



## بررسی رفتار دینامیکی یک سیستم دوار به دو روش مدلسازی غیر خطی و المان محدود

محمد صالح صدوقی<sup>1</sup>، سیامک اسماعیل زاده خادم<sup>2\*</sup>، سعید باب<sup>3</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

3- دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

\* تهران، صندوق پستی 14155-111، khadem@modares.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 16 خرداد 1395

پذیرش: 04 مرداد 1395

ارائه در سایت: 16 شهریور 1395

کلید واژگان:

ارتعاشات سیستم دوار

مدلسازی غیر خطی

المان محدود

اختلاف فاز نابالانسی

### چکیده

در این مقاله به بررسی رفتار دینامیکی یک سیستم دوار ایستا شامل روتور، بلبرینگ و دیسک در دوره‌های مختلف به دو روش المان محدود و مدلسازی غیر خطی پرداخته شده است. وجود مشخصه‌های غیر خطی در این نوع سیستمها باعث می‌شود که مدلسازی و تحلیل‌های خطی از دقت کافی برخوردار نباشد، لذا در این مقاله به استخراج و حل معادلات دینامیکی غیرخطی سیستم مورد نظر پرداخته شده است. به منظور استخراج معادلات از روش همیلتون استفاده شده و برای کاهش تعداد معادلات، تبدیل مختصات مختلط بکار گرفته می‌شود. پس از حل معادلات، جهت بررسی خواص ارتعاشی سیستم، نمودارهای پاسخ زمانی، مدار دینامیکی، پاسخ فرکانسی و شکل مود ارتعاشات روتور ترسیم می‌شود. به منظور صحت سنجی نتایج تحلیلی، از روش المان محدود در نرم افزار انسیس استفاده شده است. مقایسه نتایج حاصل از مدلسازی غیر خطی با نتایج حاصل از حل المان محدود انطباق خوبی در فرکانس‌های رزونانس سیستم در سه مود اول مشاهده می‌شود که نشان از دقت کافی در مدلسازی غیر خطی دارد. از مدلسازی غیر خطی می‌توان به این نتیجه رسید که نرخ کاهش برای تمامی مودها منفی است که نشانه پایداری کلیه مودها است همچنین بیشینه دامنه ارتعاشات در یاتاقان و روتور، به ترتیب در مود سوم و دوم رخ می‌دهد. اختلاف فاز نابالانسی 90 درجه در دو دیسک، باعث تحریک هر سه مود فرکانسی سیستم می‌شود در حالی که به ازای اختلاف فاز 0 و 180 درجه به ترتیب فقط مودهای فرد (اول و سوم) و زوج (دوم) تحریک می‌شوند.

## Dynamic behavior investigation of a rotating system by two methods of nonlinear modeling and finite element

Mohammad Saleh Sadooghi<sup>1</sup>, Siamak EsmailZadeh Khadem<sup>1\*</sup>, Saeid Bab<sup>1</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

\* P.O.B. 14155-111 Tehran, Iran, khadem@modares.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 05 June 2016  
Accepted 25 July 2016  
Available Online 06 September 2016

#### Keywords:

Vibration of rotating systems  
nonlinear modeling  
finite element  
unbalance phase difference

### ABSTRACT

In this paper the dynamic behavior of a rotating system which includes rotor (shaft), ball bearing and disk in stationary condition and different speeds is investigated. There are nonlinear characteristics in these systems which make the linear modeling inaccurate. So, in this paper the nonlinear dynamic equations of the system are derived and solved. To derive the equations of the system, Hamiltonian method is used, and complex coordinate transform is employed to reduce the number of equations. After solving the equations, to investigate the vibrational properties of the system, time response diagram, dynamic orbit, frequency response, and mode shape of the rotor is plotted. To validate the analytical results, finite element method by ANSYS (workbench) software is used. There is good conformity between the analytical results and finite element results in resonance frequencies of the system in the first three modes which indicates the sufficient accuracy in nonlinear modeling. It can be concluded from nonlinear modeling that the decay rate is negative for the all modes, which indicates the stability of them. Also, the maximum vibration amplitude in the bearing and rotor occurs in third and second modes respectively. Unbalance phase difference of 90 degrees in two discs causes the excitation of all three frequency modes, whereas by unbalance phase difference of 0 or 180 degrees in two discs, only the odd modes (first and third) and the even modes (second) are excited respectively.

### 1- مقدمه

به بررسی رفتار روتوری که معمولا با تکانه‌ی زاویه‌ای قابل ملاحظه‌ای می‌چرخد، می‌پردازد. بر اساس تعریف استاندارد ایزو، روتور جسمی است که بر روی دو تکیه گاه به گونه‌ای قرار گرفته است که امکان چرخش آزاد آن حول یک محور در فضا موجود باشد.

در بررسی دینامیک روتورها، ایجاد یک مدل فیزیکی مناسب از سیستم واقعی برای بررسی رفتار ارتعاشی سیستم ضروری است. در زمینه‌ی

توربوماشینها از جمله تجهیزاتی هستند که به طور گسترده‌ای در تولید کار و انرژی در صنایع مختلف استفاده می‌شوند. توربینهای گاز، توربینهای بادی، توربینهای بخار، توربینهای آبی و ... نمونه‌هایی از توربوماشینها می‌باشند. اینگونه ماشینها معمولا شامل اجزای متحرکی هستند که با عنوان روتور شناخته می‌شوند. دینامیک روتورها یکی از شاخه‌های علم دینامیک است که

Please cite this article using:

M. S. Sadooghi, S. EsmailZadeh Khadem, S. Bab, Dynamic behavior investigation of a rotating system by two methods of nonlinear modeling and finite element, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 8, pp. 303-314, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

از نوع هارمونیک در شرایط خاص می‌شود. ایشیدا و اینویه [4] کاهش ارتعاشات سیستم روتور غیرخطی را با استفاده از جاذب دینامیکی مورد بررسی قرار دادند. یاتاقان‌های بلبرینگ شیار عمیق<sup>12</sup> یک ردیفه به دلیل لقی، خاصیت فنریت غیرخطی دارند. آنها با تحلیل نشان دادند که خصوصیت غیرخطی روی خصوصیات ارتعاشی روتور اثر دارد و همچنین برای روتوری که دارای فنریت تکیه‌گاهی غیرخطی متقارن همسانگرد<sup>13</sup> است، نمی‌توان از تئوری نقطه ثابت<sup>14</sup> برای بهینه‌سازی جاذب دینامیکی استفاده کرد، زیرا ارتعاشات به دلیل اثر غیرخطی افزایش پیدا می‌کند. آنها همچنین با در نظر گرفتن اثرات غیرخطی موجود در سیستم به بهینه‌سازی پارامترهای جاذب دینامیکی پرداختند و از روش عددی نیوتن-رافسون برای طراحی جاذب دینامیکی استفاده کرده و مشخص کرده‌اند که با در نظر گرفتن اثرات غیرخطی موجود در سیستم می‌توان جاذب دینامیکی مناسب برای سیستم طراحی کرد. ایشیدا [5] روش جدید فنریت غیرپیوسته<sup>15</sup> را برای کاهش غیرفعال ارتعاشات روتور و همچنین روشی برای افزایش کارایی متعادل‌کننده‌های گلوله‌ای<sup>16</sup> اتوماتیک ارائه کرده است. روش فنریت غیرپیوسته علاوه بر کاهش دامنه ارتعاشات در حالت رزونانس، برای حذف نوسانات ناپایدار شفت‌های غیرمتقارن<sup>17</sup> و روتورهایی که به طور ناقص با مایع پر شده‌اند، قابل استفاده است. وی نشان داده است که متعادل‌کننده گلوله‌ای اتوماتیک، ارتعاشات را بالاتر از سرعت بحرانی اصلی<sup>18</sup> کاهش می‌دهد، اما اصطکاک می‌تواند کارایی آن را کاهش دهد. با استفاده همزمان از فنریت غیر پیوسته و متعادل‌کننده‌های گلوله‌ای دامنه نوسانات روتور در کل ناحیه فرکانسی (رزونانس و ناحیه بالاتر از آن) به طور مناسب کاهش پیدا می‌کند. بای و سونگ [6] به بررسی نوع جدیدی از جاذب دینامیکی مغناطیسی پرداختند و روشی برای میزان کردن فرکانس طبیعی جاذب ارائه کردند. این جاذب در محل یاتاقان‌ها به سیستم روتور- یاتاقان متصل است و تغییر فرکانس طبیعی سیستم و جاذب، با استفاده از تغییر لقی بین سطح روتور و سطح داخلی آهن‌ربای الکتریکی به دست می‌آید. پاتیل و همکاران [7] به بررسی اثر خرابی در حلقه گردش<sup>19</sup> بلبرینگ بر روی ارتعاشات روتور پرداخته‌اند. برای استخراج معادلات، فنریت بلبرینگ به صورت غیرخطی و با استفاده از تئوری هرتز استخراج شده است. نتایج ارتعاشی در حوزه زمان و فرکانس استخراج شده است. محاسبات برای یاتاقان شیار عمیق *اس کا اف*<sup>20</sup> 6010 صورت گرفته است. بای و همکاران [8] به بررسی رفتار ارتعاشی یک سیستم روتور و بلبرینگ پرداخته‌اند. از یک مدل گسسته شش درجه آزادی برای مدل‌سازی رفتار سیستم با در نظر گرفتن فنریت غیرخطی و لقی بلبرینگ‌ها استفاده شده است. از نمودارهای پاسخ فرکانسی، مدار دینامیکی و آشناری برای بررسی رفتار سیستم استفاده شده است. در پاسخ سیستم در بعضی از دورها پاسخ زیرهارمونیک مشاهده شده است. ژو و همکاران [9] به بررسی رفتار ارتعاشات کوپل شده یک روتور بر روی بلبرینگ و دمپینگ فیلم فشاری<sup>21</sup> پرداخته‌اند. معادلات سیستم به صورت عددی حل شده است و کارایی دمپینگ فیلم فشاری در کاهش ارتعاشات سیستم به صورت عددی و

مدل‌سازی سیستم‌های دوار تلاش‌های زیادی انجام شده است. اولین مدل تئوری که در این زمینه وجود دارد مدل جفکات می‌باشد که در سال 1914 توسط هنری هومان جفکات<sup>1</sup> ارائه شده است. مدل جفکات شامل یک شفت انعطاف‌پذیر بدون جرم است که در وسط این شفت یک دیسک قرار گرفته است. از آن سال تاکنون مدل‌های مختلفی برای تحلیل دینامیک سیستم‌های دوار ارائه شده است. همچنین در سیستم‌های واقعی وقوع پدیده‌هایی از قبیل رزونانس زیرهارمونیک<sup>2</sup>، رزونانس داخلی<sup>3</sup>، رزونانس فوق‌هارمونیک<sup>4</sup>، پاسخ آشوبناک<sup>5</sup>، پرش<sup>6</sup>، انشعاب<sup>7</sup> و ... امکان دارد، که این پدیده‌ها با مدل‌سازی‌های خطی قابل بررسی نمی‌باشند. بنابراین ارائه‌ی یک مدل غیرخطی که بتواند رفتار سیستم را به درستی پیش‌بینی نماید، ضروری می‌باشد.

اما در سال‌های اخیر پژوهش‌های گوناگونی در زمینه مدل‌سازی و تحلیل سیستم‌های دوار انجام شده است. سینها [1] به بررسی خصوصیات دینامیکی مدل انعطاف‌پذیر روتور پره‌دار با در نظر گرفتن اصطکاک خشک در نوک پره به دلیل برخورد سایشی<sup>8</sup> پرداخته است. با استفاده از معادلات دینامیکی پره‌های دوار شعاعی یک سر گیردار تحت نیروی گریز از مرکز، معادلات مدل کامل روتور پره‌دار انعطاف‌پذیر (به همراه دیسک) که توسط تعدادی یاتاقان در نقاط مختلف نگهداری می‌شود، به دست آمده است. معادلات دیفرانسیل پاره‌ای کوپل شده روتور و پره‌ها با استفاده از روش گالریکین تبدیل به معادلات دیفرانسیل معمولی کوپل شده، گشته است و این معادلات به صورت عددی حل شده‌اند. از آنجا که فنریت یاتاقان‌ها به جابجایی مرتبط است، ماتریس فنریت وابسته به زمان است و اصطلاحاً تحریک پارامتریک در سیستم وجود دارد. لسافره و همکاران [2] به بررسی مدل کامل و انعطاف‌پذیر روتور و پره‌های آن پرداخته‌اند. پره‌ها و روتور با استفاده از تئوری اویلر- برنولی مدل شده و ارتعاشات خمشی پره‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. اثر ژيروسکوپی، اثر نرم‌شدگی چرخشی<sup>9</sup> و اثر سفت‌شدگی گریز از مرکز<sup>10</sup> در این مدل در نظر گرفته شده است. دو نوع ناپایداری در این سیستم مشاهده شده است که یکی حول فرکانس رزونانس اول رخ می‌دهد و دیگری نیز بر اثر کوپلینگ بین مدها در فرکانس‌های بالاتر رخ می‌دهد. آنها نشان داده‌اند که افزایش زاویه انحراف باعث کاهش ناحیه ناپایداری در سازه می‌شود. ایشیدا و همکاران [3] اثر جاذب آونگ گریز از مرکز<sup>11</sup> روی کاهش ارتعاشات پیچشی روتور را بررسی کردند. از آنجا که فرکانس‌های طبیعی جاذب آونگ گریز از مرکز وابسته به سرعت دورانی روتور است، نقاط پادرزونانس می‌توانند در سرعت‌های مختلف جایجا شوند و در نتیجه جاذب آونگ گریز از مرکز این پتانسیل را دارد که در تمامی سرعت‌ها ارتعاشات پیچشی را حذف کند. در این تحقیق فرض شده است که روتور تحت تحریک نیروی نوسانی موتور است و این عامل باعث ارتعاشات پیچشی در روتور می‌شود. محاسبات به صورت تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی انجام گرفته است. نتایج آنها نشان می‌دهد که جاذب آونگ گریز از مرکز با اینکه اثر مناسبی روی کاهش ارتعاشات هارمونیک روتور دارد، باعث ایجاد رزونانس‌های بالا-هارمونیک مرتبه دوم و سوم می‌شود و همچنین باعث ایجاد ارتعاشات ناپایدار

<sup>12</sup> Deep groove<sup>13</sup> isotropic<sup>14</sup> Fixed points theorem<sup>15</sup> the discontinuous spring characteristics<sup>16</sup> Ball balancer<sup>17</sup> asymmetrical<sup>18</sup> the major critical speed<sup>19</sup> raceway<sup>20</sup> SKF 6010<sup>21</sup> squeeze film damper<sup>1</sup> Henry Homan Jeffcott<sup>2</sup> Sub-harmonic resonance<sup>3</sup> Internal resonance<sup>4</sup> Super-harmonic resonance<sup>5</sup> Chaotic response<sup>6</sup> Jump<sup>7</sup> Bifurcation<sup>8</sup> Rub impact<sup>9</sup> The spin softening effects<sup>10</sup> The centrifugal stiffening effects<sup>11</sup> Centrifugal pendulum

جدول 1 مشخصه‌های فیزیکی اجزای سیستم دوار

Table 1 physical properties of rotating system components

مقدار	مشخصه
0.01194 kgm <sup>2</sup>	ممان اینرسی جرمی قطبی هر دیسک
0.00614 kgm <sup>2</sup>	ممان اینرسی جرمی قطری هر دیسک
3.780 kg	جرم هر دیسک
7800 kgm <sup>-3</sup>	چگالی شفت و دیسکها
4.790 kg	جرم شفت

در جدول 2 مشخصه‌های ابعادی بلبرینگ استفاده شده در این پژوهش که از نوع اس کاف 6010 ارائه شده است.

که  $d$ ،  $Z$ ،  $D_p$  و  $\alpha$  به ترتیب قطر ساچمه، تعداد ساچمه، قطر پیچ<sup>4</sup> و زاویه تماس است.

### 3- بررسی رفتار دینامیکی سیستم به کمک روش المان محدود

به منظور بررسی رفتار دینامیکی سیستم مذکور و همچنین صحت سنجی نتایج مدلسازی غیر خطی، از روش المان محدود و از نرم افزار انسیس استفاده شده است. مدل شکل 1 با این شرط مرزی که پوسته بیرونی بلبرینگ ها کاملا مقید است، در نرم افزار مورد تحلیل قرار گرفته است. تحلیل از نوع سازه‌ای گذرا بوده و سرعت دورانی شفت به تدریج افزایش پیدا کرده است. لازم به ذکر است که گزینه‌های حل غیرخطی و اثرات ژیروسکوپی در تنظیمات نرم افزار انتخاب شده است. در شکل 2 نحوه مش زنی سیستم دیده می‌شود. المان مورد استفاده در تحلیل المان محدود از نوع سالید186<sup>5</sup> است که یک المان سه بعدی و 20 گره ایست که هر گره سه درجه آزادی دارد. در شکل 3 نمونه‌ای از نتایج تحلیل در حالتی که جرم نابالانسی با اختلاف فاز 180 درجه‌ای بر روی دو دیسک قرار گرفته است دیده می‌شود که متناظر با دومین رزونانس سیستم در فرکانس دورانی 140Hz است که بیشینه تنش در حدود 40 MPa در شفت ایجاد کرده است (جابجایی‌ها در شکل 3 اغراق آمیز است). نتایج خروجی تحلیل، پدیده رزونانس را در سه فرکانس 54.6Hz، 139.7Hz و 410.45Hz نشان می‌دهد.

### 4- استخراج معادلات غیر خطی سیستم

به منظور استخراج معادلات حاکم بر سیستم از روش همپیتون استفاده می‌شود. بدین منظور انرژیهای جنبشی و پتانسیل اجزای سیستم در ادامه محاسبه می‌گردد.

#### 4-1 انرژی جنبشی روتور

جدول 2 مشخصه‌های ابعادی بلبرینگ اس کاف 6010

Table 2 dimensional properties of SKF 6010 ball bearing

$d = 8.73 \text{ mm}$	$Z=14$
$D_p = 65 \text{ mm}$	$\alpha = 0$

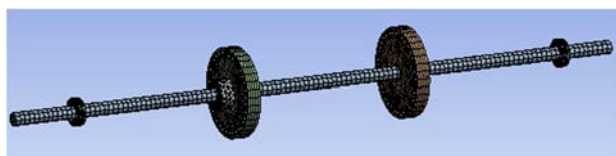


Fig. 2 Meshing quality in ANSYS workbench software

شکل 2 کیفیت مش زنی مدل در نرم افزار انسیس

آزمایشگاهی اثبات شده است. آنها همچنین نشان دادند که با افزایش میزان فنریت تکیه‌گاه، محدوده پاسخ غیر سنکرون سیستم بزرگتر شده است. ژانگ و همکاران [10] به بررسی ارتعاشات سیستم روتور و بلبرینگ پرداخته‌اند. آنها برای بررسی ارتعاشات سیستم از یک مدل پنج درجه آزادی و با در نظر گرفتن تغییرات زاویه تماس و پیش‌بار در بلبرینگ استفاده کردند. آنها نشان دادند که بدون در نظر گرفتن این خصوصیات، ارتعاشات روتور کمتر از حد واقعی استخراج می‌شود. لیو و همکاران [11] به بررسی ارتعاشات بلبرینگ تحت تاثیر شکل موج<sup>1</sup> سطح بلبرینگ که ناشی از عدم دقت ساخت است، پرداخته‌اند. برای بررسی سیگنال ارتعاشی و تعیین خواص آن از تئوری همبستگی سیگنال<sup>2</sup> استفاده شده است. آنها نشان دادند که این شکل موجی بر روی رفتار ارتعاشی سیستم به خصوص در فرکانس‌های پایین کاملا موثر است. هی و همکاران [12] به منظور مدلسازی ارتعاشات کوپل شده یک سیستم دوار، شتاب زاویه‌ای را نیز در نظر گرفته و اثرات آن بر روی دامنه ارتعاشات جانبی و پیچشی روتور مطالعه کرده است. چاندر و سگار [13] به منظور شبیه سازی عیوب در سیستمی شبیه به سیستم دوار مقاله حاضر، به مدلسازی خطی سیستم پرداخته و سپس به سیگنالهای خروجی را جهت عیب یابی تحلیل نموده‌اند.

در این مقاله به بررسی رفتار دینامیکی یک سیستم دوار ایستا<sup>3</sup> به صورت مدل روتور- بلبرینگ در دوره‌های متفاوت به دو روش المان محدود و مدلسازی غیر خطی پرداخته می‌شود. این سیستم به منظور شبیه سازی ارتعاشات ماشین آلات دوار طراحی شده است. در روش المان محدود از نرم افزار انسیس بهره گرفته شده است. در مدلسازی غیر خطی از روش همپیتون برای استخراج معادلات استفاده شده و برای کاهش تعداد معادلات، تبدیل به معادله روتور با سه مود، معادلات به فضای حالت انتقال داده شده و تبدیل به شش معادله مرتبه اول می‌شود. در نهایت با استفاده از روش رانگ-کوتا، معادلات حاصل به صورت عددی حل می‌شود. برای بررسی خواص ارتعاشی سیستم، نمودارهای پاسخ زمانی، مدار دینامیکی، پاسخ فرکانسی و شکل مود ارتعاشات روتور ترسیم می‌شود.

### 2- معرفی سیستم دوار

در شکل 1 شماتیکی از سیستم دوار مورد بحث در این مقاله به همراه ابعاد آن دیده می‌شود. مطابق این شکل، این سیستم از یک روتور (شفت) که تکیه گاه آن دو بلبرینگ است تشکیل شده است. به منظور بالانس سیستم از دو دیسک استفاده شده است که تقارن محوری دارند. این سیستم پس از ساخته شدن به عنوان مجموعه تست، در آزمایشگاه استفاده خواهد شد. مشخصه‌های فیزیکی اجزای سیستم به صورت جدول 1 است.

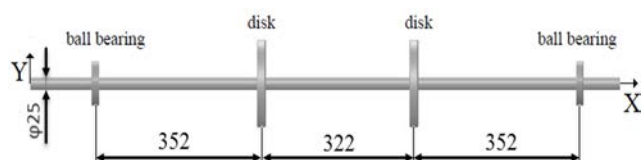


Fig. 1 A schematic view of studied rotating system (all dimensions in mm)

شکل 1 شماتیکی از سیستم دوار مورد مطالعه (همه اندازه ها به میلی متر)

<sup>4</sup> The bearing pitch diameter

<sup>5</sup> Solid186

<sup>1</sup> waviness

<sup>2</sup> signal coherence theory

<sup>3</sup> stationary

4-2- انرژی پتانسیل روتور

انرژی پتانسیل خمشی روتور برابر است با:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI_z \left( \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx \quad (8)$$

4-3- استهلاک در روتور

کار ناپایستار دمپینگ روی روتور برابر است با:

$$\delta W_{nc-rotor} = c_{rotor} \dot{W} \delta W + c_{rotor} \dot{v} \delta v \quad (9)$$

که در این رابطه  $c_{rotor}$  ضریب دمپینگ روتور است.

4-4- انرژی جنبشی دیسکها

دیسک به صورت صلب فرض شده است و بر این اساس توانایی ذخیره انرژی پتانسیل را نخواهد داشت. دیسکها دارای ممان اینرسی قطبی و قطری (خمشی)  $J_{diski}$  و  $I_{diski}$  می‌باشند. با این فرض و از آنجا که دیسکها در نقاط  $(x=x_{di})$  روی روتور نصب شده است، انرژی جنبشی آنها به صورت زیر خواهد بود:

$$T_{disk1} = \left\{ m_{disk1} (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + J_{disk1} \Omega^2 + I_{disk1} (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) \right\} \delta(x - x_{d1}), \quad (10-الف)$$

$$T_{disk2} = \left\{ m_{disk2} (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + J_{disk2} \Omega^2 + I_{disk2} (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) \right\} \delta(x - x_{d2}), \quad (10-ب)$$

انرژی جنبشی ناشی از نابالانسی‌های جرمی از رابطه زیر به دست می‌آید [15]:

$$T_{imd1} = \frac{1}{2} \left\{ m_{disk1} \Omega^2 [e_{yd1}^2 + e_{zd1}^2] - 2m_{disk1} \Omega \{ \dot{v} e_{zd1} \} + \dot{w} e_{yd1} \} \sin \Omega t + [ \dot{v} e_{yd1} - \dot{w} e_{zd1} ] \cos \Omega t \right\} \delta(x - x_{d1}) \quad (11-الف)$$

$$T_{imd2} = \frac{1}{2} \left\{ m_{disk2} \Omega^2 [e_{yd2}^2 + e_{zd2}^2] - 2m_{disk2} \Omega \{ \dot{v} e_{zd2} \} + \dot{w} e_{yd2} \} \sin \Omega t + [ \dot{v} e_{yd2} - \dot{w} e_{zd2} ] \cos \Omega t \right\} \delta(x - x_{d2}) \quad (11-ب)$$

که در آن  $e_{zd1}$  و  $e_{yd1}$  به ترتیب توزیع جرم خارج از مرکز<sup>3</sup> در جهت محورهای  $Y$  و  $Z$  دیسکها می‌باشد. روابط (10) و (11) مجموعاً انرژی جنبشی یک شفت نابالانس را تشکیل می‌دهند.

4-5- مدلسازی غیر خطی بلبرینگ

برای مدلسازی ارتعاشی ساچمه‌های بلبرینگ و تماس آنها با بدنه، می‌توان این سیستم را به صورت جرم و فنر در نظر گرفت. تغییر شکل الاستیک بین ساچمه‌ها و حلقه گردش<sup>4</sup> یک پدیده غیرخطی است و رابطه غیرخطی بین جابجایی  $(x)$  و نیرو  $(F)$  در این حالت با استفاده از رابطه معروف کرامر به صورت زیر به دست می‌آید [16]:

$$K_b = \frac{nF}{x_r} \quad (12)$$

که در این رابطه  $n=1.5$  و  $x_r = 1.2 \times 10^{-7} \times d^{-1/3} \times z^{-2/3} \times F^{2/3}$  می‌باشد. همچنین به کمک مرجع [17] رابطه غیر خطی نیروی فنریت بلبرینگ به صورت زیر استخراج می‌شود

$$F = K_b [(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i) - C_r]^{3/2} \quad (13)$$

که در این رابطه  $C_r$  لقی در محل سطح تماس پاتاقان و ساچمه و  $\theta_i$  زاویه

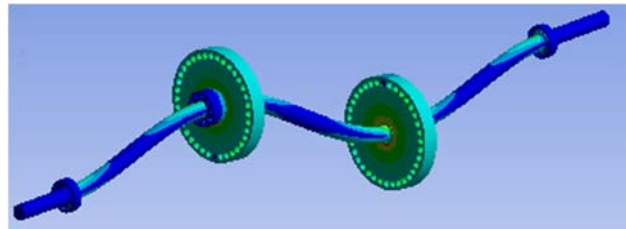


Fig. 3 ANSYS results associated with second system resonance in unbalance phase difference of 180 degrees in two discs

شکل 3 نتایج نرم افزار انسیس متناظر با دومین رزونانس سیستم در حالت اختلاف فاز 180 درجه‌ای جرمهای نابالانسی در دو دیسک

دستگاه XYZ در شکل 1 دستگاه اینرسی است که محور  $X$  در امتداد محور طولی روتور قرار دارد و شفت حول محور  $X$  می‌چرخد. راستای  $Y$  و  $Z$ ، راستای ارتعاشات روتور است که عمود بر هم می‌باشند. اینرسی دورانی<sup>1</sup> شفت در معادلات در نظر گرفته شده، ولی از تغییر شکل برشی<sup>2</sup> صرفنظر شده است. دستگاه مختصات XYZ متصل به مقطع دلخواه در مقطع  $x$  روتور است.

با صرفنظر کردن از ارتعاشات محوری روتور، جابجایی جانبی روتور در دو راستای  $Y$  و  $Z$  به ترتیب  $v(x,t)$  و  $w(x,t)$  در نظر گرفته شده است. اگر  $x$  محل دلخواه یک مقطع بر روی روتور باشد، موقعیت یک ذره در آن مقطع برابر است با:

$$R_{rotor} = x e_x + v e_y + w e_z + y e_2 + z e_3 \quad (1)$$

$$\dot{R}_{rotor} = \dot{v} e_y + \dot{w} e_z + \omega (y e_2 + z e_3) \quad (2)$$

که در این دو رابطه  $e_x, e_y, e_z$  به ترتیب بردارهای یکه در راستای دستگاه XYZ است. همچنین  $e_1, e_2, e_3$  بردارهای یکه در راستای دستگاه XYZ است و  $\omega = [\Omega, 0, 0; 0, \partial^2 v / \partial x \partial t, 0; 0, 0, \partial^2 w / \partial x \partial t]$  و نسبت به XYZ است. انرژی جنبشی شفت  $(T)$  برای یک شفت کاملاً بالانس شده به صورت زیر محاسبه می‌گردد [14]:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A \rho \dot{R}_{rotor} \dot{R}_{rotor} dA dx \quad (3)$$

$$\dot{R}_{rotor} \dot{R}_{rotor} = (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \Omega^2 (y^2 + z^2) + \dot{v}^2 z^2 + \dot{w}^2 y^2 - 2yzv'\dot{w}' \quad (4)$$

که  $\rho$  چگالی جرمی،  $A$  سطح مقطع و  $l$  طول روتور قبل از تغییر شکل می‌باشد. با فرض یکنواخت و دایره بودن مقطع روتور و با استفاده از روابط (1) الی (4) رابطه (3) به صورت رابطه (5) در خواهد آمد:

$$T_{rotor} = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ m_r (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + I_1 \Omega^2 + I_2 \dot{v}^2 + I_3 \dot{w}^2 - I_{23} v' \dot{w}' \right\} dx \quad (5)$$

که در این رابطه  $m_r, I_1, I_2, I_3$  و  $I_{23}$  به ترتیب به صورت زیر است:

$$m_r = \int_A \rho dA, \quad I_1 = \int_A \rho (y^2 + z^2) dA, \quad I_2 = \int_A \rho z^2 dA \\ I_3 = \int_A \rho y^2 dA, \quad I_{23} = \int_A \rho yz dA \quad (6)$$

در رابطه بالا،  $m_r$  توزیع جرمی شفت،  $I_1$  ممان اینرسی جرمی قطبی،  $I_2$  ممان اینرسی جرمی قطری (خمشی) حول محور  $Y$  و  $I_3$  ممان اینرسی جرمی قطری (خمشی) حول محور  $Z$  روتور می‌باشد. به دلیل تقارن سطح مقطع  $I_2=I_3$  و  $I_{23}=0$  است که در نتیجه رابطه (5) به صورت زیر در می‌آید:

$$T_{rotor} = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ m_r (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + I_1 \Omega^2 + I_2 (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) \right\} dx \quad (7)$$

<sup>3</sup> eccentricity  
<sup>4</sup> raceway

<sup>1</sup> rotary inertia  
<sup>2</sup> shear deformation

$$I_1^* = \frac{I_1}{m_r l^2}, I_2^* = \frac{I_2}{m_r l^2}, C_r^* = \frac{C_r}{l}, K_{b1}^* = \frac{K_{b1} l^{7/2}}{EI_1 \lambda_1^4},$$

$$K_{b2}^* = \frac{K_{b2} l^2}{EI_2 \lambda_1^4}, C_{rot}^* = \frac{c_r l^2}{\lambda_1^2 \sqrt{m_r EI_2}}, e_{yd1}^* = \frac{m_{disk1} e_{yd1}}{m_r l^2},$$

$$e_{yd2}^* = \frac{m_{disk2} e_{yd2}}{m_r l^2}, e_{zd1}^* = \frac{m_{disk1} e_{zd1}}{m_r l^2},$$

$$e_{zd2}^* = \frac{m_{disk2} e_{zd2}}{m_r l^2}, x_{b1}^* = \frac{x_{b1}}{l}, x_{b2}^* = \frac{x_{b2}}{l},$$

$$x_{d1}^* = \frac{x_{d1}}{l}, x_{d2}^* = \frac{x_{d2}}{l} \quad (17)$$

که سرانجام معادله بدون بعد سیستم به صورت رابطه (18) درمی آید:

$$\ddot{z}^* + c_r^* \dot{z}^* + i l_1^* \Omega^* \dot{z}^* - l_2^* \ddot{z}^* + EI_2^* z^{(IV)} + [m_{disk1}^* \ddot{z}^* - I_{disk1}^* \ddot{z}^* + i l_{disk1}^* \Omega^* \dot{z}^* - m_{disk1}^* i \Omega^{*2} (i e_{zd1}^* + e_{zd1}^*) e^{i \Omega^* t}] \delta(x - x_{d1})$$

$$+ i l_{disk2}^* \Omega^* \dot{z}^* - [m_{disk2}^* \ddot{z}^* - I_{disk2}^* \ddot{z}^* + i l_{disk2}^* \Omega^* \dot{z}^* - m_{disk2}^* i \Omega^{*2} (i e_{zd2}^* + e_{zd2}^*) e^{i \Omega^* t}] \delta(x - x_{d2})$$

$$+ \sum_{i=1}^z K_{b1}^* [\text{imag}(z^* e^{i \theta_i}) - C_r^*]^{\frac{3}{2}} \text{heaviside}(\text{imag}(z^* e^{i \theta_i}) - C_r^*) \delta(x - x_{b1})$$

$$+ \sum_{i=1}^z K_{b2}^* [\text{imag}(z^* e^{i \theta_i}) - C_r^*]^{\frac{3}{2}} \text{heaviside}(\text{imag}(z^* e^{i \theta_i}) - C_r^*) \delta(x - x_{b2}) = 0 \quad (18)$$

8-4- اعمال روش جداسازی گالرکین

معادله (18) که معادله حرکت روتور مورد بحث است همچنان در فضای مکان و زمان است. برای اعمال روش گالرکین و جداسازی جملات زمان و مکان معادله، از شکل مود استاندارد برای روتور استفاده می شود. برای روتور مورد بحث، از شکل مود تیر دو سر آزاد که در شکل 4 دیده می شود [17,14]، مطابق رابطه (19) استفاده شده است:

$$\psi_i(x^*) = \left\{ \cos(\beta_i l x^*) + \cosh(\beta_i l x^*) \right\} + \frac{\cos(\beta_i l) - \cosh(\beta_i l)}{\sinh(\beta_i l) - \sin(\beta_i l)} \cdot \left\{ \sin(\beta_i l x^*) - \sinh(\beta_i l x^*) \right\},$$

$$\beta_1 l = 4.73, \beta_2 l = 7.58, \beta_3 l = 10.99, \quad 0 < x^* < 1 \quad (19)$$

جملات زمان و مکان ارتعاشات روتور با استفاده از رابطه (20) مجزا شده و به صورت معادلات دیفرانسیل عادی در می آید.

$$z^*(x^*, t^*) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x^*) q_{zi}(t), \quad n \geq 1 \quad (20)$$

در رابطه بالا n تعداد مودهای انتخاب شده برای اعمال روش گالرکین در معادله روتور است.

9-4- حل معادله حرکت سیستم

پس از اعمال روش گالرکین به معادله روتور با سه مود، معادلات به فضای حالت انتقال داده شده و تبدیل به شش معادله مرتبه اول شده است. با

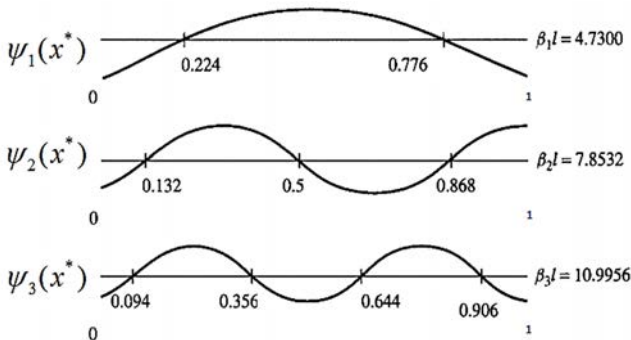


Fig. 4 first three modes of a free-free beam

شکل 4 سه شکل مود اول تیر دو سر آزاد [14]

ساجمه نام نسبت به محور عمود می باشد که به صورت زیر است:

$$\theta_i = \omega_c t + 2\pi i / Z \quad (14)$$

که در این رابطه  $\omega_c$  و Z به ترتیب سرعت زاویه ای قفسه بلبرینگ و تعداد ساجمه هاست و t نیز به زمان اشاره دارد.

6-4- استخراج معادلات

با استفاده از ترم های انرژی جنبشی، پتانسیل و استهلاک که در بخش های گذشته استخراج شد و در نظر گرفتن نیروی بلبرینگ ها و با استفاده از اصل همیتون، معادلات ارتعاشات اجزای سیستم به صورت زیر به دست می آید:

$$m_r \ddot{v} + c_r \dot{v} - I_1 \Omega \ddot{v} - I_2 \ddot{v} + EI_2 v^{(IV)} + [m_{disk1} \ddot{v} - I_{disk1} \ddot{v} - J_{disk1} \Omega \dot{v} - I_{disk1} \Omega^2 (e_{zd1} \cos \Omega t - e_{yd1} \sin \Omega t)] \delta(x - x_{d1})$$

$$+ [m_{disk2} \ddot{v} - I_{disk2} \ddot{v} - J_{disk2} \Omega \dot{v} - I_{disk2} \Omega^2 (e_{zd2} \cos \Omega t - e_{yd2} \sin \Omega t)] \delta(x - x_{d2})$$

$$+ \sum_{i=1}^{n_s} K_{b1} [(w \cos \theta_i + v \sin \theta_i) - c_r]^{\frac{3}{2}} \cos \theta_i \delta(x - x_{b1})$$

$$+ \sum_{i=1}^{n_s} K_{b2} [(w \cos \theta_i + v \sin \theta_i) - c_r]^{\frac{3}{2}} \cos \theta_i \delta(x - x_{b2}) = 0 \quad (15-الف)$$

$$m_r \ddot{w} + c_r \dot{w} - I_1 \Omega \ddot{w} - I_2 \ddot{w} + EI_2 w^{(IV)} + [m_{disk1} \ddot{w} - I_{disk1} \ddot{w} + J_{disk1} \Omega \dot{w} - m_{disk1} \Omega^2 (e_{zd1} \sin \Omega t + e_{yd1} \cos \Omega t)] \delta(x - x_{d1})$$

$$+ [m_{disk2} \ddot{w} - I_{disk2} \ddot{w} + J_{disk2} \Omega \dot{w} - m_{disk2} \Omega^2 (e_{zd2} \sin \Omega t + e_{yd2} \cos \Omega t)] \delta(x - x_{d2})$$

$$+ \sum_{i=1}^z K_{b1} [(w \cos \theta_i + v \sin \theta_i) - c_r]^{\frac{3}{2}} \sin \theta_i \delta(x - x_{b1})$$

$$+ \sum_{i=1}^z K_{b2} [(w \cos \theta_i + v \sin \theta_i) - c_r]^{\frac{3}{2}} \cos \theta_i \delta(x - x_{b2}) = 0 \quad (15-ب)$$

در این رابطه  $x = x_{b1}, x_{b2}$  مکان بلبرینگ هاست. با فرض  $z = v + iw$  معادلات به فضای مختلط منتقل شده و به صورت زیر در می آید:

$$m_r \ddot{z} + c_r \dot{z} - i l_1 \Omega \ddot{z} - I_2 \ddot{z} + EI_2 z^{(IV)} + [m_{disk1} \ddot{z} - I_{disk1} \ddot{z} + i l_{disk1} \Omega \dot{z} - m_{disk1} i \Omega^2 (i e_{zd1} + e_{yd1}) e^{i \Omega t}] \delta(x - x_{d1})$$

$$+ [m_{disk2} \ddot{z} - I_{disk2} \ddot{z} + i l_{disk2} \Omega \dot{z} - m_{disk2} i \Omega^2 (i e_{zd2} + e_{yd2}) e^{i \Omega t}] \delta(x - x_{d2})$$

$$+ \sum_{i=1}^z K_{b1} [(\text{imag}(z e^{i \theta_i}) - c_r)^{\frac{3}{2}} \text{heaviside}(\text{imag}(z e^{i \theta_i}) - c_r) \delta(x - x_{b1}) +$$

$$\sum_{i=1}^z K_{b2} [(\text{imag}(z e^{i \theta_i}) - c_r)^{\frac{3}{2}} \text{heaviside}(\text{imag}(z e^{i \theta_i}) - c_r) \delta(x - x_{b2}) = 0 \quad (16)$$

7-4- بی بعد سازی معادلات

با استفاده از پارامترهای بدون بعد زیر بی بعد سازی معادله (16) انجام می گیرد.

$$z^* = \frac{z}{l}, t^* = \frac{t}{a}, \Omega^* = \Omega a, i = \sqrt{-1}, a = \frac{1}{\lambda_1^2} \sqrt{\frac{m_r l^4}{EI_2}},$$

$$m_{disk1}^* = \frac{m_{disk1}}{m_r l}, m_{disk2}^* = \frac{m_{disk2}}{m_r l}, I_{disk1}^* = \frac{I_{disk1}}{m_r l^3},$$

$$I_{disk2}^* = \frac{I_{disk2}}{m_r l^3}, J_{disk1}^* = \frac{J_{disk1}}{m_r l^3}, J_{disk2}^* = \frac{J_{disk2}}{m_r l^3},$$



استفاده از روش حل رانگ کوتا<sup>1</sup>، معادلات حاصل به صورت عددی با استفاده از تابع ode45 در نرم افزار متلب<sup>2</sup> حل می شود. محاسبات عددی بر اساس مشخصات سیستم دوار در فصل 2 و به ازای پارامترهای بدون بعد زیر صورت گرفته است.

همچنین مقدار نیروی فربیت بلبرینگ از رابطه (11) که همان رابطه کرامر است به دست می آید.

$$m_{disk1}^* = m_{disk2}^* = 0.7183, I_{disk1}^* = I_{disk2}^* = 8.215e - 4$$

$$J_{disk1}^* = J_{disk2}^* = 1.6e - 3$$

$$I_1^* = 5e - 5, I_2^* = 2.5e - 5, C_r^* = 1.2e - 5, K_{b1}^* = 19.35,$$

$$K_{b2}^* = 19.35, c_{rotor}^* = 0.1, 0 < e_{rd1}^*, e_{zd1}^* < 2.34e - 5$$

#### 10-4 - بررسی رفتارهای دینامیکی سیستم به کمک نتایج عددی

همانطور که قبلا بیان شد، برای بررسی رفتار ارتعاشی روتور و بلبرینگ، معادله (18) که پس از اعمال گالرکین (با سه مود)، تبدیل به شش معادله کوپل شده مرتبه اول شده است. به صورت عددی حل شده است. برای بررسی خواص ارتعاشی سیستم و تعیین خواص تناوبی یا غیر تناوبی بودن آن، نمودارهای پاسخ زمانی، مدار دینامیکی، پاسخ فرکانسی و نمودار آشپاری<sup>3</sup> [18] ارتعاشات روتور ترسیم می شود. برای اینکه نمودارهای رسم شده فقط نشان دهنده پاسخ پایدار سیستم باشد و رفتار گذرا در آن وجود نداشته باشد، زمان تحلیل به اندازه کافی طولانی در نظر گرفته شده است و 100 دوره تناوب آخر مورد بررسی قرار گرفته است.

نمودار کمپل فرکانس طبیعی سیستم روتوری مورد مطالعه برای سه مود اول در شکل 5 رسم شده است. طبق انتظار و بر اساس خاصیت سیستم های روتوری، سه مود پیش گرد<sup>4</sup> و سه مود پس گرد<sup>5</sup> وجود دارد. فرکانس تحریک خارجی که ناشی از نابالانسی بوده و برابر با دور روتور است، در شکل 5 با خط ممتد رسم شده است. فرکانس های پیش گرد طبق انتظار با افزایش دور و در نتیجه افزایش نیروی ژبروسکوپی، افزایش پیدا می کنند. در روتورهای متقارن، نابالانسی فقط می تواند مدهای پیش گرد را تحریک کند [19]. محل تقاطع مدهای پیش گرد با فرکانس تحریک که با دایره قرمز نشان داده شده است، محل رزونانس را نشان می دهد. این رزونانس ها در فرکانس های بدون بعد 0.64، 1.8 و 5 رخ داده است. این موضوع با استفاده از نمودارهای پاسخ فرکانسی در ادامه تایید شده است. نرخ کاهش<sup>6</sup> به ازای دوره های متفاوت در شکل 6 رسم شده است. همانطور که مشخص است به ازای تمامی سرعت ها میزان نرخ کاهش منفی است که نشانه پایداری سیستم است. اگر میزان دمپینگ بدون بعد سازه ای سیستم به جای 0.1 برابر با 0.02 فرض شود (که معمولا در سیستم های فولادی اینگونه فرض می شود)، فرکانس طبیعی مقدار کمی تغییر کرده، و نمودار نرخ کاهش به صورت شکل 7 در می آید. در این حالت نیز نرخ کاهش برای تمامی مدها منفی است و نشانه پایداری کلیه مدها است. البته از آنجا که میزان دمپینگ سازه ای کمتر فرض شده است، مقدار قدر مطلق نرخ کاهش برای تمامی مدها کوچکتر شده است.

به ازای اختلاف فاز 90 درجه نابالانسی روی دو دیسک، پاسخ فرکانسی ارتعاشات روتور بر حسب سرعت دورانی در محل یاتاقان و دیسک به ترتیب در شکل های 8 و 9 نشان داده است. این نمودارها در محدوده بدون بعد سرعت

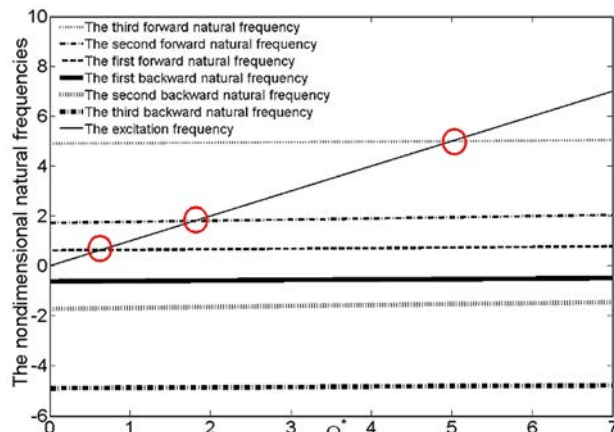


Fig5. Campbell diagram of the rotor for the first three modes

شکل 5 دیاگرام کمپل روتور برای سه مود اول

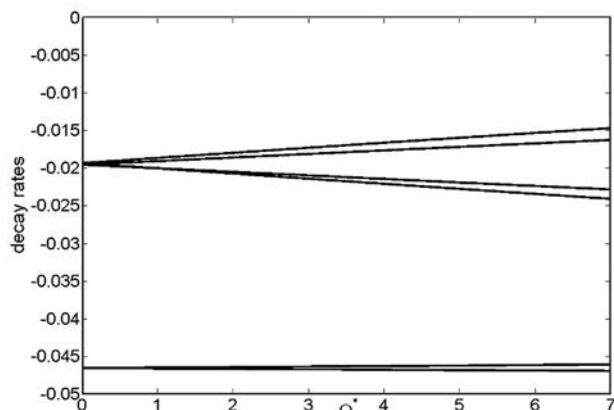


Fig. 6 Campbell diagram (decay rate) of the rotor for the first three modes for  $c_r^* = 0.1$

شکل 6 دیاگرام کمپل (نرخ کاهش) روتور برای سه مود اول به ازای  $c_r^* = 0.1$

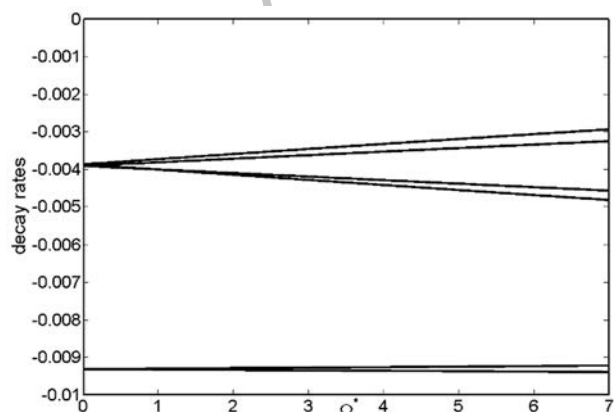


Fig. 7 Campbell diagram (decay rate) of the rotor for the first three modes for  $c_r^* = 0.02$

شکل 7 دیاگرام کمپل (نرخ کاهش) روتور برای سه مود اول به ازای  $c_r^* = 0.02$

<sup>1</sup> Runge Kutta

<sup>2</sup> MATLAB

<sup>3</sup> waterfall

<sup>4</sup> forward

<sup>5</sup> backward

<sup>6</sup> decay rate

از طرف دیگر در شکل‌های 8 و 9 اختلاف فاز نابالانسی در دو دیسک 90 درجه فرض شده است. همانطور که مشخص است هر سه مود سیستم در این ناحیه فرکانسی تحریک شده است.

پاسخ فرکانسی ارتعاشات روتور بر حسب سرعت دورانی در محل یاتاقان و دیسک برای اختلاف فاز نابالانسی 180 درجه در دو دیسک به ترتیب در شکل‌های 10 و 11 نشان داده شده است. همانطور که مشخص است فقط مود دوم در این حالت تحریک شده است و مود اول و سوم تحریک نشده‌اند. این موضوع با توجه به اینکه در شکل مود اول و سوم جابجائی دو دیسک با توجه به تقارن قرارگیری‌شان مساوی و در مود دوم قرینه است و همچنین اختلاف فاز 180 درجه نیروی نابالانسی دو دیسک کاملاً مساوی و در جهت متفاوت است، قابل توجیه است. در واقع به طور کلی در یک سیستم روتوری متقارن اگر دو نابالانسی اختلاف فاز 180 درجه داشته باشند و مکانشان متقارن باشد، فقط مودهای زوج تحریک می‌شوند. از طرف دیگر بر همین اساس اگر اختلاف فاز بین نابالانسی روی دو دیسک متقارن نصب شده روی روتور برابر با صفر باشد و به عبارتی هم جهت باشند، فقط مودهای فرد

132.58 و 368.3 هرتز و یا 2830، 7955 و 22098 دور بر دقیقه است. در جدول 3 فرکانسهای به دست آمده از نرم‌افزار انسیس که در فصل 3 به آن اشاره شد، با فرکانسهای رزونانس به دست آمده از مدلسازی غیر خطی مقایسه شده است. نزدیکی فرکانسهای به دست آمده از این دو روش به خصوص دو مود اول که در محدوده کاری سیستم مورد نظر قرار دارد، نشان‌دهنده دقت مناسب مدلسازی غیر خطی است.

با دقت در شکل‌های 8 و 9 مشاهده می‌شود که بیشترین دامنه ارتعاشات در محل یاتاقان و روتور، به ترتیب در مود سوم و دوم رخ میدهد. این اتفاق با توجه به شکل مودهای سیستم در شکل 4 و دامنه یاتاقان و دیسک در هر مود قابل توجیه است.

جدول 3 مقایسه فرکانسهای رزونانس به دست آمده از مدلسازی غیر خطی و نرم افزار انسیس

Table 3 Comparison of resonance frequencies obtained from nonlinear modeling and ANSYS software

فرکانسهای رزونانس در مدلسازی غیر خطی	فرکانسهای رزونانس در افزار انسیس	اختلاف (%)
47.14	54.6	13.6
132.58	139.7	5.1
368.3	410.45	10.27

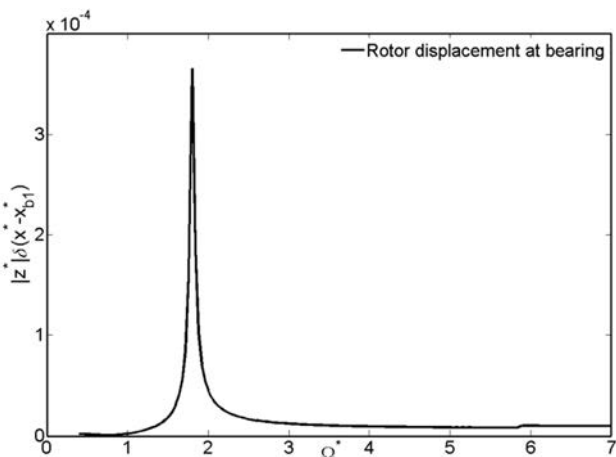


Fig. 10 Frequency response of vibration amplitude in bearing position versus rotor rotational speed for unbalance phase difference of 180 degrees in two discs

شکل 10 پاسخ فرکانسی دامنه ارتعاشات روتور در محل یاتاقان بر حسب سرعت دورانی روتور به ازای 180 درجه اختلاف فاز نابالانسی در دو دیسک

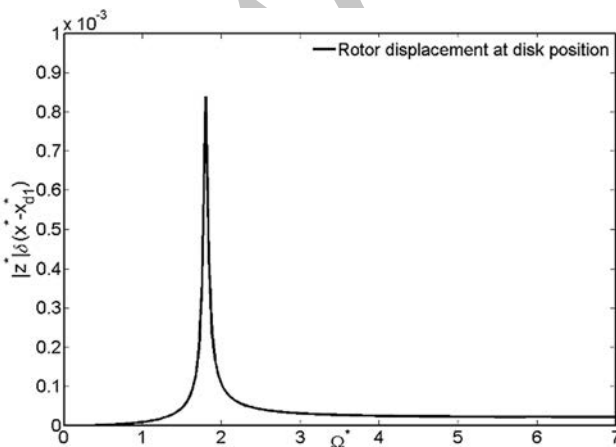


Fig. 11 Frequency response of vibration amplitude in disc position versus rotor rotational speed for unbalance phase difference of 180 degrees in two discs

شکل 11 پاسخ فرکانسی دامنه ارتعاشات روتور در محل دیسک بر حسب سرعت دورانی روتور به ازای 180 درجه اختلاف فاز نابالانسی در دو دیسک

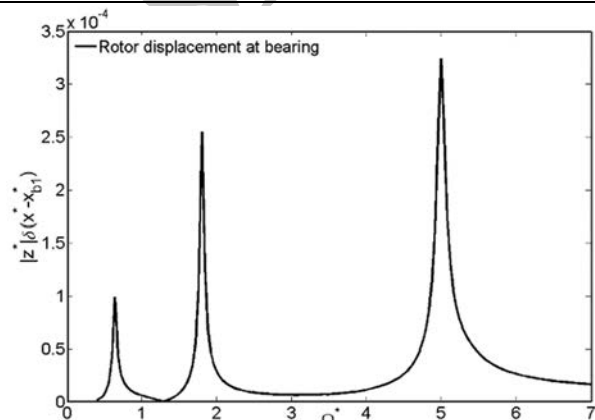


Fig. 8 Frequency response of vibration amplitude in bearing position versus rotor rotational speed for unbalance phase difference of 90 degrees in two discs

شکل 8 پاسخ فرکانسی دامنه ارتعاشات روتور در محل یاتاقان بر حسب سرعت دورانی روتور به ازای 90 درجه اختلاف فاز نابالانسی در دو دیسک

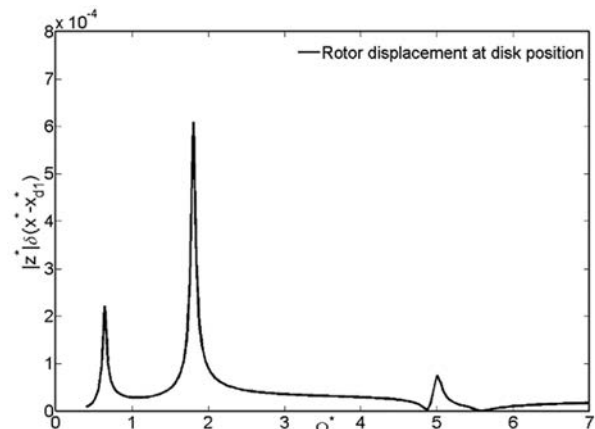
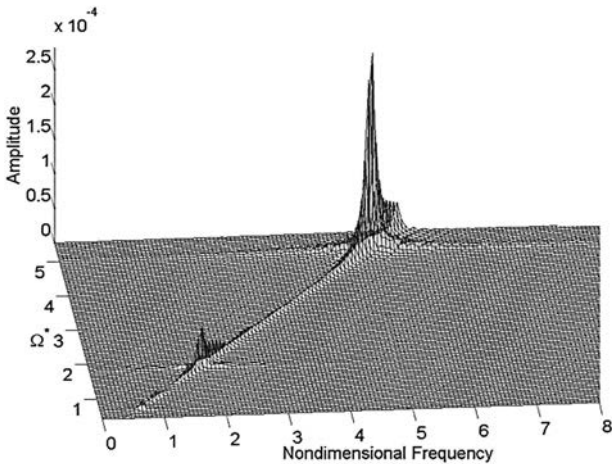


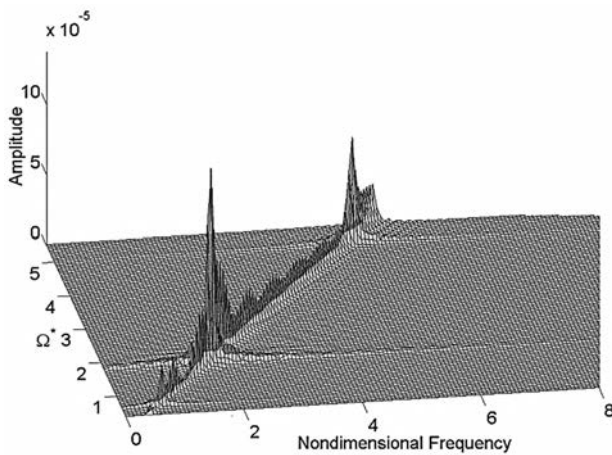
Fig. 9 Frequency response of vibration amplitude in disc position versus rotor rotational speed for unbalance phase difference of 90 degrees in two discs

شکل 9 پاسخ فرکانسی دامنه ارتعاشات روتور در محل دیسک بر حسب سرعت دورانی روتور به ازای 90 درجه اختلاف فاز نابالانسی در دو دیسک



**Fig. 14** waterfall plot of vibration amplitude in bearing position versus rotor rotational speed for unbalance phase difference of 90 degrees in two discs

شکل 14 نمودار آبخاری دامنه ارتعاشات روتور در محل یاتاقان بر حسب سرعت دورانی روتور به ازای 90 درجه اختلاف فاز نابالانسی در دو دیسک

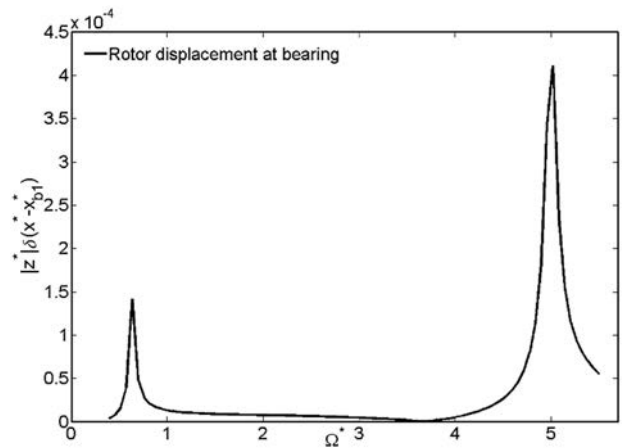


**Fig. 15** waterfall plot of vibration amplitude in disc position versus rotor rotational speed for unbalance phase difference of 90 degrees in two discs

شکل 15 نمودار آبخاری دامنه ارتعاشات روتور در محل دیسک بر حسب سرعت دورانی روتور به ازای 90 درجه اختلاف فاز نابالانسی در دو دیسک

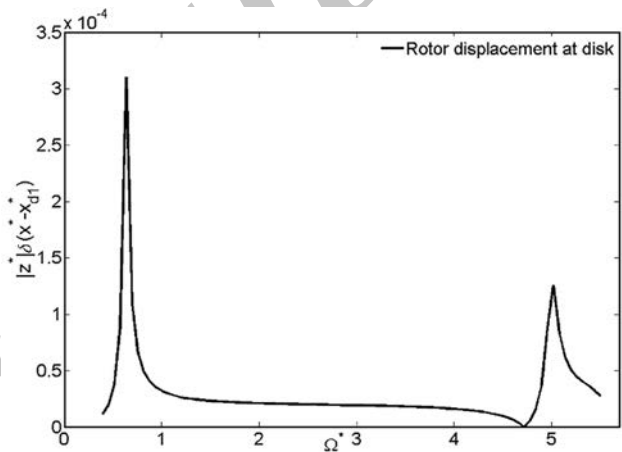
دورانی بدون بعد 0.64 روتور (فرکانس رزونانس اول) و شکل مود سیستم، در محل یاتاقان و دیسک به ترتیب در شکل‌های 16 و 17 نشان داده شده است. از نمودارهای a، b و c در این دو شکل مشخص است که سیستم دارای پاسخ متناوب با فرکانس دورانی روتور 0.64 است. همچنین در نمودار d از این دو شکل، مود ارتعاشی سیستم در این حالت نشان داده شده است و همانطور که مشخص است شبیه به مود اول سیستم در حالت دو سر آزاد در شکل 4 است. البته این مود ترکیبی از سه مود ذکر شده در شکل 5 است و سهم این سه مود به ترتیب برابر با  $3.26e-4$ ،  $3.07e-6$  و  $7.36e-6$  است. این مقادیر در واقع دامنه هر مود در پاسخ سیستم است که در حل عددی معادلات سیستم به دست می‌آیند.

نمودارهای پاسخ زمانی، مدار دینامیکی، پاسخ فرکانسی ارتعاشات روتور در سرعت‌های دورانی بدون بعد 1.8 و 5 روتور (فرکانس رزونانس دوم و سوم) و شکل مود سیستم در این حالتها، در محل یاتاقان و دیسک به ترتیب در شکل‌های 18 الی 21 نشان داده شده است. همانند مود اول، در این نمودارها



**Fig. 12** Frequency response of vibration amplitude in bearing position versus rotor rotational speed for unbalance phase difference of zero in two discs

شکل 12 پاسخ فرکانسی دامنه ارتعاشات روتور در محل یاتاقان بر حسب سرعت دورانی روتور به ازای اختلاف فاز نابالانسی صفر (همفاز) در دو دیسک



**Fig. 13** Frequency response of vibration amplitude in disc position versus rotor rotational speed for unbalance phase difference of zero in two discs

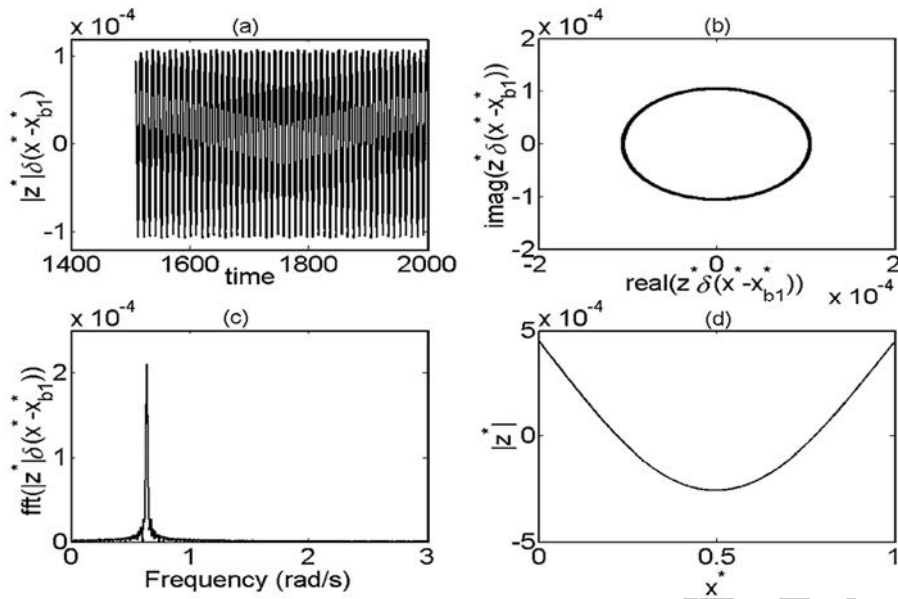
شکل 13 پاسخ فرکانسی دامنه ارتعاشات روتور در محل دیسک بر حسب سرعت دورانی روتور به ازای اختلاف فاز نابالانسی صفر (هم فاز) در دو دیسک

تحریک شده که این موضوع در شکل‌های 12 و 13 دیده می‌شود. همچنین در استاندارد ای پی آی [20] بیان شده است که برای تحریک یک توربین گاز باید دو نابالانسی مختلف جهت در نزدیکی یاتاقان‌ها و یک نابالانسی دیگر در وسط توربین با 90 درجه اختلاف قرار دارد که ریشه در مسائل بیان شده در بالا دارد.

نمودار آبخاری ارتعاشات سیستم در محل یاتاقان و دیسک به ازای پارامترهای سیستم و اختلاف فاز 90 درجه نابالانسی روی دو دیسک، به ترتیب در شکل‌های 14 و 15 نشان داده شده است. این نمودارها در محدوده بدون بعد سرعت  $0 < \Omega^* < 5.5$  رسم شده اند. همانطور که از این نمودارها مشخص است، در تمامی سرعت‌ها ارتعاشات سنکرون در سیستم وجود دارد و فرکانس غالب ارتعاشات، فرکانس سرعت دورانی روتور است. همانطور که در شکل 8 مشخص است، در دوره‌های بدون بعد 0.64، 1.8 و 5 رزونانس رخ می‌دهد.

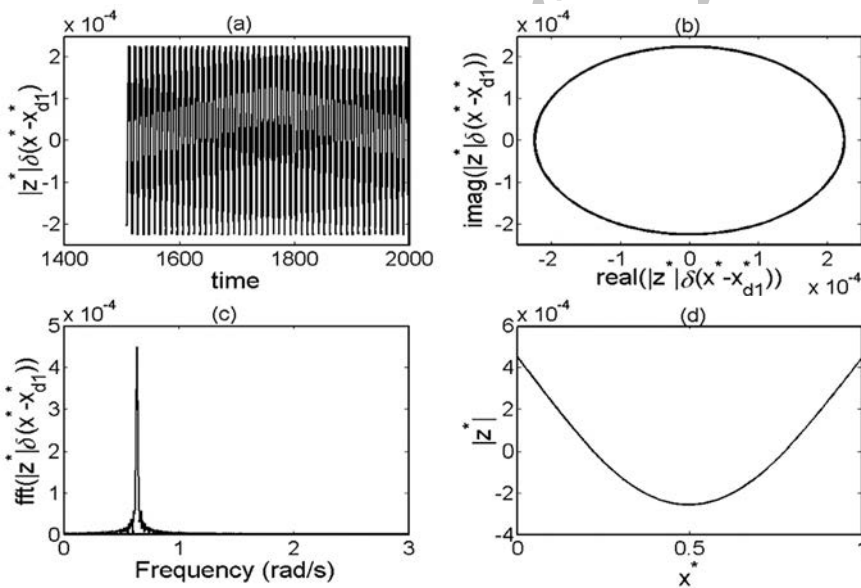
از طرف دیگر نمودارهای پاسخ زمانی، مدار دینامیکی، پاسخ فرکانسی ارتعاشات روتور با 90 درجه اختلاف فاز نابالانسی در دو دیسک و در سرعت





**Fig. 16** a) time response b) dynamic orbit c) frequency response d) mode shape, associated with rotor vibration in bearing position for unbalance phase difference of 90 degrees in two discs and in non-dimensional rotational speed of 0.64 (first resonance frequency)

شکل 16 (a) پاسخ زمانی (b) مدار دینامیکی (c) پاسخ فرکانسی (d) شکل مود متناظر با ارتعاشات روتور در محل یاتاقان به ازای 90 درجه اختلاف فاز نابالانسی در دو دیسک و در سرعت دورانی بدون بعد 0.64 (فرکانس رزونانس اول)



**Fig. 17** a) time response b) dynamic orbit c) frequency response d) mode shape, associated with rotor vibration in disc position for unbalance phase difference of 90 degrees in two discs and in non-dimensional rotational speed of 0.64 (first resonance frequency)

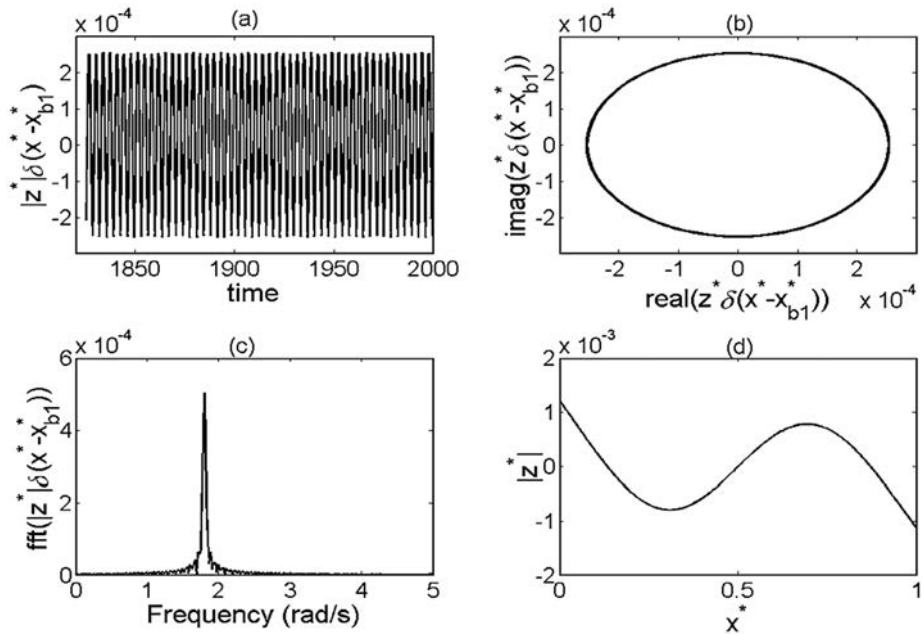
شکل 17 (a) پاسخ زمانی (b) مدار دینامیکی (c) پاسخ فرکانسی (d) شکل مود، ارتعاشات روتور در محل دیسک به ازای 90 درجه اختلاف فاز نابالانسی در دو دیسک و در سرعت دورانی بدون بعد 0.64 (فرکانس رزونانس اول)

برای استخراج معادلات استفاده شده و برای کاهش تعداد معادلات، تبدیل مختصات مختلط بکار گرفته می‌شود. پس از اعمال روش جداسازی گالرکین به معادله روتور با سه مود، معادلات به فضای حالت انتقال داده شده و تبدیل به شش معادله مرتبه اول می‌شود. در نهایت با استفاده از روش رانگ-کوتا، معادلات حاصل به صورت عددی حل شده است. برای بررسی خواص ارتعاشی سیستم، نمودارهای پاسخ زمانی، مدار دینامیکی، شکل مود و پاسخ فرکانسی ارتعاشات روتور ترسیم شده است. همچنین به منظور صحت سنجی روش مدل‌سازی غیر خطی، سیستم مذکور در نرم افزار انسیس مورد تحلیل قرار گرفته است. مقایسه نتایج تحلیل در نرم‌افزار انسیس و نتایج حاصل از

نیز مشخص است که سیستم دارای حرکت متناوب و با فرکانس دورانی روتور است. همچنین شکل مود دوم و سوم رزونانسی سیستم به ترتیب شبیه به شکل مود دوم و سوم سیستم در حالت دو سر آزاد در شکل 4 هستند. البته این دو مود نیز ترکیبی از سه مود ذکر شده در شکل 4 است و سهم این سه مود به ترتیب برای مود دوم برابر با  $2.54e-5$ ،  $8.88e-4$  و  $4.63e-6$  و برای مود سوم  $1.62e-4$ ،  $2.44e-5$  و  $5.2e-4$  است.

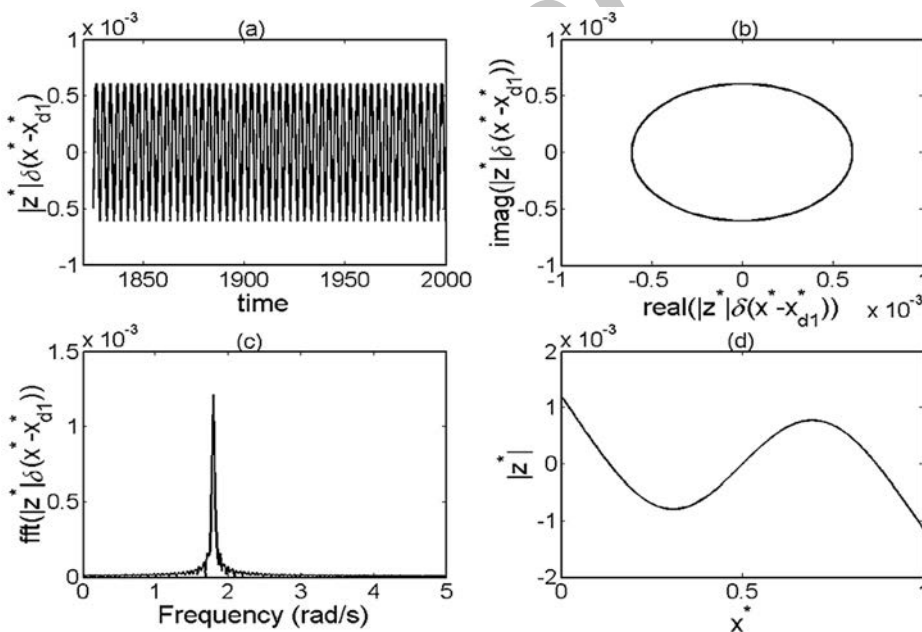
### 5- نتیجه گیری

در این مقاله به مدل‌سازی غیرخطی یک سیستم دوار به صورت مدل روتور-بلبرینگ و دیسک در دوره‌های متفاوت پرداخته شده است. از روش همیلتون



**Fig. 18** a) time response b) dynamic orbit c) frequency response d) mode shape, associated with rotor vibration in bearing position for unbalance phase difference of 90 degrees in two discs and in non-dimensional rotational speed of 1.8 (second resonance frequency)

شکل 18 (a) پاسخ زمانی (b) مدار دینامیکی (c) پاسخ فرکانسی (d) شکل مود ارتعاشات روتور در محل یاتاقان به ازای 90 درجه اختلاف فاز نابالانسی در دو دیسک و در سرعت دورانی بدون بعد 1.8 (فرکانس رزونانس دوم)



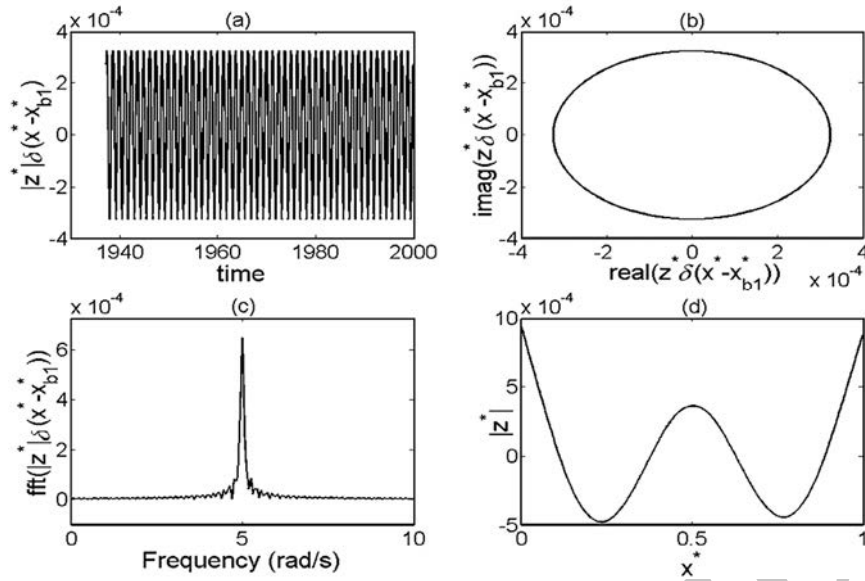
**Fig. 19** a) time response b) dynamic orbit c) frequency response d) mode shape, associated with rotor vibration in disc position for unbalance phase difference of 90 degrees in two discs and in non-dimensional rotational speed of 1.8 (second resonance frequency)

شکل 19 (a) پاسخ زمانی (b) مدار دینامیکی (c) پاسخ فرکانسی (d) شکل مود ارتعاشات روتور در محل دیسک به ازای 90 درجه اختلاف فاز نابالانسی در دو دیسک و در سرعت دورانی بدون بعد 1.8 (فرکانس رزونانس دوم)

سرعت دورانی روتور است. همچنین بیشینه دامنه ارتعاشات در یاتاقان و روتور، به ترتیب در مود سوم و دوم رخ می‌دهد. در اختلاف فاز نابالانسی 90 درجه در دو دیسک، هر سه مود سیستم در ناحیه فرکانسی مورد مطالعه تحریک شده است و به ازای اختلاف فازهای نابالانسی 0 و 180 درجه در دو دیسک، به ترتیب فقط مودهای فرد (اول و سوم) و زوج (دوم) تحریک شده‌اند.

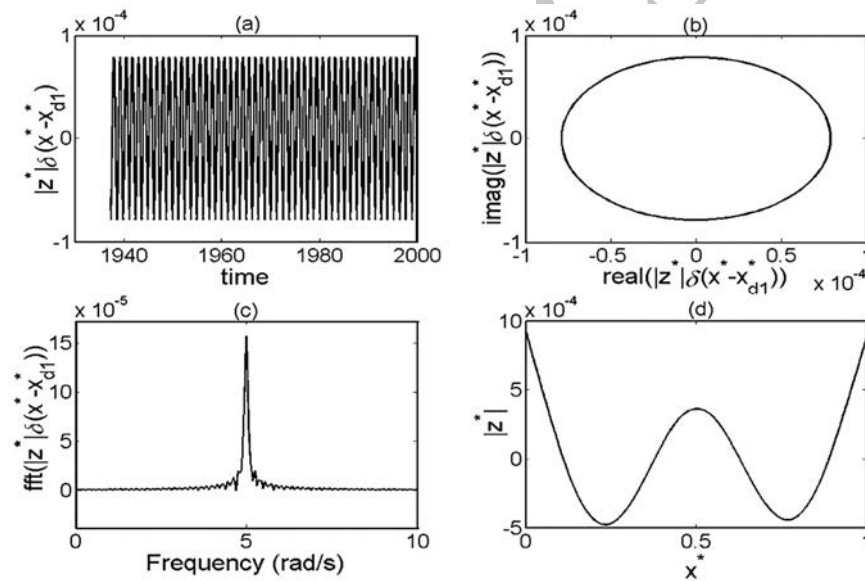
مدلسازی غیر خطی نشان از انطباق قابل قبول مقادیر فرکانس‌های رزونانس سیستم در این دو تحلیل دارد که خود تاییدی است بر اعتبار مدلسازی غیر خطی در این مقاله.

نتایج مدلسازی غیرخطی نشان می‌دهد که نرخ کاهش برای تمامی مودها منفی است که بیانگر پایداری کلیه مودها است. در تمامی سرعت‌ها ارتعاشات سنکرون در سیستم وجود دارد و فرکانس غالب ارتعاشات، فرکانس



**Fig. 20** a) time response b) dynamic orbit c) frequency response d) mode shape, associated with rotor vibration in bearing position for unbalance phase difference of 90 degrees in two discs and in non-dimensional rotational speed of 5 (third resonance frequency)

شکل 20 (a) پاسخ زمانی (b) مدار دینامیکی (c) پاسخ فرکانسی (d) شکل مود ارتعاشات روتور در محل یاتاقان به ازای 90 درجه اختلاف فاز نابالاسی در دو دیسک و در سرعت دورانی بدون بعد 5 (فرکانس رزونانس سوم)



**Fig. 21** a) time response b) dynamic orbit c) frequency response d) mode shape, associated with rotor vibration in disc position for unbalance phase difference of 90 degrees in two discs and in non-dimensional rotational speed of 5 (third resonance frequency)

شکل 21 (a) پاسخ زمانی (b) مدار دینامیکی (c) پاسخ فرکانسی (d) شکل مود ارتعاشات روتور در محل دیسک به ازای 90 درجه اختلاف فاز نابالاسی در دو دیسک و در سرعت دورانی بدون بعد 5 (فرکانس رزونانس سوم)

ممان اینرسی جرمی قطبی	$I_1$		
ممان اینرسی جرمی قطری (خمشی) حول محور $y$	$I_2$	سطح مقطع	$A$
ممان اینرسی جرمی قطری (خمشی) حول محور $z$	$I_3$	زمان بی بعد	$a$
ممان اینرسی قطری (خمشی)	$I_{disk}$	ضریب دمپینگ روتور	$G_{rotor}$
ممان اینرسی قطبی	$J_{disk}$	لقی بین ساچمه و حلقه های بلبرینگ	$C_r$
نیروی فنریت بلبرینگ	$K_b$	بردارهای یکه در راستای دستگاه $XYZ$	$e_z, e_y, e_x$
طول روتور قبل از تغییر شکل	$l$	بردارهای یکه در راستای دستگاه $xyz$	$e_3, e_2, e_1$
توزیع جرمی شفت	$m_r$	توزیع جرم خارج از مرکز در جهت محورهای $y$ و $z$	$e_{zd}$ و $e_{yd}$
جمله زمان شکل مود تیر	$q$	نیروی فنریت بلبرینگ	$F$

6- فهرست علائم

- absorber, *Global Design to Gain a Competitive Edge*, pp. 691-697, London: Springer, 2008.
- [7] M. S. Patil, Jose Mathew, P. K. Rajendrakumar, Sandeep Desai, A theoretical model to predict the effect of localized defect on vibrations associated with ball bearing, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 52, No. 9, pp.1193-1201, 2010.
- [8] C. Bai, H. Zhang, Q. Xu, Subharmonic resonance of a symmetric ball bearing-rotor system, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 59, No. April, pp.1-10, 2013.
- [9] H. Zhou, Gu.Luo, G. Chen, F. Wang, Analysis of the nonlinear dynamic response of a rotor supported on ball bearings with floating-ring squeeze film dampers, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 59, pp.65-77, 2013.
- [10] X. Zhang, Q. Han, Z. Peng, F. Chu, A new nonlinear dynamic model of the rotor-bearing system considering preload and varying contact angle of the bearing, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 22, No. 1, pp. 821-841, 2015
- [11] W. Liu, Y. Zhang, Z. J. Feng, J. S. Zhao, D. Wang, A study on waviness induced vibration of ball bearings based on signal coherence theory, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 333, pp.6107-6120, 2014.
- [12] Q. He, H. Peng, P. Zhai, Y. Zhen, The effects of unbalance orientation angle on the stability of the lateral torsion coupling vibration of an accelerated rotor with a transverse breathing crack. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.75, pp. 330-344, 2016.
- [13] N. H. Chandra, A. S. Sekhar, , Fault detection in rotor bearing systems using time frequency techniques, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 72, pp. 105-133, 2016.
- [14] S. S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*, pp. 331-333, New Jersey: John Wiley & Sons, 2007.
- [15] S. E. Khadem, M. Shahgholi, S. A. A. Hosseini, , Primary resonances of a nonlinear in-extensional rotating shaft, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 45, No. 8, pp. 1067-1081, 2010.
- [16] D. Mourad, N. E. Titouche, M. Djaoui, O. mohammad, The calculation of ball bearing nonlinear stiffness theoretical and experimental study with comparisons, *Journal of engineering and applied sciences*, Vol. 3, No. 11, pp. 872-883, 2008.
- [17] M. Ansari, E. Esmailzadeh, D. Younesian, Internal-external resonance of beams on non-linear viscoelastic foundation traversed by moving load, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 61, pp. 163-182, 2010.
- [18] A. H. Nayfeh, B. Balachandran, *Applied Nonlinear Dynamics*, pp. 68-269, New York: John Wiley & Sons, 2004.
- [19] D. J. Ewins, *Modal Testing: Theory, Practice and Application*, Second Edition, pp. 85-95, , London: Research Studies Press, 2000.
- [20] Standard Paragraphs AP. Publication 684, Tutorial on the API Standard Paragraphs Covering Rotor Dynamics and Balancing: An Introduction to Lateral Critical and Train Torsional Analysis and Rotor Balancing, *American Petroleum Institute*, February 1996, Copyright (c). 2014.

موقعیت یک ذره در یک مقطع از روتور	$R_{\text{rotor}}$
زمان	$t$
انرژی جنبشی	$T$
انرژی پتانسیل خمشی روتور	$V$
جابجائی جانبی روتور در راستای Y	$v(x, t)$
جابجائی جانبی روتور در راستای Z	$w(x, t)$
کار ناپایستار دمپینگ روی روتور	$W_{nc-\text{rotor}}$
محل دیسک روی روتور	$X_{di}$
مکان بلبرینگ ها	$X_{b1}, X_{b2}$
مکان دیسک	$X_d$
تعداد ساچمه بلبرینگ	$Z$

#### علائم یونانی

چگالی جرمی	$\rho$
سرعت زاویه ای دستگاه XYZ نسبت به XYZ	$\omega$
سرعت زاویه ای در راستای محور روتور	$\Omega$
زاویه ساچمه ام نسبت به محور عمود	$\theta_i$
سرعت زاویه ای قفسه بلبرینگ	$\omega_c$
جمله مکان شکل مود تیر	$\psi$

#### 7- مراجع

- [1] S. K. Sinha, Dynamic characteristics of a flexible bladed-rotor with Coulomb damping due to tip-rub, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 273, No. 4, pp.875-919, 2004.
- [2] N. Lesaffre, J. J. Sinou, F. Thouverez, Model and stability analysis of a flexible bladed rotor, *International Journal of Rotating Machinery*, Vol. 293, Article ID 63756, pp. 409-416, 2006.
- [3] Y. Ishiadi, T. Inoue, T. Kagawa, M. Ueda, Nonlinear analysis and experiments on torsional vibration of a rotor with a centrifugal pendulum vibration absorber, *Journal of system and dynamics*, Vol. 2, No. 3, pp.715-726, 2008.
- [4] I. Yukio, I. Tsuyoshi, Vibration control of nonlinear rotor systems using dynamic absorber, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 68, No. 671, pp. 1972-1979, 2002.
- [5] Y. Ishida, New passive control methods for reducing vibrations of rotors: Discontinuous spring characteristics and ball balancers, *IUTAM Symposium on Emerging Trends in Rotor Dynamics IUTAM Bookseries*, pp.387-403, 2011.
- [6] C. Bai, F. Song, A natural frequency variable magnetic dynamic