



تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی مشبک دوار

مهدی زارعی¹، غلامحسین رحیمی^{2*}

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

* صندوق پستی 14115-111، rahimi_gh@modares.ac.ir، تهران

اطلاعات مقاله	چکیده
مقاله پژوهشی کامل	پوسته‌های استوانه‌ای دوار دارای کاربردهای صنعتی نظیر ساتریفیوژها، توربین‌ها، خشک‌کن‌ها، شفت‌های دوار، موتورها و توربوها می‌باشند بنابراین بررسی ارتعاشی آنها ضروری به نظر می‌رسد. پوسته‌های استوانه‌ای مشبک کامپوزیتی به عنوان یکی از پرکاربردترین نمونه سازه‌های مشبک، بخاطر دارا بودن فوایدی همچون استحکام ویژه بالا، سبکی و خواص مقاومت به خوردگی، امروزه بطور وسیعی در صنایع هواپیماسازی، صنایع موشکی و دریایی مورد استفاده قرار می‌گیرند در این تحقیق ارتعاشات آزاد استوانه کامپوزیتی مشبک دوار با تکیه‌گاه‌های مختلف با استفاده از بسط سری فوریه ارائه می‌شود. از روش تحلیلی - تقریبی معادل سازی برای معادل کردن سختی تقویت کننده‌ها استفاده گردید. تقویت کننده‌ها به صورت تیر در نظر گرفته شدند که قادر به تحمل نیروهای برشی و ممان خمشی نسبت به بار محوری وارده می‌باشند. معادلات مربوط به آنالیز ارتعاشی بر مبنای تئوری ساندرز استخراج می‌شود و با استفاده بسط سری فوریه تبدیل استوکس فرکانس ارتعاشات پوسته استوانه‌ای تعیین می‌شود. اثر تغییر پارامترهای هندسی و تغییر در زاویه بین تقویت کننده‌ها و همچنین نیروی محوری مورد روی فرکانس ارتعاشات بررسی قرار گرفت نتایج حاضر جدید بوده و می‌تواند به عنوان مبنایی برای مطالعات آتی مورد استفاده قرار گیرد.
دریافت: 20 خرداد 1395	
پدیرش: 04 مرداد 1395	
ارائه در سایت: 24 شهریور 1395	
کلید واژگان:	
ارتعاشات آزاد	
دوار	
تقویت شده	
تبدیل استوکس	

Free vibration analysis of rotating grid stiffened composite cylindrical shells

Mehdi Zarei, Gholam Hossien Rahimi*

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

* P.O.B. 14115-111 Tehran, Iran, rahimi_gh@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 09 June 2016
Accepted 25 July 2016
Available Online 14 September 2016

Keywords:

Free vibrations
Rotating
grid stiffened
Stokes' transformation

ABSTRACT

Rotating cylindrical shells are applied in different industrial applications, such as gas turbine engines, electric motors, rotary kilns and rotor systems. So, it is of great interest to conduct some researches to improve the understanding of vibrational characteristics of rotating cylindrical shells. Grid stiffened laminated composite cylindrical shells are used as components of aerospace, marine industries and civil engineering structures. In this research free vibration of rotating grid stiffened composite cylindrical shell with various boundary conditions using the Fourier series expansion method is presented. Smear method is employed to superimpose the stiffness contribution of the stiffeners with those of shell in order to obtain the equivalent stiffness parameters of the whole structure. The stiffeners are considered as a beam and support shear loads and bending moments in addition to the axial loads. Strain displacement relations from Sanders's shell theory are employed in the analysis. Using the Fourier series expansion and Stokes' transformation, frequency determinant of laminated cylindrical shells is derived. The effects of shell geometrical parameters and changes in the cross stiffeners angle and axial loading on the natural frequencies are investigated. Results given are novel and can be used as a benchmark for further studies.

1- مقدمه

کامپوزیتی به دلیل داشتن استحکام بالا، نسبت وزنی کم و انعطاف پذیری در طراحی قابلیت‌های کاربردی بیشتری نسبت به سازه‌های فلزی داراست. سازه‌های مشبک کامپوزیتی به دلیل راندمان وزنی بالا و عملکردی مناسب در ساخت ماهواره‌ها، فضاپیماها و راکت‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. از جمله نمونه‌های فضایی می‌توان به وسایلی به نام وفق دهنده‌ها که اتصال بین راکت و فضاپیما را ایجاد می‌کنند، اشاره کرد. اولین مطالعات بر روی استوانه‌های دوار توسط برایان انجام شد که پدیده مودهای گذار را کشف نمود [1]. دانشجو و همکاران ارتعاشات آزاد و سرعت بحرانی را در مخروط کامپوزیتی با استفاده از تئوری تنش برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار دادند و از روش

پوسته‌های استوانه‌ای مشبک کامپوزیتی به عنوان یکی از پرکاربردترین نمونه سازه‌های مشبک، به علت دارا بودن فوایدی همچون استحکام ویژه بالا، سبکی و خواص مقاومت به خوردگی، امروزه بطور وسیعی در صنایع هواپیماسازی، صنایع موشکی و دریایی مورد استفاده قرار می‌گیرند. یک سازه مشبک کامپوزیتی حاصل قرارگیری ریب‌های کامپوزیتی متصل به هم که تشکیل یک مجموعه پیوسته را به صورت دو بعدی و یا سه بعدی می‌دهند، می‌باشد. این مجموعه از ریب‌ها که شکل شبکه‌ای به سازه می‌دهند، از الیاف پوسته چقرمه سخت و مستحکم ساخته شده‌اند. بدین ترتیب سازه مشبک

Please cite this article using:

M. Zarei, Gh. H. Rahimi, Free vibration analysis of rotating grid stiffened composite cylindrical shells, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 9, pp. 175-185, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. Zarei, Gh. H. Rahimi, Free vibration analysis of rotating grid stiffened composite cylindrical shells, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 9, pp. 175-185, 2016 (in Persian)

تحلیلی و عددی به انجام رساندند [18]. یزدانی و همکاران رفتار کمانشی پوسته‌های مشبک استوانه‌ای را مورد مطالعه قرار دادند. آنها همچنین اثرات تغییر شکل شبکه را در نمونه‌هایی که دارای ضخامت کمتری بودند، مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه رسیدند که برای استفاده بهینه از پوسته‌های مشبک به حداقل چگالی از شبکه تقویت کننده نیاز است و همچنین پوسته‌های با شبکه لوزی عملکرد بهتری داشتند [19, 20]. رحیمی و همکاران رفتار ارتعاشات آزاد پوسته‌های مشبک استوانه‌ای را با استفاده از بهره‌گیری از سری‌های فوریه مورد بررسی قرار دادند [21]. مکلمن و همکاران به مطالعه رفتار ارتعاشی و کمانش پوسته‌های تقویت شده با تقویت کننده‌های خارج از مرکز پرداختند و نشان دادند که خارج مرکزی تقویت کننده‌ها تأثیر مهمی روی فرکانس طبیعی دارد [22]. روش تحلیل کلی که در اینجا ارائه می‌شود برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای مشبک کامپوزیت جدار نازک تک‌لایه و چندلایه با شرایط مرزی همگن است. به منظور تعیین فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های مذکور، از یک روش حل دقیق تعمیم یافته استفاده شده است. در روش پیشنهاد شده، حل دقیق به‌گونه‌ای تعمیم یافته است که علاوه بر پوسته‌های استوانه‌ای با شرایط مرزی دو سر ساده، سایر شرایط مرزی دلخواه را نیز پوشش دهد. این روش مبتنی بر سری‌های فوریه‌ای است که مشتقات آن بوسیله تبدیل استوکس جهت دربرگیری شرایط مرزی اعتبار یافته‌اند. از جمله تحقیقات اخیر انجام شده مربوط به ارتعاشات خطی پوسته‌های استوانه‌ای کمک این روش می‌توان به بررسی رفتار ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای ارتوتروپ ساده تحت شرایط مرزی مختلف توسط همت‌نژاد و همکاران اشاره کرد [23].

تاکنون در مورد رفتار ارتعاشی پوسته‌های مشبک دوار مقاله‌ای ارائه نشده است. در این مقاله رفتار ارتعاشی پوسته‌های تقویت شده دوار با شرایط تکیه‌گاهی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است و اثر پارامترهای مؤثر هندسی و زاویه بین تقویت کننده‌ها و سرعت دوران مورد مطالعه قرار خواهد گرفت.

2- معادل سازی سفتی

برای به دست آوردن مدل تحلیلی یک سلول واحد را مطابق شکل 1 در نظر گرفته و در عمل کل سازه مشبک از تکرار این سلول به دست می‌آید. با فرض ناچیز بودن کرنش‌های عمود بر راستای طولی و عمود بر راستای طولی تقویت کننده‌ها در هر نقطه‌ای تنها کرنش سطح بالایی تقویت کننده‌ها در هر نقطه‌ای از رابطه (1) محاسبه می‌شود [14].

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \epsilon_{xx}^0 + K_x \frac{t}{2} \\ \epsilon_{\theta\theta} &= \epsilon_{\theta\theta}^0 + K_\theta \frac{t}{2} \\ \epsilon_{x\theta} &= \epsilon_{x\theta}^0 + K_{x\theta} \frac{t}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

که ϵ_{xx}^0 ، $\epsilon_{\theta\theta}^0$ و $\epsilon_{x\theta}^0$ کرنش‌های صفحه میانی می‌باشند. این کرنش‌ها همان کرنش‌های متوسط تقویت کننده‌ها می‌باشند. از آنجا که کرنش‌های محاسبه شده از رابطه (1) کرنش‌های سطح بالایی تقویت کننده‌ها در دستگاه هندسی می‌باشد، بنابراین بایستی آنها را به کرنش‌هایی در دستگاه موزی با راستای طولی تقویت کننده‌ها تبدیل نمود. با استفاده از رابطه (2) این امر میسر می‌شود [14].

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{ll} \\ \epsilon_{tt} \\ \epsilon_{lt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{x\theta} \end{pmatrix} \quad (2)$$

GDQM برای حل معادلات استفاده کردند و به این نتیجه رسیدند که روش کلاسیک نسبت به تئوری تنش برشی مرتبه اول خطای قابل ملاحظه‌ای را ایجاد می‌کند. با افزایش نیروی کششی سرعت بحرانی کاهش و اثر بار محوری روی سرعت بحرانی مستقل از مشخصات هندسی می‌باشد [2]. مک ارتعاشات امواج گذار پوسته موتور توربین گاز که باعث ترک‌های خستگی در پوشش کمپرسور موتور جت می‌شود را مورد مطالعه و بررسی قرار داد [3]. هوانگ و سوئل ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته‌های استوانه‌ای با تکیه‌گاه ساده را مورد بررسی قرار دادند [4]. سوزوکی و همکاران ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای دوار را با استفاده از بسط سری توانی انجام دادند [5].

ایگاو ارتعاشات پوسته‌های استوانه را با در نظر گرفتن تغییر شکل برشی مورد بررسی قرار داد [6]. لی و کیم ارتعاشات خطی و غیر خطی پوسته‌های استوانه‌ای دوار را مورد بررسی قرار دادند [7]. لی و کیم اثر شرایط مرزی را بر روی استوانه‌های کامپوزیتی دوار با تقویت کننده‌های طولی و محیطی مورد بررسی قرار دادند. آنها نشان دادند که فرکانس پایه با اضافه کردن تقویت کننده‌ها افزایش می‌یابد. فرکانس موج پیش رونده به دلیل اثر کریولیس از فرکانس طبیعی موج پس رونده کمتر است [8]. طالبی توتی و همکاران ارتعاشات آزاد مخروط کامپوزیت با تقویت کننده‌های طولی و محیطی مورد مطالعه قرار دادند و از روش المان مجزا برای معادل سازی تقویت کننده‌ها و انرژی برای تحلیل ارتعاشات استفاده کردند و به این نتیجه رسیدند که در سرعت پایین حضور تقویت کننده باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌شود و افزایش ضخامت تأثیر قابل توجهی بر روی سازه مخروطی کامپوزیتی تقویت شده ندارد [9]. سان و همکاران در سال 2012 اثر شرایط مرزی را بر روی استوانه‌های دوار با استفاده از بسط سری فوریه مورد بررسی قرار دادند [10]. هوانگ و هسو پدیده رزونانس پوسته استوانه‌ای را تحت اثر بار هارمونیک و با در نظر گرفتن شتاب کریولیس و تغییر شکل‌های بزرگ انجام دادند [11]. چون و برت آنالیز سرعت بحرانی را بر روی پوسته‌های دوار مورد بررسی قرار دادند [12]. مهرپرور آنالیز ارتعاشی را بر روی استوانه‌های دوار از جنس مواد تابعی مورد مطالعه قرار دادند [13].

کیدانه و همکاران با استفاده از روش معادل سازی تقویت کننده‌ها با کمانش پوسته استوانه تقویت شده با آرایش ضربدری و افقی به دست آوردند که در آن سفتی تقویت کننده‌ها با سفتی پوسته جمع می‌شود و سفتی کل پوسته به دست می‌آید. آن‌ها روش انرژی برای به دست آوردن بار کمانش استفاده کردند و همچنین تست تجربی کمانش را بر روی پوسته‌های استوانه‌ای انجام دادند و نتایج حاصل از آن را با نتایج تحلیل مقایسه کردند و به این نتیجه رسیدند که توافق قابل قبولی بین نتایج حاصل از تحلیل و آزمایش حاصل گردیده است [14]. رحیمی و همکاران اثر پروفیل سطح مقطع تقویت کننده روی مقاومت به کمانش پوسته استوانه مورد با استفاده از روش اجزای محدود مورد بررسی قرار دادند [15]. مصطفی و علی تحلیل ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای با تقویت کننده‌های طولی و محیطی با استفاده از روش انرژی مورد مطالعه قرار دادند. آنها ابتدا انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی تقویت کننده‌ها را به صورت مجزا محاسبه نموده و به منظور دست‌یابی به معادله انرژی کل ترم‌های مربوط به هر کدام را باهم جمع نموده و با استفاده از روش ریلی ریتز معادله فرکانسی را استخراج کردند [16]. مسیتوگلو به مطالعه رفتار ارتعاشی پوسته‌های مخروطی تقویت شده با رینگ و استریتر پرداختند [17]. وودسنبت و همکاران مطالعه پارامتریک روی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده ایزوگرید با کمک سه روش تجربی

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{AE_l}{a} \left(2c^3 \varepsilon_{xx}^0 + 2c^3 \kappa_x \left(\frac{t}{2} \right) + 2cs^2 \varepsilon_{xx}^0 + 2cs^2 \kappa_\theta \left(\frac{t}{2} \right) \right) \\ N_\theta &= \frac{AE_l}{b} \left(2sc^2 \varepsilon_{\theta\theta}^0 + 2sc^2 \kappa_x \left(\frac{t}{2} \right) + 2s^3 \varepsilon_{xx}^0 + 2s^3 \kappa_\theta \left(\frac{t}{2} \right) \right) \\ N_{x\theta} &= \frac{AE_l}{b} \left(2sc^2 \varepsilon_{x\theta}^0 + 2sc^2 \kappa_{x\theta} \left(\frac{t}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (5)$$

به همین ترتیب برای تعادل ممان‌ها می‌توان روابط (6) را نوشت:

$$\begin{aligned} M_x &= (M_1 + M_2)C \\ M_\theta &= (M_1 + M_2)S \\ M_{x\theta} &= (M_1 - M_2)C \end{aligned} \quad (6)$$

نیروهای به دست آمده برای تقویت‌کننده‌ها بایستی به صفحه میانی پوسته منتقل شوند، به همین جهت به دلیل فاصله نقطه اثر نیرو ممان‌هایی تولید می‌شوند که در شکل 2 نشان داده شده است. با ضرب نیروها در فاصله انتقال نیرو به صفحه میانی پوسته مقادیر ممان‌ها به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} M_i &= F_i \frac{t}{2} \\ M_x &= \frac{AE_l t}{2a} \left(2c^3 \varepsilon_{xx}^0 + 2c^3 \kappa_x \left(\frac{t}{2} \right) + 2cs^2 \varepsilon_{xx}^0 + 2cs^2 \kappa_\theta \left(\frac{t}{2} \right) \right) \\ M_\theta &= \frac{AE_l t}{2b} \left(2sc^2 \varepsilon_{\theta\theta}^0 + 2sc^2 \kappa_x \left(\frac{t}{2} \right) + 2s^3 \varepsilon_{xx}^0 + 2s^3 \kappa_\theta \left(\frac{t}{2} \right) \right) \\ M_{x\theta} &= \frac{AE_l t}{2b} \left(2sc^2 \varepsilon_{x\theta}^0 + 2sc^2 \kappa_{x\theta} \left(\frac{t}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (7)$$

که مقدار a , b از رابطه (9) بدست می‌آید.

$$a = \frac{2\pi R}{N}, \quad b = \frac{2\pi R}{N \tan \varphi} \quad (9)$$

N برابر با نصف تعداد ریب‌ها و R شعاع پوسته استوانه‌ای می‌باشد. منتجه‌های نیرو و گشتاور که در روابط (5) و (8) بدست آمده‌اند، طبق معادله (8) با کرنش و انحنای لایه میانی پوسته در ارتباط هستند:

$$\begin{bmatrix} N^{st} \\ M^{st} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{st} & B^{st} \\ B^{st} & D^{st} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (10)$$

نهایتاً ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها به صورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned} [A^{st}] &= 2AE_l \begin{bmatrix} \frac{c^3}{a} & \frac{cs^2}{a} & 0 \\ \frac{sc^2}{b} & \frac{s^3}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{sc^2}{b} \end{bmatrix} \\ [B^{st}] &= AE_l t \begin{bmatrix} \frac{c^3}{a} & \frac{cs^2}{a} & 0 \\ \frac{sc^2}{b} & \frac{s^3}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{sc^2}{b} \end{bmatrix} \\ [D^{st}] &= \frac{AE_l t^2}{2} \begin{bmatrix} \frac{c^3}{a} & \frac{cs^2}{a} & 0 \\ \frac{sc^2}{b} & \frac{s^3}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{sc^2}{b} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

منتجه نیروها و ممان‌های پوسته از رابطه (12) به دست می‌آید:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-t/2}^{t/2} Q_{ij} (1, z, z^2) dz \quad (12)$$

و سفتی‌های پوسته از رابطه (13) به دست می‌آید

$$\begin{bmatrix} N^{sh} \\ M^{sh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{sh} & B^{sh} \\ B^{sh} & D^{sh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (13)$$

قانون ترکیب حجمی نیروها و ممان به میزان کسر حجمی در رابطه

که ε_{lt} و ε_{tt} , ε_{ll} به ترتیب کرنش در راستای تقویت‌کننده، کرنش عمود بر محور تقویت‌کننده و کرنش برشی هستند و $c = \cos \theta$ و $s = \sin \theta$ زاویه تقویت‌کننده نسبت به محور استوانه است.

3- تحلیل نیروها و ممان‌ها در صفحه تقویت‌کننده

شکل 2 نمودار آزاد نیروهای وارد بر المان را نشان می‌دهد. با استفاده از رابطه (2) نیروی محوری تقویت‌کننده‌ها بدست می‌آید. در این رابطه E_l و A , ε_{li} به ترتیب کرنش‌های محوری، سطح مقطع و مدول الاستیسیته محوری هر تقویت‌کننده هستند.

$$\begin{aligned} F_1 &= A_l E_l \varepsilon_{l1} = A_l E_l (c^2 \varepsilon_{xx} + s^2 \varepsilon_{\theta\theta} - sc \varepsilon_{x\theta}) \\ F_2 &= A_l E_l \varepsilon_{l2} = A_l E_l (c^2 \varepsilon_{xx} + s^2 \varepsilon_{\theta\theta} + sc \varepsilon_{x\theta}) \end{aligned} \quad (3)$$

با تصویر کردن نیروهای وارد بر سلول و جمع نیروها در راستای x و θ روابط (4) به دست می‌آید. نیروی برشی با جمع اجزای نیرو در یک طرف سلول به دست می‌آید [14].

$$\begin{aligned} F_x &= (F_1 + F_2)c \\ F_\theta &= (F_1 + F_2)s \\ F_{x\theta} &= (F_1 - F_2)c \end{aligned} \quad (4)$$

با جایگذاری معادلات (1) در معادلات (3) و استفاده از معادلات (4) و با تقسیم نیروهای به دست آمده بر واحد طول هریک از لبه‌ها نیروها بر واحد طول سلول به دست می‌آیند.

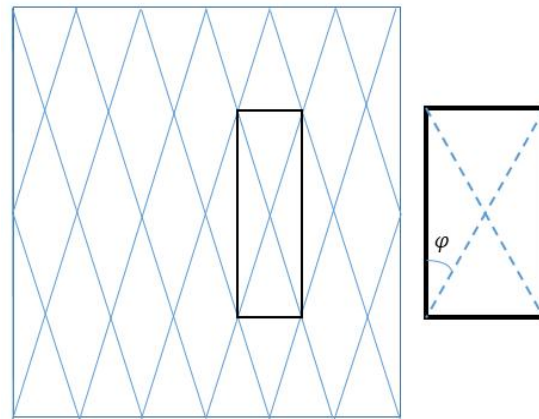


Fig. 1 Unit cell for a stiffened cylindrical shell

شکل 1 سلول واحد برای پوسته استوانه‌ای تقویت شده

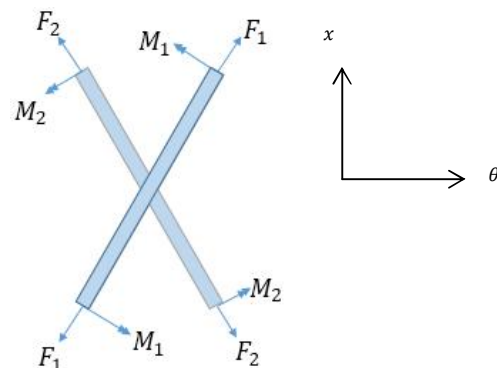


Fig. 2 Free body diagram of forces and momentums for a unit cell

شکل 2 نمودار آزاد نیروها و ممان‌ها برای یک سلول واحد

(14) آورده شده است

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{st}A^{st} + V_{sh}A^{sh} & V_{st}B^{st} + V_{sh}B^{sh} \\ V_{st}B^{st} + V_{sh}B^{sh} & V_{st}D^{st} + V_{sh}D^{sh} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (14)$$

4- آنالیز ارتعاشی با استفاده از تبدیل استوکس

پوسته استوانه‌ای مطابق شکل 1 در نظر گرفته می‌شود که در آن x راستای یال استوانه، θ راستای محیط و Z در جهت ضخامت پوسته می‌باشد. روابط کرنش و جابه‌جایی براساس تئوری ساندروز به صورت رابطه (15) است [21].

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \quad \gamma_{x\theta}^0 = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \kappa_\theta &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ \kappa_{x\theta} &= \frac{2}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{4R} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{4} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

شکل عمومی معادلات حاکم بر پوسته دوار مطابق رابطه (16) است [25,24].

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} + N_\theta^0 \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \rho_t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{3}{2} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{N_\theta^0}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} - \rho_t \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial w}{\partial t} - \Omega^2 v \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_x}{\partial \theta^2} - \frac{N_\theta}{R} + \frac{N_\theta^0}{R^2} \times \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \rho_t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial w}{\partial t} - \Omega^2 w \right) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

نیروی کششی ناشی از شتاب گریز از مرکز بصورت رابطه (17) می‌باشد

$$N_\theta^0 = \rho_t R^2 \Omega^2 \quad (17)$$

از برابری جرم تقویت کننده‌ها و پوسته استوانه‌ای به شعاع R ، ضخامت معادل تقویت کننده‌ها به دست می‌آید، بنابراین جمله اینرسی تقویت کننده‌ها از ضرب چگالی تقویت کننده‌ها در ضخامت معادل حاصل می‌گردد.

$$d = 2\pi R/N, \quad b = d/\tan \varphi, \quad t_{st} = \frac{A_{st}}{b \sin \varphi} \quad (18)$$

$$\rho_t = \int_{-t/2}^{t/2} \rho dz + \rho_{st} \frac{A_{st}}{b \sin \varphi} \quad (19)$$

منتجه نیروها و ممان‌های پوسته از رابطه (20) حاصل می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ N_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}A_{12} & 0 & B_{11}B_{12} & 0 \\ A_{12}A_{22} & 0 & B_{12}B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11}B_{12} & 0 & D_{11}D_{12} & 0 \\ B_{12}B_{22} & 0 & D_{12}D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{\theta\theta} \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

با بکار بردن معادله‌های (16) و (20) معادلات حرکت پوسته بر حسب جابجایی و مشتقات مربوط به آن‌ها به صورت روابط (21) است.

$$\begin{aligned} C_{11}u_{xx} + C_{12}u_{\theta\theta} + C_{13}v_{x\theta} + C_{14}w_x + C_{15}w_{xxx} \\ + C_{16}w_{x\theta} - \rho_t n^2 \Omega^2 - \rho_t R \Omega w_x = \rho_t u_{tt} \\ C_{21}u_{x\theta} + C_{22}v_{xx} + C_{23}v_{\theta\theta} + C_{24}w_{x\theta} + C_{25}w_\theta \\ + C_{26}w_{\theta\theta} + \rho_t \Omega^2 v - 2\Omega v_t = \rho_t v_{tt} \\ C_{31}u_{xxx} + C_{22}u_x + C_{33}v_{x\theta} + C_{34}v_{x\theta} + C_{35}v_{\theta\theta\theta} \\ + C_{36}v_\theta + C_{37}w_{xxx} + C_{38}w_{x\theta} + C_{39}w_{\theta\theta\theta} \\ + C_{310}w_{xx} + C_{311}w_{\theta\theta} + C_{312}w + \rho_t \Omega^2 w + 2\Omega w_t = \rho_t w_{tt} \end{aligned} \quad (21)$$

ضرایب C_{ij} در پیوست آمده است. لازم است که نیروها و ممان‌های درون

صفحه ای به صورت توابعی از جابه‌جایی‌ها بیان شوند:

$$\begin{aligned} N_x &= C_{41}u_x + C_{42}v_\theta + C_{43}w + C_{44}w_{xx} + C_{45}w_{\theta\theta} \\ M_x &= C_{51}u_x + C_{52}v_\theta + C_{53}w + C_{54}w_{xx} + C_{55}w_{\theta\theta} \\ N_{x\theta} &= C_{61}u_\theta + C_{62}v_x + C_{63}w_{x\theta} \\ Q_x &= C_{71}u_{xx} + C_{72}v_{x\theta} + C_{73}w_x + C_{74}w_{x\theta} + C_{75}w_{x\theta} \end{aligned} \quad (22)$$

برای یک پوسته استوانه‌ای میدان جابه‌جایی به صورت توابعی از شماره مد محیطی n و مد محوری m به صورت رابطه (23) فرض می‌شوند.

$$\begin{aligned} u(x, \theta, t) &= u(x) \cos n\theta e^{i\omega t} \\ v(x, \theta, t) &= v(x) \sin n\theta e^{i\omega t} \\ w(x, \theta, t) &= w(x) \cos n\theta e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (23)$$

توابع مودال محوری می‌باشند که جابجایی‌های پوسته در راستای محوری را نشان می‌دهند. قسمت مهم تحلیل حاضر شامل انتخاب سری‌های مناسب برای توابع مودال مذکور می‌باشد. یک مجموعه مناسب از سری‌های فوریه که شرایط مرزی مربوط به یک پوسته با دو انتهای ساده و بدون قید محوری را جمله به جمله ارضا می‌سازد، در رابطه (24) داده شده است.

$$\begin{aligned} u(x) &= a_{n0} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \cos \frac{m\pi x}{L} \\ v(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \sin \frac{m\pi x}{L} \\ w(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \sin \frac{m\pi x}{L} \end{aligned} \quad (24)$$

رابطه (24) که به صورت CSS که مخفف کسینوس و S مخفف سینوس می‌باشد، شرایط مرزی مربوط به پوسته با تکیه‌گاه‌های ساده و بدون قید محوری را برآورده می‌کند که در رابطه (25) آورده شده است.

$$N_x = 0, v = 0, w = 0, M_x = 0 \quad (25)$$

دسته دوم که به دسته SSC موسوم است، به صورت رابطه (26) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \sin \frac{m\pi x}{L} \\ v(x) &= b_{n0} + \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \cos \frac{m\pi x}{L} \\ w(x) &= c_{n0} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \cos \frac{m\pi x}{L} \end{aligned} \quad (26)$$

این دسته بیان‌کننده حل دقیق برای پوسته با دو انتهای آزاد و بدون قیدهای مماسی است که بصورت FSNT-FSNT مشخص می‌شود. این پوسته در هر یک از دو انتهای خود دارای شرایط مرزی بصورت رابطه (27) است:

$$N_{x\theta} = 0, M_x = 0, Q_x = 0, M_{x\theta} = 0 \quad (27)$$

دسته اول از توابع مودمحوری که در رابطه (25) داده شد و به دسته CSS معروف بود، تمام شرایط مرزی را برای یک پوسته و بدون قید محوری ارضا می‌کنند. بنابراین جایگذاری این دسته توابع در معادلات حرکت، معادله فرکانس را برای یک پوسته SNA-SNA به دست خواهد داد. برای تمام پوسته‌های با شرایط مرزی دیگر، معادله مشخصه فرکانسی از شرایط مرزی مخصوص آن به دست خواهد آمد. به منظور عمومیت بخشیدن به فرمول بندی مسأله، استفاده از دسته توابع CSS به منظور تحلیل ارتعاشات پوسته FSNT به عنوان مسأله اساسی تعریف شده است. تمام شرایط مرزی دیگر به عنوان حالت‌های ساده شده‌ای از این مسأله پایه بیان می‌شوند. هیچ کدام از هشت شرایط مرزی ارائه شده در معادله (26) توسط توابع CSS بصورت ترمبه‌ترم ارضا نمی‌شوند، بنابراین با استفاده از تبدیل استوکس و تحمیل

$$v_0 = -\frac{2}{\pi \sin n\theta} v(0, \theta), \quad v_L = -\frac{2}{\pi \sin n\theta} v(L, \theta)$$

$$w_0 = -\frac{2}{\pi \sin n\theta} w(0, \theta), \quad w_L = -\frac{2}{\pi \sin n\theta} w(L, \theta) \quad (33)$$

مقادیر $\tilde{u}_0, \tilde{u}_L, \tilde{w}_0, \tilde{w}_L$ و نیرو و ممان N_x و M_x در انتهای مرتبط می‌باشند. با استفاده از معادلات (22) این ارتباط به صورت روابط (34) به دست می‌آید.

$$\begin{Bmatrix} N_x(0, \theta) \\ -N_x(L, \theta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{41} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_L \end{Bmatrix} + f_{42} \begin{Bmatrix} v_0 \\ v_L \end{Bmatrix} + f_{43} \begin{Bmatrix} w_0 \\ w_L \end{Bmatrix} \\ + f_{44} \begin{Bmatrix} \tilde{w}_0 \\ \tilde{w}_L \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \cos n\theta$$

$$\begin{Bmatrix} M_x(0, \theta) \\ -M_x(L, \theta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{51} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_L \end{Bmatrix} + f_{52} \begin{Bmatrix} v_0 \\ v_L \end{Bmatrix} + f_{53} \begin{Bmatrix} w_0 \\ w_L \end{Bmatrix} \\ + f_{54} \begin{Bmatrix} \tilde{w}_0 \\ \tilde{w}_L \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \cos n\theta \quad (34)$$

ضرایب f_{ij} در پیوست آورده شده است. با در نظر گرفتن معادلات (32)، معادلات (30) به بر حسب 8 مجهول $v_0, v_L, w_0, w_L, N_{x0}, N_{xL}, M_{x0}, M_{xL}$ به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$a_{n0} = q_{02}(v_0 + v_L) + q_{03}(w_0 + w_L) + q_{04}(N_{x0} + N_{xL}) + q_{05}(M_{x0} + M_{xL})$$

$$\begin{Bmatrix} a_{nm} \\ b_{nm} \\ c_{nm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{Bmatrix}$$

$$G_1 = q_{12}(v_0 + (-1)^m v_L) + f q_{13}(w_0 + (-1)^m w_L) + q_{14}(N_{x0} + (-1)^m N_{xL}) + q_{15}(M_{x0} + (-1)^m M_{xL})$$

$$G_2 = +q_{22}(v_0 + (-1)^m v_L) + q_{33}(w_0 + (-1)^m w_L)$$

$$G_3 = q_{32}(v_0 + (-1)^m v_L) + q_{33}(w_0 + (-1)^m w_L) + f_{34}(w_0 + (-1)^m w_L) + f_{34}(\tilde{w}_0 + (-1)^m \tilde{w}_L) + q_{34}(N_{x0} + (-1)^m N_{xL}) + q_{35}(M_{x0} + (-1)^m M_{xL}) \quad (35)$$

$$N_{x0} = \frac{N_x(0, \theta)}{\cos n\theta}, \quad N_{xL} = -\frac{N_x(L, \theta)}{\cos n\theta}$$

$$M_{x0} = \frac{\pi M_x(0, \theta)}{L \cos n\theta}, \quad M_{xL} = -\frac{\pi M_x(L, \theta)}{L \cos n\theta} \quad (36)$$

همان‌طور که قبلاً گفته شد هیچ‌کدام از هشت شرط مرزی مربوط به FSNT با توابع مودال CSS ارضا نمی‌شوند. بنابراین لازم است شرایط مرزی هندسی و طبیعی به کار برده شود. شرط هندسی که باید اعمال شود، شامل $u = 0$ و $\theta w / \partial x = 0$ می‌باشد که در نتیجه معادلات پیش‌رو بایستی ارضا شوند.

$$a_{n0} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} = 0$$

$$a_{n0} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m a_{nm} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{w_0 + w_L}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \{w_0 + (-1)^m w_L + mc_{nm}\} = 0$$

$$\frac{w_0 + w_L}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \{w_0 + (-1)^m w_L + mc_{nm}\} = 0 \quad (38)$$

شرط طبیعی که باید اعمال شود شامل $Q_x = N_{x\theta} = 0$ می‌باشد که با توجه به رابطه (22) معادلات مرتبط به آن بایستی ارضا شوند. به دلیل طولانی بودن روابط از آوردن آنها صرف‌نظر می‌شود. برای توضیحات بیشتر به مرجع [24] مراجعه شود. با جایگذاری ضرایب فوریه در معادلات شرایط مرزی، معادله (39) حاصل می‌گردد:

$$[e_{ij}] [N_{x0} \ N_{xL} \ M_{x0} \ M_{xL} \ v_0 \ v_L \ w_0 \ w_L] = [0] \quad (i, j = 1, \dots, 8) \quad (39)$$

برای یک حل غیر جزئی از این سیستم خطی همگن دترمینان ماتریس

قیدهای تعیین شده برای ارضا این شرایط مرزی، به یک دترمینان مرتبه هشت برای فرکانس منجر می‌شود. حل‌های به دست آمده برای پوسته‌های با شرایط مرزی دیگر، به یک دترمینان با اندازه کوچکتر منجر می‌شوند. به منظور مشتق‌گیری از سری‌های فوریه باید به مقدار تابع در نقاط انتهایی، توجه کافی شود. به عنوان مثال وقتی یک تابع با یک سری سینوسی بیان شود، مقادیر انتهایی تابع اجباراً صفر هستند. با تبدیل استوکس به هر حال مقادیر انتهایی سری‌های سینوسی با یک تعریف جداگانه، آزاد می‌شوند و این مقادیر در مشتقات پی در پی سری وارد می‌شوند. فرض می‌شود تابع $f(x)$ در بازه $(0, L)$ با یک سری سینوسی بیان شود که f_0 و f_L مقادیر تابع در نقاط انتهایی هستند.

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad 0 < x < L$$

$$f(0) = f_0 \quad f(L) = f_L \quad (28)$$

از آنجایی که مشتق $f(x)$ یعنی $f'(x)$ را نمی‌توان از مشتق‌گیری جمله به جمله سری سینوسی به دست آورد، لذا $f'(x)$ با یک سری کسینوسی مستقل بصورت رابطه (29) تعریف می‌شود:

$$f'(x) = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (29)$$

اکنون تبدیل استوکس شامل انتگرال‌گیری جزء به جزء به منظور دستیابی به ارتباط بین ضرایب رابطه بین a_n و b_n می‌باشد:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$= \frac{2}{L} \left[f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \right]_0^L + \frac{2n\pi}{L^2} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$= \frac{2}{L} [(-1)^n f_L - f_0] + \frac{n\pi}{L} a_n \quad (30)$$

روند مشابه فوق برای به دست آوردن مشتق مرتبه دوم تابع و مشتقات مراتب بالاتر، استفاده می‌شود. بنابراین برای مشتقات سری‌های سینوسی، روابط (31) قابل استخراج می‌باشند:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad 0 < x < L$$

$$f(0) = f_0, \quad f(L) = f_L$$

$$f'(x) = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad 0 \leq x < L$$

$$f'(0) = f'_0, \quad f'(L) = f'_L$$

$$f'(x) = \frac{\pi}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2}{L} [f_0 - (-1)^n f_L] - \frac{n\pi}{L} a_n \right] \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (31)$$

مشتقات توابع جایجایی صفحه میانی پوسته، در مرجع [24]، که با جایگذاری در دستگاه معادلات (21)، معادلات (32) بدست می‌آید.

$$a_{n0} = f_{01}(\tilde{u}_0 + \tilde{u}_L) + f_{02}(v_0 + v_L) + f_{03}(w_0 + w_L) + f_{04}(\tilde{w}_0 + \tilde{w}_L)$$

$$\begin{Bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{nm} \\ b_{nm} \\ c_{nm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$F_1 = f_{11}(\tilde{u}_0 + (-1)^m \tilde{u}_L) + f_{12}(v_0 + (-1)^m v_L) + f_{13}(w_0 + (-1)^m w_L) + f_{14}(\tilde{w}_0 + (-1)^m \tilde{w}_L)$$

$$F_2 = +f_{22}(v_0 + (-1)^m v_L) + f_{33}(w_0 + (-1)^m w_L)$$

$$F_3 = f_{31}(\tilde{u}_0 + (-1)^m \tilde{u}_L) + f_{32}(v_0 + (-1)^m v_L) + f_{33}(w_0 + (-1)^m w_L) + f_{34}(\tilde{w}_0 + (-1)^m \tilde{w}_L) \quad (32)$$

که ضرایب g_{ij} و f_{ij} در پیوست 1 گنجانده شده است. w_0, v_0, v_L و w_L مقادیر مرزی پوسته استوانه‌ای می‌باشند که از روابط (33) به دست می‌آیند.

برای چهار شرط مرزی را نشان می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود اختلاف

جدول 1 خواص مکانیکی پوسته و تقویت کننده‌ها

Table 1 Material properties of shell and stiffeners.

مقدار	خواص
7.6, 7.6, 19	مدول کششی (GPa) E_{33}, E_{22}, E_{11}
4.1, 4.1, 4.1	مدول برشی (GPa) G_{12}, G_{13}, G_{23}
0.26, 0.26, 0.26	ضریب پواسون $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$
1643	چگالی ρ

جدول 2 مشخصات هندسی مدل حاضر

Table 2 Geometrical parameters of the present model

مقدار	خواص
800	ارتفاع استوانه (mm)
100	شعاع کوچک (mm)
0.5	ضخامت (mm)
30	زاویه تقویت کننده
4x4	مقطع تقویت کننده
6	تعداد تقویت کننده

جدول 3 پارامتر فرکانس $\omega R \sqrt{\rho/E_{22}}$ برای یک استوانه کامپوزیتی [0/90/0] با تکیه‌گاه ساده و $h/R=0.02, L/R=1$

Table 3 Frequency parameter $\omega R \sqrt{\rho/E_{22}}$ for a [0°/90°/0°] simply supported composite cylindrical shell, $h/R=0.02, L/R=1$

(rev/s) Ω	n	present		
		[23]	[26]	ω_f^*
0.1	1	1.061257	1.061233	1.061139
	2	0.803981	0.804001	0.803892
	3	0.598172	0.598194	0.598184
	4	0.449800	0.450036	0.450016
	5	0.344510	0.345155	0.345142
	6	0.270667	0.270671	0.270657
0.4	1	1.061080	1.060720	1.060705
	2	0.803749	0.803416	0.803413
	3	0.597858	0.597975	0.597759
	4	0.449378	0.449672	0.449662
	5	0.343955	0.344858	0.344862
	6	0.270468	0.270455	0.270456
1	1	1.059836	1.060031	1.059836
	2	0.802464	0.802463	0.802461
	3	0.596937	0.600116	0.596931
	4	0.449027	0.449942	0.449017
	5	0.344459	0.344460	0.344444
	6	0.270349	0.270351	0.270329

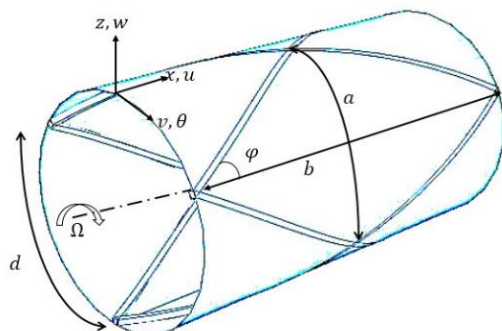


Fig. 3 The model was used in present work

شکل 3 مدل سه بعدی استفاده شده در کار حاضر

ضرایب لزوماً باید صفر باشد. با مسأوی قرار دادن دترمینان ضرایب، معادله مشخصه فرکانس طبیعی به دست می‌آید. با حل معادله فرکانسی دو مقدار کوچک این مقادیر انتخاب می‌شوند که یکی فرکانس موج پیش‌رونده و دیگری فرکانس موج پس‌رونده می‌باشد که معادله مشخصه فرکانسی برای هر شرط مرزی در بر خواهد گرفت.

5- اعمال شرایط مرزی

برای به دست معادله مشخصه فرکانسی یک شرط مرزی به خصوص، معادله ماتریسی عمومی باید متناسب شود. به این منظور برای هر شرط مرزی که مقدار آن صفر باشد سطر و ستون مربوط به آن شرط حذف می‌گردد. برای شرایط ابتدا و انتها گیردار شرط مرزی بصورت رابطه (40) است:

$$u = 0, v = 0, w = 0, w_x = 0, x = 0, L \quad (40)$$

بنابراین با حذف سطر و ستون مربوطه ماتریس (41) حاصل می‌گردد.

$$[e_{ij}] [N_{x0} \ N_{xL} \ M_{x0} \ M_{xL}] = [0] \quad (41)$$

برای شرایط ابتدا و انتها ساده، شرط مرزی بصورت رابطه (42) می‌باشد.

$$u = 0, v = 0, w = 0, M_x = 0, x = 0 \quad (42)$$

$$u = 0, v = 0, w = 0, M_x = 0, x = L$$

بنابراین با حذف سطر و ستون مربوطه، رابطه (43) حاصل می‌شود:

$$[e_{ij}] [N_{x0} \ N_{xL}] = [0] \quad (43)$$

برای شرایط ابتدا گیردار و انتها ساده، شرط مرزی به صورت رابطه (44) است:

$$u = 0, v = 0, w = 0, w_x = 0, x = 0 \quad (44)$$

$$u = 0, v = 0, w = 0, M_x = 0, x = L$$

بنابراین با حذف سطر و ستون مربوطه، رابطه (45) حاصل می‌شود:

$$[e_{ij}] [N_{x0} \ M_{x0} \ v_0 \ w_L] = [0] \quad (45)$$

6- نتایج

نتایج حاصل از تحلیل ارتعاشی پوسته استوانه‌ای دوار بدون تقویت کننده جدول 3 آورده شده است. سرعت دوران پوسته استوانه‌ای به صورت دور بر ثانیه می‌باشد که با Ω نشان داده می‌شود و مقدار آن 20 دور بر ثانیه می‌باشد. تقویت کننده‌ها متشکل از 6 ریب بر مبنای مسیر ژئودزیک که با زاویه 30 و 30- نسبت به راستای طولی می‌باشند (شکل 3). به علت نازکی پوسته حالت تنش صفحه‌ای برقرار است و پوسته به صورت یک لمینیت مدل شده است. تقویت کننده‌ها نیز به صورت یک جسم سه‌بعدی در نظر گرفته شده‌اند. پوسته به صورت 3 لایه [0/90/0] مدل گردید که دارای ضخامت کلی 0.5 میلی‌متر می‌باشد. تکیه‌گاه ساده برای این آنالیز در نظر گرفته شد. مشخصات هندسی و مکانیکی پوسته و تقویت کننده در جداول 1 و 2 آورده شده است. شکل 4 تغییرات فرکانس طبیعی سازه تقویت شده را برحسب عدد موج محیطی برای موج پیشرو را نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل پیداست مقدار فرکانس طبیعی در مدهای سوم تا هفتم سازه تقویت شده نسبت به پوسته استوانه‌ای تقویت نشده هم وزن خود بیشتر است ولی در مدهای دیگر فرکانس طبیعی سازه تقویت نشده بیشتر است. شکل 5 تغییرات فرکانس طبیعی برای دو حالت تقویت شده و تقویت نشده در مود اول را نشان می‌دهد همان‌طور که دیده می‌شود سازه تقویت نشده عملکرد بهتری را نسبت به سازه تقویت نشده را داراست. همچنین پدیده سرعت بحرانی که در آن فرکانس موج پیشرو به صفر می‌رسد، در این شکل مشاهده می‌شود.

6-1- اثر شرایط مرزی بر روی فرکانس

شکل 6 تغییرات فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای را برحسب مود محیطی

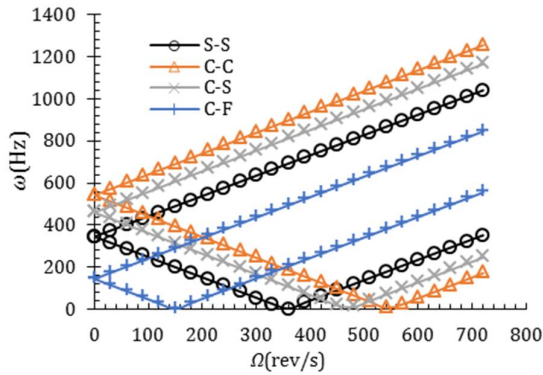


Fig. 7 Bifurcation of natural frequencies for $n=1$

شکل 7 پدیده دوشاخه‌ای فرکانس طبیعی برای مود اول

2-6- اثر زاویه الیاف بر روی فرکانس

برای بررسی اثر زاویه الیاف بر روی فرکانس طبیعی زاویه الیاف لایه اول و سوم تغییر داده می‌شود و لایه میانی ثابت می‌ماند. شکل 8 تغییرات فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای را برحسب زاویه‌های مختلف الیاف برای دو موج پیش‌رونده و پس‌رونده، در مدهای دوم و چهارم پوسته را نشان می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود، در مود دوم بیشترین فرکانس طبیعی در زاویه صفر درجه و کمترین فرکانس طبیعی در فرکانس 90 درجه اتفاق می‌افتد برای مود چهارم قضیه برعکس است و بیشترین فرکانس طبیعی در زاویه الیاف 90 درجه و کمترین فرکانس طبیعی در زاویه 0 درجه اتفاق می‌افتد.

3-6- اثر زاویه بین تقویت‌کننده‌ها بر روی فرکانس

شکل 9 تغییرات فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای برای زاویه‌های مختلف را نشان می‌دهد. در مود اول با افزایش زاویه بین تقویت‌کننده‌ها فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد و این بدان دلیل است که به جهت افزایش طول تقویت‌کننده و افزایش جرم سازه تقویت‌شده، سرعت افزایش جرم بیشتر از افزایش سفتی است، ولی در مدهای دوم به بعد برای جلوگیری از پدیده بشک‌های شدن، سرعت افزایش سفتی بیشتر از سرعت افزایش جرم می‌گردد و در نتیجه فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. میزان تغییرات فرکانس با تغییر زاویه بین تقویت‌کننده‌ها برای مدهای بالاتر بیشتر است.

4-6- اثر تعداد تقویت‌کننده‌ها بر روی فرکانس

شکل 10 تغییرات فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای را برای تعداد

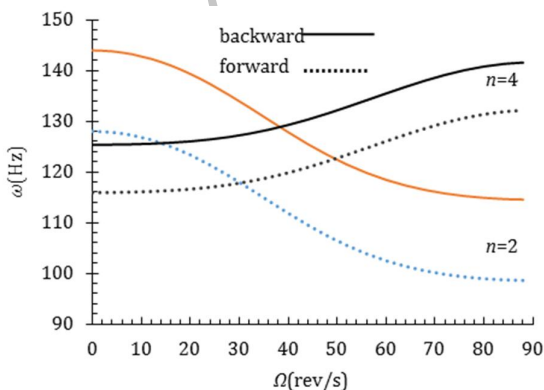


Fig. 8 The effect of fiber orientation on natural frequency

شکل 8 اثر زاویه الیاف بر روی فرکانس طبیعی

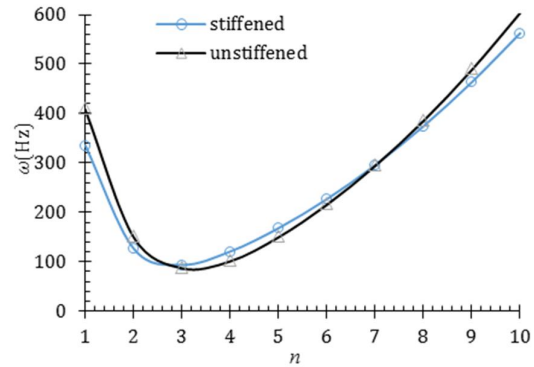


Fig. 4 comparison between stiffened and unstiffened of rotating cylindrical for $\Omega=20$

شکل 4 مقایسه بین استوانه دوار تقویت شده و تقویت نشده برای $\Omega=20$ rev/s

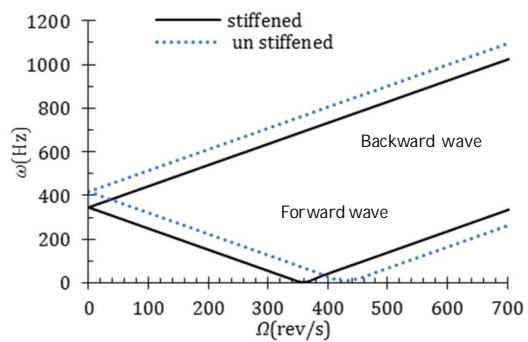


Fig. 5 Bifurcation of natural frequencies for $n=1$

شکل 5 پدیده دوشاخه‌ای فرکانس طبیعی برای مود اول

فرکانس بین شرایط مختلف مرزی برای مدهای پایین‌تر بیشتر است و برای مدهای پنج به بعد تفاوت چندانی بین فرکانس‌ها مشاهده نمی‌شود و بیشترین فرکانس مربوط است به شرط مرزی ابتدا و انتها گیردار و کمترین فرکانس مربوط به شرط مرزی ابتدا گیردار و انتها آزاد می‌باشد. موج پیش‌رو با نقطه‌چین نشان داده شده است. همچنین بیشترین اختلاف بین موج پیش‌رو و پس‌رو مربوط به شرط مرزی ابتدا گیردار و انتها آزاد است. تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب سرعت دوران برای مود اول نیز در شکل 7 آورده شده است.

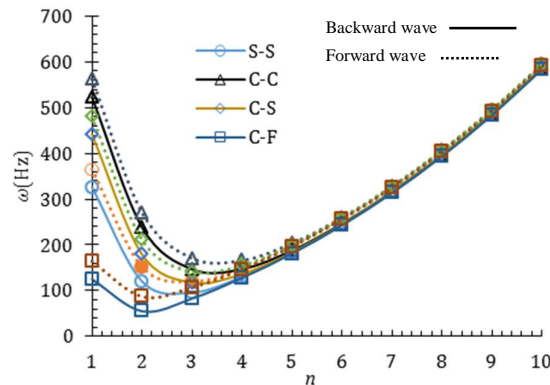


Fig. 6 effect of boundary conditions on the rotating cylindrical shell for $\Omega=20$

شکل 6 اثر شرایط مرزی بر روی استوانه دوار برای $\Omega=20$

همچنین دیده می‌شود برای یک ضخامت بحرانی سازه تقویت شده کمترین فرکانس طبیعی را دارد؛ در این ضخامت، ضخامت پوسته با ضخامت معادل تقویت کننده‌ها که در رابطه (18) آمده، برابر است. برای ضخامت‌های کمتر از این ضخامت سرعت افزایش سفتی بیشتر است از سرعت افزایش جرم و برای ضخامت‌های بیشتر از ضخامت سرعت افزایش جرم از سفتی بیشتر است.

6-6- اثر نیروی محوری روی فرکانس

نیروی محوری در نظر گرفته شده به صورت کسری از بار کمانش می‌باشد. برای یک استوانه کامپوزیتی بار کمانش به صورت رابطه (46) می‌باشد [11].

$$N_{cr} = \frac{E_2 h^2}{R(3[1 - \nu_{12}\nu_{21}]^{0.5})} \quad (46)$$

شکل‌های 15 و 16 فرکانس طبیعی سازه مشبک را تحت نیروی محوری برای مدهای اول و چهارم نشان می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود فرکانس سازه مشبک تحت بار کششی بیشتر از بار فشاری است. شکل 17 مقایسه فرکانس طبیعی بین دو سازه تقویت شده و بدون تقویت کننده را برای دو بار مختلف نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل مشخص است با افزایش بار کششی اختلاف فرکانسی بین سازه تقویت شده و تقویت نشده کمتر می‌شود.

6-7- اثر طول استوانه بر روی فرکانس

اثر طول استوانه روی تغییرات فرکانس طبیعی برای سازه تقویت شده و سازه بدون تقویت کننده نیز مورد بررسی قرار گرفت. در مود اول با افزایش طول استوانه فرکانس طبیعی سازه تقویت شده از سازه بدون تقویت کننده کمتر است (شکل 18). در مود چهارم به ازای طول کمتر از 400 میلی‌متر فرکانس سازه بدون تقویت کننده بیشتر است، ولی برای مقادیر طول بیشتر از 400 میلی‌متر فرکانس سازه تقویت شده بیشتر است (شکل 19).

7- نتیجه‌گیری

در این تحقیق ارتعاشات آزاد پوسته مشبک استوانه‌ای دوار مورد بررسی قرار گرفت. از روش معادل‌سازی برای اضافه کردن تقویت کننده‌ها به پوسته و روش تبدیل استوکس برای حل معادلات فرکانسی استفاده شد. نتایج نشان داد که برای ضخامت‌های پایین‌تر از ضخامت بحرانی فرکانس طبیعی سازه تقویت شده بیشتر است، زیرا در ضخامت‌های پایین سرعت افزایش سفتی

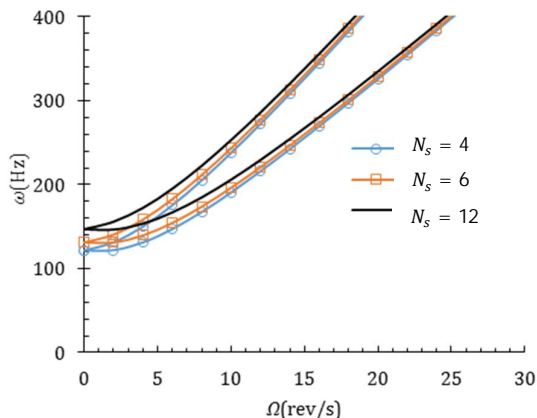


Fig.11 The effect of stiffener numbers on the natural frequency for $n=4$
شکل 11 اثر تعداد تقویت کننده بر روی فرکانس طبیعی برای $n=4$

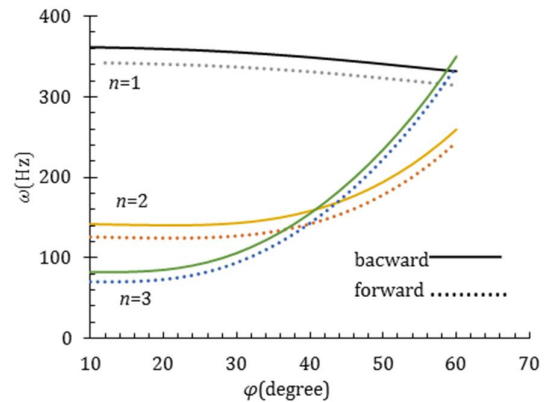


Fig. 9 The effect of stiffener angel on natural frequency

شکل 9 اثر زاویه تقویت کننده بر روی فرکانس طبیعی

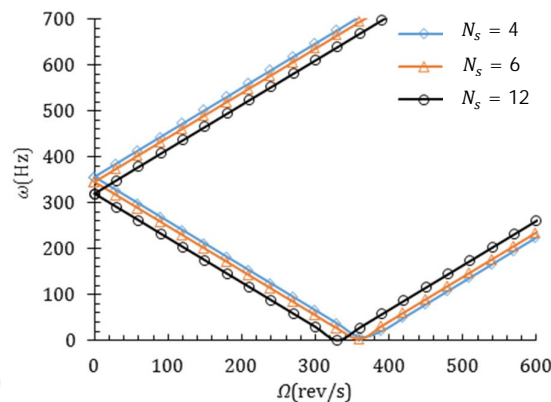


Fig. 10 The effect of stiffener numbers on natural frequency for $n=1$

شکل 10 اثر تعداد تقویت کننده بر روی فرکانس طبیعی برای $n=1$

متفاوت تقویت کننده بر حسب سرعت دوران را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش تقویت کننده فرکانس ارتعاشات کاهش می‌یابد و با افزایش دوران این اختلاف ثابت می‌ماند و این بدان دلیل است که به جهت افزایش طول کلی تقویت کننده و افزایش جرم سازه تقویت شده، سرعت افزایش جرم بیشتر از افزایش سفتی است. ولی همان‌طور که در شکل 11 دیده می‌شود در مود چهارم افزایش تقویت کننده باعث افزایش فرکانس طبیعی سازه شده و با افزایش تعداد تقویت کننده فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد، ولی برای سرعت‌های بالاتر این اختلاف فرکانسی کاهش می‌یابد.

6-5- اثر ضخامت پوسته بر روی فرکانس

تغییرات فرکانس طبیعی با عدد موج برای پوسته استوانه‌ای مشبک برای مود اول در شکل 12 نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش ضخامت مقدار فرکانس افزایش می‌یابد. در مود چهارم با افزایش ضخامت فرکانس طبیعی ابتدا کاهش می‌یابد و سپس افزایش می‌یابد (شکل 13). شکل 14 تغییرات فرکانس طبیعی استوانه دوار با سرعت 20 دور بر ثانیه برای دو حالت با تقویت کننده و بدون تقویت کننده را نشان می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود برای ضخامت‌های کمتر از 0.5 میلی‌متر سازه تقویت شده عملکرد بهتری نسبت به سازه بدون تقویت کننده دارد و فرکانس طبیعی سازه تقویت شده بیشتر است اما برای ضخامت‌های بیشتر سازه بدون تقویت کننده عملکرد بهتری دارد و فرکانس طبیعی آن بیشتر است.

بیشتر باشد اختلاف فرکانسی بین سازه تقویت شده و تقویت نشده کاهش می‌یابد.

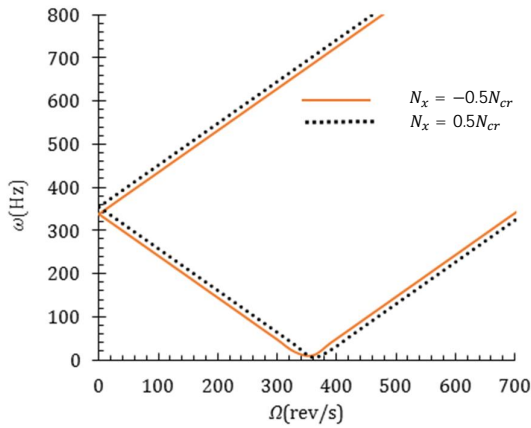


Fig. 15 The effect of axial load on frequency for $n=1$
شکل 15 اثر نیروی محوری روی فرکانس طبیعی برای $n=1$

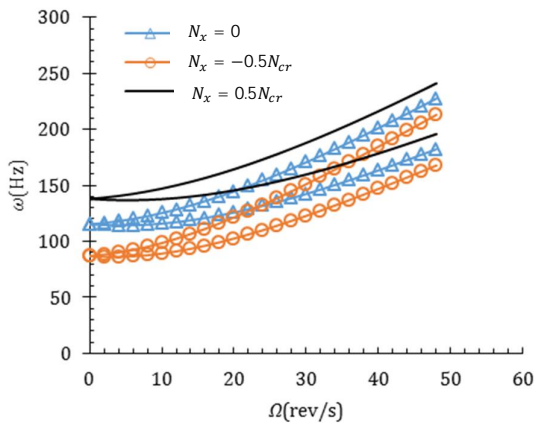


Fig. 16 The effect of axial load on frequency for $n=4$
شکل 16 اثر نیروی محوری روی فرکانس طبیعی برای $n=4$

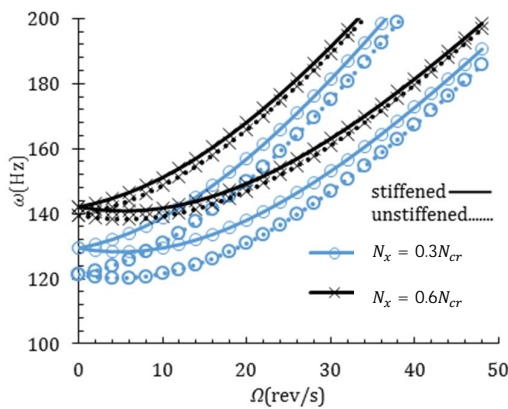


Fig. 17 Comparison The effect of axial load on frequency of stiffened and unstiffened cylindrical shell for $n=4$
شکل 17 مقایسه اثر نیروی محوری روی فرکانس استوانه تقویت شده و تقویت نشده برای $n=4$

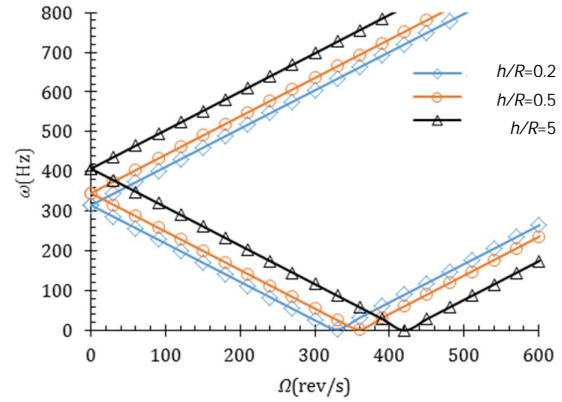


Fig.12 The effect of shell thickness on the natural frequency for $n=1$
شکل 12 اثر ضخامت پوسته بر روی فرکانس طبیعی برای $n=1$

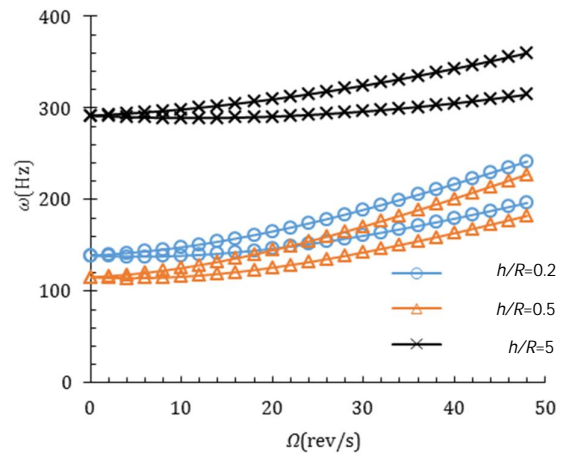


Fig.13 The effect of shell thickness on the natural frequency for $n=4$
شکل 13 اثر ضخامت پوسته بر روی فرکانس طبیعی برای $n=4$

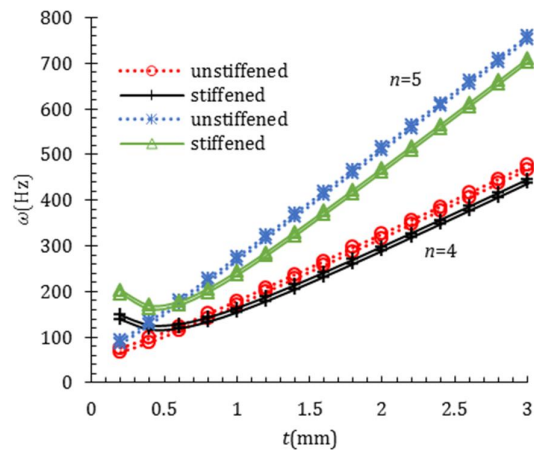


Fig. 14 The effect of shell thickness on natural frequency for stiffened and unstiffened cylindrical shell $\Omega=20$
شکل 14 اثر ضخامت روی فرکانس استوانه تقویت شده و تقویت نشده و $\Omega=20$

بیشتر از سرعت افزایش جرم سازه می‌باشد. همچنین در مودهای خاصی برای مقادیر بیشتر طول استوانه از یک مقدار مشخص فرکانس طبیعی سازه تقویت شده از سازه بدون تقویت کننده بیشتر است. هر چه میزان نیروی محوری

انرژی پتانسیل کل Π

9- پیوست

$$c_{11} = A_{11} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2, \quad c_{12} = c_{13}, \quad c_{14} = \frac{A_{12}}{R} + \frac{B_{12}}{R^2}$$

$$c_{34} = c_{14}, \quad c_{22} = B_{11}, \quad c_{23} = \frac{B_{12}}{R^2}$$

$$c_{15} = B_{11}, \quad c_{52} = \frac{A_{66}}{R} + \frac{B_{66}}{R^2}$$

$$c_{62} = c_{22}, \quad c_{63} = -\frac{2B_{66} + D_{66}}{R^2}, \quad c_{41} = c_{11}$$

$$c_{42} = \frac{A_{12}}{R} + \frac{B_{12}}{R^2}, \quad c_{43} = c_{14}, \quad c_{33} = B_{11}, \quad c_{45} = \frac{B_{12}}{R^2}$$

$$c_{39} = B_{11}, \quad c_{310} = \frac{A_{66}}{R} + \frac{B_{66}}{R^2}, \quad c_{311} = B_{11}$$

$$c_{312} = \frac{A_{66}}{R} + \frac{B_{66}}{R^2}, \quad c_{44} = B_{11}, \quad c_{45} = \frac{B_{12}}{R^2}$$

$$c_{51} = B_{11}, \quad c_{52} = \frac{A_{66}}{R} + \frac{B_{66}}{R^2},$$

$$c_{62} = c_{22}, \quad c_{63} = -\frac{2B_{66} + 2D_{66}}{R^2}$$

$$c_{71} = B_{11}, \quad c_{72} = c_{52}, \quad c_{73} = c_{53}, \quad c_{74} = c_{55}, \quad c_{75} = c_{54}$$

$$d_1 = 2(n^2 - \rho_t \omega^2 - \rho_t \Omega^2), \quad f_{01} = \frac{c_{11}}{d_1} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2, \quad f_{02} = \frac{nc_{13}\pi}{d_1 L}$$

$$f_{03} = \frac{c_{14} + n^2 c_{16} \pi}{d_1 L}, \quad f_{04} = \frac{c_{15}}{d_1} \left(\frac{\pi}{L}\right)^3$$

$$g_{11} = m^2 c_{11} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + c_{12} n^2 - \rho_t \omega^2 - \rho_t \Omega^2$$

$$g_{12} = -nmc_{13} \frac{\pi}{L}$$

$$g_{13} = -mc_{14} \frac{\pi}{L} + m^3 c_{15} \left(\frac{\pi}{L}\right)^3 + n^2 mc_{16} \frac{\pi}{L}$$

$$g_{21} = -nmc_{12} \frac{\pi}{L}$$

$$g_{22} = m^2 c_{22} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + c_{23} n^2 - \rho_t \omega^2 - \rho_t \Omega^2$$

$$g_{23} = -nm^2 c_{24} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + c_{25} n - c_{26} n^3$$

$$g_{31} = m^3 c_{31} \left(\frac{\pi}{L}\right)^3 + mc_{32} \frac{\pi}{L} - n^2 mc_{33} \frac{\pi}{L}$$

$$g_{32} = nm^2 c_{34} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + c_{35} n^3 - c_{36} n$$

$$g_{33} = -m^4 c_{37} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 - n^2 m^2 c_{38} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - c_{39} n^4$$

$$+ m^2 c_{310} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + n^2 c_{311} - c_{312} - \rho_t \omega^2 - \rho_t \Omega^2$$

$$f_{11} = c_{11} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2, \quad f_{12} = nc_{13} \frac{\pi}{L}$$

$$f_{13} = c_{14} \frac{\pi}{L} - m^2 c_{15} \left(\frac{\pi}{L}\right)^3 - n^2 c_{16} \frac{\pi}{L}, \quad f_{13} = c_{15} \left(\frac{\pi}{L}\right)^3$$

$$f_{22} = -mc_{22} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2, \quad f_{23} = nmc_{24} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$$

$$f_{31} = -mc_{31} \left(\frac{\pi}{L}\right)^3, \quad f_{32} = -nmc_{34} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$$

$$f_{33} = m^3 c_{37} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 + mn^2 c_{38} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - mc_{310} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$$

$$f_{34} = -mc_{37} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4$$

$$f_{41} = -A_{11} \frac{\pi^2}{2L}, \quad f_{42} = -\left(\frac{A_{12}}{R} + \frac{B_{12}}{R^2}\right) \frac{\pi n}{2}$$

$$f_{43} = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{A_{12}}{R} + \frac{B_{12}}{R^2} n^2\right), \quad f_{44} = B_{11} \frac{\pi^3}{2L^2}$$

$$q_{02} = f_{02} + Y_1 + Y_5, \quad q_{03} = f_{03} + Y_2 + Y_6$$

$$q_{04} = Y_3 + Y_7, \quad q_{05} = Y_4 + Y_8$$

$$q_{12} = f_{12} + f_{11} Y_1 + f_{14} Y_5$$

$$q_{13} = f_{13} + f_{11} Y_2 + f_{14} Y_6$$

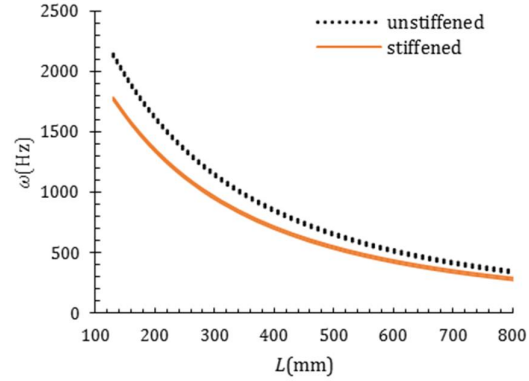


Fig. 18 Comparison The effect of length on frequency of stiffened and unstiffened cylindrical shell for $n=1$

شکل 18 مقایسه اثر نیروی محوری روی فرکانس استوانه تقویت شده و تقویت نشده برای $n=1$

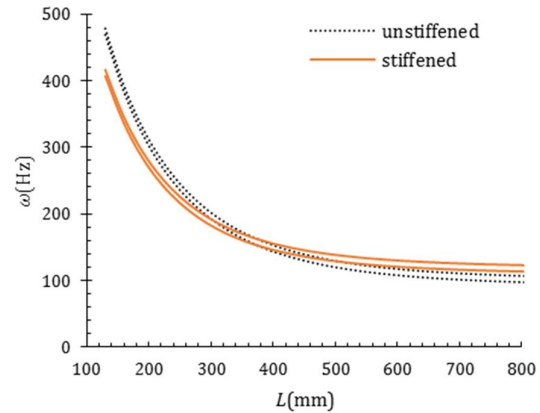


Fig. 19 Comparison The effect of length on frequency of stiffened and unstiffened cylindrical shell for $n=4$

شکل 19 مقایسه اثر نیروی محوری روی فرکانس استوانه تقویت شده و تقویت نشده برای $n=4$

8- فهرست علائم

قاعده سلول	a
ارتفاع سلول	b
طول استوانه	L
عدد موج	n
نصف تعداد تقویت کننده‌ها	N
ضخامت معادل تقویت کننده‌ها برای استوانه‌ای به شعاع R و طول L	t_{st}
سطح مقطع تقویت کننده	A_{st}
علائم یونانی	
زاویه بین الیاف	θ
چگالی پوسته	ρ
زاویه بین تقویت کننده‌ها	φ
چگالی تقویت کننده	ρ_{st}
فرکانس موج پسرو	ω_b^*
فرکانس موج پیشرو	ω_a^*

655, 1999.

[9] M. Talebitooti, M. Ghayour, S. Ziaei-Rad, R. Talebitooti, Free vibrations of rotating composite conical shells with stringer and ring stiffeners, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 80, No. 3, pp. 201-215, 2010.

[10] Sun. Shupeng, Chu. Shiming, Cao. Dengqing, Vibration characteristics of thin rotating cylindrical shells with various boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration* Vol. 331, No. 18, pp. 4170-4186, 2012.

[11] S. C. Huang, S. Hsu, Resonant phenomena of a rotating cylindrical shell subjected to a harmonic moving load, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 136, No. 2, pp. 215-228, 1990.

[12] D. K. Chun, C. W. Bert, Critical speed analysis of laminated composite hollow drive shafts, *Journal of Composites Engineering*, Vol. 3, No. 8, pp. 633-643, 1993

[13] M. Mehrparvar, Vibration analysis of functionally graded spinning cylindrical shells using higher order shear deformation theory, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 1, No. 3, pp. 159-170, 2009.

[14] S. Kidane, G. Li, J. Helms, Pang SS, Woldesenbet E, Buckling load analysis of grid stiffened composite cylinders, *Journal of Composites part B*, Vol. 34, No. 1, pp. 1-9, 2003.

[15] G. H. Rahimi, M. Zandi, S. F. Rasouli, Analysis of the effect of stiffener profile on buckling strength in composite isogrid stiffened shell under axial loading, *Journal of Aerosp Sci Technol*, Vol. 24, pp. 198-203, 2013.

[16] B. A. J. Mustafa, R. Ali, An energy method for free vibration analysis of stiffened circular cylindrical shells, *Journal of Computers & Structures*, Vol. 32, No. 2, pp. 355-363, 1989.

[17] Z. Mecitoglu, Vibration characteristics of a stiffened conical shell, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 197, No. 2, pp. 191-206, 1996.

[18] E. Woldesenbet, S. Kidane, S. Pang, Optimization for buckling loads of grid stiffened composite panels, *Journal of Composite Structures*, Vol. 60, pp. 159-169, 2003.

[19] M. Yazdani, GH. Rahimi, A. faghi Khatibi, S. Hamzeh, An experimental investigation into the buckling of GFRP stiffened shells under axial loading, *Journal of Sci Res Essay*, Vol. 4, No. 9, pp. 914-920, 2009.

[20] M. Yazdani, GH. Rahimi, The effects of helical ribs' number and grid types on the buckling of thin-walled GFRP-stiffened shells under axial loading, *Journal of Reinf Plast Compos*, Vol. 29, No. 17, pp. 2568-2575, 2010.

[21] GH. Rahimi, M. Hemmatnezhad, R. Ansari, Prediction of vibrational behavior of grid stiffened cylindrical shells, *Advances in Acoustics and Vibration*, Vol. 4, No. 9, pp. 1-10, 2014.

[22] J. A. McElman, M. M. Mikulas, M. Stein, Static and dynamic effects of eccentric stiffening of plates and shells, *AIAA Journal*, Vol. 4, No. 5, pp. 887-894, 1966.

[23] M. Hemmatnezhad, R. Ansari, M. Darvizeh, Prediction of vibrational behavior of composite cylindrical shells under various boundary conditions, *Applied composite materials*, Vol. 17, pp. 225-241, 2014.

[24] KY. Lam, CT. Loy, Analysis of rotating laminated cylindrical shells by different thin shell theories, *Journal of Sound Vibration*, Vol. 186, No. 1, pp. 23-35, 1995.

[25] X. Zhao, KM. Liew, TY. Ng, Vibrations of rotating cross-ply laminated circular cylindrical shells with stringers and ring stiffeners, *International Journal of Solids and Structure*, Vol. 39, No. 2 pp. 529-545, 2002.

[26] Ömer Civalek, Murat Gürses, Free vibration analysis of rotating cylindrical shells using discrete singular convolution technique, *International Journal. Pressure Vessels Piping*, Vol. 86, No. 10 pp. 677-683, 200

$$\begin{aligned}
 Q_{22} &= f_{22} \quad , \quad Q_{23} = f_{23} \\
 Q_{32} &= f_{31} + f_{31}Y_1 + f_{34}Y_5 \\
 Q_{34} &= f_{33} + f_{31}Y_2 + f_{34}Y_6 \\
 Q_{35} &= f_{31}Y_3 + f_{34}Y_7 \\
 Q_{36} &= f_{31}Y_4 + f_{34}Y_8 \\
 Y_1 &= \frac{(f_{52}f_{44} - f_{54}f_{42})}{(f_{54}f_{41} - f_{51}f_{44})} \quad , \quad Y_2 = \frac{(f_{53}f_{44} - f_{54}f_{43})}{(f_{54}f_{41} - f_{51}f_{44})} \\
 Y_3 &= \frac{(f_{54}f_{41} - f_{51}f_{44})}{(f_{54}f_{41} - f_{51}f_{44})} \quad , \quad Y_4 = \frac{(f_{54}f_{41} - f_{51}f_{44})}{(-f_{44})} \\
 Y_5 &= \frac{(f_{51}f_{42} - f_{52}f_{41})}{(f_{54}f_{41} - f_{51}f_{44})} \quad , \quad Y_6 = \frac{(f_{51}f_{43} - f_{53}f_{41})}{(f_{54}f_{41} - f_{51}f_{44})} \\
 Y_7 &= \frac{(f_{54}f_{41} - f_{51}f_{44})}{(-f_{51})} \quad , \quad Y_8 = \frac{(f_{54}f_{41} - f_{51}f_{44})}{(f_{41})} \\
 S_{11} &= \frac{(g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32})}{\Delta} \quad , \quad S_{12} = \frac{(g_{23}g_{31} - g_{23}g_{32})}{\Delta} \\
 S_{13} &= \frac{(g_{21}g_{32} - g_{22}g_{31})}{\Delta} \quad , \quad S_{21} = \frac{(g_{13}g_{32} - g_{12}g_{33})}{\Delta} \\
 S_{22} &= \frac{(g_{11}g_{33} - g_{13}g_{31})}{\Delta} \quad , \quad S_{23} = \frac{(g_{12}g_{31} - g_{11}g_{32})}{\Delta} \\
 S_{31} &= \frac{(g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22})}{\Delta} \quad , \quad S_{33} = \frac{(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21})}{\Delta}
 \end{aligned}$$

10- مراجع

[1] GH. Bryan, On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 7, No. 24 pp. 101-111, 1890

[2] K. Daneshjou, M. Talebitooti, R. Talebitooti, Free vibration and critical speed of moderately thick rotating laminated composite conical shell using generalized differential quadrature method, *Applied Mathematics and Mechanics*, Ed., Vol. 34, No. 4, pp. 437-456, 2013.

[3] HJ. Macke, Traveling wave vibration of gas turbine engine shells, *Trans of ASME Journal of Engng Power*, Vol. 88, No. 2, pp. 179-187, 1966.

[4] SC. Huang, W. Soedel, On the forced vibration of simply supported rotating cylindrical shells, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 84, No. 1, pp. 275-285, 1988.

[5] K. Suzuki, R. Takahashi, T. Kosawada, Analysis of vibrations of rotating thin circular cylindrical shells, *JSME Int J Series III*, Vol. 34, pp. 19-25, 1991.

[6] H. Igawa, T. Saito, M. Endo, Free vibration of rotating anisotropic shells of revolution, *JSME Trans Series C*, Vol. 59, No. 566, pp. 3052-3057, 1993.

[7] YS. Lee, YW. Kim, Vibration analysis of the rotating hybrid cylindrical shells laminated with metal and composite, *Trans KSME*, Vol. 20A, No. 3, pp. 968-977, 1996.

[8] Lee. Young-Shin, Kim. Young-Wann, Effect of boundary conditions on natural frequencies for rotating composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners, *Journal of Advances in Engineering Software*, Vol. 30, pp. 649-