مجله مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1395، دوره 16، شماره 9، ص‌ص 421-428

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

کنترل بهینه ربات زمینی چرخدار غیرهولونومیک با کنترل‌کننده LQG

پیام نوری‌زاده[1]، عقیل یوسفی‌کما[2*]، موسی آیتی[3]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران
2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران
3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران
* تهران، صندوق پستی 4563-11155، aykoma@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 03 مرداد 1395
پذیرش: 06 شهریور 1395
ارائه در سایت: 04 مهر 1395

کلید واژگان:
ربات زمینی چرخدار
شناسایی سیستم‌ها
حداقل مربعات بازگشتی
کنترلگر LQG
تخمین‌گر کالمن

چکیده

در این مقاله به کنترل بهینه ربات زمینی چرخدار غیرهولونومیک براساس کنترل‌کننده LQG پرداخته شده است. به‌دلیل غیرخطی بودن معادلات سینماتیکی حاکم بر این ربات‌ها، کنترلگرهای غیرخطی نقش مهمی را در کنترل آن‌ها برعهده دارد. در این مقاله پارامترهای معادلات سینماتیکی حاکم به کمک روش‌های شناسایی سیستم‌ها و براساس داده‌های آزمایش استخراج شده است. مدل‌های گسسته خطی در پارامتر در نظر گرفته شده و مرتبه بهینه‌ی مدل و کارایی مدل با کمک آزمون‌های آماری به‌دست آورده شده است. پارامترهای مدل با روش حداقل مربعات (LS) و نحوه همگرایی پارامترهای مدل با روش حداقل مربعات بازگشتی (RLS) با ضریب فراموشی تخمین زده شده‌اند. با استخراج و صحت‌سنجی مدل گسسته خطی با داده‌های آزمایش عملی، امکان طراحی کنترلگرهای خطی میسر گردیده‌اند. بدین منظور کنترلگر بهینه LQG برای ردیابی مسیر هدف توسط ربات زمینی چرخدار طراحی شده که در آن با کمک تخمین‌گر کالمن، امکان تخمین بخشی از متغیرهای حالت که در دسترس نبوده‌اند، میسر گردیده است. به‌کارگیری کنترلگر خطی بهینه به همراه شناسایی سیستم، موجب سادگی و کاهش حجم محاسبات در مقایسه با کنترلگرهای غیرخطی گردیده است. در نهایت کنترلگر طراحی‌شده در محیط نرم‌افزار متلب- سیمولینک شبیه‌سازی شده است و نتایج نشان‌دهنده کارایی مناسب کنترلگر در ردیابی مسیر مطلوب می‌باشد.

Optimal Control of Non-holonomic Wheeled Mobile Robot Using Linear Quadratic Gaussian Controller

Payam Nourizadeh, Aghil Yousefi-Koma*, Moosa Ayati

School of Mechanical Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran
* P.O.B. 11155-4563, Tehran, Iran, aykoma@ut.ac.ir

Article Information

Original Research Paper
Received 24 July 2016
Accepted 27 August 2016
Available Online 25 September 2016

Keywords:
Mobile robot
System identification
Recursive least square
LQG controller
Kalman observer

Abstract

In this paper, designing an optimal linear controller for non-holonomic wheeled mobile robots based on Linear Quadratic Gaussian (LQG) controller is considered. Parameters of the governing kinematics equation of motion are derived based on system identification techniques by using real experimental data. The autoregressive moving average-exogenous input (ARMAX) models are taken into account. The least square (LS) algorithm is utilized to estimate the parameters of the model. Thereafter, optimal model order and the performance of the model are determined using several statistical analyses. Also, the recursive LS (RLS) with forgetting factor is employed to demonstrate the convergence of the model parameters. Verification of the discrete linear model implies the possibility of using the linear controllers. Therefore, the optimal LQG controller for wheeled mobile robots is designed to track the reference trajectory. The Kalman observer is used to estimate un-measurable states of the robot. Furthermore, the optimal linear control together with system identification techniques yields a simpler controller than nonlinear controllers. Designed controller and verified model are simulated using the MATLAB-Simulink software. Results show the effectiveness of the controller in tracking the desired reference trajectory.

1- مقدمه

امروزه با گسترش دانش کنترل، ربات‌های متحرک زمینی چرخدار مورد توجه قرار گرفته‌اند. قابلیت کار در فضاهای مختلف، عدم محدودیت فضای کاری، عملیات‌پذیری، سادگی مکانیکی و غیره، از جمله قابلیت‌های مهم این دسته از ربات‌ها می‌باشند. این ربات‌ها دارای سه درجه آزادی در صفحه شامل مختصات مکانی و جهت‌گیری می‌باشند. در این بین، ربات‌های غیرهولونومیک[1] با کمک تنظیم گشتاور دو موتور در چرخ‌ها، مختصات مکانی و جهت‌گیری ربات را کنترل می‌کنند [1]. مشکل اصلی این ربات‌ها غیرخطی بودن معادلات سینماتیکی حاکم بوده که به واسطه‌ی آن، کنترلگرهای غیرخطی نقش مهمی در تنظیم رفتار این دسته از ربات‌ها را بر عهده دارند. غیرخطی بودن معادلات در کنار قید دینامیکی غیرهولونومیک و چند ورودی- چند خروجی (MIMO[2]) بودن این سیستم‌ها، طراحی کنترلگر برای

[1] Non-holonomic
[2] Multi Input- Multi Output

Please cite this article using:
برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:
P. Nourizadeh, A. Yousefi-Koma, M. Ayati, Optimal Control of Non-holonomic Wheeled Mobile Robot Using Linear Quadratic Gaussian Controller, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 9, pp. 421-428, 2016 (in Persian)

این ربات‌ها را با پیچیدگی همراه کرده است. همچنین، به دلیل کارکرد این ربات‌ها در محیط‌های پیچیده و وجود عواملی مانند اصطکاک و عدم قطعیت‌ها در سیستم، معمولا فرآیند طراحی کنترلگر را با سعی و خطا نیز همراه کرده است. عیب اصلی روش سعی و خطا عدم یافتن پارامترهای بهینه کنترلی و وابستگی کنترلگر طراحی‌شده به پلت‌فرم انتخابی می‌باشد [2]. یکی از راهکارهای ارائه شده برای حل مشکلات مطرح شده فوق، استفاده از روش‌های شناسایی سیستم برای یافتن مدل سیستم و تخمین پارامترهای آن می‌باشد [3]. در این روش مجموعه داده‌های ورودی‌ها و خروجی‌های ربات (به‌ترتیب دور موتور و مختصات مکانی و جهت‌گیری ربات) به الگوریتم شناسایی سیستم اعمال شده، و این الگوریتم رابطه‌ی بین ورودی‌ها و خروجی‌ها (مدل سیستم) را پیدا می‌کند. نکته مهم اینست که در داخل داده‌های ورودی و خروجی اعمالی، عدم قطعیت‌ها و پارامترهای مدل‌نشده در مدل دینامیکی سیستم نهفته می‌باشد. از قابلیت‌های این روش تخمین برخط[1] پارامترهای سیستم با کمک الگوریتم‌های شناسایی بازگشتی می‌باشد، این قابلیت امکان تطبیق مدل با تغییرات احتمالی در سیستم همچون افت ولتاژ باتری، تغییر اصطکاک چرخ‌ها ناشی از عبور از سطوح مختلف و غیره در آزمایش‌های عملی را فراهم می‌کند [3]. مزیت مهم دیگر این روش در صورت یافتن مدل ARMAX[2] مناسب، به‌کارگیری کنترلگرهای خطی بوده که از نظر پیچیدگی طراحی و حجم محاسبات، به کنترلگرهای غیرخطی برتری دارند.

در حوزه شناسایی سیستم و یافتن مدل ربات‌های زمینی چرخدار، تحقیقات کمتری نسبت به طراحی کنترلگر برای این ربات‌ها صورت گرفته است. اما در زمینه شناسایی پارامترهای سیستم‌های مکانیکی پژوهش‌های مختلفی صورت گرفته است [5,4]. در مرجع [3] با کمک روش‌های شناسایی سیستم، مدل سینماتیکی خطی و غیرخطی (ARMAX و NARMAX[3]) برای ربات زمینی چرخدار به‌دست آورده است. سپس، کارایی مدل ارائه شده را با داده‌های آزمایش صحت‌سنجی کرده‌اند. همچنین، نشان دادند که مدل خطی اختلاف ناچیزی با مدل غیرخطی داشته و این مدل به خوبی سینماتیک ربات را توصیف کرده است. در مرجع [2] روشی برای طراحی یک کنترلگر به منظور آموزش ربات زمینی چرخدار بر پایه اصول شناسایی سیستم ارائه شده است. آن‌ها همچنین رابطه‌ای خطی و غیرخطی بین داده‌های به‌دست‌آمده از حسگرها و ورودی‌های موتور را به‌دست آورده‌اند. در مرجع [6] برای مدل‌سازی و شناسایی سیستم ربات زمینی چرخدار الگوریتمی بیان شده است. در این روش از مسیر طی شده به جای مختصات مکانی (افقی و عمودی) ربات استفاده کرده‌اند. مزیت مدل گسسته ارائه شده‌ی آن‌ها خطی بودن معادلات بوده ولی اندازه‌گیری مستقیم مسیر طی‌شده مشکل‌ساز شده است. مرجع [7] نیز دو مدل چند ورودی- یک خروجی پیشنهاد داده‌اند. آن‌ها همانند مرجع [6] از مسیر طی‌شده برای بدست آوردن مدل خطی استفاده کرده‌اند و همچنین روش حداقل مربعات بازگشتی (RLS) برای تخمین پارامترهای مدل به کار گرفته شده است.

همان‌طور که اشاره شد، در قسمت کنترل این دسته از ربات‌ها، گستردگی پژوهش‌ها بیشتر از بخش شناسایی سیستم‌ها می‌باشد [9,8]. در اکثر این مقالات از معادلات غیرخطی حاکم استفاده شده است. بر این اساس، دو گروه کنترلگرهای خطی و غیرخطی برای این سیستم‌ها به کار گرفته شده است. مرجع [10] یک کنترلگر مد لغزشی انتگرالی به منظور ردگیری مسیر مرجع طراحی و پیاده‌سازی کرده است. در [11] با کمک الگوریتم فازی، یک کنترلگر LQR[4] براساس معادلات گسسته حاکم طراحی نموده است. مرجع [12] به منظور بهبود عملکرد ردگیری مسیر مرجع، یک تابع کسینوسی شبکه عصبی توسعه‌یافته برای ربات‌های متحرک غیرهولونومیک ارائه داده است. مزیت اصلی این مقاله افزایش کارایی کنترلگر در پیاده‌سازی برخط این سیستم‌ها می‌باشد. در [13] کنترلگر شبکه عصبی تطبیقی برای کنترل رفتار این دسته از ربات‌ها ارائه شده است. در طراحی این کنترلگر مسئله لغزش چرخ‌های ربات نیز در نظر گرفته شده و پایداری سیستم با تئوری لیاپانوف[5] بررسی شده است. برخی از مقالات سعی بر حل مشکلات پیاده‌سازی عملی این سیستم‌ها را نیز داشته‌اند. در این راستا مرجع [14] به طراحی کنترلگر مقاوم برای ردیابی مسیر مرجع پرداخته است. آن‌ها در طراحی سیستم کنترلی مشکل اندازه‌گیری سرعت خطی و زاویه‌ای ربات را در نظر گرفته‌اند. در [15] یک کنترلگر ردیاب مسیر مرجع با قید بهینه‌سازی مصرف انرژی براساس معادلات غیرخطی طراحی شده است. با تعریف تابع هزینه براساس انرژی مصرفی، ورودی‌های کنترلی مطلوب محاسبه شده است. مرجع [16] نیز مشابه [15] از اصول کنترل بهینه برای کنترل رفتار ربات‌های زمینی چرخدار استفاده کرده است. آن‌ها با خطی‌سازی معادلات، کنترلگر بهینه خطی LQR برای این سیستم طراحی کرده و نتایج آن را بررسی کرده‌اند. مشکل اصلی این مقاله و مقالات مشابه، خطی‌سازی معادلات سیستم حول نقطه مشخصی بوده که با توجه به متحرک بودن این ربات‌ها، در عمل نقطه کاری مشخصی وجود نداشته و با دور شدن از نقطه موردنظر، خطاهای مرتبه‌ی بالا تاثیر زیادی در طراحی می‌گذارند. مرجع [17] مسئله تعقیب مسیر مطلوب برای یک ربات متحرک زمینی چرخدار غیرهولونومیک در نظر گرفته شده است. آن‌ها یک کنترلگر غیر مدل مبنا برای ربات طراحی کرده و پایداری آن را با کمک قضیه پایداری لیاپانوف اثبات کرده‌اند. همچنین کارایی کنترلگر نیز با پیاده‌سازی نشان داده شده است. مرجع [18] طراحی مسیر بهینه برای ربات‌های متحرک چرخدار غیرهولونومیک پرداخته است. آن‌ها با بازنویسی معادلات به صورت مسئله کنترل بهینه، مسیر ربات را طراحی کرده و نتایج را با شبیه‌سازی و پیاده‌سازی نشان داده‌اند.

با بررسی مقالات در این زمینه مشاهده شد که در زمینه کنترل ربات‌های چرخدار براساس معادلات استخراج‌شده برمبنای روش‌های شناسایی سیستم، مطالعات کمی صورت گرفته و می‌بایست تحقیقات بیشتری در این قسمت صورت گیرد که در این مقاله به این مهم پرداخته شده است.

در این مقاله برای ربات‌های زمینی چرخدار غیرهولونومیک به منظور ردگیری مسیر مرجع، کنترلگر بهینه LQG[6] طراحی شده است. برای طراحی این کنترلگر، معادلات حاکم بر سیستم باید خطی باشند. بدین منظور ابتدا ارائه یک مدل خطی گسسته (ARMAX) با کمک اصول شناسایی سیستم در نظر گرفته شده است. در این راستا، داده‌های آزمایش عملی و آزمون‌های آماری مختلف برای بررسی صحت مدل انتخابی به‌کار گرفته شده است. همچنین برای یافتن میزان کارایی مدل نهایی، از آزمون آماری مربع R[7] استفاده شده است. پس از یافتن مدل مناسب، کنترلگر بهینه LQG گسسته برای سیستم طراحی شده است. این روند با تعریف تابع هزینه شروع شده و ورودی کنترلی مناسب برای کمینه شدن تابع هزینه محاسبه شده است. در طراحی این کنترلگر یک مشاهده‌گر کالمن در هر لحظه متغیرهای حالت

[1] Online
[2] Autoregressive moving average-exogenous input
[3] Nonlinear ARMAX
[4] Linear Quadratic Regulator
[5] Lyapunov
[6] Linear Quadratic Gaussian
[7] R-squared

سیستم را تخمین زده و ورودی کنترلی را اعمال می‌کند. در نهایت کارایی کنترلگر در ردیابی مسیر مرجع مورد بررسی قرار گرفته و نتایج بیانگر عملکرد مناسب سیستم کنترلی طراحی شده است. مزیت اصلی این مقاله در مقایسه با دیگر پژوهش‌ها، به کارگیری مدل به‌دست آمده از روند شناسایی سیستم برای طراحی کنترلگر می‌باشد. خطی بودن و کارایی مدل در کل بازه حرکتی ربات، امکان طراحی کنترل‌کننده‌های خطی را میسر کرده است. به‌دلیل استخراج این مدل از آزمایش عملی برخلاف مدل‌سازی‌های ریاضیاتی متداول، عدم قطعیت‌ها و دیگر پارامترهای مدل نشده نیز در نظر گرفته شده است. از دیگر قابلیت‌های روش ارائه شده، امکان استفاده از سیستم‌های کنترلی تطبیقی بوده که در کنار شناسایی سیستم برخط، توانایی تطابق با تغییرات سیستم از قبیل کاهش ولتاژ باتری، اصطکاک‌ها و غیره را دارا می‌باشد.

مقاله به شرح زیر مرتب شده است. در بخش 2 مدل سینماتیکی و دینامیکی ربات ارائه شده است. در بخش 3 به طراحی مکانیزم شناسایی سیستم و کنترل‌کننده بهینه پرداخته شده است. در قسمت 4 نیز کارایی مدل ارائه شده و کنترل‌کننده‌ی طراحی شده مورد تجزیه تحلیل قرار گرفته است. پیوست و تقدیر و تشکر مقاله نیز در بخش 5 ارائه شده است. در نهایت نتیجه‌گیری مقاله در بخش 6 آورده شده است.

2- مدل سینماتیکی و دینامیکی

در "شکل 1" مدلی شماتیک از یک ربات چرخدار نشان داده شده است. در این مدل دو موتور مستقل به عنوان ورودی ربات بوده و یک چرخ هرزگرد در جلو برای پایدار شدن ربات به کار گرفته شده است. معادله دینامیکی حاکم بر اکثر سیستم‌های غیرهولونومیک براساس فرمول اویلر- لاگرانژ[1] به صورت رابطه (1) تعریف می‌گردد [1].

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = J^{\mathrm{T}}(q)\lambda + B(q)\tau \qquad (1)$$

در رابطه‌ی بالا q متغیر مستقل، L تابع لاگرانژین، λ ضریب لاگرانژ، τ بردار نیروی عمومی خارجی اعمالی، $B(q)$ ماتریس تبدیل غیرتکین و $J(q)$ ماتریس با ابعاد $m\times n$ می‌باشد. همچنین T بیانگر عملگر ترانهاده می‌باشد. قید غیرهولونومیک در رابطه بالا به‌صورت زیر می‌باشد.

$$J(q)\dot{q} = 0 \qquad (2)$$

از رابطه (1) و (2) به‌دست می‌آید:

$$D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = J^{\mathrm{T}}(q)\lambda + B(q)\tau \qquad (3)$$

در رابطه بالا $D(q)$ ماتریس متقارن مثبت معین، $C(q,\dot{q})$ ماتریس کوریولیس[2] و $G(q)$ ماتریس گرانش می‌باشد.

با توجه به "شکل 1"، متغیرهای مستقل برای توصیف مختصات ربات در صفحه شامل مختصات مکانی و جهت‌گیری ربات می‌باشد. این متغیرها در بردار زیر نشان داده شده است.

$$q = [x, y, \phi]^{\mathrm{T}} \qquad (4)$$

با کمک روابط بالا، معادلات دینامیکی حاکم به نحو زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} = \frac{1}{L_1} \begin{bmatrix} \cos\phi & \cos\phi \\ \sin\phi & \sin\phi \\ L_2 & -L_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin\phi \\ -\cos\phi \\ 0 \end{bmatrix} \lambda \qquad (5)$$

[1] Euler- Lagrange
[2] Cariolis

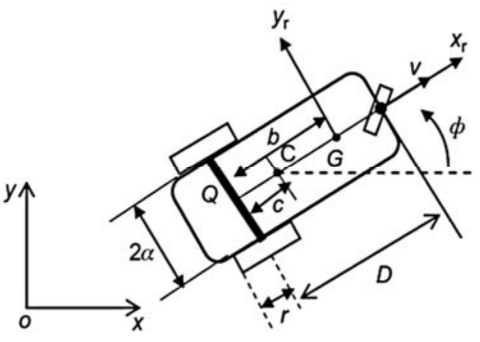

Fig. 1 Geometric of wheeled mobile robot [1]

شکل 1 تصویر شماتیک ربات چرخدار [1]

در رابطه‌ی بالا m جرم ربات، I_{zz} ممان اینرسی حول محور Z، L_1 و L_2 بترتیب شعاع چرخ‌ها و فاصله طولی چرخ‌های عقب از یکدیگر و τ_1 و τ_2 به‌ترتیب گشتاور چرخ‌های راست و چپ می‌باشد. به‌منظور حذف قید از معادله حاکم، ماتریس $R(q)$ به صورت رابطه (6) تعریف می‌شود.

$$R^{\mathrm{T}}(q)J^{\mathrm{T}}(q) = 0 \qquad (6)$$

با توجه به معادله (2) و (6) می‌توان نشان داد که بردار $v(t)$ وجود دارد به نحوی که:

$$\dot{q}(t) = R(q)v(t) \qquad (7)$$

با اعمال تبدیل بالا، معادله (3) به نحو زیر بازنویسی می‌شود.

$$\acute{D}(q)\dot{v} + \acute{C}(q,\dot{q})v + \acute{G}(q) = \acute{B}(q)\tau \qquad (8)$$

که در رابطه بالا:

$$\acute{D} = R^{\mathrm{T}}DR, \acute{C} = R^{\mathrm{T}}D\dot{R} + R^{\mathrm{T}}CR$$
$$\acute{G} = R^{\mathrm{T}}G, \acute{B} = R^{\mathrm{T}}B \qquad (9)$$

اگر ماتریس $R(q)$ به صورت رابطه (10) تعریف گردد،

$$R(q) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 \\ \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

آن‌گاه معادله (5) به صورت به‌دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \frac{1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ L_2 & -L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

در رابطه‌ی بالا، v و ω به‌ترتیب سرعت خطی و زاویه‌ای ربات می‌باشد. با اعمال تبدیلات بالا، در نهایت معادله دینامیکی حاکم به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\phi \\ \dot{y} = v\sin\phi \\ \dot{\phi} = \omega \\ \dot{v} = \dfrac{1}{mL_1}(\tau_1 + \tau_2) \\ \dot{\omega} = \dfrac{L_2}{I_{ZZ}L_1}(\tau_1 - \tau_2) \end{cases} \qquad (12)$$

همان‌طور که مشخص است، معادلات سینماتیکی ربات غیرخطی بوده و طراحی کنترلگر برای این دسته از ربات‌ها را با محدودیت مواجهه کرده است. بدین منظور در گام بعدی با کمک روش‌های شناسایی سیستم، سعی در ارائه یک مدل جدید برمبنای ARMAX داریم.

3- طراحی کنترلگر

3-1- شناسایی سیستم

در این قسمت ابتدا یافتن یک مدل مناسب برای توصیف حرکت ربات‌های چرخدار در نظر گرفته می‌شود. مدل انتخابی از نوع ARMAX بوده و رابطه

کلی آن به شکل زیر می‌باشد [19].

$$Y(q)y(t) = U(q)u(t) \tag{13}$$

در رابطه فوق q پارامتر تغییر زمانی و t زمان می‌باشد. همچنین در رابطه فوق،

$$\begin{aligned} Y(q) &= 1 + \alpha_1 q^{-1} + \alpha_2 q^{-2} + \cdots + \alpha_{ny} q^{-ny} \\ U(q) &= 1 + \beta_1 q^{-1} + \beta_2 q^{-2} + \cdots + \beta_{nu} q^{-nu} \end{aligned} \tag{14}$$

می‌باشد.

برای مشخص شدن مرتبه مدل ابتدا باید با اعمال ورودی و خروجی‌های مشخص، مقادیر پارامترهای مدل را تخمین زد، برای این منظور از الگوریتم حداقل مربعات (LS) استفاده شده است [19].

پس از یافتن مقادیر پارامترها، برای یافتن مرتبه مناسب مدل از آزمون‌های تعیین مرتبه مدل (آزمون F، AC[1]، CC[2] و AIC[3]) استفاده شده است [3]. این آزمون‌ها میزان کارایی مدل انتخابی را مشخص نمی‌کنند، بدین منظور برای انتخاب مرتبه مناسب از بین مدل‌های پیشنهادی هر یک از آزمون‌ها، یک تست آماری دیگر به نام مربع R به‌کار گرفته شده است [20]. این تست کارایی مدل در تطابق با داده‌های واقعی را نشان می‌دهد، گرچه این تست برای تخمین مرتبه مدل مناسب نمی‌باشد، اما یک معیار مناسب برای نشان دادن قابلیت تخمین مدل انتخابی می‌باشد. لازم به ذکر است که حاصل این تست به صورت درصد بیان می‌گردد. در نهایت برای نشان دادن محدوده کارایی مدل و طریقه همگرایی پارامترهای آن، از الگوریتم تخمین حداقل مربعات بازگشتی (RLS) با ضریب فراموشی استفاده شده است [3].

3-2- طراحی کنترلگر LQG

در قسمت قبل مدل سینماتیکی ربات چرخدار با کمک روش شناسایی سیستم و بر پایه مدل ARMAX به‌دست آمد. خطی بودن مدل ارائه شده امکان طراحی کنترلگرهای خطی را میسر کرده است. این مدل به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} x(t+1) = \varphi_1(q)x(t) + \Gamma_1(q)v(t) \\ y(t+1) = \varphi_2(q)y(t) + \Gamma_2(q)v(t) \\ \phi(t+1) = \varphi_3(q)\phi(t) + \Gamma_3(q)\omega(t) \\ v(t+1) = v(t) + \dfrac{T_s}{mL_1}(\tau_1(t) + \tau_2(t)) \\ \omega(t+1) = \omega(t) + \dfrac{L_2 T_s}{I_{ZZ} L_1}(\tau_1(t) - \tau_2(t)) \end{cases} \tag{15}$$

در رابطه فوق گشتاورهای موتور باید به نحوی تنظیم گردند تا سرعت خطی و زاویه‌ای ربات موجب صفر شدن خطای ردگیری مسیر مرجع شوند، همچنین T_s زمان نمونه‌برداری می‌باشد. بدین منظور مختصات صفحه‌ای ربات به عنوان متغیرهای حالت سیستم در نظر گرفته شده است.

$$\Lambda = [x, y, \phi, v, \omega]^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

بدین ترتیب معادلات حاکم بر سیستم را به صورت زیر می‌توان بازنویسی کرد.

$$\begin{cases} \Lambda(t+1) = \Theta(t)\Lambda(t) + \Omega(t)u(t) + \sigma(t) \\ \gamma(t) = \Psi(t)\Lambda(t) + \delta(t) \end{cases} \tag{17}$$

در رابطه فوق σ و δ بترتیب نویز سفید متغیرهای حالت و خروجی‌ها می‌باشد، دو نویز سفید مذکور در ماتریس زیر ذخیره شده‌اند [21].

$$\Delta(t) = [\sigma(t)^{\mathrm{T}}, \delta(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \tag{18}$$

در طراحی کنترلگر دانستن ویژگی‌های نویز بسیار مهم است، بدین منظور میانگین و واریانس نویزها بترتیب به صورت زیر فرض شده‌اند.

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Delta(t)) &= 0 \\ \varepsilon(\Delta(t)\Delta(t)^T) &= \begin{bmatrix} \rho_\sigma & 0 \\ 0 & \rho_\delta \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{19}$$

حال برای به‌دست آوردن ورودی‌های کنترلی، ابتدا قانون کنترلی باید تعریف گردد، با توجه به این‌که کنترلگر انتخابی از نوع بهینه می‌باشد، تابع هزینه به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\begin{aligned} j &= \varepsilon\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=t_0}^{t-1} \kappa(u(i), \gamma(i)) + \Lambda(t)\varphi_\Lambda \Lambda(t)^{\mathrm{T}}\right\} \\ N &= t - t_0 \end{aligned} \tag{20}$$

در رابطه‌ی فوق

$$\kappa(u(i), \gamma(i)) = u(i)\varphi_u u(i)^{\mathrm{T}} + \gamma(i)\varphi_\gamma \gamma(i)^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

می‌باشد.

همچنین در معادله فوق φ_Λ، φ_u و φ_γ ماتریس‌های متقارن مثبت معین می‌باشند. اثبات می‌شود برای کمینه شدن تابع هزینه فوق، ورودی کنترلی باید به صورت زیر باشد.

$$\begin{aligned} u(t) &= F(t)\Lambda(t) \\ F(t) &= -(\varphi_u + \Omega(t)^{\mathrm{T}}\mu(t)\Omega(t))^{-1}\Omega(t)^{\mathrm{T}}\mu(t)\Theta(t) \end{aligned} \tag{22}$$

در رابطه فوق متغیر $\mu(t)$ از حل معادله ریکاتی[4] گسسته زیر بدست می‌آید.

$$\Theta(t)^{\mathrm{T}}\mu(t)\Theta(t) - \mu(t) - \Theta(t)^{\mathrm{T}}\mu(t)\Omega(t)\left(\varphi_u + \Omega(t)^{\mathrm{T}}\mu(t)\Omega(t)\right)^{-1} \times \Omega(t)^{\mathrm{T}}\mu(t)\Theta(t) + \Psi(t)^{\mathrm{T}}\varphi_\gamma\Psi(t) = 0 \tag{23}$$

ضریب کنترلی رابطه فوق با شرط زیر (بدون در نظر گرفتن نویز در سیستم) محاسبه شده است.

$$\Delta(t) = O \tag{24}$$

در رابطه فوق O ماتریس صفر می‌باشد. کنترلگر طراحی شده با فرض فوق، از نوع LQR می‌باشد. به منظور در نظر گرفتن نویز در سیستم و تخمین متغیرهای حالت سیستم در وضعیتی که تمام متغیرها توسط حسگرها قابل اندازه‌گیری نباشند، از تخمین‌گر کالمن استفاده شده است. با توجه به شکل 2، ورودی کنترلی به صورت زیر اصلاح می‌شود.

$$u(t) = F(t)\hat{\Lambda}(t) \tag{25}$$

این رویت‌گر با کمک روابط زیر متغیرهای حالت سیستم را تخمین میزند.

$$\begin{cases} \hat{\Lambda}(t) = \hat{\Lambda}(t-1) + \vartheta(t-1)e(t) \\ \hat{\Lambda}(t+1) = \Theta(t)\hat{\Lambda}(t) + \Omega(t)u(t) \\ e(t) = \gamma(t) - \Psi(t)\hat{\Lambda}(t-1) \\ \vartheta(t-1) = \Upsilon(t)\Psi(t)^{\mathrm{T}}(\rho_\delta + \Psi(t)\Upsilon(t)\Psi(t)^{\mathrm{T}})^{-1} \end{cases} \tag{26}$$

ضریب $\Upsilon(t)$ رابطه فوق با حل معادله ریکاتی زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \Theta(t)\Upsilon(t)\Theta(t)^{\mathrm{T}} - \Upsilon(t) & \\ - \Theta(t)\Upsilon(t)\Psi(t)^{\mathrm{T}}\,(\rho_\delta & \\ + \Psi(t)\Upsilon(t)\Psi(t)^{\mathrm{T}})^{-1} \times \Psi(t)\Upsilon(t)\Theta(t)^{\mathrm{T}} & \\ + \rho_\sigma = 0 & \end{aligned} \tag{27}$$

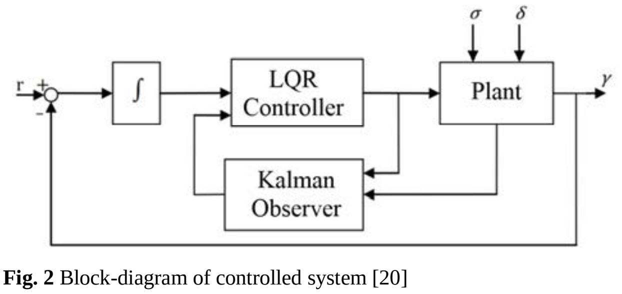

Fig. 2 Block-diagram of controlled system [20]

شکل 2 بلوک- دیاگرام سیستم با کنترلگر [22]

[1] Autocorrelation
[2] Cross-Correlation
[3] Akaike Information Criterion

[4] Riccati equation

همان‌طور که در "شکل 2" مشخص است، از خطای ردگیری انتگرال گرفته شده و سپس این سیگنال در مکانیزم کنترلی وارد می‌شود. این کنترلگر در حالت کلی، بدون انتگرال‌گیر بوده که در این‌جا برای ردگیری سیگنال مرجع و صفر شدن خطای ردگیری در حضور عدم قطعیت‌ها اضافه شده است [23]. این کنترلگر با فرضیات فوق، پایداری سیستم مدار بسته را تضمین کرده و بهینه ورودی کنترلی را به سیستم اعمال می‌کند [22]. بدین ترتیب کنترلگر با توجه به مسیر مطلوب، گشتاورهای موتور را به‌گونه‌ای تنظیم می‌کند تا خطای ردگیری سیگنال هدف با حفظ کمینه مقدار تابع هزینه، به صفر همگرا شود.

4- نتایج

در این بخش ابتدا نتایج حاصل از شناسایی سیستم و انتخاب مدل مورد نظر بیان شده است. در این مقاله علاوه‌بر موارد مطرح شده در مرجع [3]، مدل ARMAX جهت‌گیری ربات (ϕ) نیز ارائه شده است. مسیر حرکت ربات، سرعت خطی و زاویه‌ای ربات در "شکل‌های 3 و 4" نشان داده شده است [24].

تئوری‌های انتخاب مدل ارائه شده در بخش 3-1، به داده‌های آزمایش نشان داده شده در شکل‌های فوق اعمال شده و نتایج در جدول 1 آورده داده شده است. لازم به ذکر است که در این مدل ورودی‌ها سرعت خطی و زاویه‌ای ربات و خروجی مختصات و جهت‌گیری ربات در صفحه بوده است.

همان‌طور که در جدول 1 مشخص است، اکثر معیارهای انتخاب مدل، یک مرتبه یکسان برای مدل پیشنهاد داده‌اند. آزمون‌های آماری در انتخاب مدل، اختلاف ناچیزی داشته‌اند. مدل مرتبه دو میانگین خطای بسیار پایینی

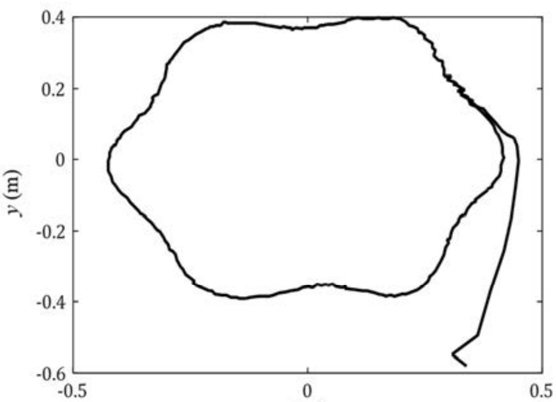

Fig. 3 Measured trajectory of the robot

شکل 3 مسیر اندازه‌گیری‌شده حرکت ربات

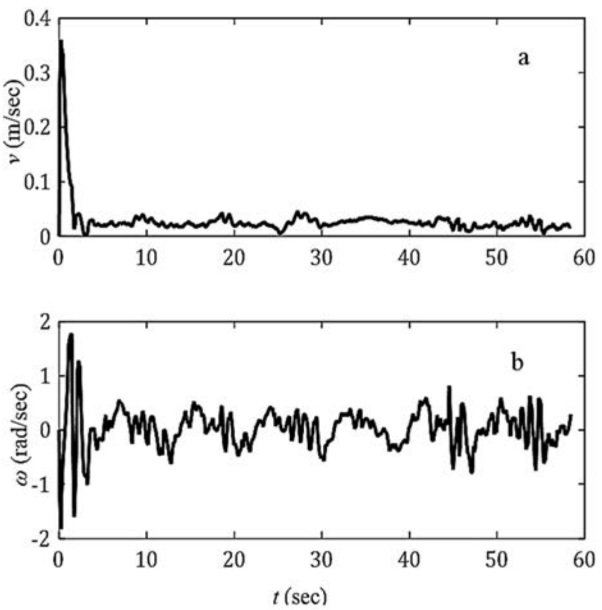

Fig. 4 (a) Linear velocity of the robot, (b) Angular velocity of the robot

شکل 4 (a) نمودار سرعت خطی ربات، (b) نمودار سرعت زاویه‌ای ربات

داشته ولی همان‌طور که ذکر شد، این مسئله برای تشخیص مدل مناسب کافی نمی‌باشد. در این بین برای تشخیص مدل مناسب، از آزمون آماری دیگری (مربع R) استفاده شده است. این آزمون که بیانگر کارایی مدل بوده، عدد قابل‌توجهی را برای مدل مرتبه دو گزارش کرده است. این عدد نشانگر کارایی مدل انتخاب شده در تخمین متغیر می‌باشد. در نتیجه مدل مرتبه دو برای بیان حرکت ربات گزینه مناسبی می‌باشد.

میانگین خطای تخمین برای مختصات مکانی در حد میلی‌متر بوده و مدل به خوبی متغیرهای مذکور را تخمین زده است. این عدد برای جهت‌گیری ربات نیز در حدود 0.02 رادیان بوده که تخمین مناسبی بوده است. همانطور که در مقدمه نیز ذکر شد، در داده‌های آزمایش عواملی چون اصطکاک، لغزش چرخ‌ها و دیگر عدم قطعیت‌ها وجود داشته که مدل انتخاب‌شده نیز این عوامل را در نظر گرفته است.

در "شکل‌های 5 و 6"، نمودارهای تخمین داده‌ها به همراه خطای تخمین نشان داده شده است (e_i بیانگر خطا در راستای i ($i=x, y, \phi$) می‌باشد).

شکل‌های فوق کارایی مدل را برای تخمین مختصات و جهت‌گیری ربات را به صورت شهودی نیز به خوبی نشان می‌دهند.

مشخصات فنی سیستم در پیوست بیان شده است. با کمک این اطلاعات، معادلات سیستم در فضای حالت بازنویسی شده است. ماتریس‌های فضای

جدول 1 مشخصات و جزئیات مدل‌های انتخاب شده

Table 1 Properties of the proposed models

ϕ				y				x				
F	AC	CC	AIC	F	AC	CC	AIC	F	AC	CC	AIC	تست‌های انتخاب مدل
2	3	2	2	2	2	4	2	2	2	4	2	مرتبه مدل ARMAX
$\phi(t+1) = 1.00\phi(t) - 1.82e_{-2}\omega(t)$				$y(t+1) = 0.99y(t) - 9.15e_{-3}v(t)$				$x(t+1) = 0.99x(t) - 3.42e_{-4}v(t)$				مدل انتخاب شده نهایی
2.5994e-2 (rad)				1.5399e-3 (m)				1.1022e-3 (m)				میانگین خطا مدل نهایی
99.2881				99.9486				99.9843				مقدار آزمون مربع R (%)

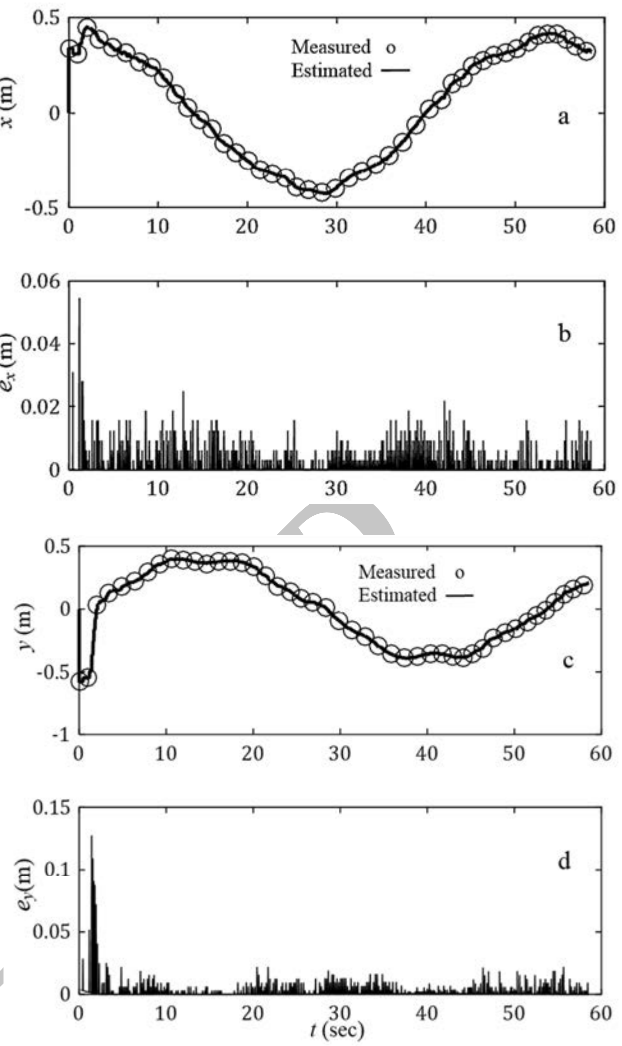

Fig. 5 Position and prediction error (a, b) *x* direction, (c, d) *y* direction

شکل 5 نمودارهای موقعیت و خطای تخمین (a، b) راستا x، (c، d) راستا y

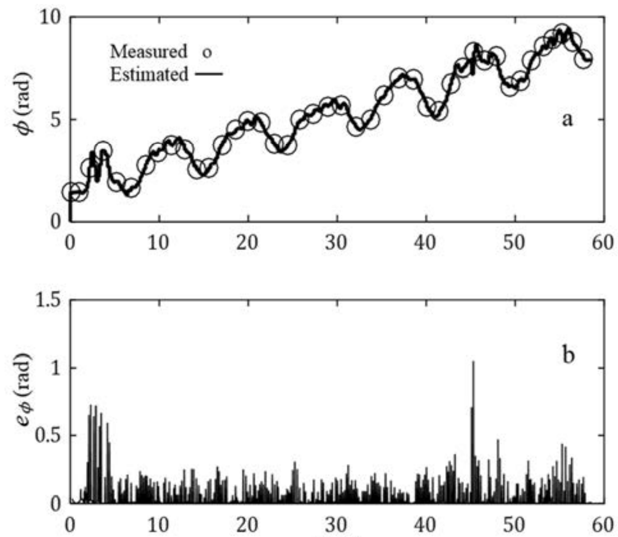

Fig. 6 (a) Orientation, (b) prediction error (θ direction)

شکل 6 نمودارهای جهت‌گیری و خطای تخمین راستا ϕ

حالت سیستم نیز به صورت زیر می‌باشند.

$$A=\begin{bmatrix}0.99 & 0 & 0 & -3.42e_{-4} & 0\\ 0 & 0.99 & 0 & -9.20e_{-3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1.82e_{-2}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.2\\ 0 & 0 & 0 & 0.05 & -0.2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$C=I_{3\times5}$$

$$D=O_{3\times2} \qquad (28)$$

در رابطه (28)، I و O به‌ترتیب ماتریس‌های همانی و صفر می‌باشند.

قبل از طراحی کنترلگر، وضعیت کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور ماتریس‌های زیر تعریف شده‌اند.

$$Co=[B \quad AB \quad \dots \quad A^4B]$$

$$Ob=[C \quad CA \quad \dots \quad CA^4]^{\mathrm{T}} \qquad (29)$$

مقادیر ماتریس‌های فوق در پیوست ارائه شده است. دو ماتریس فوق مرتبه کامل بوده و بیانگر عدم وجود کنترل‌ناپذیری و مشاهده‌ناپذیری در سیستم می‌باشد.

به‌منظور سنجش کارایی کنترلگر طراحی شده، یک مسیر مرجع به صورت دایره‌ای تعریف شده و ردگیری مسیر توسط ربات مورد بررسی قرار گرفته است (ماتریس‌های ضرایب وزنی کنترلگر در پیوست ذکر شده است).

با تنظیم گشتاورهای موتور توسط کنترلگر و اعمال سرعت خطی و زاویه‌ای مطلوب به ربات، حاصل ردگیری سیگنال مرجع برای مختصات صفحه‌ای به شکل زیر بوده است (شکل‌های 7 و 8). لازم به ذکر است که شرایط اولیه ربات در خارج از دایره مرجع انتخاب شده است.

در "شکل‌های 7 و 8"، محور افقی زمان بوده و زمان نمونه‌برداری 0.01 ثانیه بوده است. همان‌طور که در "شکل 8" مشخص است، ربات با شرایط اولیه (1.2، 0.5-) حرکت خود را آغاز کرده است. در ابتدای حرکت کنترلگر با تنظیم گشتاورهای موتور، سرعت‌های خطی و زاویه‌ای مطلوب را ایجاد کرده تا ربات بر روی مسیر مرجع از پیش تعیین شده قرار گیرد. با قرار گرفتن ربات بر روی مسیر مرجع، خطا به سمت صفر رفته و کارایی کنترلگر در رسیدن به هدف طراحی، مشخص می‌گردد. لازم به ذکر است سرعت همگرایی ربات به مسیر مرجع، بستگی به تنظیم پارامترهای کنترلگر

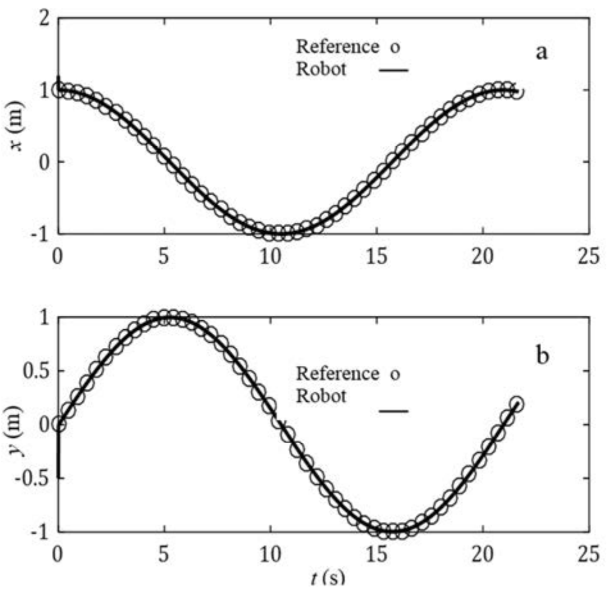

Fig. 7 Trajectory tracking of the robot (a) *x* direction, (b) *y* direction

شکل 7 مسیر طی‌شده ربات در راستای (a) x، (b) y

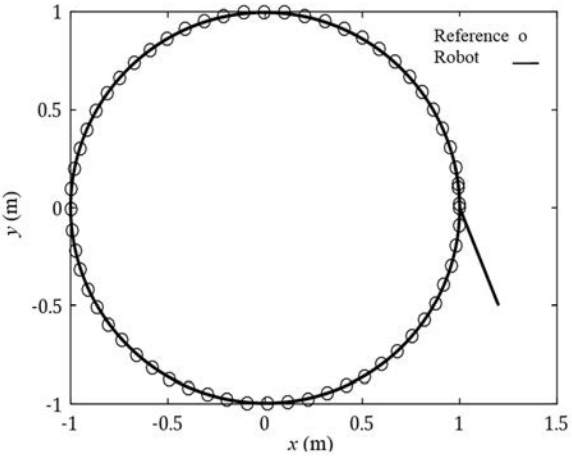

Fig. 8 Trajectory tracking of the robot (planar)

شکل 8 مسیر طی‌شده ربات در صفحه

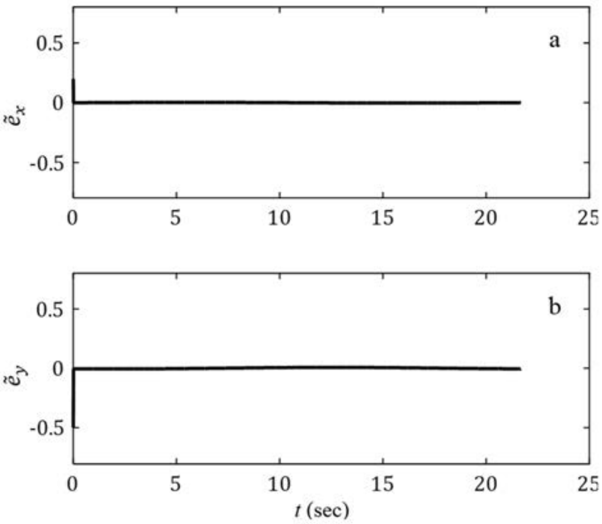

Fig. 9 Tracking error of the robot (a) *x* direction, (b) *y* direction

شکل 9 نمودار خطای ردگیری (a) راستای *x* (b) راستا *y*

می‌باشد. نمودار خطای ردگیری در "شکل 9" آورده شده است (در شکل زیر $\bar{e}_i$ بیانگر خطای ردگیری در راستای i (i=x ,y) می‌باشد).

همان‌طور که در شکل فوق مشخص است، خطای ردگیری سیگنال مرجع در ابتدا به واسطه شرایط اولیه، غیرصفر بوده و با گذر زمان اندکی این خطا به سمت صفر همگرا می‌شود.

5- تقدیر و تشکر و پیوست

5-1- پیوست

مشخصات فنی ربات به صورت زیر است.

m=2 kg, L_1=0.1 m
L_2=0.2 m, I_{ZZ}=0.1 kgm^2

ماتریس‌های کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری:

$$Co=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2e_5 & -2e_5 & -3e_5 & -3e_5 & 5e_5 & -5e_5 & -7e_5 & -7e_5 \\ 0 & 0 & -5e_4 & -5e_4 & -9e_4 & -9e_4 & -1e_3 & -1e_3 & -2e_3 & -2e_3 \\ 0 & 0 & 4e_3 & -4e_3 & 8e_3 & -8e_3 & 12e_3 & -12e_3 & 16e_3 & -16e_3 \\ 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \\ 0.2 & -0.2 & 0.2 & -0.2 & 0.2 & -0.2 & 0.2 & -0.2 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$Ob=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.99 & 0 & 0 & -3e_4 & 0 \\ 0 & 0.99 & 0 & -9e_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.02 \\ 0.98 & 0 & 0 & -7e_4 & 0 \\ 0 & 0.98 & 0 & -0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.04 \\ 0.97 & 0 & 0 & -1e_3 & 0 \\ 0 & 0.97 & 0 & -0.03 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.06 \\ 0.96 & 0 & 0 & -1e_3 & 0 \\ 0 & 0.96 & 0 & -0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.08 \end{bmatrix}$$

در روابط فوق $e_i = 10^{-i}, (i = 1,2,3, \dots)$ می‌باشد.

5-2- تقدیر و تشکر

در نهایت نویسندگان کمال تشکر و قدردانی را از دکتر علی کیماسی خلجی برای مهیا کردن داده‌های آزمایش دارند. همچنین نگارندگان از "صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور" به دلیل حمایت مالی در راستای به ثمر رسیدن این مقاله کمال تشکر را دارند (شماره طرح: 94000927).

6- نتیجه‌گیری

در این مقاله به منظور کنترل ربات‌های زمینی چرخدار غیرهولونومیک، کنترلگر بهینه LQG طراحی شده است. در طراحی این کنترلگر از معادلات گسسته برپایه مدل ARMAX و با کمک اصول شناسایی سیستم استفاده شده است. برای ارائه مدل و یافتن مرتبه مناسب به‌منظور توصیف حرکت سیستم، از آزمون‌های آماری مختلفی استفاده شده است. در ادامه بررسی کارایی این مدل‌ها با کمک آزمون مربع R انجام شده است. برای صحت‌سنجی مدل ارائه شده، مکانیزم شناسایی سیستم طراحی‌شده به داده‌های آزمایش عملی اعمال شده و نتایج کارایی مناسب مدل ارائه شده در تخمین مسیر حرکتی ربات را نشان داده است. در ادامه برای ردگیری مسیر هدف، یک کنترلگر بهینه LQG طراحی شده است. سیستم کنترلی طراحی شده برای تخمین متغیرهای حالت سیستم، مجهز به یک مشاهده‌گر کالمن مجهز شده است. در نهایت سیستم مدار بسته کنترل‌شده شبیه‌سازی شده و نتایج عملکرد مناسب کنترلگر طراحی شده در ردگیری مسیر مرجع را نشان داده است.

7- مراجع

[1] S. G. Tzafestas, *Introduction to Mobile Robot Control*, First Edition, pp. 70-78, London: Elsevier Science, 2014.
[2] O. Akanyeti, U. Nehmzow, S. A. Billings, Robot training using system identification. *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 56, No. 12, pp. 1027-1041, 2008.
[3] P. Nourizadeh, A. Yousefi-koma, M. Ayati, System identification and model validation of nonholonomic wheeled mobile robots, *International Conference on Robotics and Mechatronics* (*ICROM*), Tehran, pp. 586-592, 2015.
[4] S. M. Moore, J. C. S. Lai, K. Shankar, ARMAX model parameter identification in the presence of unmeasured excition-I: Theoretical background, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 21, No. 4, pp. 1601-1615, 2007.
[5] S. M. Moore, J. C. S. Lai, K. Shankar, ARMAX model parameter identification in the presence of unmeasured excition-II: Numerical and experimental, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 21, No. 4, pp. 1616-1641, 2007.
[6] P. N. Guerra, P. J. Alsina, A. A. D. Medeiros, A. P. Araujo, Linear modelling and identification of a mobile robot with differential drive, *International Conference on Information in Control, Automation and Robotics*, Setubal, Portugal, pp. 263-269, 2004.

[7] E. P. Mendes, A. A. D. Medeiros, Identification of quasi-linear dynamic model with dead zone for mobile robot with differential drive, *Robotics Symposium and Intelligent Robotics Meeting*, Latin America, pp. 132-137, 2010.
[8] H. Mehrjerdi, J. Ghommam, M. Saad, Nonlinear coordination control for a group of mobile robots using virtual structure, *Mechatronics*, Vol. 21, No. 7, pp. 1147-1155, 2011.
[9] R. P. M. Chan, K. A. Stol, C. R. Halkyard, Review of modelling and control of two-wheeled robots, *Annual Reviews in Control*, Vol. 37, No. 1, pp. 89-103, 2013.
[10] J. Xu, Z. Guo, T. H. Lee, Design and implementation of integral sliding-mode control on and underactuated two-wheeled mobile robot, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 61, No. 7, pp. 3671-3681, 2014.
[11] U. Farooq, J. Gu, J. Luo, An interval type-2 fuzzy LQR positioning controller for wheeled mobile robot, *International Conference on Robotics and Biomimetics* (*ROBIO*), Shenzhen, pp. 2403-2407, 2013.
[12] J. Ye, Tracking control of an non-holonomic wheeled mobile robot using improved compound cosine function neural networks, *International Journal of Control*, Vol. 88, No. 2, pp. 364-373, 2015.
[13] H. Gao, X. Song, L. Ding, K. Xia, N. Li, Z. Deng, Adaptive motion control of wheeled mobile robot with unknown slippage, *International Journal of Control*, Vol. 87, No. 8, pp. 1513-1522, 2014.
[14] S. Shi, X. Yu, S. Khoo, Robost finite-time tracking control of non-holonomic mobile robots without velocity measurments, *International Journal of Control*, Vol. 89, No. 2, pp. 411-423, 2016.
[15] K. J. Kalinski, M. Mazur, Optimal control of 2-wheeled mobile robot at energy performance index, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 70-71, No. 1, pp. 373-386, 2016.
[16] P. Oryschuk, A. Salerno, A. M. Al-husseini, J. Angeles, Experimental validation of an underactuated two-wheeled mobile robot, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 14, No. 2, pp. 252-257, 2009.
[17] M. Rahimi Bidgoli, A. Keymasi Khalaji, S. A. A. Moosavian. Trajectory tracking control of a wheeled mobile robot by a non-model-based control algorithm using PD-action filtered errors, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 12, pp. 171-178, 2014. (in Persian فارسی)
[18] M. H. Korayem, M. Nazemizadeh, H. Ghaffarpour, Optimal path planning of nonholonomic mobile robots using optimal control method and verification of the method via experimental tests of the Scout mobile robot, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 2, pp. 87-94, 2012. (in Persian فارسی)
[19] T. Soderstrom, P. Stoica, *System Identification*, First Edition, pp. 422-440, London: Prentice Hall, 1989.
[20] D. C. Montgomery, *Design and Analysis of Experiments*, Eighth Edition, pp. 449-472, New York: Wiley, 2013.
[21] E. Mosca, *Optimal, predictive, and Adaptive Control*, First Edition, pp. 187-196, London: Prentice Hall, 1994.
[22] S. Skogestad, I. P. Hwaite, *Multivariable Feedback Control*: *Analysis and Design*, Second Edition, pp. 355-368, New York: Wiley, 2001.
[23] K. J. Astrom, R. M. Murray. *Analysis and Design of Feedback Systems*. Preprint, 2005, Accessed on 14 Jun 2016; http://www.cds.caltech.edu/ ˜murray/am05.
[24] A. K. Khalaji, S. A. A. Moosavian, Robust adaptive controller for a tractor-trailer mobile robot, *IEEE Transcations on Mechatronics*, Vol. 19, No.3, pp. 943-953, 2014.