مجله مهندسی مکانیک مدرس، آبان 1395، دوره 16، شماره 8، ص‌ص 239-248

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

رویکرد نظری در پایداری دینامیکی تیرهای قوسی کم عمق ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی توانی

علی‌اصغر عطایی[1*]، مهدی علیزاده[2]

1- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

2- کارشناسی‌ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

* تهران، صندوق‌پستی 4563-11155، aataee@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 11 اردیبهشت 1395

پذیرش: 10 تیر 1395

ارائه در سایت: 07 شهریور 1395

کلید واژگان:

ایداری دینامیکی

مواد مدرج تابعی

فروجهش دینامیکی

تیرهای قوسی کم‌عمق

چکیده

یکی از ویژگی‌های مهم تیرهای قوسی کم‌عمق تحت بارگذاری جانبی، پدیده فروجهش است که طی آن سازه دچار یک تغییر هندسی ناگهانی به سوی ساختار تعادلی جدیدی می‌شود. با استفاده از مواد مدرج تابعی در تیرهای قوسی، می‌توان سازه‌هایی با مشخصات پایداری مطلوب‌تری برای شرایط خاص ایجاد کرد. در این تحقیق بررسی جامع به‌صورت تحلیلی بر رفتار دینامیکی تیرهای قوسی کم‌عمق با مواد مدرج تابعی صورت گرفته است. یک تیر قوسی کم‌عمق با شکل اولیه سینوسی و دارای تکیه‌گاه‌های لولایی فرض شده که تحت تأثیر یک نیروی ضربه‌ای قرار گرفته است و تغییرات مواد مدرج تابعی آن به‌صورت تابع توانی در راستای ضخامت است. روابط غیرخطی حاکم بر تیر قوسی کم‌عمق با فرض تیر اویلر برنولی استخراج شده و معادله حرکت آن به شکل یک معادله دیفرانسیلی– انتگرالی غیرخطی بیان شده و با درنظر گرفتن یک پاسخ فوریه به حل معادله حرکت پرداخته شده است. رویکرد اتخاذشده در تحلیل ناپایداری دینامیکی، استفاده از انرژی کل سیستم و صفحه فازی است. با درنظر گرفتن پارامترهای مؤثر بر نحوه توزیع ناهمگنی، اثر هریک از آن‌ها بر ناحیه پایدار در مقابل فروجهش دینامیکی و همین‌طور میزان نیروی ضربه ای اعمالی بر تیر قوسی جهت بروز پدیده فروجهش به‌دست آمده است.

Dynamic stability of power law FG shallow arches: a theoretical approach

Ali Asghar Atai*, Mehdi Alizadeh

School of Mechanical Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Iran.
* P.O.B. 11155-4563 Tehran, Iran, aataee@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 30 April 2016
Accepted 30 June 2016
Available Online 28 August 2016

Keywords:
Shallow arch
Dynamic stability
Snap through
Functionally graded material

ABSTRACT

One of the remarkable concerns in Shallow arches' behavior under lateral loading is snap-through, a phenomenon which can make the structure collapse or displace to another stable configuration. Introducing functionally graded materials in recent years has led to some interesting results, for instance, using functionally graded materials in shallow arches can produce structures with favorable stability properties. In this work, we investigate dynamic stability of the pined-pined functionally graded sinusoidal shallow arch under impulsive loading. Material properties vary through the thickness by power law function. Nonlinear governing equations are derived using Euler-Bernoulli beam assumption and equations of motion are expressed by a nonlinear differential-integral equation. The solution utilizes a Fourier form of response. The procedure to analyze dynamic stability followed here uses total energy of the system and Lyapunov function in the phase space. We find the stable region against dynamical snap-through under material properties' variation in the thickness direction of shallow arch. We also proceed to find the sufficient critical load in order to make the dynamical snap-through occur. The results are analyzed in detail and illustrated in some diagrams.

1- مقدمه

تیرهای قوسی کم‌عمق کاربردهای وسیعی به‌عنوان یک سازه در مهندسی راه و ساختمان، یا زیر سازه برای سازه‌های بسیار پیچیده در مهندسی مکانیک و هوافضا و یا تجهیزات الکترومکانیکی برای تغییر وضعیت بین چندین وضعیت تعادلی و غیره دارند. آن‌چه که در تیرهای قوسی کم عمق حائز اهمیت است ناپایداری هندسه آن‌ها تحت بارهای جانبی است که می‌تواند منجر به تخریب سازه یا جابه‌جایی‌های بیش از حد شود.

اگر ارتفاع اولیه یک تیر قوسی شکل بسیار کوچک‌تر از فاصله دو تکیه‌گاه آن باشد در این صورت تیر قوسی را کم‌عمق می‌نامند. پس از تخطی نیروی جانبی از سطح نیروی بحرانی، تیر قوسی کم‌عمق به‌طور ناگهانی از یک حالت تعادلی پایدار به یک ساختار تعادلی پایدار غیرمجاور آن جهش می‌کند. این پدیده ناپایدار، فروجهش نامیده می‌شود که یک مشخصه مهم از تیرهای قوسی کم‌عمق است. پارامتر نیرویی که این تغییر زیاد در پاسخ را ایجاد کند، نیروی بحرانی نامیده می‌شود. پژوهش‌ها در بررسی پایداری تیرهای قوسی کم‌عمق با توجه به چگونگی بار عرضی اعمال‌شده بر آن‌ها می‌تواند به دو دسته پایداری استاتیکی و پایداری دینامیکی تقسیم‌بندی شود. در بحث

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
A. A. Atai, M. Alizadeh, Dynamic stability of power law FG shallow arches: a theoretical approach, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 8, pp. 239-248, 2016 (in Persian)

پایداری استاتیکی فرض می‌شود که بارگذاری عرضی در یک حالت شبه استاتیکی اعمال شده است، اما زمانی که نیروهای عرضی به جای حالت شبه استاتیکی، به‌طور ناگهانی اعمال شوند، این حالت بارگذاری دینامیکی بوده و پیچیده‌تر است. مهم‌تر این‌که نیروهای بحرانی محاسبه‌شده متفاوت از حالت استاتیکی خواهند بود، به‌طوری که اگر یک نیروی عرضی به‌طور ناگهانی اعمال شود نیروی بحرانی حدود 80% حالت نیروی شبه استاتیکی خواهد بود [1]، همچنین فروجهش تیر قوسی به یک ساختار تعادلی دیگر نیز سریع‌تر از حالت شبه استاتیکی اتفاق خواهد افتاد.

نخستین مطالعات نظری بر نیروی بحرانی استاتیکی تیرهای قوسی به وسیله تیموشنکو [2] صورت گرفت و در ادامه سایر پژوهش‌گران کار مقدماتی تیموشنکو را بسط دادند. فونگ و کاپلن [3] پایداری استاتیکی تیر قوسی کم‌عمق با تکیه‌گاه لولایی را به‌طور جامع مطالعه کردند. با توجه به اهمیت پایداری دینامیکی سازه‌ها، به‌طورکلی در برآورد پاسخ دینامیکی سازه‌های الاستیک که دارای بارگذاری دینامکی هستند، پژوهش‌گران در دو رویکرد به مطالعه این نوع سیستم‌ها پرداخته‌اند، تعدادی از محققین با استفاده از رویکرد روش‌های عددی به تحلیل معادلات حرکت این سیستم‌ها پرداخته‌اند. لاک [4] به بررسی رفتار دینامیکی یک تیر قوسی کم‌عمق سینوسی با تکیه‌گاه‌های لولایی که تحت تأثیر نیروی فشاری یکنواخت سینوسی-ذپله‌ای قرار گرفته بود پرداخت و نیروی فشاری بحرانی را به وسیله انتگرال‌گیری عددی از معادله حرکت و تحلیل پایداری بی‌نهایت کوچک تعیین کرد. لویتاس و همکارانش [5] کارهای تئوری و آزمایشگاهی روی پاسخ‌های غیرخطی دینامیکی تیرهای قوسی کم‌عمق انجام دادند. آن‌ها با استفاده از نگاشت سلولی پوانکاره که یک ابزار عددی برای تحلیل جامع سیستم‌های دینامیکی غیرخطی است، به مطالعه رفتار دینامیکی تیر قوسی کم‌عمق الاستیک پرداختند. مالون [6] و همکارانش تأثیر انحنای اولیه تیر قوسی کم‌عمق نازک را بر میزان نیروی کمانش ضربه‌ای دینامیکی آزمایش کردند. آن‌ها با به‌کارگیری روش‌های عددی و یک مدل نیمه تحلیلی چند درجه آزادی، تحلیل‌های شبه استاتیکی و دینامیکی گذرای غیر خطی را انجام دادند تا نیروی کمانش دینامیکی را تعیین کنند. چن و رو [7] با روش‌های عددی پاسخ فروجهش دینامیکی یک تیر قوسی کم‌عمق سینوسی با تکیه‌گاه لولایی که تحت یک جفت گشتاور مساوی و مخالف جهت هم که به‌طور ناگهانی در دو انتها اعمال شده بود را به‌دست آوردند. چاندرا [8] و همکارانش یک بررسی عددی بر رفتار دینامیکی تیر قوسی کم‌عمق سینوسی تحت بارگذاری سینوسی که پدیده فروجهش را نیز تجربه کرده بود انجام دادند. آن‌ها مسئله تیر قوسی را به‌صورت سیستم یک درجه آزادی ساده کردند و نتایج حاصل را با نتایج به‌دست‌آمده از مدل المان محدود مقایسه کردند. الهامی و زینلی [9] پایداری دینامیکی یک تیر دو سر آزاد تحت نیروی ناپایستار محوری را مورد بررسی قرار داده‌اند. با استفاده از تحلیل مودال و روش المان محدود ارتعاشات عرضی تیر در حالت آزاد مورد بررسی قرار گرفته و شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی آن تعیین شده است. در ادامه معادله حاکم بر مسئله به کمک روش گلرکین حل شده است. بتاینه و یونیس [10] یک بررسی بر رفتار استاتیکی و دینامیکی یک میکروتیر پلی‌سیلیکون با تکیه‌گاه‌های گیردار- گیردار که تحت تحریک الکترواستاتیکی قرار دارد، انجام دادند تا عیوب حاصل از ساخت آن را تعیین کنند. با استفاده از روش گلرکین نیز مسئله مقدار ویژه حاکم بر فرکانس‌های طبیعی برای به‌دست‌آوردن پاسخ استاتیکی و دینامیکی حل شده است.

در رویکرد دوم در تحلیل معادلات حرکت این سیستم‌ها انرژی کلی سیستم مطالعه شده است. در این رویکرد به دو طریق به مطالعه سیستم پرداخته می‌شود. در روش نخست انرژی کلی سیستم در صفحه فازی بررسی می‌شود [11] که در آن شرایط بحرانی سیستم به مشخصات صفحه فازی آن وابسته است. در روش دوم که براساس اصل پایستاری انرژی استوار است [12] با استفاده از معادله انرژی کلی سیستم، شرایط بحرانی و نیروهای بحرانی تعیین می‌شوند. نخستین محاسبه تئوری نیروی کمانش دینامیکی به وسیله هاف و بروس [13] ، انجام گرفت. سو و همکارانش [15،14،11]، از سال 1966 تا 1968 در تعدادی مقاله مسئله پایداری دینامیکی تیر قوسی سینوسی و اثر پارامترهای مختلف روی پایداری آن را با تکیه‌گاه‌های منعطف که تحت نیروی ضربه‌ای و سایر نیروهای مختلف زمانی قرار داشت بررسی کردند. در این مقالات آن‌ها پایداری دینامیکی سیستم‌های پیوسته را با مطالعه رفتار خطوط سیر و استفاده از معیار انرژی در فضای حالت تابعی تحقیق کردند. سیمتسز [12] در کتاب خود یک نگاه جامع بر پایداری دینامیکی تیرهای قوسی کم‌عمق و همین‌طور سایر سازه‌هایی چون پوسته استوآن‌های و کلاهک کروی داشت و با استفاده از رویکرد انرژی کلی سیستم، نیروی کمانش دینامیکی تیر قوسی کم‌عمق با فرضیات شکل اولیه سینوسی، تکیه‌گاه‌های لولایی یا گیردار که تحت بار ناگهانی سینوسی قرار گرفته بود، به‌دست آورد. لین و چن [17،16،1] در سال‌های بین 2003 تا 2006 در تعدادی مقاله رفتار دینامیکی تیرهای قوسی در مقابل فروجهش دینامیکی را با انواع بارگذاری‌ها از قبیل حرکت تکیه‌گاه یا حرکت بار عرضی وارده با سرعت ثابت به کمک روش انرژی بررسی کردند. پی و برادفورد نیز در تعدادی مقاله [18-20]، یک تحلیل جامع با استفاده از روش انرژی بر رفتار دینامیکی تیرهای قوسی کم‌عمق و دایروی انجام دادند. آن‌ها در این مقالات به بررسی تیرهای قوسی با تکیه‌گاه‌های مختلف اعم از لولایی، گیردار و لولایی- گیردار، که تحت تأثیر انواع بارهای گرمای یکنواخت و نیروی شعاعی یکنواخت و ناگهانی قرار گرفته بود، پرداختند. ها [21] و همکارانش یک حل دقیق برای تیر قوسی که شکل اولیه و بار اعمالی آن با یک ترکیب خطی از تابع سینوسی معین است، ارائه کردند. رضائی‌پژند و علیدوست [22] پایداری دینامیکی یک تیر کامپوزیت چند لایه تحت اثر نیروی دنبال‌کننده را مورد بررسی قرار داده‌اند. با استفاده از معادله اساسی خمش حاکم بر تیرها و محاسبه ممان خمشی وارده برتیر معادله پایداری را تعیین کرده‌اند و با معادل‌سازی تیر کامپوزیتی با تیر همسان‌گرد به تحلیل ناپایداری آن پرداخته و نتایج را با روش المان محدود مقایسه کرده‌اند.

با معرفی مواد مدرج تابعی در سال‌های اخیر و استفاده از آن در تیرهای قوسی، می‌توان سازه‌هایی با مشخصات پایداری مطلوب ایجاد کرد. از این‌رو بررسی رفتار این نوع تیرهای قوسی ضرورت می‌یابد که در این زمینه پژوهش‌هایی صورت گرفته که بیشتر به بحث پایداری استاتیکی پرداخته‌اند. راستگو [23] و همکارانش نیروی کمانش گرمایی یک تیر خمیده از مواد مدرج تابعی با شرایط تکیه‌گاهی لولایی که تحت بارگذاری حرارتی است را تعیین کردند برای حل معادله حرکت از روش گلرکین برای تعیین نیروی کمانش گرمایی بحرانی استفاده کردند. اکسی و شیرانگ [24] فرضیاتی چون کیرشهف، افزایش طول محوری، انحنای اولیه و کوپل خمش- کشش بر تیر قوسی تغییر شکل یافته درنظر گرفته و به‌صورت هندسی معادلات غیرخطی حاکم بر تیرهای قوسی با مواد مدرج تابعی که تحت بارگذاری مکانیکی و گرمایی قرار گرفته بود استخراج کردند و نیروی کمانش بحرانی را با روش

عددی شوتینگ به‌دست آوردند. عطایی [25] و همکارانش، یک تیر قوسی کم‌عمق با مواد مدرج تابعی و شرایط تکیه‌گاهی لولایی که تحت بارگذاری یکنواخت عرضی قرار داشت، در نظر گرفتند. و نیروی فروجهش را با رویکرد ترکیب روش‌های تحلیلی- عددی به‌دست آوردند. عطایی و علیزاده [26] یک بررسی تحلیلی از پایداری دینامیکی یک تیر قوسی کم عمق سینوسی با تکیه‌گاه‌های لولایی و مواد مدرج تابعی با استفاده از روش انرژی و صفحه فازی ارائه کردند. آن‌ها موفق به ارائه راه‌حل تحلیلی برای توزیع ناهمگنی متقارن نسبت به مرکز تیر قوسی شکل شدند.

همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، تحقیقات صورت گرفته در خصوص پایداری دینامیکی تیرهای ناهمگن بسیار معدود است و آخرین کار مربوط به مؤلفان همین مقاله، حالت خاص ناهمگنی متقارن را درنظر گرفته است. در این تحقیق، مؤلفان رفتار دینامیکی تیر قوسی کم‌عمق با مدل کلی‌تر مواد مدرج تابعی را، که در آن توزیع ناهمگنی به‌صورت تابع توانی در راستای ضخامت تیر قوسی است، مورد بررسی قرار می‌دهند. برای دستیابی به حل تحلیلی در این نوع توزیع ناهمگنی (که گستره وسیعی از توزیع ناهمگنی را برخلاف حالت توزیع متقارن ارائه شده در [26] شامل می‌شود) در تیرهای قوسی کم‌عمق یک روش ابتکاری ارائه شده است. شکل اولیه درنظر گرفته شده برای تحلیل، فرم سینوسی است که دارای تکیه‌گاه‌های لولایی در دو انتهای تیر است و تحت توزیع نیرویی ضربه‌ای قرار گرفته است. مشابه روش ارائه شده در [26] از همین نویسنده با درنظر گرفتن پاسخ‌های فوریه برای تغییر شکل تیر قوسی و بار اعمال شده بر آن و با استفاده از رویکرد انرژی کل سیستم و صفحه فازی به بررسی معادلات حاکم و تحلیل مسئله پرداخته شده است و کلیه نقاط تعادلی آن استخراج و با به‌کارگیری تابع لیاپانوف پایداری دینامیکی این نقاط تعیین و میزان بار بحرانی اعمال شده بر تیر قوسی جهت پایداری در مقابل فروجهش دینامیکی محاسبه شده است. به کمک نمودارهای ارائه شده نشان داده خواهد شد که استفاده از مواد مدرج تابعی تأثیر به سزایی در افزایش یا کاهش ناحیه پایدار در مقابل پدیده فروجهش و میزان بار بحرانی اعمل شده بر آن دارد.

2- فرمول‌بندی مسئله

در شکل 1 یک تیر قوسی با تکیه‌گاه‌های لولایی، که تحت بارگذاری گسترده $q(x,t)$ قرار دارد نشان داده شده است. مؤلفه x نشـان‌دهنده مختصه افقی خط مرکز تیر قوسی بوده و مؤلفه z نشان‌دهنده مختصـه یک نقطه روی سطح مقطع تیر قوسی است که فاصله آن مختصه را نسبت به خط مرکز تیر قوسی تعیین می‌کند. منحنی خط مرکز تیر پس و پیش از بارگذاری به ترتیب با توابع $w_0(x)$ و $w(x)$ بیان می‌شود. فاصله بین دو تکیه‌گاه تیر قوسی با حرف L و بیشینه مقدار ارتفاع اولیه مرکز تیر قوسی با حرف e نشان داده شده است. برای تیـرهای قوسی کم‌عمق نسبت e/L کمتر از 0.35 درنظر گرفته می‌شود [25]. سطح مقطع تیر به‌صورت مستطیلی انتخاب شده و ارتفاع مقطع تیر با حرف h و عرض سطح مقطع تیر b (برابر واحد) درنظر گرفته شده است. جنس تیر از مواد مدرج تابعی است که براساس قانون توانی تنها در راستای ضخامت تیرقوسی متغیر است و با رابطه (1) بیان می‌شود [27].

$$E(z) = E_l\left\{\left[\frac{(2z+h)}{2h}\right]^m\left(\frac{E_u}{E_l}-1\right)+1\right\}, -\frac{h}{2}\le z\le\frac{h}{2} \tag{1}$$

که در آن E_l, E_u به ترتیب مدول الاستیسیته در لایه بالایی (بیرونی) ولایه پایینی (درونی) تیر قوسی شکل است. h ضخامت سازه و m توان چگالی که نشان‌دهنده میزان تغییر مواد در طول ضخامت لایه مواد مدرج تابعی است. با تعریف ضریب نسبت ناهمگنی که با حرف γ نشان داده می‌شود و بیانگر ارتباط بین E_l, E_u است $E_u = \gamma E_l$ رابطه (1) به‌صورت رابطه (2) ساده خواهد شد.

$$E(z) = E_l\left\{\left[\frac{(2z+h)}{2h}\right]^m(\gamma-1)+1\right\}, -\frac{h}{2}\le z\le\frac{h}{2} \tag{2}$$

تغییر مقدار m حالت‌های بی‌شماری برای توزیع اجزا سازنده مواد مدرج تابعی تولید می‌کنـد که این توزیع در شکل 2 به ازای $1 < \gamma$ و $\gamma < 1$ نشـان داده شده است.

در تعیین معادلات حرکت از تئوری تیر اویلر برنولی استفاده شده است. با توجه به این‌که در تیرهای قوسی کم‌عمق شعاع انحنای تیر در مقایسه با عمق تیر بزرگ است و از طرفی از آن‌جایی‌که در تئوری مزبور صفحات عمود بر خط مرکزی پس از بارگذاری نیز نسبت به خـط مرکز عمود باقی می‌مانند؛ بنابراین کرنش محوری در راستای ضخامت تیر قوسی به‌صورت خطی تغییر می‌کند. معادله کرنش محوری یک نقطه مادی تیر قوسی شکل با رابطه (3) بیان می‌شود.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + z\kappa \tag{3}$$

که در آن z مختصه در راستای ضخامت، و κ, ε_0 به ترتیب کرنش محوری و تغییر در انحنای خط مرکزی تیر قوسی شکل هستند [25] که مطابق روابط (5,4) عبارتند از:

$$\varepsilon_0 = u' + \frac{\left(w'^2 - w_0'^2\right)}{2} \tag{4}$$

$$\kappa = -(w'' - w_0'') \tag{5}$$

در معادله (4) u جابه‌جایی محوری خط مرکز تیر قوسی شکل است و جمله دوم سمت راست ناشی از تغییرات در راستای طول تیر قوسی به دلیل خمیدگی خط مرکزی آن است. رابطه تنش و کرنش برابر است با $\sigma = E\varepsilon$؛ بنابراین نیروی محوری داخلی H مطابق رابطه (6) محاسبه می‌شود.

$$H = -\int_A \sigma\, dA = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\varepsilon_0 + z\kappa)E(z)dz$$
$$= -B\varepsilon_0 - C\kappa \tag{6}$$

و همین‌طور ممان خمشی داخلی M که نتیجه توزیع تنش بر سطح مقطع تیر قوسی است از رابطه (7) به‌دست می‌آید.

$$M = -\int_A z\sigma\, dA = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\varepsilon_0 + z\kappa)E(z)z\, dz$$
$$= -C\varepsilon_0 - D\kappa \tag{7}$$

ضرایب B، C و D به ترتیب نشان‌دهنده سفتی معادل محوری، سفتی کوپل محوری- خمشی و سفتی خمشی سطح مقطع مفروض در طول تیر

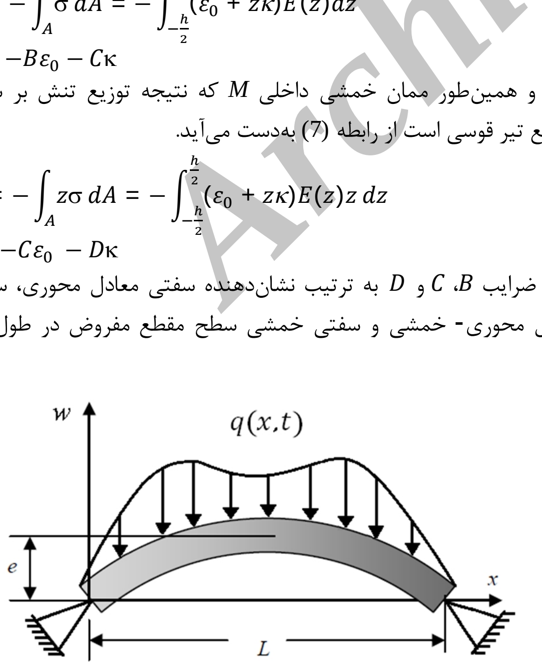

Fig. 1 pin-ended shallow arch under transverse nonuniform loading

شکل 1 تیر قوسی کم عمق با بارگذاری غیریکنواخت

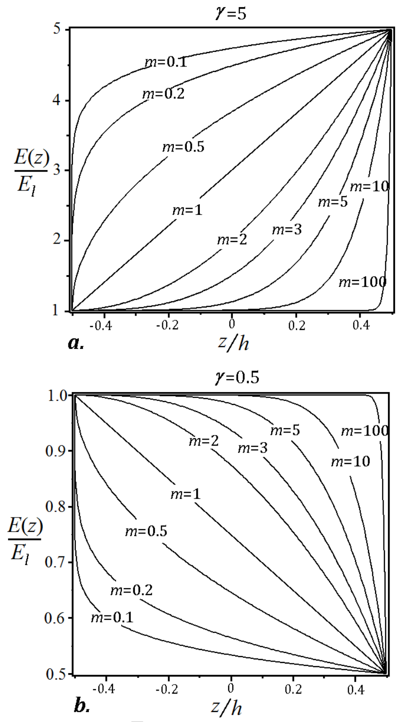

Fig. 2 the variation of non-homogeneity distribution for different m, a. $\gamma > 1$ & b. $\gamma < 1$

شکل 2 نمودار توزیع ناهمگنی به ازای مقادیر مختلف m، a. به ازای $\gamma > 1$ و b. $\gamma < 1$

قوسی شکل است که مقدار این ضرایب با استفاده از معادلات (7,6) مطابق رابطه (8) محاسبه می‌شوند.

$$B = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z)\,dz\,,C = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z)zdz$$

$$D = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z)z^2dz \tag{8}$$

با استفاده از رابطه (5,4) در جمله آخر رابطه (6)، با بازنویسی و انتگرال‌گیری از آن در طول تیر قوسی و اعمال شرایط مرزی $u(0) =$ $u(L) = 0$ و حذف متغیر u، رابطه (9) برای نیروی محوری حاصل خواهد شد.

$$H = \frac{1}{L}\int_0^L \left[C(w'' - w_0'') - \frac{B}{2}(({w'}^2 - {w_0'}^2)\right]dx \tag{9}$$

معادله حرکت تیر قوسی شکل و شرایط مرزی آن و انرژی کلی سیستم (Π) مطابق [26] به ترتیب برابر روابط (12-10) خواهد بود.

$$-\left(D - \frac{C^2}{B}\right)\frac{\partial^4}{\partial x^4}(w - w_0) - H\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - q(x,t) = \mu_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{10}$$

B.C: $w = 0\,, x = 0, L$

$$M = \left(\frac{C}{B}\right)H + \left(D - \left(\frac{C^2}{B}\right)\right)(w'' - w_0'') = 0\ ,\quad x = 0, L \tag{11}$$

که μ_0 جرم واحد طول افقی تیر قوسی شکل است.

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2}\mu_0\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx + \int_V \frac{1}{2}\sigma\varepsilon dV + \int_0^L q(x,t)(w - w_0)dx \tag{12}$$

3- تبدیل سری فوریه معادله حرکت

مطابق شکل 1 یک تیر قوسی کم‌عمق تحت بار گسترده را درنظر بگیرید، در صورتی می‌توان یک حل فوریه سینوسی برای وضعیت اولیه و شکل نهایی تیر قوسی پس از بارگذاری به عنوان پاسخ سیستم درنظر گرفت که پاسخ فوریه شرایط مرزی را در معادله (11) برآورده کند. اگر بتوان در معادله حرکت به گونه‌ای ضریب C را صفر کرد در این صورت می‌توان از حل فوریه استفاده کرد. باید توجه داشت که براساس رابطه (6)، صفر شدن این ضریب به مفهوم یافتن محل تار خنثی نیست، بلکه کوپل بین خمش و بار محوری را از بین می برد و به‌دست‌آمدن پاسخ تحلیلی کمک می‌کند. به دلیل خطی بودن کرنش در راستای ضخامت می‌توان در معادله (3) مقدار κ, ε_0 را در فاصله r از خط مرکز آن تعریف کرد. در این صورت ضرایب B,C,D در معادله حرکت تغییر خواهند کرد و می‌توان مقدار r را به‌گونه‌ای درنظر گرفت که ضریب C صفر شود. برای برآوردن شرایط تکیه‌گاهی مسئله نیز باید موقعیت تکیه‌گاه‌های دو انتهای تیر به فاصله r از مرکز تیر قوسی نصب شود؛ بنـابـراین مبنـای مختصـات در فاصله r از مرکز تیر قوسی تعریف خواهد شد و در روابط انتگرالی (7,6) حدود انتگرال به‌صورت $-h/2 + r \le z \le h/2 + r$ تغییر خواهد کرد. البته باید توجه داشت که دامنه تغییرات متغیر z برای تابع توزیع ناهمگنی $E(z)$ در حین انتگرال‌گیری در این روابط باید در همان بازه $-h/2 < z < h/2$ تغییر کند. برای این منظور تابع ناهمگنی $E(z)$ از رابطه (2) به‌صورت رابطه (13) باز تعریف می‌شود.

$$E(z) = E_l\left\{\left[\frac{(2z-2r+h)}{2h}\right]^m(\gamma - 1) + 1\right\},\quad -\frac{h}{2} + r \le z \le \frac{h}{2} + r \tag{13}$$

با صفر قرار دادن ثابت C، پارامتر r به‌دست می‌آید و می‌توان ضرایب B و D را بر این اساس محاسبه کرد. با جای‌گذاری رابطه (13) در رابطه (8) و محاسبه انتگرال آن ضرایب B,C,D به صورت روابط (15,14) محاسبه خواهند شد.

$$B = \frac{hE_l(\gamma + m)}{m + 1} = \frac{AE_l(\gamma + m)}{m + 1} \tag{14}$$

$$C = \frac{E_l h(\gamma mh + 2\gamma mr + 4\gamma r - mh + 4mr + 2rm^2)}{2(m + 2)(m + 1)} \tag{15}$$

البته رابطه (14) نشان می‌دهد که ضریب B مستقل از متغیر r است. با مساوی صفر قرار دادن ضریب C مقدار r برابر با رابطه (16) است.

$$r = -\frac{hm(\gamma - 1)}{2(\gamma m + 2\gamma + 2m + m^2)} \tag{16}$$

با استفاده از رابطه (16) در رابطه (8) مقدار D به‌صورت رابطه (17) ساده خواهد شد.

$$D = \frac{IE_l[12\gamma^2 + (4\gamma + m)(m^3 + 4m^2 + 7m)]}{(m + 2)^2(m + 3)(\gamma + m)} \tag{17}$$

برای بی‌بعدسازی معادلات روابط (18) تعریف می‌شوند.

$$\bar{B} = \frac{B}{AE_l}\ ,\quad \bar{D} = \frac{D}{IE_l}\ ,\quad \xi = \frac{\pi x}{L}$$

$$\bar{w} = \frac{w}{2}\left(\frac{A}{I}\right)^{\frac{1}{2}},\bar{w}_0 = \frac{w_0}{2}\left(\frac{A}{I}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \tau = \left(\frac{E_l I\pi^4}{\mu_0 L^4}\right)^{\frac{1}{2}}t$$

$$\bar{H} = \frac{HL^2}{\pi^2 E_l I}, \quad \bar{q} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{I}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{L^4}{\pi^4 E_l I} q, \qquad \bar{\Pi} = \frac{AL^3 \Pi}{\pi^4 E_l I^2} \tag{18}$$

که A سطح مقطع و I ممان اینرسی نسبت به مرکز تیر قوسی است، معادله حرکت در حالت بی‌بعد به‌صورت رابطه (19) بازنویسی می‌شود.

$$-\bar{D}\frac{\partial^4}{\partial \xi^4}(\bar{w} - \bar{w}_0) - \bar{H}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \bar{q}(\xi, \tau) = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \tau^2}$$

$$\bar{H} = -\frac{2\bar{B}}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi}\right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \xi}\right)^2\right] d\xi \tag{19}$$

حل فوریه برای شکل اولیه و پاسخ نهایی و بار اعمال شده بر تیر قوسی به‌صورت روابط بی‌بعد (20) بیان خواهد شد.

$$\bar{w}_0(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\lambda_n \sin(n\xi) \tag{20}$$

$$\bar{w}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\lambda_n + \alpha_n)\sin(n\xi) \tag{21}$$

$$\bar{q}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\bar{Q}_n(\tau)\sin(n\xi) \tag{22}$$

در معادلات (20) λ_n ها ضرایب ثابت هستند و پارامتر تعیین‌کننده شکل اولیه تیر قوسی است و α_nها تابعی از زمان بوده و مجهول است و با تعیین آن‌ها شکل مود سیستم تغییر شکل یافته تعیین خواهد شد. با به‌کارگیری روابط (20) در معادله حرکت (19)، معادله حرکت به‌صورت رابطه (23) تبدیل می‌شود.

$$\frac{d\alpha_n}{d\tau} = n^2\beta_n, \qquad n = 1,2,\ldots$$
$$\frac{d\beta_n}{d\tau} = -\bar{D}n^2\alpha_n + \bar{B}G(\lambda_n + \alpha_n) - \bar{Q}_n(\tau), \quad n = 1,2,\ldots$$
$$G = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}{\lambda_n}^2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\lambda_n + \alpha_n)^2 \tag{23}$$

رابطه (23) مختصاتی از توابع فضای حالت را به وجود می‌آورد که جابه‌جایی‌ها و سرعت‌های تعمیم‌یافته α_n و β_n ... $n = 1,2,$ در آن به‌کار رفته است و یک دستگاه کامل از معادله حرکت مرتبه اول برای تیر قوسی کم‌عمق فراهم می‌کند. انرژی کل سیستم در حالت بی‌بعد مطابق رابطه (24) بیان می‌شود.

$$\bar{\Pi} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\beta_n^2 + \bar{D}\alpha_n^2 + \frac{2}{n^2}\bar{Q}_n(\tau)\alpha_n\right) + \frac{\bar{B}G^2}{2} \tag{24}$$

4- ساختار تعادلی و پایداری موضعی

4-1- تعیین نقاط تعادلی و انرژی آن‌ها

تیر قوسی کم عمق را به شکل یک تابع سینوسی ساده که تحت بارگذاری ضربه‌ای بدون نیروی محوری اولیه قرار دارد درنظر بگیرید. در این صورت در معادله (23) همه مقادیر λ_n به جز λ_1 برابر صفر خواهد بود، بار ضربه‌ای به ازای $\tau>0$، $\bar{q}(\xi, \tau) = 0$ خواهد بود و اثر آن ایجاد یک سرعت اولیه در طول تیر قوسی شکل است. برای تعیین نقـاط تعادل (بحرانی) کافی است طرف دوم معادله حرکت رابطه (23) برابر صفر قرار داده شود که در نتیجه آن مجموعه روابط معادله (25) به‌دست خواهد آمد.

$$\beta_n = 0 \quad n = 1,2,\ldots$$
$$\bar{D}\alpha_1 - \bar{B}G(\lambda_1 + \alpha_1) = 0$$
$$\alpha_n(\bar{D}n^2 - \bar{B}G) = 0 \quad n = 2,3,$$

$$G = -2\alpha_1\lambda_1 - \alpha_1^2 - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\alpha_n^2 \tag{25}$$

با تعیین ریشه‌های معادله (25) مقادیر نقاط بحرانی مطابق موارد زیر به‌دست می‌آید:

1- بـه ازای $0 < \lambda_1 < 2(\bar{D}/\bar{B})^{\frac{1}{2}}$، کلیه $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 0$ که تنها نقطه بحرانی موجود در این بازه بوده و نشان‌دهنده حالت مرجع غیرفشرده یا شکل اولیه تیر قوسی است و تنها وضعیت تعادل استاتیکی است. این نقطه بحرانی با حرف p_0 نشان داده می‌شود و به‌عنوان نقطه تعادل ذاتی سیستم شناخته می‌شود.

2- بـه ازای $2(\bar{D}/\bar{B})^{1/2} \le \lambda_1 \le (9\bar{D}/2\bar{B})^{1/2}$ ســه نقطـه بحـرانی وجـود دارد که نقطـه بحرانی اول همـان نقطه p_0 است، دو نقطـه بحـرانی دیگـر $\alpha_{1^-} = -1/2\left[3\lambda_1 - \left(\lambda_1^2 - 4\bar{D}/\bar{B}\right)^{1/2}\right]$ و $\alpha_{1^+} = -1/2\left[3\lambda_1 + \left(\lambda_1^2 - 4\bar{D}/\bar{B}\right)^{1/2}\right]$ و ســایر مقــادیــر $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = 0$ است. نقاط بحرانی جدید به ترتیب با $p_1^{(1)}$ و $p_1^{(2)}$ نشان داده می‌شود.

3- بـه ازای $(9\bar{D}/2\bar{B})^{1/2} < \lambda_1 \le (64\bar{D}/7\bar{B})^{1/2}$، دو نقطه بحرانی جدید علاوه‌بر p_0، $p_1^{(1)}$ و $p_1^{(2)}$ به وجود خواهد آمد که در $\alpha_1 = -4\lambda_1/3$ و $\alpha_2 = \pm 4\left[2\lambda_1^2/9 - \bar{D}/\bar{B}\right]^{1/2}$ قـرار دارنـد و سـایر مقــادیر $\alpha_3 = \alpha_4 = \cdots = 0$ هستند که نقاط بحرانی جدید با $p_{1,2}^{(+)}$ و $p_{1,2}^{(-)}$ نشان داده می‌شوند.

4- در حـــالـت کلـــی بـــه ازای مقـــدار λ_1 در بــــازه $\left[\frac{\bar{D}(j^2-1)^2}{\bar{B}\,(j^2-2)}\right]^{\frac{1}{2}} < \lambda_1 \le \left[\frac{\bar{D}((j+1)^2-1)^2}{\bar{B}\,((j+1)^2-2)}\right]^{\frac{1}{2}}, j \ne 1, j = 2,3,\ldots$ $2j+1$ نقطـه بحـرانـی وجـــود دارد. کـه بـا p_0، $p_1^{(1)}$، $p_1^{(2)}$، $p_{1,2}^{(+)}$، $p_{1,2}^{(-)}$ ... ، $p_{1,j}^{(+)}$ و $p_{1,j}^{(-)}$ نشـان داده می‌شـود. کـه یک جفـت نمـونـه جدید $p_{1,j}^{(+)}$ و $p_{1,j}^{(-)}$ در $\alpha_1 = -j^2\lambda_1/(j^2-1)$ و $\alpha_j = \pm j^2\left[\left(\lambda_1^2(j^2-2)/(j^2-1)^2\right) - \bar{D}/\bar{B}\right]^{1/2}$ قرار دارنـــد و ســایر مقــادیــر $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_{j-1} = \alpha_{j+1} = \cdots, = 0$ است.

مقدار انرژی نقاط بحرانی نیز از رابطه (24) برابر خواهد بود با:

1- برای نقطه بحرانی P_0 کلیه α_nها برابر صفر بوده و در نتیجه انرژی کل سیستم در این حالت $\bar{\Pi}(P_0) = 0$ خواهد بود.

2- برای نقطه بحرانی $p_1^{(1)}$ که معادل α_{1^-} است، انرژی کل سیستم به‌صورت رابطه (26) می‌شود.

$$\bar{\Pi}\left(p_1^{(1)}\right) = \frac{1}{16}\left(3\lambda_1 - \left(\lambda_1^2 - \frac{4\bar{D}}{\bar{B}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \times \left(2\bar{D} + \bar{B}\lambda_1^2 + \bar{B}\lambda_1\left(\lambda_1^2 - \frac{4\bar{D}}{\bar{B}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{26}$$

3- برای نقطه بحرانی $p_1^{(2)}$ که معادل α_{1^+}، انرژی کل سیستم برابر رابطه (27) است.

$$\bar{\Pi}\left(p_1^{(2)}\right) = \frac{1}{16}\left(3\lambda_1 + \left(\lambda_1^2 - \frac{4\bar{D}}{\bar{B}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \times \left(2\bar{D} + \bar{B}\lambda_1^2 - \bar{B}\lambda_1\left(\lambda_1^2 - \frac{4\bar{D}}{\bar{B}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{27}$$

4- برای نقاط بحرانی $p_{1,j}^{(\pm)}$ که معادل $\alpha_{j^\pm},\alpha_1$، انرژی کل سیستم برابر با رابطه (28) می‌شود.

$$\bar{\Pi}\left(p_{1,j}^{(\pm)}\right) = j^4\bar{D}\left(\frac{\lambda_1^2}{j^2-1} - \frac{\bar{D}}{2\bar{B}}\right) \quad j = 2,3,... \tag{28}$$

روابط بالا به ازای مقادیر واحد برای $\bar{D},\bar{B}$، تبدیل به روابط حالت همگن خواهد شد.

2-4- بررسی پایداری موضعی نقاط تعادلی

تعدادی از نقاط تعادلی (بحرانی) به‌طور موضعی پایدار و برخی دیگر به‌طور موضعی ناپایدار هستند. پایداری یا ناپایداری آن‌ها با استفاده از تابع لیاپانوف بررسی می‌شود که مطابق رابطه (29) تعریف می‌شود.

$$V(C) = \bar{\Pi}(C) - \bar{\Pi}(p) \tag{29}$$

در آن C یک نقطه در فضای حالت تابعی و نقطه p هم یکی از نقاط تعادلی است. مختصات نقطه تعادلی p در فضای حالت به‌صورت رابطه (30) تعریف می‌شود.

$$\alpha_i = \bar{\alpha}_i \;, i = 1,2,... \qquad \beta_1 = \beta_2 = \cdots = 0 \tag{30}$$

برای نقطـه C که در همسـایگی نقطـه بحـرانی p قرار دارد مختصات آن به‌صورت رابطه (31) تعریف می‌شود.

$$\alpha_i = \bar{\alpha}_i + \xi_i \;, \qquad i = 1,2,... \;, \qquad \beta_n \;, n = 1,2,... \tag{31}$$

با جای‌گذاری مختصات نقاط p و C در تابع لیاپانوف رابطه (32) به‌دست می‌آید.

$$V(C) = \bar{\Pi}(C) - \bar{\Pi}(p) = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2 + J(C) + O(\xi_i^3) \tag{32}$$

که $J(C)$ مطابق رابطه (33) است.

$$\begin{aligned} J(C) = {} & \xi_1^2\Bigg(\bar{D} + 2\bar{B}\lambda_1^2 + 6\bar{B}\bar{\alpha}_1\lambda_1 + 3\bar{B}\bar{\alpha}_1^2 \\ & +\bar{B}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\bar{\alpha}_n^2}{n^2}\right)\Bigg) + \xi_1\left(4\bar{B}(\lambda_1 + \bar{\alpha}_1)\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{\bar{\alpha}_n\xi_n}{n^2}\right)\right) \\ & + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\xi_n^2}{n^2}\right)\Bigg(\bar{D}n^2 + 2\bar{B}\,\lambda_1\,\bar{\alpha}_1 + \bar{B}\bar{\alpha}_1^2 + \frac{2\bar{B}\bar{\alpha}_n^2}{n^2} \\ & +\bar{B}\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{\bar{\alpha}_j^2}{j^2}\right)\Bigg) + 2\bar{B}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{\substack{j=2 \\ n\neq j}}^{\infty}\left(\frac{\bar{\alpha}_j\xi_j\bar{\alpha}_n\xi_n}{n^2j^2}\right) \end{aligned} \tag{33}$$

در یک همسایگی به اندازه کافی کوچک از نقطه بحرانی p، روشن است که $V(C)$ به ازای $\beta_n \;, n = 1,2,...$ همواره مثبت معین است؛ بنابراین کافی است فقط مقدار تابع $J(C)$ محاسبه شود. برای این‌که یک نقطه بحرانی دارای پایداری موضعی باشد لازم است $V(C)$ مثبت معین باشد. با این فرض با جای‌گذاری نقاط بحرانی در رابطه (33) دسته‌بندی زیر حاصل می‌شود.

1- نقطه بحرانی مرجع p_0 همیشه پایدار است.
2- نقطه بحرانی $p_1^{(1)}$ همواره ناپایدار است.
3- نقطه بحرانی $p_1^{(2)}$ همیشه پایدار است.
4- نقطه بحرانی $p_{1,j}^{(\pm)}$ همواره ناپایدار است.

5- باربحرانی ضربه‌ای جهت تعیین پدیده فروجهش دینامیکی

بار گسترده $q(x,t) = Q(t)R(x)$ با درنظر گرفتن $Q(t) = F\delta(t)$ به‌عنوان نیروی ضربه‌ای بر تیر قوسی عمل می‌کند که F چگالی نیروی ضربه‌ای با دیمانسیون (kg/s) و $\delta(t)$ تابع دلتای دیراک است. اگر نیروی ضربه‌ای با یک توزیع یکنواخت فضـایی درنظـر گرفتـه شود در این صورت $\max|R(x)| = 1$ خواهد بود. تحت نیـروی ضـربه‌ای $Q(t) = F\delta(t)$ سیستـم تیر خمیده سرعت اولیـه‌ای به‌دست می‌آورد که مطابـق رابطه (34) محـاسبـه می‌شود:

$$\int_0^{\Delta t}F\delta(t)dxdt = \mu_0\frac{\partial w}{\partial t}dx \rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{F}{\mu_0} \tag{34}$$

انرژی جنبشی که تحت تأثیر این بارگذاری به‌دست می‌آید برابر با رابطه (35) است.

$$T = \int_0^L\frac{1}{2}\mu_0\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2dx = \frac{F^2L}{2\mu_0} \tag{35}$$

مقدار آن در حالت بی‌بعد مطابق رابطه (36) بیان می‌شود.

$$\bar{T} = \frac{AL^4F^2}{2\pi^4\mu_0E_lI^2} \tag{36}$$

چنان‌چه یک سیستم دارای بیش از یک ساختار تعادلی پایدار باشد یک ساختار تعادلی بهینه در میان آن‌ها وجود دارد که دارای میزان انرژی کمتری است و ساختار تعادلی ذاتی سیستم نامیده می‌شود که در این‌جا همان نقطه تعادلی p_0 است. اگر سیستم تحت تأثیر یک اختلال اولیه یا اعمال نیرویی (ضربه‌ای) کوچک قرار گیرد، درنهایت سیستم به حالت تعادلی مرجع خود میل خواهد کرد و گفته می‌شود سیستم در مقابل پدیده فروجهش دینامیکی پایدار است، اما اگر اختلال یا نیروی اعمال‌شده به اندازه کافی بزرگ باشد امکان دارد در نهایت سیستم به یک ساختار تعادلی پایدار دیگری که متفاوت از این حالت مرجع است جهش کند. این جهش‌های بین ساختارهای تعادلی، ناپایداری فروجهش نامیده می‌شود. تابع لیاپانوف را به‌صورت رابطه (37) حول نقطه تعادلی پایدار p_0 درنظر می‌گیریم.

$$V(C) = \bar{\Pi}(C) - \bar{\Pi}(p_0) \tag{37}$$

با بسط سطح تراز انرژی حول نقطه تعادلی p_0 به سطوح انرژی نقاط بحرانی دیگری خواهیم رسید و نخستین نقطه بحرانی که به این طریق با آن مواجه خواهیم شد p^* می‌نامیم. بدیهی است تمـام نقاط C درون این سطـح تراز که از p^* می‌گذرند در معـادله $V(C) < \bar{\Pi}(p^*)$ صدق می‌کنند؛ بنابراین شرط پایداری در مقابل فروجهش تحت نیروی ضربه‌ای با استفاده از رابطه $V(C) < \bar{\Pi}(p^*)$ بیان می‌شود. مطالعه توزیع نقاط تعادل در فضای حالت مرتبط با سطوح تراز $V(C)$ حول نقطه تعادلی ذاتی p_0 برای تیر قوسی کم‌عمق منجر به نتایج زیر درباره نقطه بحرانی p^* خواهد شد.

1- به ازای $0 < \lambda_1 < 2(\bar{D}/\bar{B})^{1/2}$، تنـها یک سـاختـار تعادلی موضعی P_0 وجـود دارد و p^* دراین بازه وجود ندارد؛ بنـابراین در این ناحیه مهـم نیست که نیـرو چـه اندازه بـزرگ باشد، تیر قوسی در برابر پدیده فروجهش پایدار است.

2- به ازای $2(\bar{D}/\bar{B})^{1/2} \leq \lambda_1 \leq (9\bar{D}/2\bar{B})^{1/2}$ سه نقطه بحرانی وجود دارد p_0، $p_1^{(1)}$ و $p_1^{(2)}$. نخستین نقطه بحرانی که بسط سطح تراز $V(C)$ حول p_0 برخورد می‌کند نقطه بحرانی $p_1^{(1)}$ است، پس p^*، $p_1^{(1)}$ است.

3- به ازای $(9\bar{D}/2\bar{B})^{1/2} < \lambda_1 \leq (64\bar{D}/7\bar{B})^{1/2}$، p^* نقطه بحرانی $p_{1,2}^{(+)}$ است.

4- در حالت کلی و به ازای $\lambda_1 > (9\bar{D}/2\bar{B})^{1/2}$، p^* همیشه نقطه بحرانی $p_{1,2}^{(+)}$ است. در این زمینه برای دسترسی به توضیحات کامل‌تر به [26] مراجعه شود.

مقدار $\bar{T}$ از رابطه (36) برابر $V(C)$ کل انرژی دریافتی سیستم است. برای محاسبه بار بحرانی ضربه‌ای کافی است شرط $V(C) \le \bar{\Pi}(p^*)$ اعمال شود. $\bar{\Pi}(p^*)$ نیز از روابط (26) و (28) محاسبه می‌شود. بار بحرانی ضربه‌ای در حالت بی‌بعد مطابق رابطـه (38) بیان می‌شود.

$$\bar{F} = \frac{A^{1/2}L^2F}{\pi^2(\mu_0 E_l I^2)^{1/2}} \tag{38}$$

از این‌رو بار ضربه‌ای در حالت بی‌بعد به‌صورت روابط (39) به‌دست می‌آیند.

$$|\bar{F}| \le \frac{1}{4}\left(3\lambda_1 - \left(\lambda_1^2 - \frac{4\bar{D}}{\bar{B}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \times \left(4\bar{D} + 2\bar{B}\lambda_1^2 + 2\bar{B}\lambda_1\left(\lambda_1^2 - \frac{4\bar{D}}{\bar{B}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad 2\left(\frac{\bar{D}}{\bar{B}}\right)^{\frac{1}{2}} \le \lambda_1 \le \left(\frac{9\bar{D}}{2\bar{B}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{39}$$

$$|\bar{F}| \le 4\left(2\bar{D}\left(\frac{\lambda_1^2}{3} - \frac{\bar{D}}{2\bar{B}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda_1 > \left(\frac{9\bar{D}}{2\bar{B}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{40}$$

6- تحلیل پارامترهای مؤثر بر ناحیه پایدار در مقابل فروجهش دینامیکی

چنان‌چه مرز ناحیــه پایدار و ناپایدار در برابــر فـروجهش، با رابطه $\lambda_a = 2(\bar{D}/\bar{B})^{1/2}$ بیان شود، در شکل وشکل به ترتیب تغییرات λ_a نسبت به γ و λ_a و نسبت به m ترسیم شده است. در شکل و شکل نیز توزیع ناهمگنی $E(z)/E_l$ در طول ضخامت تیر z/h با استفاده از معادله (2) به ازای مقادیر γ و m متناسب با شکل وشکل ترسیم شده است.

بررسی نمودارهای ترسیم‌شده نشان می‌دهد که لزوما مقدار بیشینه λ_a با بیشینه مقدار توزیع سفتی ارتباط ندارد. به‌طوری که مرز ناحیه پایدار در مقابل پدیده فروجهش برای تیرهای قوسی کم‌عمق همگن $\lambda_a = 2$ است. این مرز پایدار برای مواد ناهمگن $\lambda_a = 2(\bar{D}/\bar{B})^{1/2}$ است. چنان‌چه نسبت $(AE_l\bar{B}/IE_l\bar{D})^{1/2}$ بـا شعـاع ژیراسیـون سفتی r_a نشـان داده شـود در این‌صورت برای مواد مدرج تابعی $\lambda_a = 4\sqrt{3}r_a/h$ خواهد بود. شعاع ژیراسیون سفتی وابسته به مشخصات هندسی سطح مقطع تیرقوسی و نوع تابع ناهمگنی استفاده شده در تیر قوسی $E(z)$ است. رابطه عمق اولیه تیر قوسی برابر $e = \lambda_a h/\sqrt{3}$ است، که در این صـورت برای مواد مـدرج تابعی برابر $e = 4r_a$ است. با استفـاده از مـواد مدرج تابعی با توزیع ناهمگنی تـابع توانی در تیرهای قوسی مرز ناحیه پایدار در برابر فروجهش دینامیکی مقدار λ_a می‌تواند بیشتر یا کمتر از حالت همگن باشد، در واقع λ_a در بازه $(1.7 < \lambda_a < 2.16)$ تغییر خواهد کرد. با به‌کارگیری ساختار مدرج تابعی می‌توان دامنه‌ای برای تعیین عمق اولیه تیـر قـوسی جهت پایداری در مقـابل فروجهش دینـامیکی متنـاسب با تغییر توزیع ناهمگنی علاوه‌بر تغییر در ضخامت به‌دست آورد.

7- تحلیل پارامترهای مؤثر بر میزان بار بحرانی ضربه‌ای تیرهای قوسی کم‌عمق

1-7- بررسی بار بحرانی ضربه‌ای برای تیرهای قوسی کم‌عمق همگن

رابطه بار ضربه‌ای برای حالت همگن به ازای مقادیر واحد $\bar{B}$ و $\bar{D}$ از روابط (39) و (40) به‌دست می‌آید که نمودار آن در شکل ترسیم شده است. کـاملا مشهود که یک ارتباط تقریبا خطی بین بار ضربه‌ای بحرانی $\bar{F}$ و λ_1 وجود دارد. این نتایج با نتایج حاصل از [11] منطبق است.

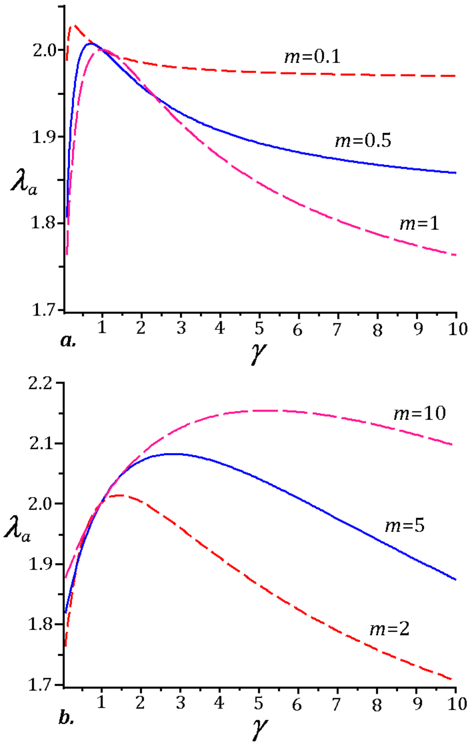

Fig. 3 variation of λ_a vs. γ

شکل 3 نمودار مرز ناحیه پایدار λ_a برحسب γ

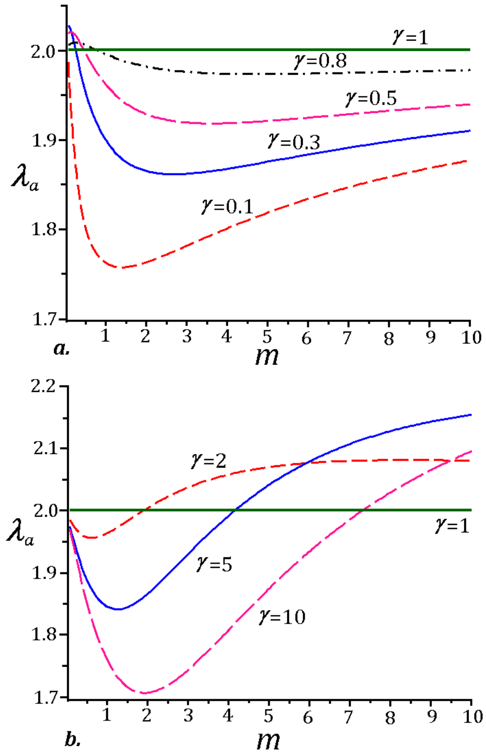

Fig. 4 variation of λ_a vs. m

شکل 4 نمودار مرز ناحیه پایدار λ_a برحسب m

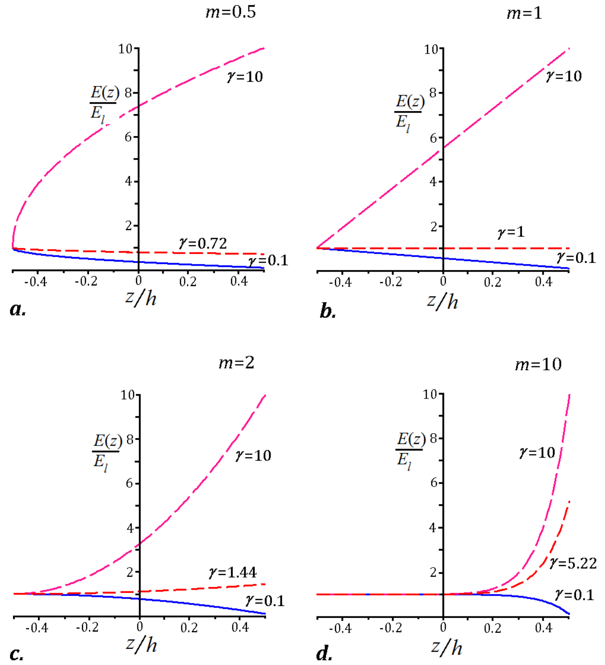

Fig. 5 variation of $E(z)/E_l$ vs. z/h for different γ,m in fig. 3

شکل 5 نمودار توزیع ناهمگنی به ازای مقادیرمختلف m,γ از شکل 3

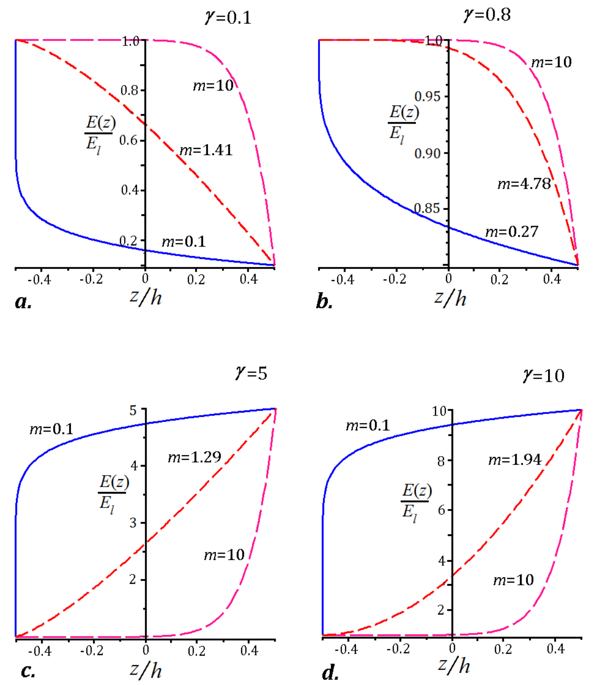

Fig. 6 variation of $E(z)/E_l$ vs. z/h for different γ,m in fig. 4

شکل 6 نمودار توزیع ناهمگنی به ازای مقادیرمختلف m,γ از شکل 4

2-7- بررسی بار بحرانی ضربه‌ای برای تیرهای قوسی کم‌عمق ناهمگن

در شکل وشکل تغییرات $\bar{F}$ برحسب γ و $\bar{F}$ برحسب m با در نظر گرفتن $\lambda_1 = 1.5(9\bar{D}/2\bar{B})^{1/2}$ با استفاده از رابطه (40) ترسیم شده است. در شکل وشکل نیز توزیع ناهمگنی $E(z)/E_l$ در ضخامت تیر z/h با استفاده از معادله (2) به ازای مقادیر γ و m متناسب با شکل وشکل ترسیم شده است.

با بررسی نمودارهای ارائه شده به روشنی مشخص است که بیشترین بار بحرانی در حالت بی‌بعد $\bar{F}$ به ازای بیشینه مقدار $E(z)/E_l$ به‌دست می‌آید و کمترین مقدار آن نیز در حالت کمینه $E(z)/E_l$ حاصل می‌شود. در واقع برخلاف حالت همگن که میزان $\bar{F}$ ارتباطی با خواص مکانیکی آن نداشت در مواد مدرج تابعی، میزان بار بحرانی $\bar{F}$ به توزیع ناهمگنی آن وابسته است، به طوری که در این مواد می‌توان با در نظر گرفتن شکل اولیه یکسان (مقدار λ_1 برابر برای حالت همگن و ناهمگن) و توزیع ناهمگنی متفاوت (تغییر مقادیر $(m,\gamma$) بار بحرانی متفاوتی به‌دست آورد.

همچنین با مقایسه نمودار بار بحرانی برای مواد مدرج تابعی با مواد همگن مشاهده می‌شود در موارد یکسان برای شکل هندسی اولیه تیر قوسی کم‌عمق می‌توان با تعیین مقادیر مناسب از m,γ برای توزیع تابع ناهمگنی، باربحرانی بیشتری را نسبت به حالت همگن بر تیر قوسی کم عمق از مواد مدرج تابعی اعمال کرد تا در برابر فروجهش دینامیکی پایدار باشد، بالعکس

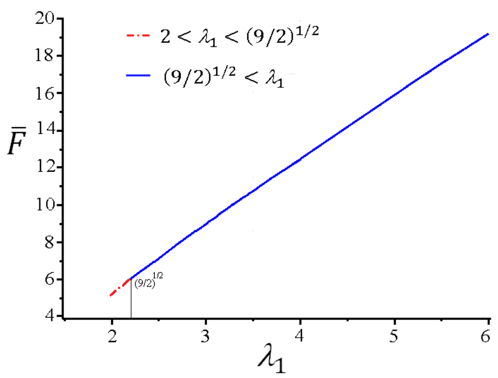

Fig. 7 variation of $\bar{F}$ vs. λ_1 for homogenous materials

شکل 7 نمودار بار بحرانی ضربه‌ای برحسب λ_1 برای حالت همگن

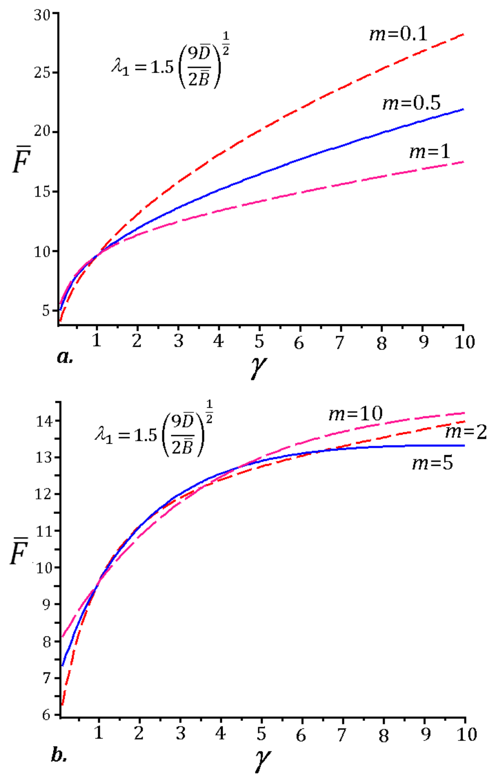

Fig. 8. variation of $\bar{F}$ vs. γ

شکل 8 نمودار بار بحرانی ضربه‌ای برحسب γ

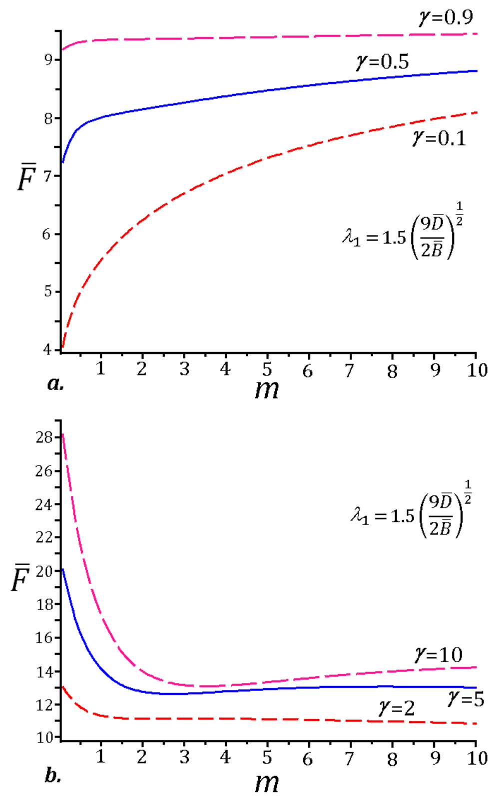

Fig. 9. variation of $\bar{F}$ vs. m

شکل 9 نمودار بار بحرانی ضربه‌ای برحسب m

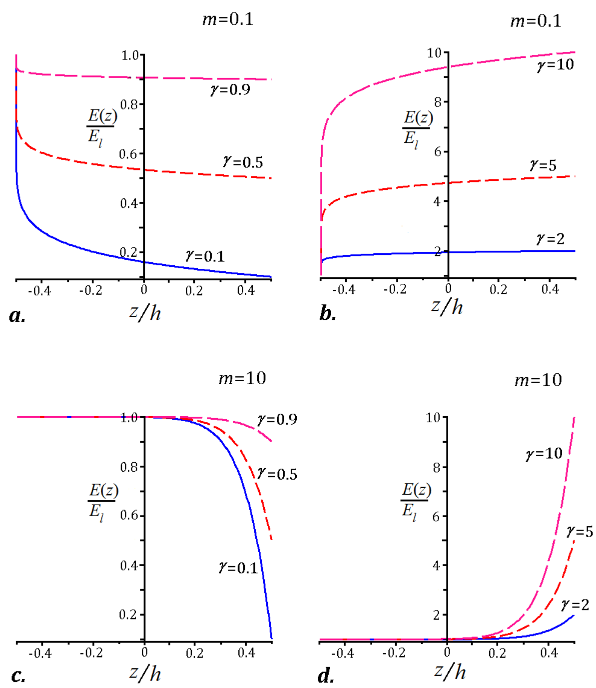

Fig. 10 variation of $E(z)/E_l$ vs. z/h for different γ,m in fig. 8

شکل 10 نمودار توزیع ناهمگنی به ازای مقادیرمختلف m,γ از شکل 8

اگر هدف از به کارگیری تیرهای قوسی کم عمق استفاده از خاصیت فروجهش آن به ساختار تعادلی دیگر باشد می‌توان با تعیین مقادیر مناسب از m,γ، ساختاری از توزیع ناهمگنی بدست آورد که نیاز به بار بحرانی کمتری از حالت همگن داشته باشد.

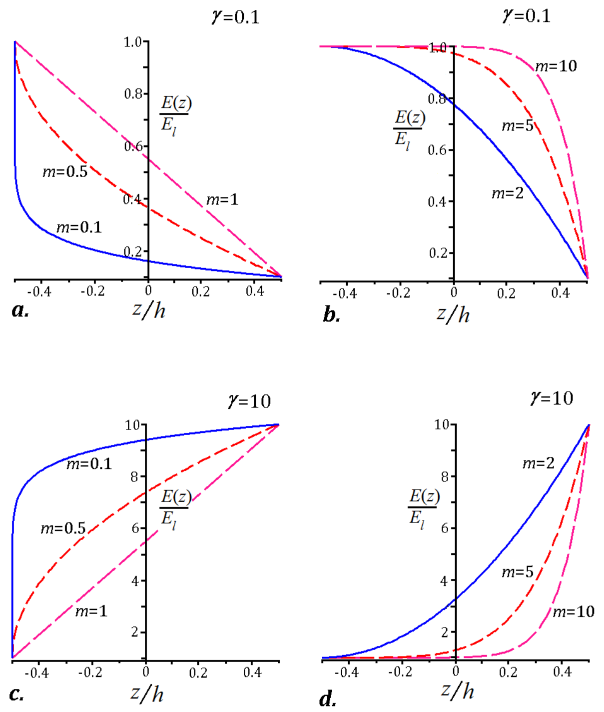

Fig. 11 variation of $E(z)/E_l$ vs. z/h for different γ,m in fig. 9

شکل 11 نمودار توزیع ناهمگنی به ازای مقادیرمختلف m,γ از شکل 9

8- نتیجه‌گیری

در این تحقیق پایداری دینامیکی یک تیر قوسی کم عمق سینوسی با ساختار مواد مدرج تابعی که تحت بارگذاری ضربه ای قرار دارد بررسی شده است، توزیع ناهمگنی آن به‌صورت تابع توانی در طول ضخامت تیر قوسی است، تمام ساختارهای تعادلی ممکن تیر قوسی کم عمق تعیین شدند و شرط لازم برای پایداری در مقابل فروجهش دینامیکی آن با استفاده از روش انرژی و تابع لیاپانوف به‌دست آمده است. محدوده پایدار در مقابل فروجهش و بار بحرانی متناظر آن برای مواد مدرج تابعی محاسبه شد و نتایج زیر در مقایسه مواد مدرج تابعی با مواد همگن به‌دست آمده است:

1- مرز ناحیه پایدار در مقابل فروجهش دینامیکی تیر قوسی کم‌عمق، برای مواد همگن برابر عدد ثابت $\lambda_a = 2$ است. این مرز برای مواد مدرج تابعی برابر $\lambda_a = 2(\bar{D}/\bar{B})^{1/2}$ است که می‌تواند کمتر یا بیشتر حالت همگن باشد.

2- مقدار بیشینه یا کمینه λ_a با بیشینه یا کمینه مقدار تابع توزیع ناهمگنی $E(z)$ ارتباطی ندارد.

3- فقط به ازای $\lambda_1 \geq 2(\bar{D}/\bar{B})^{1/2}$ امکان بروز ناپایداری فروجهش دینامیکی وجود دارد و آن نیز تنها زمانی روی می‌دهد که انرژی دریافتی سیستم توسط بار ضربه‌ای $\bar{F}$ بیش از مقدار انرژی نقطه بحرانی p^* باشد. در غیراین‌صورت پدیده فروجهش دینامیکی روی نخواهد داد و سیستم پایدار خواهد بود.

4- در تیرهای قوسی کم‌عمق همگن یک ارتباط خطی بین بار ضربه‌ای بحرانی $\bar{F}$ و λ_1 وجود دارد، در حالی که در تیر قوسی کم‌عمق با تابع ناهمگنی توانی، میزان بار بحرانی $\bar{F}$ به توزیع ناهمگنی آن وابسته است. به‌طوری که به ازای مقدار λ_1 یکسان برای هردو حالت همگن و ناهمگن، با انتخاب مقادیر مختلف برای m,γ می‌توان بار بحرانی $\bar{F}$

را به مراتب بیشتر از حالت همگن و یا کمتر از آن به‌دست آورد.

5- با مقایسه نتایج به‌دست‌آمده در این تحقیق با مقاله [26] نشان می‌دهد که نوع تابع ناهمگنی استفاده شده در تیرهای قوسی کم عمق نیز در بازه ناحیه پایدار λ_a و میزان نیروی بحرانی $\bar{F}$ مؤثر است.

9- فهرست علائم و نشانه‌ها

A	سطح مقطع تیر قوسی (m^2)
b	عرض سطح مقطع تیر قوسی (m)
B	ضریب سفتی معادل محوری سطح مقطع در طول تیر قوسی
C	ضریب سفتی کوپل محوری- خمشی سطح مقطع در طول تیر قوسی
D	ضریب سفتی خمشی سطح مقطع در طول تیر قوسی
e	ارتفاع اولیه مرکز تیر قوسی (m)
E	مدول الاستیسیته ($kgm^{-1}s^{-2}$)
E_l	مدول الاستیسیته لایه پایینی مقطع تیر قوسی ($kgm^{-1}s^{-2}$)
E_u	مدول الاستیسیته لایه بالایی مقطع تیر قوسی ($kgm^{-1}s^{-2}$)
F	بار ضربه‌ای بحرانی (kgs^{-1})
h	ضخامت تیر قوسی در راستای قائم(m)
H	نیروی محوری تیر قوسی($kgms^{-2}$)
I	ممان اینرسی مقطع تیر قوسی(m^4)
L	فاصله بین دو تکیه‌گاه تیر قوسی (m)
m	توان چگالی مواد مدرج تابعی
M	گشتاور خمشی(kgm^2s^{-2})
q	بار گسترده بر تیر قوسی(kgs^{-2})
Q	مؤلفه تابع زمانی بار گسترده بر تیر قوسی (kgs^{-2})
R	مؤلفه تابع مکانی بار گسترده بر تیر قوسی (kgs^{-2})
t	زمان(s)
T	انرژی جنبشی سیستم (J) (kgm^2s^{-2})
u	جابه‌جایی محوری خط مرکزی تیر قوسی (m)
U	انرژی کرنشی سیستم (J) (kgm^2s^{-2})
V	نیروی برشی ($kgms^{-2}$)
w	منحنی خط مرکز تیر قوسی پس از بارگذاری (m)
w_0	منحنی خط مرکز تیر قوسی پیش از بارگذاری(m)
W	کار انجام‌شده توسط نیروی خارجی (J) (kgm^2s^{-2})
x	مؤلفه افقی خط مرکز تیر قوسی (m)
z	مختصه یک نقطه مادی بر سطح مقطع تیر قوسی در جهت قائم (m)

علائم یونانی

α_n	پارامتر تعیین‌کننده شکل نهایی تیر قوسی بی‌بعد
β_n	پارامتر بی‌بعد تعیین‌کننده سرعت تعمیم‌یافته
γ	نسبت ناهمگنی مواد مدرج تابعی
ε	کرنش محوری یک نقطه مادی
ε_0	کرنش محوری
κ	تغییر انحنای خط مرکزی تیرقوسی (m^{-1})
λ_n	پارامتر تعیین‌کننده شکل اولیه تیر قوسی بی‌بعد
μ_0	جرم بر واحد طول افقی تیر قوسی (kgm^{-1})
ξ	مؤلفه افقی خط مرکز تیر قوسی بی‌بعد
Π	انرژی کل سیستم (J) (kgm^2s^{-2})
σ	تنش نرمال ($kgm^{-1}s^{-2}$)
τ	متغیر زمان بی‌بعد

10- مراجع

[1] J. S. Chen, J. S. Lin, Stability of a shallow arch with one end moving at constant speed, *Non-Linear Mechanics*, Vol. 41, No. 5, pp. 706–715, 2006.

[2] S. P. Timoshenko, Buckling of flat curved bars and slightly curved plates, *ASME Journal Applied Mechanics*, Vol. 2, pp. 17–20, 1935.

[3] Y. C. Fung, A. Kaplan, Buckling of low arches or curved beams of small curvature, *National Advisory Committee for Aeronautics*, 1952.

[4] M. H. Lock, The snapping of a shallow sinusoidal arch under a step pressure load, *AIAA Journal*, Vol. 4, No. 7, pp. 1249–1256, 1966.

[5] J. Levitas, J. Singer, T. Weller, Global dynamic stability of a shallow arch by Poincare-like simple cell mapping, *Non-Linear Mechanics*, Vol. 32, No. 2, pp. 411–424, 1997.

[6] N. J. Mallon, R. H. B. Fey, H. Nijmeijer, G. Q. Zhang, Dynamic buckling of a shallow arch under shock loading considering the effects of the arch shape, *Non-Linear Mechanics*, Vol. 41, No. 9, pp. 1057–1067, 2006.

[7] J. S. Chen, W. C. Ro, Dynamic response of a shallow arch under end moments, *Sound and Vibration*, Vol. 326, No. 1, pp. 321–331, 2009.

[8] Y. Chandra, I. Stanciulescu, L. N. Virgin, T. G. Eason, S. M. Spottswood, A numerical investigation of snap-through in a shallow arch-like model, *Sound and Vibration*, Vol. 332, No. 10, pp. 2532–2548, 2013.

[9] M. R. Elhami, M. Zeinali, Dynamic stability analysis of a two free-end beam subject to a non-conservative following force, *Aerospace Mechanics*, Vol. 7, No. 1, pp. 15-26, 2012. (in Persian فارسی)

[10] A. M. Bataineh, M. I. Younis, Dynamics of a clamped–clamped microbeam resonator considering fabrication imperfections, *Microsystem Technologies*, Vol. 21, No. 11, pp. 2425-2434, 2015.

[11] C. S. Hsu, on dynamic stability of elastic bodies with prescribed initial conditions, *Engineering Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 1–21, 1966.

[12] G. J. Simitses, *Dynamic Stability of Suddenly Loaded Structures*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[13] N. J. Hoff, V. G. Bruce, Dynamic analysis of the buckling of laterally loaded flat arches, *Mathematics and Physics*, Vol. 32, pp. 276–288,1954.

[14] C. S. Hsu, The effects of various parameters on the dynamic stability of a shallow arch, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 34, No. 2, pp. 349–358, 1967.

[15] C. S. Hsu, Stability of shallow arches against snap-through under timewise step loads, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35, No. 1, pp. 31–39, 1968.

[16] J. S. Chen, J. S. Lin, Dynamic snap-through of a laterally loaded arch under prescribed end motion, *International Journal of Solids and Structures* , Vol. 40, No. 18, pp. 4769–4787, 2003.

[17] J. S. Chen, J. S. Lin, Dynamic snap-through of a shallow arch under a moving point load, *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 126, No. 4, pp. 514–519, 2004.

[18] Y. L. Pi, M. A. Bradford, Nonlinear in-plane elastic buckling of shallow circular arches under uniform radial and thermal loading, *Mechanical Sciences*, Vol. 52, No. 1, pp. 75–88, 2010.

[19] Y. L. Pi, M. A. Bradford, Nonlinear dynamic buckling of shallow circular arches under a sudden uniform radial load, *Sound and Vibration*, Vol. 331, No. 18, pp. 4199–4217, 2012.

[20] Y. L. Pi, M. A. Bradford, In-plane stability of preloaded shallow arches against dynamic snap-through accounting for rotational end restraints, *Engineering Structures*, Vol. 56, No. 11, pp. 1496–1510, 2013.

[21] J. Ha, S. Gutman, S. Shon, S. Lee, Stability of shallow arches under constant load, *Non-Linear Mechanics*, Vol. 58, No. 1, pp. 120-127, 2014.

[22] H. Alidoost, J. Rezaee Pazhand, Dynamic stability of laminated composite beam subjected to follower force, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 10, pp. 233-239, 2015. (in Persian فارسی)

[23] A. Rastgo, H. Shafie, A. Allahverdizadeh, Instability of curved beams made of functionally graded material under thermal loading, *Mechanics and Materials in Design*, Vol. 2, No. 1-2, pp. 117–128, 2005.

[24] S. Xi, L. Shirong, Nonlinear stability of fixed-fixed FGM arches subjected to mechanical and thermal loads, *In Advanced Materials Research*, Vol. 33, pp. 699-706, 2008.

[25] A. A. Atai, M. H. Naei, S. Rahrovan, Limit load analysis of shallow arches made of functionally bi-directional graded materials under mechanical loading, *Mechanical Science and Technology*, Vol. 26, No. 6, pp. 1811-1816, 2012.

[26] A. A. Atai, M. Alizadeh, Analytical investigation of dynamic stability of FGM shallow arches, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 4, pp.310-320, 2015. (in Persian فارسی)

[27] Shen, H. S. *Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells*. CRC press, 2009.