. Stanculescu, L. N. Virgin, T. G. Eason, S. M. Spottswood, A numerical investigation of snap-through in a shallow arch-like model, <i>Sound and Vibration</i> , Vol. 332, No. 10, pp. 2532–2548, 2013.                       | $E_l$ | مدول الاستیسیته لایه پایینی مقطع تیر قوسی $(kgm^{-1}s^{-2})$ |
| [9] M. R. Elhami, M. Zeinali, Dynamic stability analysis of a two free-end beam subject to a non-conservative following force, <i>Aerospace Mechanics</i> , Vol. 7, No. 1, pp. 15–26, 2012. (in Persian فارسی)                                 | $E_u$ | مدول الاستیسیته لایه بالایی مقطع تیر قوسی $(kgm^{-1}s^{-2})$ |
| [10] A. M. Bataineh, M. I. Younis, Dynamics of a clamped-clamped microbeam resonator considering fabrication imperfections, <i>Microsystem Technologies</i> , Vol. 21, No. 11, pp. 2425–2434, 2015.  | F     | بار ضربه ای بحرانی $(kgs^{-1})$                              |
| [11] C. S. Hsu, on dynamic stability of elastic bodies with prescribed initial conditions, <i>Engineering Science</i> , Vol. 4, No. 1, pp. 1–21, 1966.   | h     | ضخامت تیر قوسی در راستای قائم $(m)$                          |
| [12] G. J. Simitses, <i>Dynamic Stability of Suddenly Loaded Structures</i> , Springer-Verlag, New York, 1990.   | H     | نیروی محوری تیر قوسی $(kgms^{-2})$                           |
| [13] N. J. Hoff, V. G. Bruce, Dynamic analysis of the buckling of laterally loaded flat arches, <i>Mathematics and Physics</i> , Vol. 32, pp. 276–288, 1954.   | I     | ممان اینرسی مقطع تیر قوسی $(m^4)$                            |
| [14] C. S. Hsu, The effects of various parameters on the dynamic stability of a shallow arch, <i>ASME Journal of Applied Mechanics</i> , Vol. 34, No. 2, pp. 349–358, 1967.  | L     | فاصله بین دو تکیه گاه تیر قوسی $(m)$                         |
| [15] C. S. Hsu, Stability of shallow arches against snap-through under timewise step loads, <i>ASME Journal of Applied Mechanics</i> , Vol. 35, No. 1, pp. 31–39, 1968.  | m     | توان چگالی مواد مدرج تابعی                                   |
| [16] J. S. Chen, J. S. Lin, Dynamic snap-through of a laterally loaded arch under prescribed end motion, <i>International Journal of Solids and Structures</i> , Vol. 40, No. 18, pp. 4769–4787, 2003.   | M     | گشتاور خمشی $(kgm^2s^{-2})$                                  |
| [17] J. S. Chen, J. S. Lin, Dynamic snap-through of a shallow arch under a moving point load, <i>ASME Journal of Vibration and Acoustics</i> , Vol. 126, No. 4, pp. 514–519, 2004.   | q     | بار گسترده بر تیر قوسی $(kgs^{-2})$                          |
| [18] Y. L. Pi, M. A. Bradford, Nonlinear in-plane elastic buckling of shallow circular arches under uniform radial and thermal loading, <i>Mechanical Sciences</i> , Vol. 52, No. 1, pp. 75–88, 2010.  | Q     | مؤلفه تابع زمانی بار گسترده بر تیر قوسی $(kgs^{-2})$         |
| [19] Y. L. Pi, M. A. Bradford, Nonlinear dynamic buckling of shallow circular arches under a sudden uniform radial load, <i>Sound and Vibration</i> , Vol. 331, No. 18, pp. 4199–4217, 2012.   | R     | مؤلفه تابع مکانی بار گسترده بر تیر قوسی $(kgs^{-2})$         |
| [20] Y. L. Pi, M. A. Bradford, In-plane stability of preloaded shallow arches against dynamic snap-through accounting for rotational end restraints, <i>Engineering Structures</i> , Vol. 56, No. 11, pp. 1496–1510, 2013.                     | t     | زمان (s)   |
| [21] J. Ha, S. Gutman, S. Shon, S. Lee, Stability of shallow arches under constant load, <i>Non-Linear Mechanics</i> , Vol. 58, No. 1, pp. 120–127, 2014.  | T     | انرژی جنبشی سیستم $(J)$ $(kgm^2s^{-2})$                      |
| [22] H. Alidoost, J. Rezaee Pazhand, Dynamic stability of laminated composite beam subjected to follower force, <i>Modares Mechanical Engineering</i> , Vol. 15, No. 10, pp. 233–239, 2015. (in Persian فارسی)                                 | u     | جابجایی محوری خط مرکزی تیر قوسی $(m)$                        |
| [23] A. Rastgo, H. Shafie, A. Allahverdizadeh, Instability of curved beams made of functionally graded material under thermal loading, <i>Mechanics and Materials in Design</i> , Vol. 2, No. 1–2, pp. 117–128, 2005.                          | U     | انرژی کرنشی سیستم $(J)$ $(kgm^2s^{-2})$                      |
| [24] S. Xi, L. Shirong, Nonlinear stability of fixed-fixed FGM arches subjected to mechanical and thermal loads, <i>In Advanced Materials Research</i> , Vol. 33, pp. 699–706, 2008.   | V     | نیروی برشی $(kgms^{-2})$                                     |
| [25] A. A. Atai, M. H. Naei, S. Rahrovan, Limit load analysis of shallow arches made of functionally bi-directional graded materials under mechanical loading, <i>Mechanical Science and Technology</i> , Vol. 26, No. 6, pp. 1811–1816, 2012. | w     | منحنی خط مرکز تیر قوسی پس از بارگذاری $(m)$                  |
| [26] A. A. Atai, M. Alizadeh, Analytical investigation of dynamic stability of FGM shallow arches, <i>Modares Mechanical Engineering</i> , Vol. 15, No. 4, pp. 310–320, 2015. (in Persian فارسی)   | $w_0$ | منحنی خط مرکز تیر قوسی پیش از بارگذاری $(m)$                 |
| [27] Shen, H. S. <i>Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells</i> . CRC press, 2009.  | W     | کار انجام شده توسط نیروی خارجی $(J)$ $(kgm^2s^{-2})$         |
|  | x     | مؤلفه افقی خط مرکز تیر قوسی $(m)$                            |
|  | z     | مختصه یک نقطه مادی بر سطح مقطع تیر قوسی در جهت قائم $(m)$    |

## علائم یونانی

$\alpha_n$	پارامتر تعیین کننده شکل نهایی تیر قوسی بی بعد
$\beta_n$	پارامتر بی بعد تعیین کننده سرعت تعمیم یافته
$\gamma$	نسبت ناهمگنی مواد مدرج تابعی
$\varepsilon$	کرنش محوری یک نقطه مادی
$\varepsilon_0$	کرنش محوری
$\kappa$	تغییر انحنای خط مرکزی تیر قوسی $(m^{-1})$
$\lambda_n$	پارامتر تعیین کننده شکل اولیه تیر قوسی بی بعد
$\mu_0$	جرم بر واحد طول افقی تیر قوسی $(kgm^{-1})$