مجله مهندسی مکانیک مدرس، آبان 1395، دوره 16، شماره 8، ص‌ص 384-394

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

عملکرد روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی برای حل معادله فشار در محیط‌های متخلخل به شدت ناهمگون

مهدی مشرف دهکردی*

استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

* اصفهان، صندوق پستی 73441-81746، m.mosharaf@eng.ui.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 13 تیر 1395
پذیرش: 15 مرداد 1395
ارائه در سایت: 21 شهریور 1395

کلید واژگان:
محیط متخلخل
روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی
انتقال‌پذیری درشت مقیاس
میدان فشار غیر یکنوا

چکیده

در کار حاضر، معادله فشار متناظر با جریان سیال تراکم‌ناپذیر در محیط‌های متخلخل به شدت ناهمگون با استفاده از روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی به صورت عددی حل شده است. به منظور تمرکز بر اثرات ساختار میدان تراوایی مطلق روی عملکرد و دقت روش چند مقیاسی، جریان به صورت تک فاز مدلسازی شده و از اثرات گرانش و تغییرات خواص سیال با فشار صرف‌نظر شده است. نتایج روش چند مقیاسی چند درجه تفکیکی از نظر دقت با نتایج روش حجم محدود استاندارد برای چند میدان تراوایی به شدت ناهمگون مقایسه شده‌اند. این میدان‌های تراوایی مطلق از لایه‌های مختلف دهمین مسئله مقایسه‌ای انجمن مهندسی نفت استخراج شده‌اند. برای میدان‌های تراوایی مطلق ناهمگونی که در آن‌ها تغییرات تراوایی به صورت تدریجی صورت می‌گیرد، نشان داده شده است که روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی نتایج قابل قبولی را تولید می‌کند. این در حالی است که نتایج عددی و همچنین تحلیل‌های ریاضی نشان می‌دهند که برای میدان‌های تراوایی مطلق با ساختار کانالی، در حالت کلی ممکن است که در میدان فشار روش چند مقیاسی نوسانات غیر فیزیکی به وجود آید. در اینگونه موارد، مقادیر انتقال‌پذیری درشت مقیاس ممکن است به گونه‌ای محاسبه شوند که ماتریس ضرایب دستگاه فشار درشت مقیاس در روش چند مقیاسی شرط‌های کافی برای یکنوا و همچنین مقید بودن جواب دستگاه معادله خطی (یعنی شرط M—ماتریس بودن) را از دست بدهد.

Performance of the Multi-resolution Multi-scale Finite Volume Method for Solving Pressure Equation in Highly Heterogeneous Porous Media

Mehdi Mosharaf Dehkordi*

Department of Mechanical Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran
*P.O.B. 81746-73441, Isfahan, Iran, m.mosharaf@eng.ui.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 03 July 2016
Accepted 05 August 2016
Available Online 11 September 2016

Keywords:
Porous media
Multi-resolution Multi-scale Finite Volume (MrMsFV) method
Coarse-scale transmissibility
Monotone pressure field

ABSTRACT

In the present study, the incompressible flow through highly heterogeneous porous media is modeled by the Multi-resolution Multi-scale Finite Volume (MrMsFV) method. In order to focus on the effects of the absolute permeability structure on the accuracy and performance of the MrMsFV method, the single phase flow is considered and the effects of the gravity and variation of fluid viscosity and density are ignored. The accuracy of the MrMsFV method is examined by comparing its numerical results with those of the standard finite volume method. These permeability fields are extracted from the tenth comparative study problem of the Society of Petroleum Engineering. For the permeability fields in which the permeability varies smoothly, it is shown that the MrMsFV method produces acceptable results. On the other hand, the numerical results along with mathematical analyses show that the MrMsFV method may produce pressure fields with unphysical peaks for channelized permeability fields. In these cases sufficient conditions for the monotonicity and boundedness of the solution are violated. In fact, the coarse scale transmissibilities may be computed in such a way that the coefficient matrix of the coarse scale pressure equation does not become a so-called *M-matrix*.

1- مقدمه

شبیه‌سازی جریان سیال در مخازن هیدروکربوری با در نظر گرفتن تمامی جزییات مربوط به خواص سنگ (شامل تخلخل و تراوایی مطلق) یکی از موضوعاتی است که در دو دهه اخیر مورد توجه محققین زیادی قرار گرفته است. یک محیط متخلخل طبیعی مانند مخزن نفتی دارای انواع مختلفی از ناهمگونی‌ها مانند حفره‌های مختلف، شکاف‌ها، لایه‌های نفوذناپذیر و ... است. این ناهمگونی‌ها در اندازه‌ها و مقیاس‌های بسیاری کوچکی (در حدود میلی‌متر) نسبت به ابعاد کل مخزن (در مرتبه کیلومتر) مشاهده می‌شوند. با وجود اینکه اطلاعات مربوط به این ناهمگونی‌ها با جزییات بسیار زیاد توسط مدل‌های زمین‌شناسی در دسترس است، انجام شبیه‌سازی جریان سیال با شبکه‌های محاسباتی بسیار بزرگ (در برگیرنده این اطلاعات) در حالت کلی امری بسیار زمان‌بر و غیر عملی است [1]. در گذشته با تکیه بر روش‌های همگون‌سازی و روش‌های افزایش مقیاس، اندازه مسئله مورد نظر تا حد توان سخت افزارها و قابلیت روش‌های عددی موجود در آن زمان کاهش پیدا می‌کرد. با انجام این کار برخی از اطلاعات ریز مقیاس از دست می‌رفت و فدای امکان‌پذیر شدن و افزایش سرعت فرآیند شبیه‌سازی می‌شد [1]. با

Please cite this article using:
برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:
M. Mosharaf Dehkordi, Performance of the Multi-resolution Multi-scale Finite Volume Method for Solving Pressure Equation in Highly Heterogeneous Porous Media, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 8, pp. 384-394, 2016 (in Persian)

ظهور روش‌های چند مقیاسی، زمینه مناسبی برای شبیه‌سازی مخازن نفتی در ریزترین مقیاس و در نظر گرفتن تمامی جزییات پیدا شد. روش‌های چند مقیاسی شبیه‌سازی را در ریزترین مقیاس و با هزینه‌ای در حدود روش‌های افزایش مقیاس انجام می‌دهند [2]. تاکنون انواع مختلفی از روش چند مقیاسی بر اساس دیدگاه‌های اجزاء محدود [3] و حجم محدود [4] پیشنهاد شده است.

در کار حاضر توجه اصلی معطوف به روش‌های چند مقیاسی بر مبنای دیدگاه حجم محدود است. روش حجم محدود چند مقیاسی پایه توسط جنی و همکاران [4] در سال 2003 برای جریان تک فاز در محیط‌های متخلخل ناهمگون معرفی شد. تاکنون کارهای زیادی برای توسعه و بهبود روش حجم محدود چند مقیاسی انجام شده است که آن‌ها را می‌توان به چند دسته مختلف تقسیم‌بندی نمود. در دسته اول، مبنای کار انجام شده توسعه روش چند مقیاسی پایه با افزودن پیچیدگی‌های مختلف موجود در جریان سیال درون محیط متخلخل است. از جمله این موارد می‌توان به توسعه روش چند مقیاسی به حالت چند فازی [5]، افزودن توابع اصلاحی به منظور در نظر گرفتن اثرات فشار موئینگی و گرانش [7,6] و تراکم‌پذیری [9,8] در روش حجم محدود چند مقیاسی اشاره نمود. دسته دوم شامل روش‌های چند مقیاسی تکراری است که هدف آن‌ها افزایش دقت روش حجم محدود چند مقیاسی تا دقت جواب روش‌های ریز مقیاس (مانند روش حجم محدود استاندارد با در نظر گرفتن تمامی جزییات سنگ محیط متخلخل) است [10,9,2]. در این میان کارهایی نیز بر فرمول‌بندی اپراتوری روش چند مقیاسی تاکید داشته‌اند [12,11,7]. علاوه بر این، کارهای دیگری روی شبکه‌های محاسباتی مورد استفاده در روش حجم محدود چند مقیاسی [13-16] و همچنین بررسی خطای این روش در [17] انجام شده است. مشرف و منظری [13] روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی (MrMsFV[1]) را برای شبیه‌سازی مخازن نفتی پیشنهاد نمودند. در این کار، علاوه بر دو شبکه درشت مقیاس مرسوم در روش‌های حجم محدود چند مقیاسی (شبکه درشت و دوگانه)، از یک شبکه جدید چهارگانه نیز بهره گرفته شده است. نشان داده شده است که برای جلوگیری از افزایش هزینه محاسباتی می‌توان به صورت تطبیقی از بلوک‌های دوگانه و چهارگانه در روش چند مقیاسی استفاده نمود [14,13].

برای میدان‌های تراوایی مطلق با ساختار کانالی، در مراجع مختلف نشان داده شده است که میدان فشار تخمین زده شده توسط روش حجم محدود چند مقیاسی در برخی از نواحی دارای قله‌های فشاری غیر فیزیکی با اندازه‌های بسیار بزرگ است [18,9]. در این صورت میدان فشار بدست آمده به شدت نوسانی بوده و از نظر ریاضی جواب دستگاه معادله خطی غیر یکنوا[2] است. در کار حاضر تلاش شده است که علت به وجود آمدن این نوسانات غیر فیزیکی در میدان فشار روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی به صورت فیزیکی و ریاضی تشریح و به تصویر کشیده شود. هدف اصلی کار حاضر تمرکز بر تاثیر میدان تراوایی مطلق روی مقید و همچنین یکنوا بودن میدان فشار روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی است. بنابراین در استخراج روابط و همچنین برای تمام مسائل عددی چنین فرض شده است که هیچ چاه تزریق و برداشتی درون محیط متخلخل مورد بررسی وجود ندارد تا مقید یا غیر مقید بودن میدان فشار در نتایج به وضوح مشخص شود. در ادامه، پس از معرفی معادلات حاکم و تشریح مختصر روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی، مفهوم انتقال‌پذیری بیان شده است. سپس با معرفی شرایط لازم برای دست‌یابی به جواب یکنوا، علت بروز نوسانات فشاری در روش‌های حجم محدود چند مقیاسی و یک راهکار ساده برای بر طرف نمودن این مشکل توضیح داده شده است. در نهایت، با ارایه چند مسئله با میدان تراوایی مطلق به شدت ناهمگون و با ساختارهای مختلف، ابتدا مشکل غیر یکنوا بودن میدان فشار روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی و همچنین روش حجم محدود چند مقیاسی پایه به تصویر کشیده است. در هر مورد، نتایج روش چند مقیاسی چند درجه تفکیکی با نتایج روش حجم محدود استاندارد به عنوان جواب مبنا مقایسه شده و دقت آن بررسی شده است. در نهایت با بیان نتیجه‌گیری و نکات تکمیلی مقاله حاضر خاتمه می‌یابد.

2- معادلات حاکم و فرضیات

در غیاب اثرات گرانش و عدم حضور هیچ عامل خارجی مانند چاه تزریق و برداشت، توزیع فشار برای جریان سیال تک فاز تراکم‌ناپذیر درون یک محیط متخلخل تراکم‌ناپذیر با حل معادله فشار زیر بدست می‌آید [19]:

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla P) = 0 \qquad (1)$$

در سمت چپ رابطه (1)، متغیر P نشان دهنده فشار و عبارت $\lambda = K/\mu$ تحرک‌پذیری است که در آن μ لزجت و K تانسور تراوایی مطلق محیط متخلخل است. مقدار تراوایی مطلق در یک محیط متخلخل طبیعی می‌تواند در یک فاصله کوچک چندین مرتبه مقداری تغییر کند. بنابراین، میدان تراوایی مطلق تاثیر بسیار زیادی روی رفتار فیزیکی جریان سیال در محیط‌های متخلخل دارد. در فرآیند شبیه‌سازی جریان در محیط‌های متخلخل معمولاً چنین فرض می‌شود که هندسه مسئله مورد نظر به همراه اطلاعات مربوط به سنگ محیط متخلخل (شامل تخلخل و تراوایی مطلق) توسط یک شبکه محاسباتی داده شده است. به علت اینکه این شبکه محاسباتی در برگیرنده بیشترین اطلاعات در مورد خواص سنگ محیط متخلخل است، از آن با نام شبکه ریز مقیاس یاد می‌شود.

در یک ناحیه مشخص مانند Ω، علاوه بر معادله فشار (1) به یک سری شرایط مرزی مناسب نیاز است. در حالت کلی، شرط اعمال شده برای یک مرز می‌تواند به صورت فشار ثابت (شرط مرزی دریکله) یا مقدار مشخص شار جریان (شرط مرزی نیومن) باشد. برای بدست آوردن توزیع فشار درون محیط متخلخل، می‌توان معادله (1) به همراه شرط مرزی مناسب را با روش‌های عددی مختلفی حل نمود. در کار حاضر، معادله فشار با استفاده از روش حجم محدود استاندارد با تخمین شار دو نقطه‌ای در ریزترین مقیاس (مقیاس اصلی) حل شده و جواب آن به عنوان حل مبنا برای تعیین میزان خطای روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی بکار برده شده است.

3- روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی

در حالت کلی، در هر یک از روش‌های حجم محدود چند مقیاسی برای حل معادله فشار مراحل اصلی زیر انجام می‌شود [14]:

1- تشکیل شبکه‌های محاسباتی درشت مقیاس روی شبکه ریز مقیاس

2- تشکیل یک سری مسایل محلی و حل آن‌ها به منظور تولید یکسری توابع کمکی با نام‌های توابع پایه‌ای و اصلاحی

3- تشکیل و حل معادله فشار درشت مقیاس

4- تخمین میدان فشار ریز مقیاس بر حسب میدان فشار درشت مقیاس

[1] Multi-resolution Multi-scale Finite Volume method
[2] Non-Monotone

بدست آمده و با استفاده از توابع پایه‌ای و اصلاحی

5- بازسازی میدان فشار به منظور دستیابی به میدان سرعت پایستار در مقیاس ریز.

در ادامه مراحل مذکور در روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی [14] تشریح می‌شود.

روش‌های حجم محدود چند مقیاسی پایه از سه شبکه محاسباتی مختلف برای حل معادله فشار (3) بهره می‌گیرد [4]. از آنجایی که مقیاس (اندازه سلول‌های) این شبکه‌های محاسباتی با یکدیگر متفاوت است، به این دسته از روش‌های عددی، روش‌های چند مقیاسی گفته می‌شود.

در شکل 1 یک ناحیه مستطیل شکل با یک شبکه محاسباتی با سازمان متناظر با آن به عنوان شبکه ریز[1] و به صورت نقطه‌چین نمایش داده شده است. در چهارچوب روش‌های حجم محدود چند مقیاسی، ابتدا روی شبکه ریز مقیاس دو شبکه با مقیاس بزرگتر با نام‌های شبکه درشت[2] و شبکه درشت دوگانه[3] تولید می‌شود. برای انجام این کار، یک ضریب درشت نمایی در هر راستا ($n_{\text{cr}} = 5$) انتخاب شده و ابتدا یکی از این دو شبکه (در اینجا شبکه دوگانه) ایجاد می‌شود. سپس، شبکه دیگر (در اینجا شبکه درشت به صورت خطوط ضخیم توپر در شکل 1) از بهم متصل نمودن مراکز بلوک‌های شبکه محاسباتی تولید شده ایجاد می‌شود [2]. مشخص است که گوشه‌های هر بلوک دوگانه متناظر با مراکز بلوک‌های درشت است (مربع‌های کوچک در شکل 1). از شبکه درشت برای افزایش مقیاس مسئله و تشکیل یک معادله فشار درشت مقیاس استفاده می‌شود [14]. با درشت شدن اندازه سلول‌های محاسباتی، اندازه دستگاه معادله فشار کوچک شده و بنابراین هزینه بدست آوردن میدان فشار به مقدار قابل توجهی کاهش پیدا می‌کند. شبکه دوگانه به عنوان یک ابزار واسط در نظر گرفته شده و از آن برای محاسبه ضرایب مورد نیاز برای تشکیل دستگاه معادله درشت مقیاس استفاده می‌شود [15]. علاوه بر این، شبکه دوگانه نقش یک رابط بین میدان فشار درشت مقیاس و میدان فشار ریز مقیاس را بازی می‌کند.

در روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی، علاوه بر شبکه‌های درشت و دوگانه، از یک شبکه با مقیاس بزرگتر با نام شبکه چهارگانه[4] نیز استفاده می‌شود. در این روش، تمام یا برخی از بلوک‌های دوگانه که در همسایگی یکدیگر قرار دارند با الگوی خاصی با یکدیگر ترکیب می‌شوند تا بلوک‌های بزرگتری با نام بلوک‌های چهارگانه تشکیل شود (درشت نمایی محلی) [14,13]. در کار حاضر چنین فرض می‌شود که هر چهار بلوک دوگانه مجاور با یکدیگر ترکیب شده و تشکیل یک بلوک چهارگانه می‌دهند. از آنجایی که برای تولید شبکه دوگانه ضریب درشت‌نمایی در هر راستا برابر $n_{\text{cr}} = 5$ در نظر گرفته شده بود، ضریب درشت‌نمایی شبکه چهارگانه نسبت به شبکه ریز برابر $n_{\text{cr}} = 10$ است. با انجام درشت‌نمایی محلی، برخی از مرزهای بلوک‌های دوگانه پایه حذف شده ولی گوشه‌های آن‌ها (مراکز بلوک‌های درشت) باقی می‌مانند (شکل 1). در نتیجه، برای مسایل دو بعدی تمام بلوک‌های دوگانه (المان‌های 4 گره‌ای در روش حجم محدود چند مقیاسی پایه) به بلوک‌های چهارگانه (المان‌های 9 گره‌ای در روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی) تبدیل می‌شوند [13]. برای جزئیات بیشتر به [14,13] مراجعه شود. نقش شبکه درشت در روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی دقیقا مانند شبکه درشت در روش

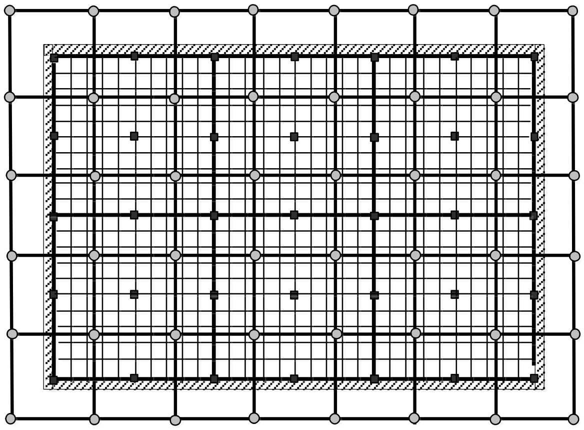


Fig. 1 Coarse (thick solid lines) and quad (thick dashed lines) grids constructed on top of the given fine grid (dotted lines).

شکل 1 شبکه‌های محاسباتی درشت (خطوط تو پر ضخیم) و چهارگانه (خط چین ضخیم) ساخته شده روی شبکه محاسباتی ریز (نقطه چین)

چند مقیاسی پایه است. این در حالی است که در روش چند درجه تفکیکی از شبکه دوگانه همراه با شبکه چهارگانه برای بدست آوردن ضرایب دستگاه معادله فشار درشت مقیاس استفاده می‌شود. علاوه بر این، ارتباط بین فشار ریز مقیاس و درشت مقیاس در روش چند درجه تفکیکی از طریق شبکه چهارگانه برقرار می‌شود.

همانند روش حجم محدود چند مقیاسی پایه، روش چند درجه تفکیکی نیز جواب معادله فشار (1) را در مقیاس ریز به صورت تقریبی تخمین می‌زند [13,7,2]. در این روش، ابتدا یک سری مسئله محلی و کاملاً مستقل درون هر یک از بلوک‌های چهارگانه تعریف و حل می‌شود. سپس یک دستگاه فشار درشت مقیاس تشکیل و برای مقادیر فشار در مراکز بلوک‌های درشت حل می‌شود، میدان فشار مربوط به سلول‌های ریز درون هر بلوک چهارگانه به صورت مجموع جواب عمومی و خصوصی مسئله تعریف شده درون هر بلوک چهارگانه به صورت مستقل بیان می‌شود. در نهایت، میدان فشار روش چند مقیاسی P_{ms} با کنار هم قرار دادن جواب‌های این مسائل محلی و به عنوان تقریبی از جواب اصلی مسئله P_{f} به صورت زیر بیان می‌شود [7,2]:

$$P_{\text{f}} \approx P_{\text{ms}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{q}}}\left(\sum_{j=1}^{N_{\text{c}}}\theta_j^i\,\bar{P}_j + \Psi^i\right) \qquad (2)$$

که در آن، $\bar{P}_j$ نشان دهنده مقدار فشار در مرکز بلوک درشت j ام است. علاوه بر این، θ_j^i و Ψ^i به ترتیب توابع پایه‌ای و اصلاحی مربوط به بلوک چهارگانه $\widetilde{\Omega}^i$ با $i \in \{1,\cdots,N_{\text{q}}\}$ می‌باشند. همچنین N_{c} و N_{q} به ترتیب بیانگر تعداد بلوک‌های درشت و چهارگانه در شبکه‌های محاسباتی هستند. رابطه (2) بیان می‌کند که با مشخص بودن مقدار فشار در مراکز بلوک‌های درشت، میدان فشار روش چند مقیاسی درون هر بلوک چهارگانه و در مقیاس ریز با استفاده از توابع پایه‌ای و اصلاحی به صورت مستقل تخمین زده می‌شود. در حقیقت، واسط بین میدان فشار درشت مقیاس (فشار متناظر با شبکه محاسباتی درشت) و میدان فشار ریز مقیاس (فشار متناظر با شبکه ریز)، توابع پایه‌ای مربوط به بلوک‌های چهارگانه هستند. از نقطه نظر ریاضی، فشار ریز مقیاس به صورت ترکیب خطی مقادیر فشار درشت مقیاس وزن شده با توابع پایه‌ای بیان می‌شود. علاوه بر این، توابع اصلاحی اثرات ناشی از عوامل خارجی مانند گرانش و چاه‌های تزریق و برداشت را در میدان فشار ریز مقیاس لحاظ می‌کنند. در ادامه، نحوه محاسبه توابع پایه‌ای تشریح می‌شود.

[1] Fine grid
[2] Coarse grid
[3] Dual coarse grid
[4] Quad coarse grid

در روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی، توابع پایه‌ای با تعریف و حل نمودن یکسری مسئله همگن (مشابه با معادله فشار با سمت راست معادله صفر) درون هر بلوک چهارگانه محاسبه می‌شوند. بدین صورت که تابع پایه‌ای θ_j^i متناظر با گوشه jام از بلوک چهارگانه $\widetilde{\Omega}^i, i \in \{1, \cdots, N_q\}$ با حل نمودن مسئله همگن زیر محاسبه می‌شود [14,13]:

$$-\nabla \cdot \left(\lambda \cdot \nabla \theta_j^i\right) = 0, \qquad \text{در } \widetilde{\Omega}^i \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\lambda \cdot \frac{\partial \theta_j^i}{\partial \tau}\right) = 0, \qquad \text{روی } \partial\widetilde{\Omega}^i \tag{4}$$

در معادله (4)، $\tau \in \{x, y\}$ نشان دهنده راستای مماس بر مرزهای بلوک‌های چهارگانه $\partial\widetilde{\Omega}^i$ است. به عنوان شرط مرزی برای مسایل مربوط به مرزهای بلوک چهارگانه (معادله (4)) در گره j مقدار واحد و برای بقیه گره‌های بلوک چهارگانه مقدار صفر اعمال می‌شود. معادله (4) در حقیقت بیانگر یکسری مسئله یک بعدی است که روی مرزهای بلوک‌های چهارگانه تعریف و به صورت مستقل حل می‌شوند. جواب این مسایل یک بعدی به عنوان شرایط مرزی برای معادله (3) استفاده می‌شود. بنابراین، معادله (3) با شرایط مرزی (4) به تعداد گوشه‌های بلوک چهارگانه N_v و متناظر با $j \in \{1, \cdots, N_v\}$ حل می‌شود تا در نهایت تمامی توابع پایه‌ای درون هر بلوک چهارگانه $\widehat{\Omega}^i$ محاسبه شود [13]. مشخص است که تعداد توابع پایه‌ای درون یک بلوک چهارگانه برابر با تعداد گوشه‌های آن است. به عبارتی برای یک بلوک چهارگانه تعداد 9 تابع پایه‌ای باید محاسبه شود.

برای محاسبه تابع اصلاحی Ψ^i مربوط به هر بلوک چهارگانه $\widehat{\Omega}^i$ با $i \in \{1, \cdots, N_q\}$، لازم است که یک مسئله ناهمگن درون بلوک دوگانه حل شود. توابع اصلاحی در حقیقت جواب خصوصی مسئله کلی تعریف شده در هر بلوک دوگانه یا چهارگانه است و اثرات عوامل جانبی مانند گرانش، فشار موئینگی و چاه‌ها را در روش چند مقیاسی لحاظ می‌کند. با توجه به اینکه در کار حاضر از اثرات گرانش صرف نظر شده است و همچنین هیچ چاه تزریق و برداشتی وجود ندارد، مقدار تابع اصلاحی در تمام بلوک‌های چهارگانه معادل صفر است، یعنی $\Psi^i = 0, i \in \{1,2, \cdots, N_q\}$. برای اطلاع در مورد نحوه محاسبه توابع اصلاحی به [14,13] رجوع شود.

با توجه به موارد مطرح شده، با جایگذاری مقدار فشار چند مقیاسی P_{ms} از رابطه (2) در رابطه (1) و انتگرال‌گیری از معادله حاصل روی بلوک‌های درشت و در نهایت اعمال قضیه دیورژانس، می‌توان به رابطه زیر دست یافت [14]:

$$\sum_{j=1}^{N_c} \bar{P}_j \sum_{i=1}^{N_q} \int_{\partial\bar{\Omega}_{\mathbb{P}} \cap \widehat{\Omega}^i} \left(-\lambda \cdot \nabla \theta_j^i\right) \cdot \vec{n}\, d\Gamma = 0 \tag{5}$$

معادله‌های (5) بیانگر یک دستگاه معادله فشار درشت مقیاس به صورت $T\bar{P} = 0$ است که در آن T ماتریس انتقال‌پذیری درشت مقیاس است. نحوه محاسبه مقادیر انتقال‌پذیری درشت مقیاس در بخش 4 تشریح شده است. در رابطه (5)، بردار نرمال بر سطوح بلوک‌های درشت و به سمت خارج بلوک‌ها می‌باشد. علاوه بر این، $\partial\bar{\Omega}_{\mathbb{P}} \cap \widehat{\Omega}^i$ نشان دهنده نیم وجه‌هایی از بلوک‌های درشت هستند که درون بلوک‌های دوگانه قرار دارند (بخش 4).

پس از محاسبه مقادیر انتقال‌پذیری درشت مقیاس، می‌توان دستگاه معادله (5) را برای مقدار فشار در مرکز هر یک از بلوک‌های درشت حل نمود [13]. با استفاده از میدان فشار درشت مقیاس بدست آمده، میدان فشار چند مقیاسی P_{ms} به صورت ترکیب خطی مقادیر فشار درشت مقیاس وزن شده با توابع پایه‌ای درون هر بلوک چهارگانه محاسبه می‌شود. از آنجایی که میدان فشار چند مقیاسی به صورت یک میان‌یابی ریز مقیاس از مقادیر فشار درشت مقیاس درون هر یک از بلوک‌های چهارگانه است، میدان سرعت تولید شده بر اساس میدان فشار P_{ms} روی مرزها و گوشه‌های بلوک‌های چهارگانه پایستار نیست [14,13,1]. در حقیقت، پایستار نبودن میدان سرعت از نوع معادله‌های (4) ریشه می‌گیرد [2,1]. بدین صورت که برای رسیدن به محلی‌سازی، یک سری شرایط مرزی مصنوعی و به صورت کاملاً یک بعدی روی مرزهای بلوک‌های چهارگانه اعمال شده است [14,13]. این در حالی است که برای حل نمودن معادلات بقای جرم وجود میدان سرعت پایستار ریز مقیاس یک ضرورت است. بنابراین، روش حجم محدود چند مقیاسی به یک مرحله بازسازی میدان فشار (پس‌پردازش) برای تولید میدان سرعت پایستار ریز مقیاس نیازمند است [13,8,6]. با تعریف و حل نمودن یک مسئله محلی درون هر بلوک از شبکه درشت، میدان فشار به صورت محلی بازسازی می‌شود. برای انجام این کار، ابتدا شرایط مرزی برای هر بلوک درشت از نوع نیومن و بر اساس قانون دارسی با استفاده از مقادیر فشار روش چند مقیاسی محاسبه می‌شود. استفاده از شرط مرزی نیومن، پیوستگی شار بین هر دو بلوک درشت مجاور در مقیاس ریز را تضمین می‌کند. با اعمال این شرایط روی مرزهای هر بلوک درشت و استفاده از مقادیر فشار درشت مقیاس درون بلوک درشت، مسئله زیر حل می‌شود (توجه شود که در اینجا فرض شده است که هیچ عامل خارجی مانند چاه وجود ندارد) [13,1]:

$$-\nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla P_r) = 0, \qquad \text{در } \bar{\Omega}_j \tag{6-الف}$$

$$-\lambda \cdot \nabla P_r \cdot \vec{n} = \vec{f}_{ms}, \qquad \text{روی } \partial\bar{\Omega}_j \tag{6-ب}$$

در اینجا، $\vec{f}_{ms}$ بیان کننده شارهای ریزمقیاس عبوری از مرزهای بلوک درشت است که به صورت $\vec{f}_{ms} = -\lambda \cdot \nabla P_{ms} \cdot \vec{n}$ بیان می‌شود. در نهایت، با استفاده از میدان سرعت بدست آمده از میدان فشار بازسازی شده درون هر بلوک درشت و شارهای اعمال شده روی مرزهای بلوک درشت، میدان سرعت پایستار ریز مقیاس تولید می‌شود [2]:

$$\vec{U} = \begin{cases} -\lambda \cdot \nabla P_r & \text{در } \bar{\Omega}_j \\ \vec{f}_{ms} & \text{روی } \partial\bar{\Omega}_j \end{cases} \tag{7}$$

در ادامه نحوه محاسبه انتقال‌پذیری درشت مقیاس مناسب با روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی تشریح می‌شود.

4- مفهوم انتقال‌پذیری درشت مقیاس و نحوه محاسبه آن

در روش حجم محدود چند مقیاسی ارتباط بین مقادیر فشار در مراکز بلوک‌های درشت از طریق پارامتری به نام انتقال‌پذیری بر قرار می‌شود. از نقطه نظر ریاضی، انتقال‌پذیری بین دو بلوک درشت (انتقال‌پذیری درشت مقیاس) همان درایه‌های غیر صفر موجود در ماتریس ضرایب دستگاه فشار درشت مقیاس یعنی معادله (5) است. پیش از بدست آوردن مقادیر انتقال‌پذیری درشت مقیاس بین بلوک‌های درشت، یک بلوک درشت همراه با یک بلوک چهارگانه مجاور آن برای یک مسئله دو بعدی را در نظر بگیرید (شکل 2). مشخص است که درون هر بلوک چهارگانه، تعداد چهار عدد بلوک دوگانه قرار دارد. حال یک بلوک دوگانه را در نظر بگیرید. این بلوک دوگانه با دو وجه مشخص از بلوک درشت تقاطع دارد و این وجوه را به دو قسمت تقسیم می‌کند. به هر یک از این قسمت‌ها نیم‌وجه بلوک درشت گفته می‌شود که در شکل 2 برای بلوک درشت سمت راست با خطوط ضخیم‌تر نمایش داده شده‌اند. اکنون دو بلوک درشت در مجاورت یکدیگر همراه با بلوک چهارگانه

مشترک بین آن‌ها را در نظر بگیرید (شکل 2). در صورتی که مقدار فشار در یک بلوک درشت برابر با واحد و مقدار فشار در بلوک درشت دیگر صفر باشد، یک شار از سمت بلوک درشت با فشار واحد به سمت بلوک دیگر (با فشار صفر) جریان پیدا می‌کند (شکل 2). از نقطه نظر فیزیکی، انتقال‌پذیری بین دو بلوک درشت مجاور یکدیگر با احراز دو شرط زیر برابر با مقدار کل شارهای عبوری از نیم‌وجه‌های یک بلوک درشت است [14]:

1- شارهای عبوری از نیم‌وجه‌های بلوک درشت ناشی از اعمال مقدار فشار واحد در مرکز یک بلوک درشت و مقدار صفر در بلوک دیگر می‌باشد (اختلاف فشار واحد همان طور که در شکل 2 نمایش داده شده است).

2- این نیم‌وجه‌های بلوک درشت باید درون بلوک‌های دوگانه‌ای که بین دو بلوک درشت مشترک هستند قرار بگیرند.

با توجه به توضیحات ارایه شده، مشخص است که مقادیر انتقال‌پذیری درشت مقیاس به صورت مجموع یک سری شار درشت مقیاس که از نیم وجه‌های مشخصی از یک بلوک درشت می‌گذرد تخمین زده می‌شوند. بنابراین ابتدا هر یک از این شارها به صورت جداگانه محاسبه و در نهایت با الگوی خاصی برهم نهی می‌شوند تا مقادیر انتقال‌پذیری بین دو بلوک درشت مجاور تعیین شود. همان طور که در شکل 3 نمایش داده شده است، در اطراف یک بلوک درشت تعداد چهار عدد بلوک دوگانه وجود دارد که با نمادهای RU، LU، RD وLD نامگذاری شده‌اند. درون هر بلوک دوگانه، تعداد چهار نیم وجه از بلوک‌های درشت اطراف آن قرار می‌گیرند. با توجه به موقعیت جغرافیایی نیم وجه‌ها درون هر بلوک دوگانه، این نیم وجه‌ها با نمادهای وجه $h \in \{E,W,N,S\}$ نمایش داده می‌شوند. با در نظر گرفتن

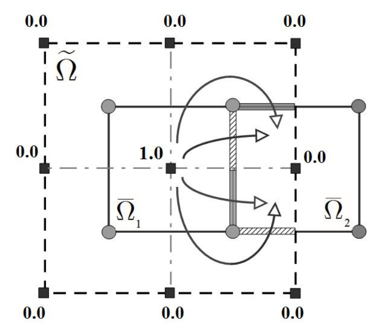


Fig. 2 Definition of transmissibility between two coarse blocks

شکل 2 مفهوم انتقال‌پذیری درشت مقیاس بین دو بلوک درشت

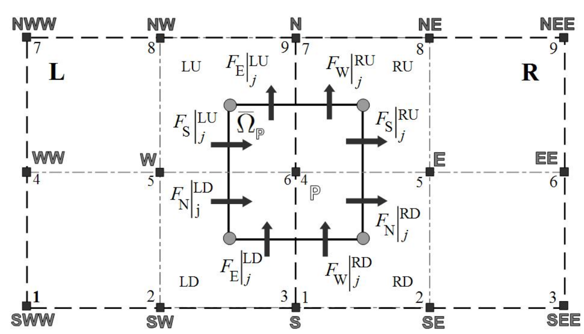


Fig. 3 Coarse-scale fluxes crossing the half faces of a typical coarse block [13]

شکل 3 شارهای درشت مقیاس عبوری از نیم وجه‌های یک بلوک درشت [13]

اطلاعات نمایش داده شده در شکل3، مقدار شار درشت مقیاس عبوری از نیم وجه $h \in \{E,W,N,S\}$ از بلوک درشت $\overline{\Omega}_{\mathbb{P}}$ درون بلوک دوگانه $\widehat{\Omega}^i$ به صورت زیر محاسبه می‌شود [14,13]:

$$F_h|_j^i = -\int_h \lambda \cdot \nabla\theta_j^i \cdot \vec{n}\, d\Gamma \qquad (8)$$

با مشخص شدن تمامی شارهای درشت مقیاس عبوری از نیم وجه‌های بلوک‌های درشت می‌توان مقدار انتقال‌پذیری بین بلوک‌های درشت را محاسبه نمود. برای انجام اینکار، این شارهای درشت مقیاس با الگوی خاصی برهم نهی می‌شوند. نحوه بر هم نهی شارها وابسته به محل و نحوه قرارگیری بلوک درشت نسبت به بلوک‌های چهارگانه اطراف آن است. به عنوان مثال، مطابق شکل 3 مقدار انتقال‌پذیری T_{EP} بین دو بلوک درشت با مرکزهای E و P با رابطه زیر بیان می‌شود [14,13]:

$$T_{\mathrm{EP}} = F_{\mathrm{S}}|_2^{\mathrm{RU}} + F_{\mathrm{W}}|_2^{\mathrm{RU}} - F_{\mathrm{W}}|_8^{\mathrm{RD}} + F_{\mathrm{N}}|_8^{\mathrm{RD}} \qquad (9)$$

برای جزییات مربوط به روش تخمین شار چند نقطه‌ای و محاسبه انتقال‌پذیری در روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی به مراجع [14,13] مراجعه شود. با مشخص شدن مقادیر انتقال‌پذیری، دستگاه معادله درشت مقیاس تشکیل و حل می‌شود تا مقادیر فشار در مراکز سلول‌های درشت تعیین شود [4].

5- علت بروز میدان فشار غیر یکنوا و یک راهکار برای رفع آن

همانطور که در بخش 4 تشریح گردید، مقادیر انتقال‌پذیری با بر هم نهی تعدادی شار درشت مقیاس عبوری از نیم وجه‌های بلوک‌های درشت محاسبه می‌شود. هر یک از این شارهای درشت مقیاس خود به صورت مجموع شارهای ریز مقیاس عبوری از نیم‌وجه مشخصی از بلوک درشت مورد نظر بیان می‌شود. با توجه به رابطه (8) مشخص است که این شارهای ریز مقیاس با استفاده از مقادیر توابع پایه‌ای درون بلوک چهارگانه و متناظر با راس مشخصی از بلوک چهارگانه محاسبه می‌شوند. علت ایجاد فشار غیریکنوا در روش حجم محدود چند مقیاسی ریشه در این شارهای ریز و درشت مقیاس به همراه روش تخمین شار چند نقطه‌ای دارد که در ادامه تشریح می‌شود.

5-1- شرایط یکنوایی جواب دستگاه معادله خطی فشار درشت مقیاس

جواب یک دستگاه معادله خطی در صورتی یکنوا است که ماتریس ضرایب آن به اصطلاح یک M−ماتریس باشد [20]. در یکM−ماتریس تمامی درایه‌های قطری آن مثبت هستند. علاوه بر این، تمامی درایه‌های غیر قطری ماتریس غیر مثبت هستند. شرط اخیر از نظر فیزیکی برای روش حجم محدود چند مقیاسی اینطور تفسیر می‌شود که شار خالص ناشی از مقدار فشار واحد اعمال شده در مرکز یک بلوک درشت نباید هیچگاه به این بلوک وارد شود. در حقیقت باید این شار معادل صفر یا به سمت بلوک همسایه باشد. شرط آخری که در یک M−ماتریس وجود دارد این است که مجموع تمامی درایه‌های موجود در یک سطر ماتریس باید غیر منفی باشد. با توجه به توضیحات مذکور به بیان ریاضی یک M−ماتریس دارای شرایط زیر است [20]:

$$T_{ii} > 0 \qquad \text{(10-الف)}$$

$$T_{ij} \leq 0, \qquad i \neq j \qquad \text{(10-ب)}$$

$$\sum_j T_{ij} \geq 0, \quad \forall i. \qquad \text{(10-ج)}$$

با توجه به شرایط مطرح شده، می‌توان رفتار بلوک‌های درشت نسبت به

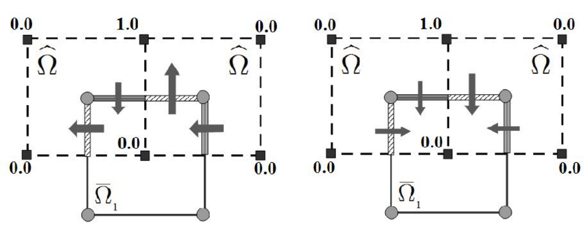
یکدیگر را به دو دسته خوش رفتار و بد رفتار تقسیم نمود. دو بلوک درشت مجاور یکدیگر خوش رفتار نامیده می‌شوند هرگاه شار درشت مقیاس خالص عبوری ناشی از اختلاف فشار واحد بین این دو بلوک درشت طوری باشد که از بلوک با فشار بیشتر خارج و به بلوک دیگر وارد شود (شکل 4-الف). در این حالت مقدار انتقال‌پذیری بین این دو بلوک منفی و سازگار با شرط M-ماتریس بودن ماتریس ضرایب دستگاه فشار درشت مقیاس است. در غیر این صورت، دو بلوک مجاور نسبت به یکدیگر بد رفتار نامیده می‌شوند (شکل 4-ب).

بر اساس میدان‌های تراوایی مطلق ممکن است که برای برخی از مناطق ناحیه حل، مقادیر برخی از شارهای کل بین بلوک‌های درشت به صورت غیر فیزیکی محاسبه شوند. در این گونه موارد، جهت شار کل بین دو بلوک درشت از سمت بلوک با فشار کمتر به سمت بلوک با فشار بیشتر است، بنابراین مقادیر انتقال‌پذیری بین این بلوک‌ها مقادیری مثبت دارند (بلوک‌های بد رفتار). در این گونه موارد شرط M-ماتریس بودن ماتریس ضرایب دستگاه معادله فشار درشت مقیاس برقرار نبوده و ممکن است جواب آن دارای نوسان‌های غیر فیزیکی شود. با توجه به توضیحات ارایه شده می‌توان گفت که علت ایجاد میدان فشار غیر یکنوا در روش حجم محدود چند مقیاسی وجود بلوک‌های درشت بد رفتار با مقادیر بزرگ شار درشت مقیاس در جهت غیرفیزیکی (معکوس) است.

در ادامه نتایج شبیه‌سازی عددی برای میدان‌های تراوایی مطلق مختلف آورده شده است تا دقت روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی در مقایسه با روش حجم محدود چند مقیاسی پایه و روش حجم محدود استاندارد (به عنوان جواب مبنا) مشخص شود.

6- نتایج شبیه‌سازی عددی

در این بخش، نتایج عددی بدست آمده از روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی با نتایج روش حجم محدود استاندارد (جواب ریز مقیاس) برای یک محیط متخلخل دو بعدی مستطیل شکل با چند میدان تراوایی مطلق به شدت ناهمگون مقایسه شده است. در تمامی مسائل چنین فرض شده است که تخلخل محیط متخلخل معادل $\phi = 0.2$ بوده و در ابتدا تمام فضای خالی آن توسط یک سیال (در اینجا آب) پر شده است. علاوه بر این، برای دو دیواره بالایی و پایینی ناحیه، شرط مرزی بدون جریان در نظر گرفته شده است. این در حالی است که برای دو دیواره سمت چپ و راست مقدار



a) Well-posed coarse blocks — الف) بلوک‌های درشت خوش رفتار

b) Ill-posed coarse blocks — ب) بلوک‌های درشت بد رفتار

Fig. 4 Coarse-scale flux constructing the transmissibility between two adjacent coarse cells

شکل4 نمایش شارهای درشت مقیاس سازنده انتقال‌پذیری بین مراکز دو بلوک درشت مجاور یکدیگر

فشار (شرط مرزی دریکله) تجویز شده است به طوری که مقدار فشار بی‌بعد شده در سمت چپ ناحیه برابر واحد و فشار بی‌بعد در سمت راست ناحیه معادل صفر است. در اینجا، فشار بی‌بعد شده به صورت $\left(P_n = \frac{P-P_L}{P_R-P_L}\right)$ تعریف می‌شود که در آن P_L و P_R به ترتیب مقادیر فشار در دیواره سمت چپ و راست ناحیه است. در حقیقت، آب از دیواره سمت چپ به درون ناحیه وارد شده و از طریق دیواره سمت راست خارج می‌شود. برای تمام مسائل لزجت سیال برابر $\mu = 0.31\text{cp}$ در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که در اینجا به منظور تمرکز روی اثرات ناشی از ساختار میدان تراوایی مطلق چنین فرض شده است که هیچ یک از خواص سیال شامل لزجت و چگالی با تغییر فشار تغییر نمی‌کند. با ثابت در نظر گرفتن این کمیت‌ها، از تاثیر تغییرات آن‌ها روی نتایج شبیه‌سازی عددی صرف‌نظر می‌شود. بنابراین در مورد خطای ناشی از ساختار به شدت ناهمگون میدان‌های تراوایی مطلق می‌توان قضاوت نمود.

با توجه به توضیحات ارایه شده، نتایج روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی متناظر با چند میدان‌های تراوایی مطلق مختلف با نتایج حجم محدود استاندارد (به عنوان جواب مبنا) مقایسه می‌شود. برای بررسی میزان خطای نتایج بدست آمده از روش حجم محدود چند مقیاسی از مقادیر خطای نسبی میدان فشار E_p و خطای نسبی میدان سرعت E_u استفاده می‌شود. این خطاها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$E_p = \frac{|P_{ms} - P_f|_2}{|P_f|_2} \qquad (11\text{-الف})$$

$$E_u = \frac{|\vec{u}_{x,ms} - \vec{u}_{x,f}|_2}{|\vec{u}_{x,f}|_2} + \frac{|\vec{u}_{y,ms} - \vec{u}_{y,f}|_2}{|\vec{u}_{y,f}|_2} \qquad (11\text{-ب})$$

در اینجا، زیرنویس‌های ms و f به ترتیب بیانگر روش‌های چند مقیاسی و روش ریز مقیاس و عبارت $|\vec{d}|_2$ نشان دهنده نرم اقلیدسی برای بردار $\vec{d}$ است. برای بررسی عملکرد روش چند مقیاسی از تعداد زیادی میدان تراوایی مطلق مختلف استفاده شده است که هر یک از آن‌ها یکی از لایه‌های یک مخزن معرفی شده تحت عنوان دهمین مسئله مقایسه‌ای انجمن مهندسی نفت SPE[1] هستند. در اینجا لایه‌های شماره 1، 10، 35، 40، 46 و 85 (لایه زیرین) از این مخزن نفتی انتخاب و میدان لگاریتم تراوایی مطلق آن‌ها در شکل 5 نمایش داده شده است. مشخص است که ساختار ناهمگونی این میدان‌ها با یکدیگر متفاوت است. در شکل‌های 5-الف تا 5-ج لگاریتم میدان تراوایی مطلق اولین، دهمین و سی و پنجمین لایه از دهمین مسئله مقایسه‌ای SPE ترسیم شده است [21]. با وجود ناهمگونی شدید در کل این میدان‌های تراوایی، تغییرات مقادیر تراوایی خیلی شدید و ناگهانی نبوده و به صورت تقریباً تدریجی از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر در کل ناحیه تغییر می‌کند. این در حالی است که میدان‌های تراوایی مطلق نشان داده شده در شکل 5-د تا 5-و ساختارهایی کانالی دارند که به ترتیب چهلمین، چهل و ششمین و هشتاد و پنجمین لایه از دهمین مسئله مقایسه‌ای هستند. در مقایسه با لایه‌های اول، دهم و سی و پنجم، تغییرات تراوایی مطلق متناظر با شکل‌های 5-د تا 5-و بسیار شدیدتر و ناگهانی‌تر است.

در شکل6 میدان فشار بدست آمده از روش‌های حجم محدود استاندارد و حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی برای میدان‌های تراوایی مطلق با تغییرات تدریجی آورده شده است. مشخص است که برای هر یک از این سه لایه، روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی در مقایسه با روش حجم محدود استاندارد جواب‌های قابل قبولی را تولید

[1] Society of Petroleum Engineering

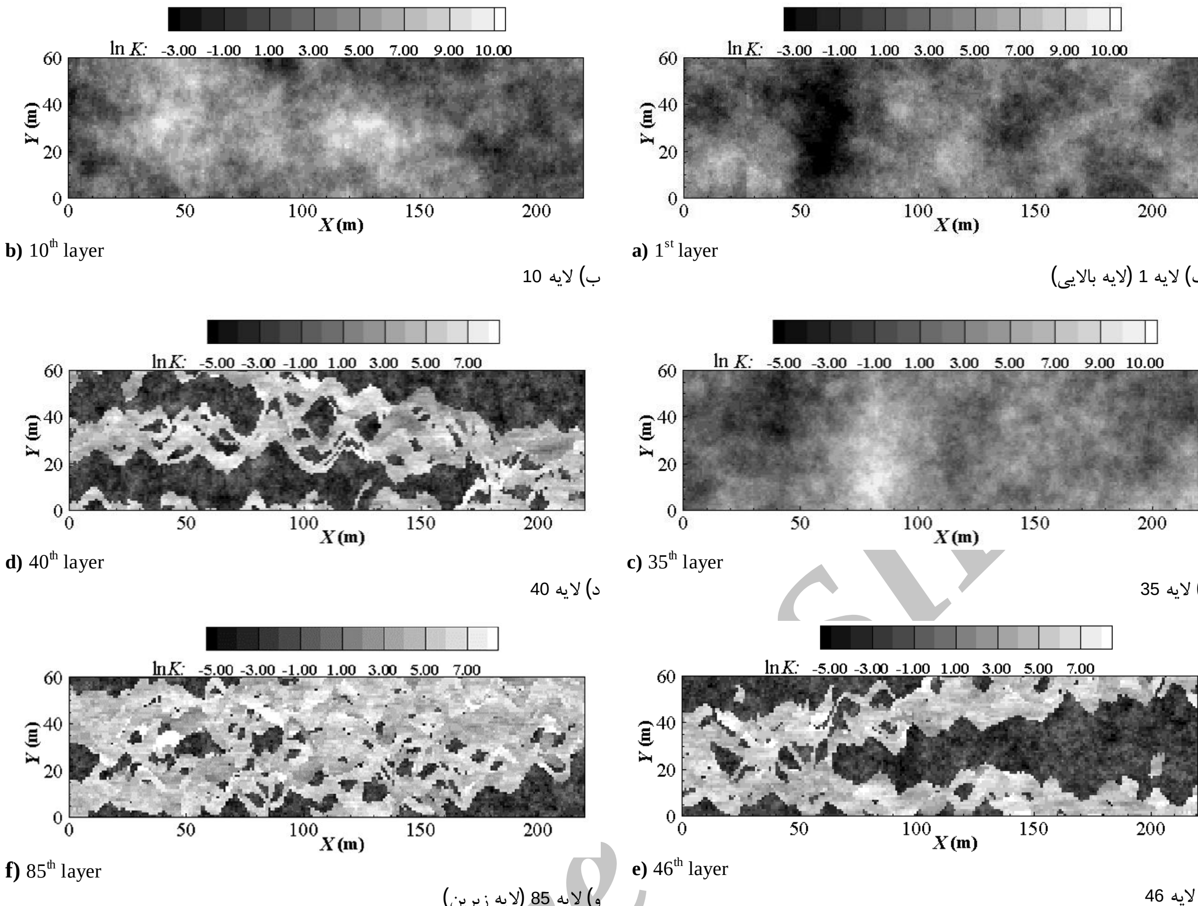


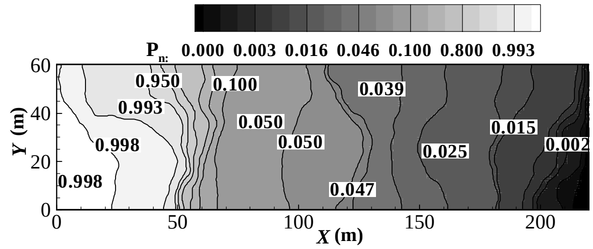
Fig. 5 Absolute permeability fields in terms of mili-Darcy extracted from different layers of the reservoir introduced in the 10th SPE comparative study problem.

شکل 5 میدان‌های تراوایی مطلق بر حسب میلی دارسی (mD) استخراج شده از لایه‌های منتخب مخزن معرفی شده در دهمین مسئله مقایسه‌ای SPE

می‌کند؛ به نحوی که در میدان فشار روش چند مقیاسی هیچ گونه قله فشاری دیده نشده و فشار در کل ناحیه حل از مقدار بیشینه یک به مقدار کمینه صفر به صورت یکنوا تغییر می‌کند و کاملاً مقید است (شکل‌های 6-ب، 6-د و 6-و). در حقیقت، تاریخچه خانواده روش حجم محدود چند مقیاسی نشان دهنده این مطلب است که این دسته روش‌ها برای میدان‌های تراوایی مطلق به شدت ناهمگون و با تغییرات تدریجی در حالت کلی جواب‌های قابل قبولی را تولید می‌کنند [14,2,1]. تعداد 35 لایه بالایی مخزن معرفی شده در دهمین مسئله مقایسه‌ای SPE [21] از جمله میدان‌های تراوایی مطلق با تغییرات تدریجی هستند. خطای مربوط به میدان فشار و سرعت بدست آمده از روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی برای برخی از این لایه‌ها در جدول1 آورده شده است. علاوه بر این، تعداد درایه‌های غیر قطری و مثبت محاسبه شده در ماتریس انتقال‌پذیری درشت مقیاس برای هر یک از لایه‌ها آورده شده است. کانتورهای فشار ترسیم شده در شکل 6 به همراه اطلاعات موجود جدول 1 نشان می‌دهد که با وجود درایه‌های غیر قطری مثبت در ماتریس ضرایب دستگاه معادله فشار درشت مقیاس باز هم می‌توان به حل یکنوا و مقید رسید. به عبارتی دیگر، وجود درایه‌های غیر قطری مثبت در ماتریس انتقال‌پذیری الزاما به معنی تولید میدان فشار غیر یکنوا نیست. با مشاهده درایه‌های ماتریس انتقال‌پذیری متناظر با میدان‌های تراوایی مطلق با تغییرات تدریجی، به سادگی می‌توان نشان داد که این درایه‌های غیر قطری در مقایسه با درایه‌های قطری اندازه کوچکی دارند. در ادامه عملکرد روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی برای میدان‌های تراوایی مطلق با تغییرات ناگهانی (ساختار کانالی) بررسی می‌شود.

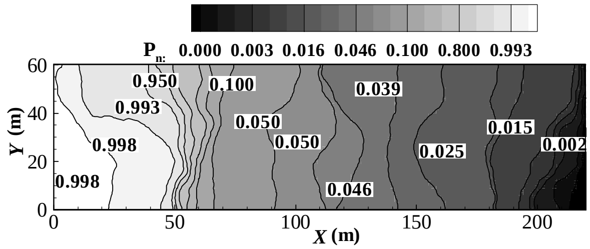
میدان فشار بدست آمده از روش حجم محدود استاندارد و روش MrMsFV برای میدان‌های تراوایی مطلق با ساختار کانالی (لایه‌های 40، 46 و 85) در شکل 7 آورده شده است. برخلاف آنچه در مورد میدان‌های تراوایی مطلق با تغییرات تدریجی مطرح شد، در مورد میدان‌های تراوایی مطلق با ساختار کانالی، وجود مقادیر انتقال‌پذیری مثبت مربوط به بلوک‌های درشت بد رفتار باعث پدید آمدن قله‌های غیر فیزیکی در میدان فشار چند مقیاسی می‌شود (شکل 7). این قله‌های غیر فیزیکی در کانتورهای دو بعدی به صورت پیچش‌های غیر عادی در خطوط هم فشار در میدان فشار روش چند مقیاسی ظاهر می‌شوند که برای لایه‌های 40، 46 و 85 به ترتیب در شکل‌های 7-ب، 7-د و 7-و به وضوح به تصویر کشیده شده‌اند. وجود این نوسانات غیر فیزیکی علاوه بر این که در مقدار فشار خطا ایجاد می‌کنند، در مشتق مکانی آن و به عبارت بهتر میدان سرعت بدست آمده از روش چند مقیاسی خطای قابل توجهی تولید می‌کنند.

برای میدان‌های تراوایی مطلق با ساختار کانالی، خطای مربوط به میدان



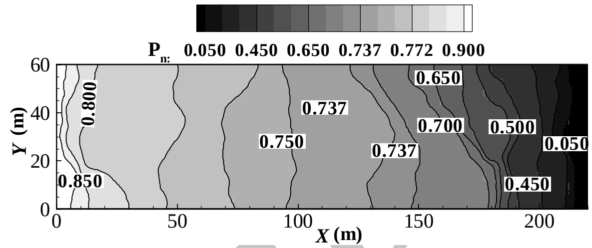
a) Layer 1: Reference method

الف) لایه 1: روش حجم محدود استاندارد (روش مبنا)



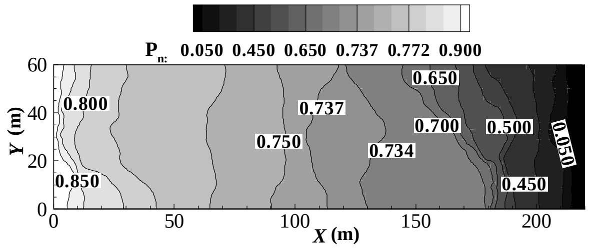
b) Layer 1: MrMsFV method

ب) لایه 1: روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی



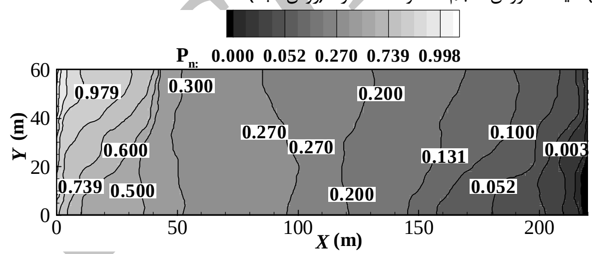
c) Layer 10: Reference method

ج) لایه 10: روش حجم محدود استاندارد (روش مبنا)



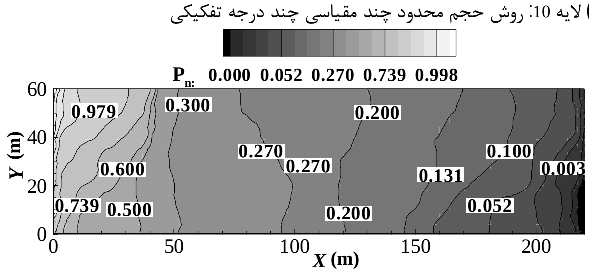
d) Layer 10: MrMsFV method

د) لایه 10: روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی



e) Layer 35: Reference method

ه) لایه 35: روش حجم محدود استاندارد (روش مبنا)



f) Layer 35: MrMsFV method

و) لایه 35: روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی

Fig. 6 Pressure contours associated with different permeability fields (Tarbert formations) extracted from the 10th SPE comparative study problem.

شکل 6 کانتورهای فشار بی‌بعد متناظر با میدان‌های تراوایی با تغییرات تدریجی استخراج شده از لایه‌های مختلف دهمین مسئله مقایسه‌ای SPE

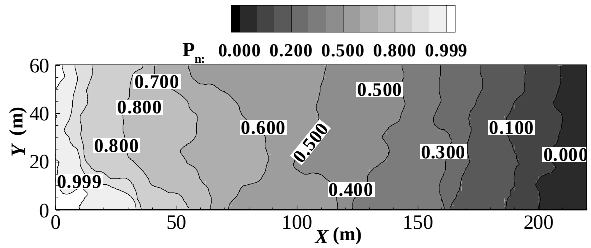
جدول1 خطای روش MrMsFV برای برخی از لایه‌های ناهمگون با تغییرات تدریجی تراوایی مطلق استخراج شده از دهمین مسئله مقایسه‌ای SPE

Table 1 Errors of the MrMsFV method for selected layers with Tarbert formation extracted from the 10th SPE comparative study problem.

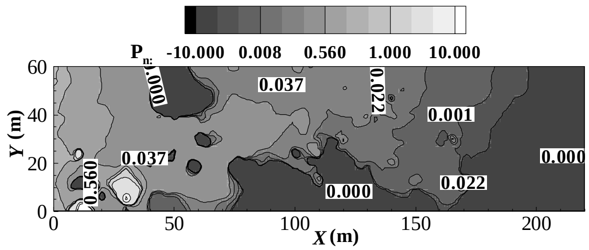
لایه	خطای میدان فشار E_{p}	خطای میدان سرعت E_{u}	تعداد درایه غیر قطری مثبت ماتریس انتقال‌پذیری
1	0.0046	0.3869	131
2	0.0037	0.4162	151
10	0.0045	0.5068	153
21	0.0078	0.4448	108
35	0.0043	0.3787	130

فشار و سرعت روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی در مقایسه با نتایج روش حجم محدود استاندارد در جدول 2 آورده شده است. علاوه بر این، جدول 2 تعداد درایه‌های غیر قطری مثبت (درایه‌های بد رفتار) موجود در ماتریس انتقال‌پذیری متناظر با لایه‌هایی با ساختار کانالی از دهمین مسئله مقایسه‌ای SPE را نشان می‌دهد. با مقایسه داده‌های ارایه شده در جدول‌های 1 و 2 به راحتی می‌توان به میزان خطای زیاد روش حجم محدود چند مقیاس چند درجه تفکیکی در مسایل متناظر با میدان‌های تراوایی مطلق با ساختار کانالی پی برد. نکته جالب در اینجاست که برای میدان تراوایی مطلق با ساختار کانالی علاوه بر اینکه اندازه این درایه‌های بد رفتار نسبت به درایه قطری متناظر با آن‌ها بزرگ است، تعداد درایه‌های غیر قطری مثبت نیز در مقایسه با میدان‌های تراوایی با تغییرات تدریجی

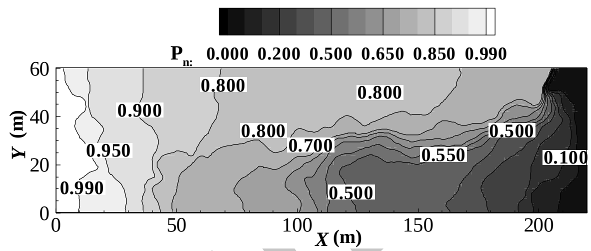
زیاد است (برای لایه‌های بررسی شده حدود پنج برابر). بنابراین، تعداد بالا و اندازه بزرگ درایه‌های غیر قطری و مثبت ماتریس انتقال‌پذیری باعث بروز میدان فشار درشت مقیاس غیر یکنوا در روش چند مقیاسی چند درجه تفکیکی می‌شود. توجه شود که این ضعف در روش حجم محدود چند مقیاسی پایه نیز وجود دارد و در مراجع [18,9] به آن اشاره شده است. در این مراجع اشاره شده است که شرایط مرزی اعمال شده برای محاسبه توابع پایه‌ای (شرط محلی‌سازی) عامل بروز چنین رفتار غیر فیزیکی روش حجم محدود چند مقیاسی می‌شود. در روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی برخی از مرزهای برخی از بلوک‌های دوگانه برای تشکیل بلوک‌های چهارگانه حذف شده است. بنابراین، تعداد شرایط مرزی غیر فیزیکی اعمال شده برای رسیدن به محلی‌سازی در روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی نسبت به روش حجم محدود چند مقیاسی پایه کمتر است. بنابراین، این انتظار وجود دارد که خطای روش چند درجه تفکیکی نسبت به روش چند مقیاسی پایه کمتر باشد. برای بررسی این مورد در اینجا تعداد درایه‌های غیر قطری و مثبت ماتریس انتقال‌پذیری این دو روش برای لایه‌های مختلف دهمین مسئله مقایسه‌ای SPE جدول 3 آورده شده است. مشخص است که برای تمام لایه‌های مورد بررسی تعداد درایه‌های غیر قطری مثبت در روش حجم محدود چند مقیاسی پایه همیشه کمتر از روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی است. این در حالی است که محل اعمال شرایط مرزی لازم برای محاسبه توابع پایه‌ای برای هر دو روش یکسان است و حتی در روش چند درجه تفکیکی برخی از مرزها برای تشکیل بلوک‌های چهارگانه حذف شده است. نکته مهم این است که در روش‌های چند مقیاسی علاوه بر نوع و محل شرایط مرزی اعمال شده روی مرزهای



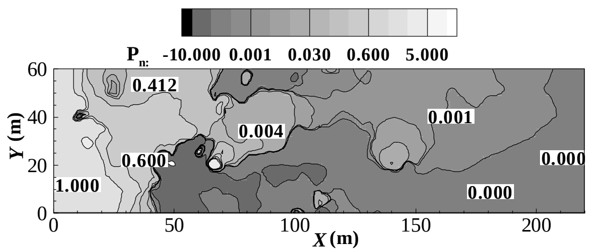
a) Layer 40: Reference method
الف) لایه 40: روش حجم محدود استاندارد (روش مبنا)



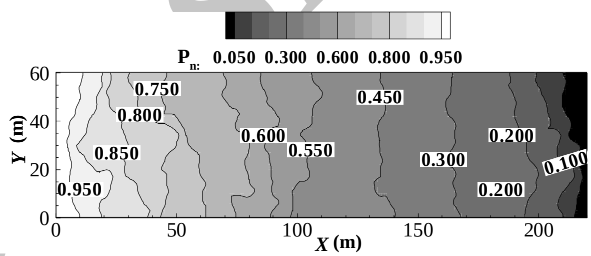
b) Layer 40: MrMsFV method
ب) لایه 40: روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی



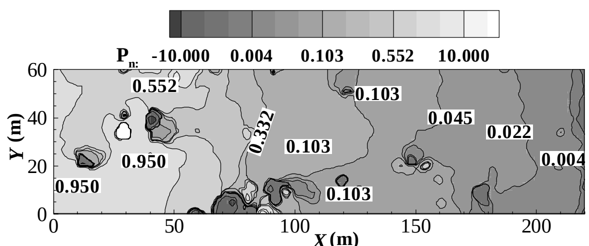
c) Layer 46: Reference method
ج) لایه 46: روش حجم محدود استاندارد (روش مبنا)



d) Layer 46: MrMsFV method
د) لایه 46: روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی



e) Layer 85: Reference method
ه) لایه 85: روش حجم محدود استاندارد (روش مبنا)



f) Layer 85: MrMsFV method
و) لایه 85: روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی

Fig. 7 Pressure contours associated with different highly channelized permeability fields extracted from the 10th SPE comparative study problem.
شکل 7 کانتورهای فشار بی‌بعد متناظر با میدان‌های تراوایی با ساختار کانالی انتخاب شده از لایه‌های مختلف دهمین مسئله مقایسه‌ای SPE

جدول 2 خطای روش MrMsFV برای لایه‌هایی با ساختار کانالی استخراج شده از دهمین مسئله مقایسه‌ای SPE.

Table 2 Errors of the MrMsFV method for layers with channelized structures extracted from the 10th SPE comparative study problem.

لایه	خطای میدان فشار E_p	خطای میدان سرعت E_u	تعداد درایه غیر قطری مثبت ماتریس انتقال‌پذیری
38	1.553	57.649	641
40	1.745	91.686	637
46	1.112	106.178	661
73	0.918	16.592	746
85	4.029	110.575	638

جدول 3 تعداد درایه‌های غیر قطری و مثبت در ماتریس انتقال‌پذیری درشت مقیاس دو روش MsFV و MrMsFV برای میدان‌های تراوایی مطلق مختلف

Table 3 The total number of positive off-diagonal entities in the transmissibility matrix of the MsFV and MrMsFV methods for different absolute permeability fields.

شماره لایه	روش MsFV	روش MrMsFV
1	69	131
21	35	108
38	346	641
40	342	637
46	309	661
73	352	746
85	322	638

بلوک دوگانه، روش تخمین شار چند نقطه‌ای نیز در بروز درایه‌های غیر قطری مثبت ماتریس انتقال‌پذیری و اندازه آن‌ها نیز نقش دارد. برای میدان‌های تراوایی مطلق با تغییرات تدریجی، از آنجایی که اندازه هر یک از درایه‌های غیر قطری نسبت به درایه قطری متناظر با آن کوچک است، نه تنها وجود تعداد زیادتر این درایه‌ها در روش چند درجه تفکیکی مشکل خاصی ایجاد نمی‌کند، بلکه به علت ارتباط قوی‌تر ایجاد شده بین مرکزهای بلوک‌های درشت (به واسطه روش تخمین شار متفاوت)، روش چند درجه تفکیکی نسبت به روش چند مقیاسی پایه از دقت بالاتری برخوردار است [13]. این در حالی است که برای میدان تراوایی مطلق با ساختار کانالی، روش تخمین شار چند نقطه‌ای در روش چند درجه تفکیکی منجر به ایجاد تعداد بیشتر و اندازه بزرگتر درایه‌های بد رفتار نسبت به روش حجم محدود چند مقیاسی پایه می‌شود. با توجه به این مطالب، می‌توان گفت که برای میدان‌های تراوایی مطلق با تغییرات تدریجی روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی نسبت به روش چند مقیاسی پایه برتری دارد. این در حالی است که برای میدان‌های تراوایی مطلق با ساختار کانالی هر دو روش نمی‌توانند میدان فشار یکنوا و مقید تولید کنند و بنابراین بایستی اصلاح شوند. به عنوان یک راهکار ساده، با جایگزینی مقادیر انتقال‌پذیری بد رفتار با مقادیر محاسبه شده با روش تخمین شار دو نقطه‌ای می‌توان مشکل غیر یکنوا بودن میدان فشار روش چند مقیاسی را تعدیل بخشید [18].

روش‌های حجم محدود چند مقیاسی به عنوان روش‌هایی سریع و کم هزینه در مقایسه با روش‌های ریز مقیاس شناخته می‌شوند که می‌توانند برای مسائل مختلف جواب‌هایی تقریبی ارایه دهند. دقت این روش‌ها را می‌توان با انجام یکسری مراحل تکرار بهبود بخشید [2]. این دسته از روش‌های چند مقیاسی به عنوان روش‌های چند مقیاسی تکراری معروف هستند [10,9,2]. در بررسی عملکرد یک روش عددی، علاوه بر دقت، هزینه محاسباتی آن نیز بسیار با اهمیت است. در حالت کلی، هزینه محاسباتی روش‌های چند مقیاسی به عوامل مختلفی بستگی دارد که از جمله آن‌ها می‌توان به اندازه مسئله مورد بررسی، ضریب درشت‌نمایی و روش عددی برای حل دستگاه معادله خطی اشاره نمود. روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی نسبت به روش حجم محدود چند مقیاسی پایه در حالت کلی هزینه محاسباتی بالاتری دارد [13]. بدین علت که روش چند درجه تفکیکی از بلوک‌های چهارگانه به جای بلوک‌های دوگانه (بلوک‌هایی با ابعاد و ضریب درشت‌نمایی بزرگتر به صورت 9 گره‌ای به جای بلوک‌های 4 گره‌ای برای مسائل دو بعدی) برای محاسبه توابع پایه‌ای و اصلاحی استفاده می‌کند. لازم به ذکر است که با بکاربردن بلوک‌های چهارگانه و دوگانه به صورت تطبیقی می‌توان هزینه محاسباتی روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی را کاهش داد [13].

در حالت کلی و برای یک گام زمانی، هزینه محاسباتی روش‌های چند مقیاسی با انجام تمامی محاسبات مربوط به تعیین توابع پایه‌ای و اصلاحی، حل دستگاه فشار درشت مقیاس و بازسازی میدان فشار می‌تواند کمتر، مساوی یا حتی در مواردی بیشتر از هزینه روش ریز مقیاس باشد [15,13,4]. برای مسایل مربوط به جریان سیال چند فازی درون محیط‌های متخلخل که لازم است که شبیه‌سازی در چند گام زمانی انجام شود، برای گام‌های زمانی دوم به بعد نیاز به محاسبه تمامی توابع پایه‌ای و اصلاحی نیست و فقط برخی از آن‌ها بر حسب نیاز به روز رسانی می‌شوند. بنابراین هزینه محاسباتی روش‌های چند مقیاسی در گام‌های بعدی نسبت به روش ریز مقیاس به مقدار قابل توجهی کاهش پیدا می‌کند. این کاهش هزینه در مجموع باعث می‌شود که کل هزینه محاسباتی روش‌های چند مقیاسی نسبت به روش چند مقیاس کمتر باشد. علاوه بر این، می‌توان محاسبات بیشتر بخش‌های اصلی روش‌های چند مقیاسی را به صورت پردازش موازی نیز انجام داد که این امر سرعت انجام محاسبات را به میزان قابل توجهی افزایش می‌دهد. بنابراین از نظر محاسباتی، روش‌های چند مقیاسی برای مسایلی با شبکه محاسباتی ریز با اندازه بسیار بزرگ که قرار است برای چندین گام زمانی حل شوند مناسب می‌باشند. برای جزئیات بیشتر در مورد هزینه روش‌های حجم محدود چند مقیاسی پایه و چند درجه تفکیکی نسبت به روش حجم محدود ریز مقیاس و همچنین هزینه محاسباتی هر یک از بخش‌های اصلی روش‌های چند مقیاسی به [15,13,4] مراجعه شود.

7- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در کار حاضر نشان داده شد که روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی قادر است که معادله فشار متناظر با میدان‌های تراوایی مطلق به شدت ناهمگونی که تغییرات تراوایی در آن‌ها به صورت تدریجی است را با دقت قابل قبولی حل کند. این در حالی است که در مورد میدان‌های تراوایی با تغییرات شدید و ساختار کانالی میدان فشار این روش غیر یکنوا بوده و دارای قله‌های غیر فیزیکی است. علت بروز این رفتار غیز فیزیکی را می‌توان در دو عامل جستجو نمود:

1- شرط محلی‌سازی: توابع پایه‌ای مورد نیاز روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی با اعمال یک سری شرط مرزی دریکله روی مرزهای بلوک‌های چهارگانه محاسبه می‌شوند. در حالت کلی، این شرایط مرزی یک بعدی با فیزیک دو بعدی جریان سیال در محیط متخلخل ناهمگون کاملا سازگار نیستند. بنابراین، در برخی موارد ممکن است مقادیر انتقال‌پذیری درشت مقیاس محاسبه شده بر اساس این توابع پایه‌ای به صورت غیر فیزیکی تخمین زده شوند. با توجه به اینکه روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی محاسبات روی بلوک‌های چهارگانه انجام می‌شود، تعداد کل شرایط مرزی برای رسیدن به محلی‌سازی کمتر از تعداد این شرایط مرزی در روش حجم محدود چند مقیاسی پایه است. از اینرو این انتظار وجود داشت که در حالت کلی خطای روش چند درجه تفکیکی کمتر از روش پایه باشد. این مطلب برای میدان‌های تراوایی با تغییرات تدریجی کاملا صحیح است. با این وجود، در مورد میدان‌های تروایی مطلق با ساختار کانالی، خطای روش چند درجه تفکیکی کمتر از حالت پایه نیست (در این حالت با وجود قله‌های غیر فیزیکی در میدان فشار قضاوت در مورد برتری یکی از این دو روش چند مقیاسی خیلی آسان نیست). بنابراین باید عامل دیگری در ایجاد میدان فشار غیر یکنوای روش چند مقیاسی (چند درجه تفکیکی و پایه) نیز نقش داشته باشد که آن روش تخمین شار چند نقطه‌ای است.

2- روش تخمین شار مورد استفاده در روش حجم محدود چند مقیاسی: در حالت کلی روش‌های تخمین شار چند نقطه‌ای ممکن است منجر به ایجاد نوسان‌های غیر فیزیکی در جواب دستگاه معادله خطی شوند [22]. این در حالی است که در روش‌های تخمین شار دو نقطه‌ای مشکل غیر یکنوا بودن جواب دستگاه معادله خطی دیده نمی‌شود.

با توجه به دو مورد ذکر شده می‌توان گفت که ترکیب دو عامل شامل شرط محلی‌سازی و روش تخمین شار چند نقطه‌ای در ایجاد درایه‌های مثبت و بزرگ در ماتریس ضرایب دستگاه معادله فشار درشت مقیاس و متعاقبا بروز قله‌های غیر فیزیکی میدان فشار روش حجم محدود چند مقیاسی چند درجه تفکیکی نقش دارند. با این وجود نتایج عددی نشان می‌دهد که برای میدان‌های تراوایی مطلق با تغییرات تدریجی حتی با وجود مقادیر انتقال‌پذیری مثبت و کوچک امکان دستیابی به میدان فشار یکنوا نیز وجود دارد. مشکل مربوط به ایجاد میدان فشار غیر یکنوا را می‌توان با جایگزینی مقادیر انتقال‌پذیری بد رفتار با مقادیر محاسبه شده با روش تخمین شار دو نقطه‌ای و همچنین استفاده از شرط مرزی خطی تعدیل نمود [18].

8- فهرست علائم

N_{c}	تعداد بلوک‌های درشت
N_{q}	تعداد بلوک‌های چهارگانه
N_{v}	تعداد گوشه‌های بلوک چهارگانه (یا دوگانه)
K	تانسور تراوایی مطلق (mD)
P	فشار (Pa)
$\bar{P}_j$	فشار درشت مقیاس در مرکز بلوک درشت j (Pa)
$\mathrm{P_n}$	فشار بی‌بعد شده $\mathrm{P_n} = (P - P_{\mathrm{L}})/(P_{\mathrm{R}} - P_{\mathrm{L}})$
T_{ij}	انتقال‌پذیری درشت مقیاس بین دو بلوک درشت i و j
$\vec{u}$	بردار سرعت ($\mathrm{ms^{-1}}$)

علائم یونانی

ρ	چگالی ($\mathrm{kgm^{-3}}$)
μ	لزجت دینامیکی ($\mathrm{kgm^{-1}s^{-1}}$)

λ تحرک‌پذیری (mD Pa^{-1}s^{-1})

θ تابع پایه‌ای (-)

Ψ تابع اصلاحی (-)

Ω ناحیه حل

$\widehat{\Omega}$ بلوک دوگانه

$\partial\widehat{\Omega}$ مرزهای بلوک دوگانه

$\widetilde{\Omega}$ بلوک چهارگانه

$\overline{\Omega}$ بلوک درشت

$\partial\overline{\Omega}$ مرزهای بلوک درشت

بالانویس‌ها

i شمارنده مربوط به بلوک‌های دوگانه یا چهارگانه

زیرنویس‌ها

f روش ریز مقیاس

j شمارنده مربوط به بلوک‌های درشت

max مقدار بیشینه

min مقدار کمینه

ms روش چند مقیاسی

x راستای اصلی در دستگاه مختصات کارتزین

y راستای اصلی در دستگاه مختصات کارتزین

9- مراجع

[1] I. Lunati, P. Jenny, Multiscale finite-volume method for compressible multiphase flow in porous media, *Journal of Computational Physics*, Vol. 216, No. 2, pp. 616-636, 2006.

[2] H. Hajibeygi, G. Bonfigli, M. A. Hesse, P. Jenny, Iterative multiscale finite-volume method, *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No. 19, pp. 8604-8621, 2008.

[3] T. Y. Hou, X. H. Wu, A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media, *Journal of Computational Physics*, Vol. 134, No. 1, pp. 169-180, 1997.

[4] P. Jenny, S. H. Lee, H. A. Tchelepi, Multi-scale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation, *Journal of Computational Physics*, Vol. 187, No. 1, pp. 47-67, 2003.

[5] P. Jenny, S. H. Lee, H. A. Tchelepi, Adaptive fully implicit multi-scale finite-volume method for multi-phase flow and transport in heterogeneous porous media, *Journal of Computational Physics*, Vol. 217, No. 2, pp. 627-641, 2006.

[6] I. Lunati, P. Jenny, Multiscale finite-volume method for density-driven flow in porous media, *Computational Geosciences*, Vol. 12, No. 3, pp. 337-350, 2008.

[7] I. Lunati, S. Lee, An operator formulation of the multiscale finite-volume method with correction function, *Multiscale Modeling and Simulation*, Vol. 8, No. 1, pp. 96-109, 2009.

[8] S. H. Lee, C. Wolfsteiner, H. A. Tchelepi, Multiscale finite-volume formulation for multiphase flow in porous media: black oil formulation of compressible, three-phase flow with gravity, *Computational Geosciences*, Vol. 12, No. 3, pp. 351-366, 2008.

[9] I. Lunati, M. Tyagi, S. Lee, An iterative multiscale finite volume algorithm converging to the exact solution, *Journal of Computational Physics*, Vol. 230, No. 5, pp. 1849-1864, 2011.

[10] H. Hajibeygi, P. Jenny, Adaptive iterative multiscale finite volume method. *Journal of Computational Physics*, Vol. 230, No. 3, pp. 628-643, 2011.

[11] H. Zhou, H. A. Tchelepi, Operator-based multiscale method for compressible flow, *SPE Journal*, Vol. 13, No. 2, pp. 267-273, 2008.

[12] M. Hesse, B. Mallison, H. A. Tchelepi, Compact multiscale finite volume method for heterogeneous anisotropic elliptic equations, *Multiscale Modeling and Simulation*, Vol. 7, No. 2, pp. 934-962, 2008.

[13] M. Mosharaf Dehkordi, M. T. Manzari, A multi-resolution multiscale finite volume method for simulation of fluid flows in heterogeneous porous media, *Journal of Computational Physics*, Vol. 248, No. 1, pp. 339-362, 2013.

[14] M. Mosharaf Dehkordi, *Mulit-resolution Multi-scale Finite volume method for Reservoir Simulation*, PhD Thesis, Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, 2013. (In Persian فارسی)

[15] M. Mosharaf Dehkordi, M. T. Manzari, Effects of using altered coarse grids on the implementation and computational cost of the multiscale finite volume method, *Advances in Water Resources*, Vol. 59, No. 1, pp. 221-237, 2013.

[16] S. S. Bahrainian, Z. Mehrdoost, R. Bahoosh Kazerooni, Multiscale unstructured grid generation for reservoir simulation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 9, pp. 333-340, 2015 (In Persian فارسی).

[17] M. Mosharaf Dehkordi, The Localization Error in the Multi-scale Finite Volume Method for Incompressible flow in Porous media, *Modares Mechanical Engineering*. Vol. 15, No.10, pp. 341-350, 2015 (In Persian فارسی).

[18] Y. Wang, H. Hajibeygi, H. A. Tchelepi, Monotone multiscale finite volume method, *Computational Geosciences*, Vol. 1, No. 1, pp. 1-16. 2015.

[19] Z. Chen, G. Huan, Y. Ma, *Computational Methods for Multiphase flows in Porous Media*, First Edittion, pp. 9-75, Philadelphia: SIAM, 2006.

[20] M. G. Edwards, M-matrix flux splitting for general full tensor discretization operators on structured and unstructured grids, *Journal of Computational Physics*, Vol. 160, No. 1, pp. 1–28, 2000.

[21] M. Christie, M. Blunt, Tenth SPE comparative solution project: A comparison of upscaling techniques, *SPE Reservoir Evaluation and Engineering*, Vol. 4, No. 4, pp. 308–317, 2001.

[22] E. Parramore, M. G. Edwards, M. Pal, S. Lamine, Multiscale Finite-Volume CVD-MPFA Formulations on Structured and Unstructured Grids, *Multiscale Modelling and Simulation*, Vol. 14, No. 2, pp. 559-594, 2016.