



## تحلیل ناپایداری دینامیکی و استاتیکی پولین نانوتیرهای نیمه متاثر با استفاده از تئوری تنش مزدوج اصلاح شده

امین رضا نقره آبادی<sup>1\*</sup>، امیر حق پرست<sup>2</sup>

1- دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز  
2- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز  
\* اهواز، صندوق پستی 6135743337، noghrehabadi@scu.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 05 مرداد 1395  
پذیرش: 03 مهر 1395  
ارائه در سایت: 05 آبان 1395

### چکیده

در این مقاله ناپایداری استاتیکی و دینامیکی یک مدل جامع از یک نانوتیر یکسر گیردار تحت تأثیر جریان مستقیم اعمالی و ناگهانی با استفاده از تئوری غیرکلاسیک تنش مزدوج اصلاح شده در حضور اثرات تنش سطحی بررسی شده است. قسمتی از نانوتیرک تحت تأثیر نیروهای الکترواستاتیک و نیروی موینگی قرار دارد. نانوتیرک براساس تئوری اویلر-برنولی مدل سازی و معادله حرکت آن با استفاده از اصل همپلتون به دست آمده است. معادلات حاکم بر نانوتیرک با استفاده از متغیرهای بی بعد مناسب به حالت بی بعد انتقال یافته و با استفاده از روش اجزا محدود حل شدند. نتایج به دست آمده از حل اجزا محدود با نتایج پژوهش های پیشین مقایسه گردید و تطابق خوبی مشاهده شد. در ادامه، پارامترهای پایه برای طراحی مهندسی در مقیاس نانو همانند خیز بحرانی انتهای تیر و ولتاژ پولین در دو حالت استاتیکی و دینامیکی بررسی گردید. نتایج نشان می دهد که در حالت دینامیکی، با افزایش ولتاژ، تیرک قبل از پدیده پولین و سقوط بر روی پایه، دارای حالت نوسانی با دامنه بزرگ است. همچنین مشاهده شد که کوچک تر شدن طول الکتروود زیر پایه (افزایش تأثیر نیمه متاثر بودن)، افزایش اثر میدان لبه، اثر اندازه و اثر تنش سطحی و یا کاهش نیروی موینگی باعث افزایش ولتاژ نهایی پولین می شوند.

کلید واژگان:

نانوتیر

پولین

تئوری تنش مزدوج

نانو تیرک نیمه متاثر

## Dynamic and static pull-in instability analysis of partially affected nano-cantilevers using modified couple stress theory

Aminreza Noghrehabadi\*, Amir Haghparast

Department of Mechanical Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran  
\* P.O.B. 6135743337, Ahvaz, Iran, noghrehabadi@scu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 26 July 2016  
Accepted 24 September 2016  
Available Online 26 October 2016

**Keywords:**  
Nano-beam  
Pull-in  
Couple stress theory  
partially affected nano beam

### ABSTRACT

In this paper, the modified couple stress theory is used to study static and dynamic pull-in instability of a general model of a nano-cantilever under a sudden applied DC voltage in the presence of the surface effects. A partial part of the nano-cantilever is subject to the electrostatic and capillary forces. Euler-Bernoulli theory is used to model the beam and the equation of motion is derived by using Hamilton's principle. The governing equations are transformed into a non-dimensional form and then solved using finite element method (FEM). The results, obtained using FEM are compared with the data available in the literature and found in good agreement. Basic parameters for engineering design at the nanoscale, such as deflection and pull-in voltage have been calculated for both of the dynamic and static modes. The results of dynamic analysis of the beam show that as the voltage increases, the beam goes into an oscillating mode with large amplitudes just before pull-in phenomenon occurs and the beam collapses into the substrate (fixed electrode). Moreover, it is found that a decrease in the length of the fixed electrode (increase of the partially affecting parameter), the increase of the fringing field effect, the size effect and the surface effect increases the pull-in voltage of the nano-cantilever beam.

### 1- مقدمه

پیدا کرده است. از این سیستم ها به طور گسترده در ابزارهایی مانند سنسورهای حساس وزن [1]، کلیدها [2]، انبرکها [3]، رلهها [4] و غیره استفاده می شود. مزیت استفاده از این ابزارها در پیشرفت دقیق تر و سریع تر سیستم های مکانیکی و الکترونیکی به همراه مصرف کمتر و ساختار ساده تر می باشد. نانوملگرها در سیستم های نانو الکترومکانیکی از دو الکتروود ساخته شده اند که یکی از آن ها متحرک و انعطاف پذیر و دیگری ثابت است و

پیشرفت های فراوان در نانو تکنولوژی منجر به رشد سریع ابزارهای صنعتی در ابعاد میکرو و نانو شده است. سیستم های میکرو/نانو الکترومکانیکی<sup>1</sup> به عنوان یک فناوری جدید در شاخه های مختلف مانند مکانیک، حرارت، شیمیایی، نور و اپتیک، مغناطیس، سیستم های الکتریکی و غیره کاربردهای بسیار متنوعی

<sup>1</sup> Micro/Nano ElectroMechanical Systems

گیردار تحت نیروهای الکترواستاتیک و بین مولکولی را با استفاده از تئوری غیر کلاسیک مورد مطالعه قرار دادند.

نیروی موینگی<sup>6</sup> بین دو الکترون، اغلب زمانی رخ می دهد که پلی از مایع بین آن ها شکل گیرد. نیروی موینگی می تواند حاصل یک حجم مایع باشد که در طی عمل شست و شو و خشک کردن زیر تیر (الکترون متحرک) به دام افتاده است [12]. مایع به دام افتاده در زیر تیر، نیروی قوی موینگی را به وجود می آورد که تیر را به سمت بستر (الکترون زیر لایه پایینی) می کشد. در صورت وجود نیروی موینگی در کلیدهای میکرو و نانو، بررسی این موضوع بر روی تغییر پایداری کلید بسیار مهم و ضروری می باشد، زیرا این نیرو می تواند 10 تا 100 برابر بزرگ تر از نیروی الکترواستاتیک شود [12]. اگر نیروی موینگی به اندازه کافی بزرگ باشد، ساختار سقوط خواهد کرد و به بستر می چسبد [12]. مسترانگلو و اچسو [13] اولین نفراتی بودند که نیروی موینگی در زیر یک میکروساختار الکترومکانیکی را تحلیل و پایداری آن را مورد بررسی قرار دادند.

از آنجایی که نسبت بین سطح به حجم ساختارهای با ابعاد نانو بسیار بزرگ است، اثرات سطحی<sup>7</sup> بر رفتار پولین نانوکلیدها حائز اهمیت هستند. اثرات سطحی را می توان به دو دسته تنش سطحی باقیمانده و اثرات الایسیسته سطحی تقسیم نمود. تنش سطحی باقیمانده و اثرات الایسیسته سطحی با استفاده از مدل الاستیک سطحی معرفی شده توسط گرتین و مورداخ [14] و معادله یانگ-لاپلاس تعمیم یافته در مدل سازی مکانیک پیوسته ترکیب می شوند. مدل الاستیک سطحی و معادله یانگ-لاپلاس تعمیم یافته به طور گسترده در بررسی اثرات سطحی بر پاسخ های مکانیکی نانوساختارها به طور نمونه نانوتیرها [15] مورد استفاده قرار گرفته اند. اخیرا محققین ناپایداری پولین نانوکلیدها را با در نظر گرفتن اثرات سطحی بررسی کرده و پی بردند که اثرات سطحی تأثیر بسزایی در ناپایداری پولین نانوتیرها دارند [16,17].

باید به این نکته توجه نمود در صورتی که نرخ تغییر ولتاژ قابل صرف نظر کردن باشد، اینرسی اثری بر رفتار سیستم نخواهد داشت. به این شرایط، ناپایداری پولین استاتیکی<sup>8</sup> اطلاق می شود. در مقابل، زمانی که ولتاژ به طور ناگهانی اعمال شود و یا نرخ تغییر ولتاژ قابل توجه باشد، اینرسی تأثیر مهمی بر رفتار سیستم داشته و ناپایداری متناظر با این شرایط، پولین دینامیکی<sup>9</sup> خوانده می شود. تحقیقات بسیاری در مورد رفتار دینامیکی و پولین دینامیکی میکروتیرهای تحت تحریک الکتریکی انجام شده است. چاترجی و پوهیت [18] پولین غیرخطی استاتیکی و دینامیکی میکروتیرهای یکسر دگر را مورد بررسی قرار دادند. مقیمی زند و همکاران [19] در تحقیقی به بررسی اثرات ناپایداری های پولین استاتیکی و دینامیکی میکروتیرهای یکسر دگر و دوسرگیردار تحت تأثیر نیروهای الکترواستاتیک و بین مولکولی پرداختند. رهایی فرد و همکاران [20,21] رفتار دینامیکی میکروتیرهای یکسر دگر را تحت تأثیر نیروی الکترواستاتیک مبنی را بر تئوری تنش مزدوج بررسی و نتایج به دست آمده را با نتایج تئوری کلاسیک مقایسه نمودند.

برای یک نانوتیر یکسر دگر با طول بسیار بلند، در نظر گرفتن ناپایداری های دینامیکی بسیار حائز اهمیت است. وانگ و همکاران [22] با توسعه یک مدل تیر یکسر دگر در حضور اثرات تنش سطحی و نیروی الکترواستاتیک به بررسی اثر جابه جایی و تغییر طول الکترون زیر لایه برای

الکترون متحرک در بالای الکترون زیر لایه معلق است. اعمال اختلاف ولتاژ بین دو الکترون باعث تغییر شکل الکترون متحرک و انحراف آن به سوی الکترون زیر لایه می شود. زمانی که ولتاژ بین دو الکترون از مقدار خاصی بیشتر شود، سیستم دچار ناپایداری شده و تماس بین دو الکترون به وجود می آید. این پدیده، ناپایداری پولین<sup>1</sup> و ولتاژ متناظر با آن ولتاژ پولین<sup>2</sup> نامیده می شوند.

پیش از توسعه سیستم های نانو الکترومکانیکی، اغلب این سیستم ها اجزایی در ابعاد میکرو داشتند که سیستم های میکرو الکترومکانیکی نامیده می شدند. در چندین دهه گذشته، تحقیقات بسیاری پیرامون ساختارهای با ابعاد میکرو انجام شده است. باترا و همکاران [5] ارتعاش میکروتیرهای در حوزه الکتریکی را مورد بررسی قرار دادند و تغییرات فرکانس مینا در برابر جریان مستقیم<sup>3</sup> اعمالی را تفسیر کردند. رضانی و همکاران [6] با استفاده از روش های عددی و تحلیلی به بررسی ناپایداری های استاتیکی نانوتیرهای یکسر دگر تحت تأثیر نیروی الکترواستاتیک و نیروی بین مولکولی کاسیمیر پرداختند. احمدیان و همکاران [7] رفتار استاتیکی و ناپایداری پولین میکروتیرهای دوسرگیردار تحت نیروی الکترواستاتیک و اثر میدان لبه را بررسی نمودند.

یکی از تفاوت های کار کردن در مقیاس نانو در مقایسه با مقیاس میکرو و بزرگ تر، نقض شدن نسبی فرض پیوستگی ماده می باشد. در مجموع دو نوع تئوری کلی برای بررسی ناپایداری میکروکلیدها و نانوکلیدها استفاده می گردد. تئوری اول تئوری کلاسیک است که در آن ماده به صورت یک محیط پیوسته در نظر گرفته شده است. در این تئوری، پیوستگی محیط مادی فرض اساسی می باشد؛ به نحوی که در هر جز هر چند حجم کنترل کوچکی انتخاب شود باز هم ماده به صورت پیوسته وجود دارد. مدل کلاسیک به دلیل سادگی معادلات همواره مورد استقبال بوده اما با توجه به این نکته که در مقیاس نانو شرط پیوستگی محیط ماده نقض شده و مواد به صورت ساختار اتمی وجود دارند، تئوری های کلاسیک محیط پیوسته توانایی توضیح بسیاری از پدیده ها را ندارند. نظریه های کلاسیک به علت در نظر نگرفتن طول های دورنی مواد دقت خود را از دست می دهند. نتایج حاصل از تئوری های کلاسیک برای تیرهای در ابعاد نانو اختلاف زیادی با نتایج تجربی داشتند. این اختلاف باعث شد که محققان تئوری های جدیدی را ابداع کنند که در آن ها برخلاف حالت کلاسیک تنش تنها تابعی از نیروی وارده نیست. از این رو محققان برای بررسی و تحلیل رفتار مکانیکی مواد در مقیاس نانو به کمک معرفی ثابت های جدید برای ماده مانند پارامتر مقیاس طول ماده، تئوری های غیر کلاسیک از جمله تئوری تنش مزدوج<sup>4</sup> [8] و تنش مزدوج اصلاح شده<sup>5</sup> (MCST) [9] را ارائه کردند. پارامتر مقیاس طول ماده (طول داخلی) یک خاصیت از ماده است که به جنس ماده بستگی دارد و به وسیله آزمایش های تجربی محاسبه می گردد. تئوری های غیر کلاسیک بیان می کنند که بر اثر اعمال نیرو به ماده، علاوه بر تنش، ممان نیز در ماده به وجود می آید و باید در معادلات تعادل ذرات یا اجزا در نظر گرفته شوند. رهایی فرد و همکاران [10] با استفاده از تئوری تنش مزدوج اصلاح شده، رفتار استاتیکی میکروتیر یکسر دگر را در نظر گرفتند و نشان دادند که تئوری تنش مزدوج می تواند دلیل فاصله میان نتایج تجربی و تئوری کلاسیک را توضیح دهد. طادی بنی و همکاران [11] ناپایداری پولین استاتیکی یک نانوتیر یکسر

<sup>6</sup> Capillary Force

<sup>7</sup> Surface Effects

<sup>8</sup> Static Pull-in Instability

<sup>9</sup> Dynamic Pull-in Instability

<sup>1</sup> Pull-in Instability

<sup>2</sup> Pull-in Voltage

<sup>3</sup> DC Voltage

<sup>4</sup> Couple Stress Theory

<sup>5</sup> Modified Couple Stress Theory

ضابطه‌ای است که مقدارش برای اعداد منفی صفر و برای اعداد نامنفی یک است.

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

تابع هویساید برای تیر یکسر گیردار نیمه متاثر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(x) = H(x - D_1) - H(x - L + D_2) \quad (2)$$

که در اینجا  $D_1$  فاصله بین انتهای چپ الکتروود زیرلایه و کلید و  $D_2$  فاصله بین انتهای سمت راست الکتروود زیرلایه و کلید را نشان می‌دهند. تابع هویساید برای این مدل به گونه‌ای تعریف می‌شود که فقط در بازه‌ی  $(D_1 \leq x \leq L - D_2)$  برابر با یک و در بقیه فواصل برابر با صفر شود. با ضرب این تابع در نیروهای الکترواستاتیک و موئینگی و ... فقط در فاصله‌ای که واقعا بر تیر اثر می‌گذارند مدنظر قرار گرفته شده و در بقیه فواصل برابر با صفر هستند.

## 2-2- مبانی تئوری تنش مزدوج اصلاح شده

در سال 2003 لام و همکاران [24] با اصلاح تئوری کلاسیک تنش مزدوج، تئوری تنش مزدوج اصلاح شده را معرفی کردند. آن‌ها علاوه بر معادلات تعادلی کلاسیک نیروها و گشتاور نیروها، معادله گشتاور زوج نیروها را نیز در نظر گرفتند. در این نظریه فقط قسمت‌های متقارن گرادیان جابجایی و چرخشی در انرژی پتانسیل کرنشی مشارکت دارند. در نظر گرفتن گرادیان چرخش در انرژی پتانسیل کرنشی باعث به وجود آمدن ثابت جدیدی به نام اندازه طول ماده می‌شود که دارای بعد طول می‌باشد. بر اساس تئوری تنش مزدوج اصلاح شده انرژی کرنشی برای ماده الاستیک خطی ناشی از میدان جابجایی در حجم  $V$  هم وابسته به تانسور کرنش و هم وابسته به مشتق دوم تغییر مکان است که به صورت زیر ارائه می‌شود [24]:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3)$$

در رابطه فوق  $\sigma_{ij}$ ،  $\varepsilon_{ij}$ ،  $m_{ij}$  و  $\chi_{ij}$  به ترتیب نشان‌دهنده تانسور تنش، تانسور کرنش، جزء منحرف شده تانسور تنش مزدوج<sup>7</sup> و تانسور انحنا<sup>8</sup> (قسمت متقارن گرادیان چرخش) می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{tr}(\varepsilon_{ij}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (4)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i}] \quad (5)$$

$$m_{ij} = 2l^2 \mu \chi_{ij} \quad (6)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} [\theta_{i,j} + \theta_{j,i}] \quad (7)$$

که در روابط فوق  $\lambda$ ،  $\mu$ ،  $\text{tr}(\cdot)$  و  $\delta_{ij}$  به ترتیب ثابت اول لام<sup>9</sup>، مدول برشی، تریس ماتریس<sup>10</sup> و دلتای کرونکر<sup>11</sup> می‌باشند.  $l$  پارامتر اندازه طول و خاصیتی از ماده می‌باشد که در مقایسه با ابعاد کوچک است و تأثیر آن زمانی اهمیت می‌یابد که ابعاد جسم در مقیاس میکرو و نانو باشد.  $u_i$  و  $\theta_i$  مؤلفه‌های بردار جابجایی و چرخشی هستند که رابطه آن‌ها به صورت زیر است [24]:

$$\theta_i = \frac{1}{2} \text{curl}(u_i) \quad (8)$$

مربع پارامتر اندازه طول که در رابطه (6) بیان شده، متناسب با نسبت مدول انحنا به مدول برشی است [25]، از این رو خصوصیتی است که اثر تنش مزدوج را اندازه‌گیری می‌کند [26]. پارامتر اندازه طول با استفاده از روش‌های

حالت استاتیکی پرداختند. هایامیزو و همکاران [23] به منظور بهینه‌سازی عملکرد و ساختار یک نانوتیوب کربنی، به بررسی مکان مختلف برای الکتروود زیرلایه پرداختند. آن‌ها با بررسی سه مدل متفاوت، به مدلی اقتصادی و در مقیاس کوچک‌تر دست یافتند.

با بررسی پژوهش‌های پیشین در زمینه نانوکلیدها ملاحظه می‌شود که تاکنون عملکرد کلیدهای الکترومکانیکی در حضور نیروی موئینگی و در حالی که الکتروود زیرلایه کوتاه می‌باشد و انحراف تیر در طی زمان تغییر می‌کند با استفاده از تئوری غیرکلاسیک مورد بحث قرار نگرفته است. لذا در مطالعه حاضر، نانوکلیدهای نانوالکترومکانیکی مدل‌سازی شده و تأثیر اندازه الکتروود زیرلایه، نیروهای موئینگی و اثر تنش سطحی بر تغییر شکل و ناپایداری آن‌ها بررسی خواهد شد.

## 2- مدل‌سازی و به دست آوردن معادلات حاکم

### 1-1- توصیف مدل

در این بخش معادلات حاکم بر تغییر شکل و ناپایداری استاتیکی و دینامیکی نانوتیوب ارائه خواهد شد. شکل 1 نمای شماتیک نانوکلید مورد بررسی در پژوهش حاضر را نشان می‌دهد. الکتروود نشان داده شده در شکل 1 در پژوهش‌های [22] و [23] به صورت یک تیر یکسر گیردار ساخته شده است. در این نوع نانوکلیدها که بسیار جدید هستند، طول الکتروود زیرلایه کمتر از الکتروود متحرک بوده و به همین دلیل به عنوان نانوکلید نیمه متاثر شناخته می‌شوند. همان‌طور که ذکر شد، در نانو ساختارهای نیمه متاثر، الکتروود زیرلایه کوتاه‌تر از الکتروود متحرک می‌باشد و کوتاه بودن الکتروود زیرلایه باعث می‌شود، الکتروود متحرک (نانوتیوب) به صورت کامل درگیر نباشد. در این نانوتیوب، الکتروود متحرک بر روی یک صفحه ثابت معلق و دارای طول  $L$ ، ضخامت  $h$ ، پهنای  $b$  و فاصله اولیه برابر با  $g_0$  می‌باشد. نیروی الکترواستاتیک<sup>1</sup> به سبب ولتاژ اعمالی  $V$  به مثابه موئینگی الکتروود متحرک را به سوی پایه منحرف می‌کند. نانوتیوب در نظر گرفته شده، ایزوتروپیک<sup>2</sup> و دارای ضریب مدول یانگ<sup>3</sup>  $E$ ، چگالی  $\rho$ ، مساحت مقطع عرضی  $A$ <sup>4</sup> و ممان اینرسی<sup>5</sup> برابر با  $I$  است.

در همه پژوهش‌های ذکر شده در ادبیات تحقیق به جز پژوهش‌های [22] و [23] فرض کرده‌اند که تمامی تیرک در مقابل الکتروود قرار دارد و نیروی الکتریکی بر تمام سطح تیرک اثر می‌کند. ولی در عمل و در کاربرد نانوکلیدهای نیمه متاثر فقط قسمتی از تیر (الکتروود متحرک) که در ارتباط با قسمت الکتروود ورودی (الکتروود زیرلایه) قرار دارد با نیروی الکتریکی تحریک می‌گردد [23, 22]. برای یک تصحیح درست و مدل‌سازی که مبتنی بر واقعیت باشد، لازم است که نیمه متاثر بودن تیرک متحرک در نظر گرفته شود. در مدل‌سازی پژوهش حاضر، از یک طول تا طول دیگر تیرک (همان قسمتی از الکتروود متحرک که در ارتباط با الکتروود زیرلایه است) تحت بارگذاری قرار خواهد گرفت و در بقیه تیر این نیروها حذف می‌شوند.

با توجه به شکل 1 محاسبه‌ی نیروها باید به گونه‌ای باشد که فقط در همان قسمتی از طول تیر که در ارتباط با الکتروود زیرلایه قرار دارد، نیروها بر تیر اعمال می‌شوند و در بقیه طول تیرک نیروها صفر شوند. در این مدل مکان و طول الکتروود زیرلایه به وسیله تابع پله‌ای هویساید<sup>6</sup>  $H(x)$  کنترل می‌شود. تابع پله‌ای هویساید  $H(x)$  یا تابع پله‌ای یک تابعی ناپیوسته و چند

<sup>1</sup> Electrostatic Force

<sup>2</sup> Isotropic

<sup>3</sup> Young Modulus

<sup>4</sup> Cross Section Area

<sup>5</sup> Cross Section Inertia Moment

<sup>6</sup> Heaviside Function

<sup>7</sup> Deviatoric Part of Couple Stress Tensor

<sup>8</sup> Curvature Tensor

<sup>9</sup> Lamé's Constant

<sup>10</sup> Trace

<sup>11</sup> Kronocker Delta

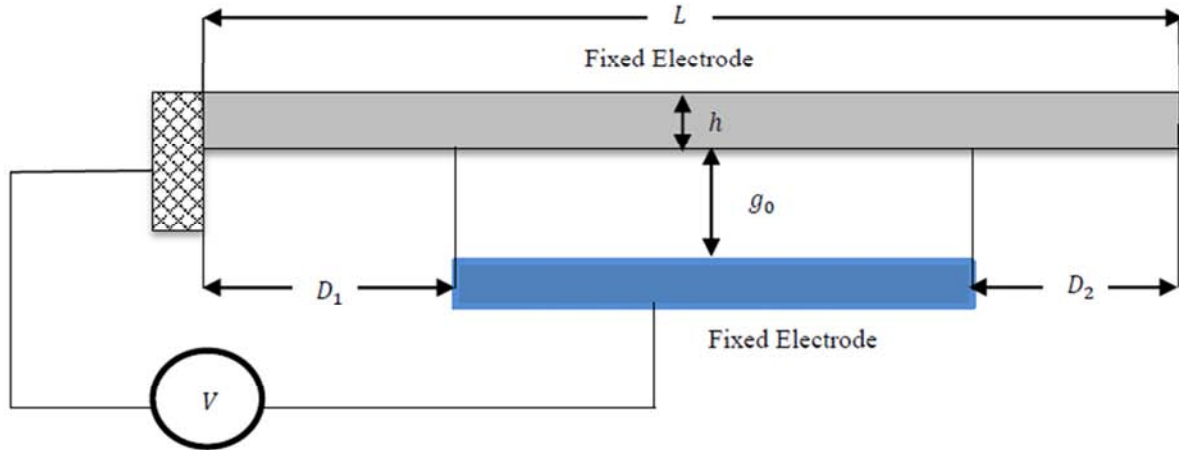


Fig 1 schematic of a half-effect cantilever nanoswitch

شکل 1 نمای شماتیک نانوتیر یکسرگیردار نیمه متاثر

آزمایشگاهی همچون آزمایش پیش و خمش به دست می آید [27].

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -Ez \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \sigma_{xy} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \\ \sigma_{xx} &= \frac{-E}{(1-\nu^2)} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \sigma_{yy} = \frac{-E}{(1-\nu^2)} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

که  $\nu$  ضریب پواسون<sup>1</sup> است و  $\lambda$  ثابت لام و  $\mu$  مدول برشی بر مبنای ضریب پواسون و مدول الاستیسیته تعریف می شوند [29]:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (16)$$

برای تیرهای باریک با نسبت طول به عرض بزرگ، اثر پواسون کوچک است و می توان از آن صرف نظر کرد. همان گونه که در رابطه (15) نشان داده شده،  $\sigma_{xx}$  برای هر دو حالت تنش صفحه ای (تیر کم پهن) و کرنش صفحه ای (تیر پهن) به صورت زیر است:

$$\sigma_{xx} = -\bar{E} \left( z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (17)$$

که  $\bar{E}$  به ترتیب برای تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای نشان دهنده مدول الاستیسیته ( $E$ ) و مدول صفحه ای ( $E/(1-\nu^2)$ ) می باشد. به طور مشابه، با جایگذاری رابطه (14) در رابطه (6) رابطه زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} m_{xy} &= -\mu l^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ m_{xx} &= m_{yy} = m_{zz} = m_{yz} = m_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

اکنون با جایگذاری معادلات (12)، (14)، (17) و (18) در رابطه (3)، انرژی کرنشی خمشی تیر حاصل می شود.

$$U_{\text{Bending}} = \frac{1}{2} \int_0^L M_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^L Y_{xy} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} dx \quad (19)$$

که به ترتیب ممان کل  $M_x$ <sup>2</sup> و ممان مزدوج  $Y_{xy}$ <sup>3</sup> می باشد و به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} M_x &= \int \sigma_{xx} z dA \\ Y_{xy} &= \int m_{xy} dA \end{aligned} \quad (20)$$

انرژی کرنش برای لایه سطحی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \oint_{\partial A} (\tau_{ij} \varepsilon_{ij}) dA \quad (21)$$

علاوه بر این، رابطه خطی تک بعدی بین تنش سطحی  $\sigma_s$  و کرنش محوری  $\varepsilon_x$  به صورت زیر داده شده است:

### 3-2- انرژی کرنشی

انرژی کرنشی کل برای مدل تیر اویلر-برنولی به صورت زیر است:

$$U_{\text{Total}} = U_{\text{Bending}} + U_{\text{Stretching}} \quad (9)$$

که  $U_{\text{Bending}}$  و  $U_{\text{Stretching}}$  به ترتیب انرژی های ذخیره شده در تیر به سبب نیروهای محوری و کرنش خمشی هستند. با توجه به سیستم مختصات  $(x, z)$  شکل 1 که محور  $x$  بر راستای الکتروود متحرک پیش از تغییر شکل منطبق است و محور  $z$ ، راستای تقارن را نشان می دهد، مؤلفه های جابجایی بر اساس مدل تیر اویلر-برنولی به صورت زیر نشان داده می شود [28]:

$$u = -z\psi(x, t), \quad v = 0, \quad w = w(x, t) \quad (10)$$

که  $u$  و  $v$  به ترتیب مؤلفه های بردار جابجایی در راستای محورهای  $x$  و  $y$  می باشند و  $\psi(x, t)$  زاویه چرخش حول محور  $y$  است که برای تغییر شکل های کوچک برابر است با:

$$\psi = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \quad (11)$$

با در نظر گرفتن جابجایی های کوچک و با استفاده از روابط (5)، (10) و (11) برای تنش صفحه ای (تیر کم پهن) و کرنش صفحه ای (تیر پهن)، مؤلفه های تانسور کرنش به ترتیب به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} &= \nu z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{zz} = \nu z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0 \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\nu}{1-\nu} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = 0, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

با استفاده از روابط (8)، (10) و (11) بردار چرخشی در سه راستای  $x$ ،  $y$  و  $z$  حاصل می شود.

$$\begin{aligned} \theta_y &= -\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \\ \theta_x &= \theta_z = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

با جایگذاری رابطه (13) در رابطه (7) می توان تانسورهای انحنا را به دست آورد:

$$\begin{aligned} \chi_{xy} &= \chi_{yx} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \\ \chi_{xx} &= \chi_{yy} = \chi_{zz} = \chi_{yz} = \chi_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

و با جایگذاری رابطه (12) در رابطه (4) مؤلفه های تنش به صورت زیر محاسبه می شوند:

<sup>1</sup> Poisson Ratio

<sup>2</sup> Resultant Moment

<sup>3</sup> Couple Moment

$$T_K = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)^2 dA dx$$

$$= \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (31)$$

که  $A$  مساحت سطح مقطع عرضی تیر ( $A = bh$ ) و  $\rho$  چگالی تیر می‌باشند. کار مجازی ناشی از اثرات استهلاک به صورت زیر بیان می‌شود:

$$W_d = \int_0^L \int_A c_d \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} dw dx \quad (32)$$

که  $c_d$  ضریب استهلاک می‌باشد.

## 2-6- معادله حاکم سیستم و بی‌بعدسازی

حال برای به دست آوردن معادله حاکم سیستم، با به کارگیری اصل همیلتون توسعه داده شده،

$$\delta \int_0^t (T_K - W_d - U_{\text{Total}} + W_{\text{ext}}) dt = 0 \quad (33)$$

که  $\delta$  نشانگر نماد تغییرات است. با استفاده از روابط (19)، (26)، (27)، (31)، (32) و (33)، معادله حاکم دینامیکی حرکت نانوتیر به صورت زیر است:

$$(EI_{\text{eff}} + \mu A l^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_d \frac{\partial w}{\partial t} - 2\tau_0 b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q_{\text{ext}} \quad (34)$$

رابطه (34) نشان می‌دهد که صلبیت خمشی تیر شامل دو بخش است، بخش  $EI_{\text{eff}}$  به عنوان صلبیت خمشی تئوری کلاسیک و بخش  $\mu A l^2$  که مربوط به تئوری تنش مزدوج اصلاح شده، می‌باشد.

پارامتر  $l$  در این قسمت، باعث در نظر گرفته شدن خصوصیات ساختار با ابعاد میکرو و نانو در مدل جدید می‌شود و توضیح اثر اندازه را ممکن می‌سازد. بدیهی است که اگر  $l = 0$  باشد از اثر ابعاد میکرو/نانو صرف نظر شده و رابطه (34) تعریف شده برای مدل جدید به مدل کلاسیک تیر اوپلر-برنولی تبدیل می‌شود [38]:

$$EI_{\text{eff}} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_d \frac{\partial w}{\partial t} - 2\tau_0 b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q_{\text{ext}} \quad (35)$$

شرایط مرزی برای تیر یکسر درگیر:

$$w(0,t) = \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = 0$$

$$EI_{\text{eff}} \frac{\partial^2 w(1,t)}{\partial x^2} = 0$$

$$EI_{\text{eff}} \frac{\partial^3 w(1,t)}{\partial x^3} - 2\tau_0 b \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (36)$$

که  $EI_{\text{eff}} (= EI + E_s I_s)$  صلبیت خمشی تیر با در نظر گرفتن اثر الایسیسته سطح است [39].

به منظور ساده سازی محاسبات پارامتری، معادله حاکم و شرایط مرزی را می‌توان به حالت بی‌بعد تبدیل کرد. ایجاد پارامترهای بی‌بعد باعث ایجاد مفاهیم جدید و توضیح بهتر پدیده‌های فیزیکی می‌شود. از متغیرهای بی‌بعد  $W = \frac{w}{g_0}$  و  $X = \frac{x}{L}$  و پارامترهای زیر جهت بی‌بعدسازی بهره برده می‌شود:

$$\beta = \frac{\varepsilon_0 b V^2 L^4}{2g_0^3 EI_{\text{eff}}}, \quad \gamma_{\text{fr}} = 0.65 \frac{g_0}{b}, \quad \eta = \frac{2\tau_0 b L^4}{EI_{\text{eff}}}$$

$$\gamma_{\text{ca}} = \frac{2\gamma_{\text{LA}} b L^4 \cos \theta_c}{EI_{\text{eff}} g_0^2}, \quad T = t \sqrt{\frac{EI_{\text{eff}}}{\rho A L^4}}, \quad \hat{c} = \frac{c_d L^2}{\sqrt{EI_{\text{eff}} (\rho A)}}$$

$$H' = H(x/L) = H\left(\frac{x}{L} - \frac{D_2}{L}\right) - H\left(\frac{x}{L} - 1 + \frac{D_2}{L}\right),$$

$$d_1 = \frac{D_1}{L}, d_2 = \frac{D_2}{L} \quad (37)$$

که پارامترهای  $\beta, \gamma_{\text{fr}}, \eta, \delta, d_2, d_1, H', \gamma_{\text{ca}}, \gamma_{\text{fr}}, \beta$  به ترتیب متناظر با پارامترهای بی‌بعد ولتاژ، میدان لبه، نیروی موئینگی، تابع هویساید بی‌بعد، پارامتر بی‌بعد فاصله بین انتهای چپ الکتروود زیرلایه و کلید، پارامتر بی‌بعد فاصله بین انتهای راست الکتروود زیرلایه و کلید، اثر اندازه، انرژی سطحی، زمان و استهلاک می‌باشند. همچنین پارامتر بی‌بعد فرکانس اصلی

$$\sigma_s = \tau_0 + E_s \varepsilon_x \quad (22)$$

که  $\tau_0$  تنش پسماند سطحی در راستای محور  $x$  و  $E_s$  مدول یانگ سطح است. بنا بر معادله یانگ-لاپلاس، پدیده تنش در عرض هر سطح وابسته به انحنای سطح می‌باشد و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\langle \sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^- \rangle n_i n_j = \tau_{\alpha\beta}^s \kappa_{\alpha\beta} \quad (23)$$

که  $n_i$  نشان دهنده مؤلفه‌های بردار واحد عمود سطح است. از این رو، بار عمودی معادل  $q(x)$  ناشی از تنش سطحی به صورت زیر است [30]:

$$q = H_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (24)$$

$H_s$  یک پارامتر ثابت است که با در نظر گرفتن تنش پسماند سطحی و مقطع عرضی نانوتیر اندازه‌گیری می‌شود و برای نانوتیر با مقطع مستطیلی برابر است با [30]:

$$H_s = 2\tau_0 b \quad (25)$$

با در نظر گرفتن روابط فوق و مؤلفه‌های سطحی که توسط تئوری پیوسته گرین و مورداخ [32,31] پیشنهاد شده بودند، انرژی کرنشی لایه سطحی با در نظر گرفتن تنش پسماند و الایسیسته سطح به دست می‌آید.

$$U_{\text{Stretching}} = \frac{1}{2} \left[ EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\tau_0 b \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (26)$$

که  $I_s = \int z^2 dA$ .

## 2-4- کار نیروهای خارجی

با در نظر گرفتن نیروهای خارجی در واحد طول تیر، کار انجام شده توسط نیروهای خارجی اعمالی  $q(x,t)$  که با  $W_{\text{ext}}$  نشان داده می‌شود، به صورت زیر است:

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_0^L q_{\text{ext}}(x,t) \delta w(x,t) dx \quad (27)$$

در این تحقیق نیروهای خارجی شامل نیروهای الکترواستاتیک و موئینگی می‌شوند. با در نظر گرفتن تیر نیمه متاثر:

$$q_{\text{ext}} = H(x)(q_{\text{elec}} + q_{\text{capillary}}) \quad (28)$$

با در نظر گرفتن ضریب اثر میدان لبه، نیروی الکترواستاتیک در واحد طول نانوتیر به صورت زیر است [33]:

$$q_{\text{elec}} = \frac{\varepsilon_0 b V^2}{2(g_0 - w)} \left( 1 + 0.65 \frac{(g_0 - w)}{b} \right) \quad (29)$$

که  $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$  ضریب خلأ،  $V$  ولتاژ خارجی اعمالی،  $g_0$  فاصله اولیه بین دو الکتروود زیرلایه و متحرک و  $w$  انحراف تیر است.

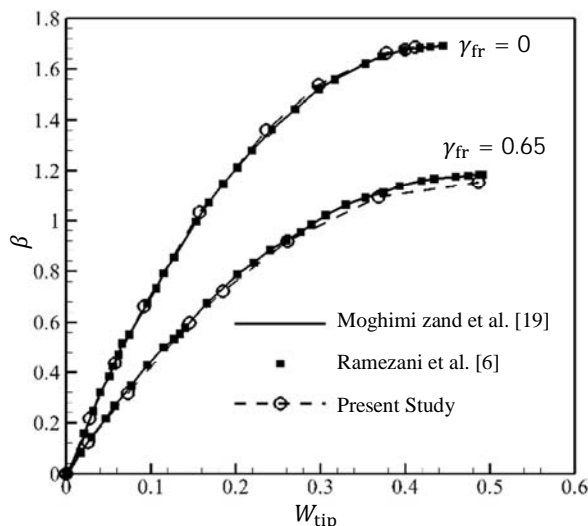
تحت عمل نیروی موئینگی، انحراف‌های میکرو و نانو تیر فاصله‌ی را تغییر می‌دهد که باعث می‌شود بزرگی نیروی موئینگی تغییر کند و این باعث انحراف بیشتر تیر می‌شود. این روند ادامه می‌یابد تا زمانی که تعادل بین تیر و نیروی موئینگی برقرار شود [34]. نیروی موئینگی اعمالی بر نانوتیر زاویه‌ای برابر با  $\theta_c$  با بردار واحد عمود بر سطح سیال دارد؛ بنابراین، با در نظر گرفتن تحقیق لگنبرگ و همکاران [35]، نیروی موئینگی در واحد طول تیر به صورت زیر محاسبه می‌شود [36]:

$$q_{\text{capillary}} = \frac{2\gamma_{\text{LA}} b \cos \theta_c}{(g_0 - w)} \quad (30)$$

که  $\gamma_{\text{LA}}$  تنش سطحی مایع-هوا و  $\theta_c$  زاویه تماس بین مایع و سطح جامد می‌باشد.

## 2-5- انرژی جنبشی و اتلاف استهلاکی

انرژی جنبشی نانوتیر به صورت زیر نوشته می‌شود [37]:



**Fig 2** Effect of fringing field parameter on dimensionless pull-in Voltage and deflection ignoring Capillary force and size effect ( $\delta = 0, \eta = 0, \gamma_{ca} = 0, d_1 = d_2 = 0$ )

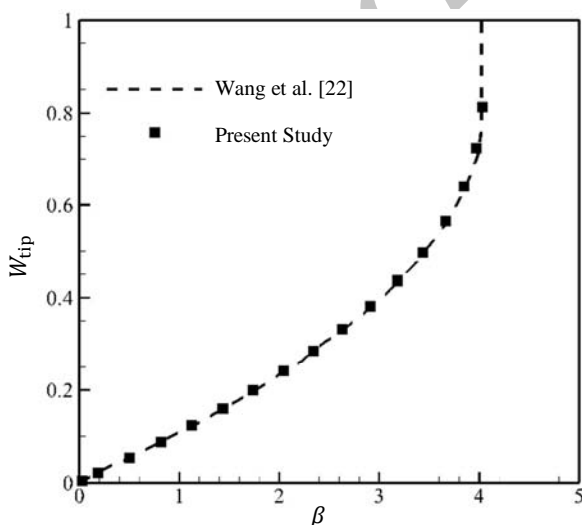
شکل 2 تأثیر اثر پارامتر میدان لبه بر پارامتر بدون بعد ولتاژ و انحراف نهایی نانوتیر

یکسرگیردار و بدون در نظر گرفتن نیروی موئینگی و اثر اندازه ( $\delta = 0, \eta = 0, \gamma_{ca} = 0, d_1 = d_2 = 0$ )

برای ولتاژها و ضریب استهلاک متفاوت نسبت به زمان به دست آمده است. نسبت های  $h/l = 3$  و  $b/g_0 = 5$  فرض شده اند. همان طور که مشاهده می شود، نتایج تطابق خوبی در مقادیر کم ولتاژهای اعمالی دارند.

زمانی که تیر دچار انحراف زیادی می شود، نیروی الکترواستاتیک در بسط تیلور استفاده شده در روش تحلیلی رهایی فرد و همکاران [20] ناچیز می شود؛ بنابراین، تقریب استفاده شده در مطالعه [20] می تواند دلیل اختلاف اندک میان نتایج حاضر و نتایج مرجع [20] باشد.

شکل 3 انحراف نهایی بی بعد نوک تیرک را نسبت به ولتاژ اعمالی برای  $h/l = 5$  و  $b/g_0 = 5$  ارزیابی می کند. نتایج به دست آمده با نتایج تحلیلی دینامیکی رهایی فرد و همکاران [20] و نتایج [10] مقایسه شده اند.



**Fig 3** Relation Between dimensionless pull-in voltage and deflection parameters for a cantilever

( $\delta = 0, \eta = 0, \gamma_{ca} = 0, d_1 = 0.3, d_2 = 0.3$ )

شکل 3 رابطه بین پارامتر ولتاژ و انحراف نهایی بی بعد تیر یکسرگیردار

( $\delta = 0, \eta = 0, \gamma_{ca} = 0, d_1 = 0.3, d_2 = 0.3$ )

نانوتیر  $\Omega$  به صورت زیر است [40]:

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{\rho A L^4}{E I_{eff}}} \quad (38)$$

که  $\omega$  فرکانس طبیعی سیستم می باشد. با استفاده از پارامترهای بی بعد رابطه (37) در رابطه (34)، معادله حاکم بی بعد نانوکلید یکسرگیردار نیمه متاثر برای حالت دینامیکی به صورت زیر درمی آید:

$$(1 + \delta) \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} + \dot{c} \frac{\partial W}{\partial T} - \eta \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = H' \left( \frac{\beta}{(1-W)^2} + \frac{\gamma_{fr} \beta}{(1-W)} + \frac{\gamma_{ca}}{(1-W)} \right) \quad (39)$$

در معادلات بالا، اندیس  $n$  برای نیروی واندروالس 3 و برای نیروی کاسیمیر 4 است بنابراین، شرایط مرزی بی بعد با جایگذاری پارامترهای بی بعد در رابطه (36) به دست می آید:

$$\begin{aligned} W(0, t) &= \frac{\partial W(0, t)}{\partial x} = 0 \\ (1 + \delta) \frac{\partial^2 W(1, T)}{\partial x^2} &= 0 \\ (1 + \delta) \frac{\partial^3 W(1, T)}{\partial x^3} - \eta \frac{\partial W(1, T)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (40)$$

به منظور به دست آوردن معادله حاکم برای حالت استاتیکی، عبارات وابسته به زمان حذف می شوند.

$$(1 + \delta) \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \eta \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = H' \left( \frac{\beta}{(1-W)^2} + \frac{\gamma_{fr} \beta}{(1-W)} + \frac{\gamma_{ca}}{(1-W)} \right) \quad (41)$$

### 3- روش حل و اعتبار سنجی

#### 3-1- روش حل

دسته معادلات دیفرانسیل جزئی، یعنی روابط (39) و (41) و شرایط مرزی متناظر یعنی رابطه (40) از طریق روش اجزا محدود حل شده اند. بدین منظور معادلات یاد شده در شکل ضعیف فرمول بندی و سپس با استفاده از روش گالرکین حل شده اند. جزئیات روش حل در [41] ذکر شده و برای اختصار از تکرار آن در اینجا صرف نظر می گردد.

#### 3-2- اعتبار سنجی

##### 3-2-1- استاتیکی - تیر کامل

شکل 2 رابطه بین پارامتر ولتاژ بی بعد و انحراف نهایی بدون بعد در نظر گرفتن نیروهای بین مولکولی و موئینگی و اثر اندازه را نشان می دهد. این شکل نشان می دهد که وجود اثر لبه به طور محسوس بر انحراف نهایی بدون بعد و ولتاژ پولین استاتیکی تیرک تأثیر دارد. همچنین در این شکل مشاهده می شود که نتایج به دست آمده در پژوهش حاضر تطابق خوبی با نتایج رضانی و همکاران [6] و مقیمی زند و همکاران [19] دارد.

##### 3-2-2- استاتیکی - تیر نیمه متاثر

در شکل 3 نتایج به دست آمده برای تیر یکسرگیردار نیمه متاثر با نتایج پژوهش وانگ و همکاران [22] مقایسه شده است. در این شکل مشاهده می شود، در نبود نیروی موئینگی، افزایش ولتاژ باعث کاهش فاصله بین دو الکتروود و در نهایت پدیده پولین می شود. همچنین تطابق خوبی بین نتایج به دست آمده در پژوهش حاضر و نتایج گزارش شده در [22] وجود دارد.

##### 3-2-3- دینامیکی - تیر کامل

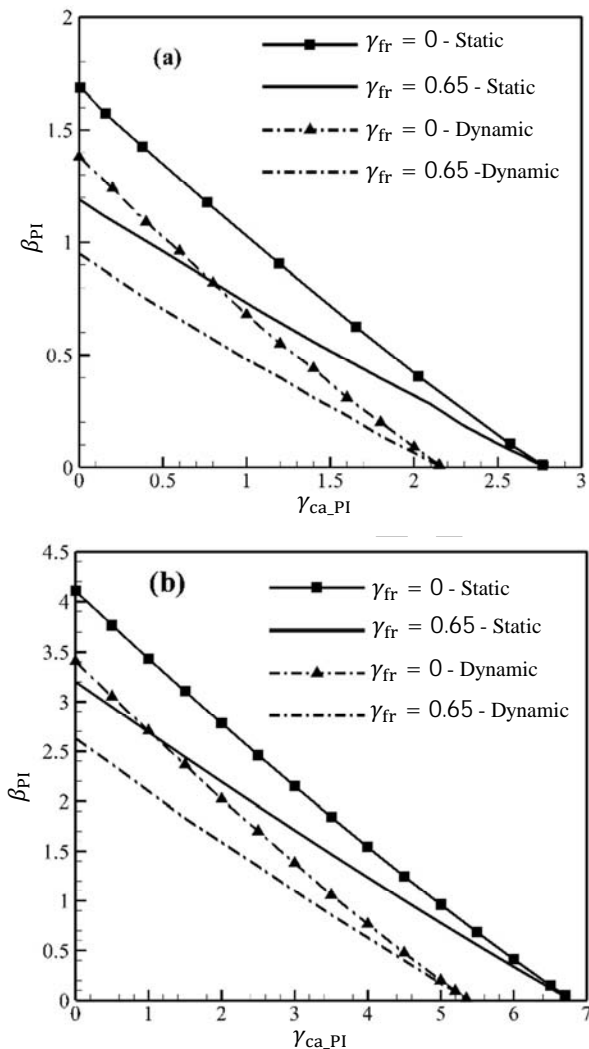
در شکل 4 نتایج به دست آمده با نتایج حل تحلیلی رهایی فرد و همکاران [20] مقایسه شده است. در [20] از روش گالرکین برای محاسبه ناپایداری نانوتیرک استفاده شده است. در این شکل انحراف بی بعد دینامیکی نانوتیر

مقادیر متفاوت از پارامترهای  $\beta$ ،  $\alpha_n$  و  $\gamma_{ca}$  و  $\gamma_{fr}$  انحراف نهایی پولین دینامیکی نانوتیر با حل رابطه (39) و برای پولین استاتیکی با حل رابطه (41) و در نظر گرفتن  $du(1)/d\beta \rightarrow \infty$  به دست می‌آیند. ابعاد و مشخصات فیزیکی نانوکلید یکسر گیردار که از جنس سیلیکون می‌باشد، در جدول 1 ارائه شده است.

در مدل تیر مدنظر در این پژوهش تأثیر پارامترهای بی‌بعد میدان اثر لبه، اثر اندازه، موقعیت و طول الکتروتود زیر لایه، نیروهای الکترواستاتیک و موینگی بر ناپایداری نانوکلید مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

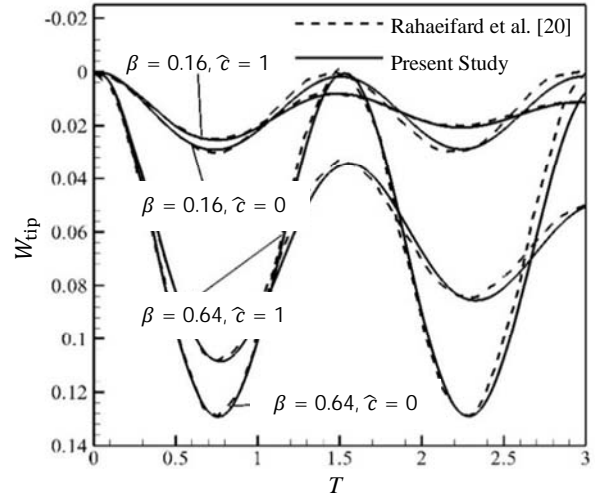
#### 4-1- اثر میدان لبه

شکل 6 تأثیر اثر میدان لبه بر پارامترهای بی‌بعد ولتاژ و نیروی موینگی نهایی برای حالت دینامیکی را در غیاب اثر اندازه ( $\delta = 0$ ) نشان می‌دهند. از شکل 6 نتیجه می‌شود که در حالت دینامیکی میکرونانوکلیدها در مقادیر یکسان نیروی موینگی و اثر میدان لبه در ولتاژهای کمتری به ناپایداری می‌رسند و با افزایش پارامتر نیروی موینگی، نسبت  $\beta_{PI}$  استاتیکی به  $\beta_{PID}$  دینامیکی افزایش می‌یابد.



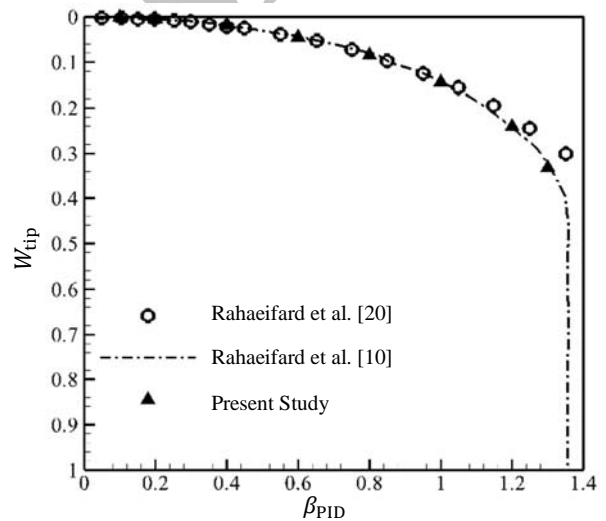
**Fig 6** Effect of fringing field effect on dimensionless pull-in voltage and capillary force parameters in static and dynamic modes ( $\delta = 0, \eta = 0$ ): (a)  $d_1 = d_2 = 0$ , (b)  $d_1 = 0, d_2 = 0.2$

شکل 6 تأثیر اثر میدان لبه بر پارامترهای بی‌بعد ولتاژ و موینگی نهایی در دو حالت استاتیکی و دینامیکی ( $\delta = 0, \eta = 0$ ): (a)  $d_1 = d_2 = 0$  (b)  $d_1 = 0, d_2 = 0.2$



**Fig 4** Relation between dimensionless pull-in voltage and deflection parameters for a cantilever ( $\delta = 0, \eta = 0, \gamma_{ca} = 0, d_1 = d_2 = 0$ )

شکل 4 رابطه بین پارامتر ولتاژ نهایی بی‌بعد تیر یکسرگیردار و زمان برای ولتاژهای اعمالی و ضرایب استهلاک متفاوت ( $\delta = 0, \eta = 0, \gamma_{ca} = 0, d_1 = d_2 = 0$ )



**Fig 5** Relation Between dimensionless pull-in voltage and deflection parameters for a cantilever ( $\delta = 0, \eta = 0, \gamma_{ca} = 0, h/l = 5, b/g_0 = 5, d_1 = d_2 = 0$ )

شکل 5 رابطه بین پارامتر ولتاژ و انحراف نهایی بی‌بعد تیر یکسرگیردار ( $\delta = 0, \eta = 0, \gamma_{ca} = 0, h/l = 5, b/g_0 = 5, d_1 = d_2 = 0$ )

همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج پژوهش حاضر سازگاری مناسبی با نتایج پژوهش‌های پیشین دارند. همان‌طور که ذکر شد اختلاف ناچیز بین نتایج [20] و تحقیق حاضر به علت استفاده از تقریب بسط تیلور در محاسبه نیروی الکترواستاتیک در مقاله مرجع است، زیرا که به‌طور معمول در حل، تمامی عبارات سری تیلور در نظر گرفته نشده و این باعث به وجود آمدن خطایی اندک در جواب نهایی می‌شود. بنابراین روش استفاده حاضر از دقت بالایی برخوردار می‌باشد.

#### 4- تحلیل ناپایداری

به‌منظور بررسی ناپایداری نانومحرک، رابطه (34) با روش اجزا محدود حل شده و اثرات پارامترهای مختلف نسبت به یکدیگر بررسی می‌شود. برای

جدول 1 ابعاد و مشخصات فیزیکی نانوکلید سیلیکونی

پارامتر	مقدار
طول ( $L$ )	350( $\mu\text{m}$ )
فاصله اولیه دو الکتروود ( $g_0$ )	3( $\mu\text{m}$ )
ضخامت ( $h$ )	1( $\mu\text{m}$ )
عرض الکتروود ( $b$ )	50( $\mu\text{m}$ )
مدول یانگ ( $E$ )	169(GPa)
نسبت پواسون ( $\nu$ )	0.33

از دیدگاه دیگر فاصله بین دو الکتروود و پهن تر شدن تیر باعث کاهش نسبت  $g_0/b$  و کاهش اثر میدان لبه می شود و بدین سبب پارامتر ولتاژ نهایی کلید افزایش می یابد.

#### 4-2- اثر اندازه

شکل 7 تأثیر اثر اندازه بر پارامترهای بی بعد ولتاژ و نیروی موینگی نهایی برای حالت دینامیکی را در غیاب نیروهای بین مولکولی نشان می دهد. در شکل 7 مشاهده می شود که برای میکروتیر یکسر گیردار با افزایش اثر اندازه، مقادیر نهایی پارامترهای ولتاژ و موینگی افزایش می یابد و این اثر در صورت کوتاه شدن الکتروود زیرلایه نیز باقی خواهد ماند. با مقایسه شکل های 7a و 7b می توان دریافت که در میکروکلیدهای یکسر گیردار تأثیر پارامتر اندازه بر پارامتر ولتاژ نهایی برای کلید با الکتروود زیرلایه کوتاه بیشتر از کلید با الکتروود زیرلایه با طول کامل می باشد. از شکل های 7 می توان نتیجه گرفت که در صورت افزایش پارامتر اثر اندازه، به نیروی بیشتری جهت انحراف نانوتیر نیاز است، لذا افزایش آن سختی نانوکلید را افزایش می دهد.

همچنین در نانوکلید یکسر گیردار با کوتاه شدن طول الکتروود زیرلایه از سمتی که سر آزاد تیر قرار دارد (غیر صفر بودن  $d_2$  و یا زیادتر شدن مقدار آن) مقدار نهایی پارامترهای بی بعد ولتاژ و موینگی افزایش می یابد. بنا بر شکل 6، افزایش پارامتر اثر میدان لبه باعث می شود تا پارامتر ولتاژ نهایی کاهش یابد. در واقع با افزایش این پارامتر یک نیروی خارجی اضافه به کلید وارد می شود و مقدار نیروی لازم برای رسیدن به ناپایداری را کاهش می دهد.

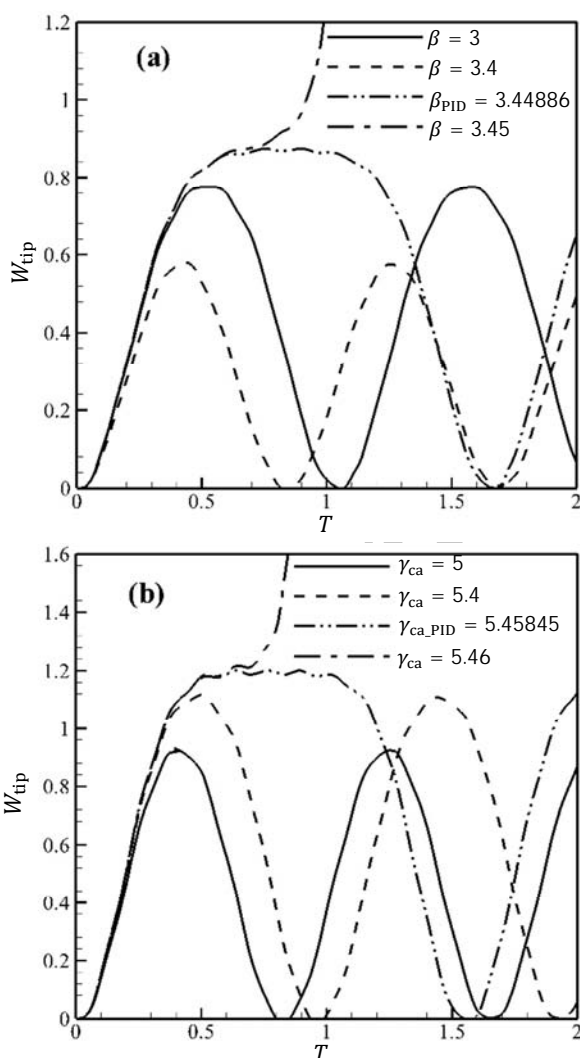


Fig 8 Variation of pull-in deflection during time for different values of: (a) Dimensionless Voltage parameter, (b) Dimensionless Capillary force parameter ( $\gamma_{fr} = 0, \delta = 0, d_1 = 0.2, d_2 = 0.2$ )

شکل 8 تغییرات پارامتر انحراف حداکثر و نهایی تیر در طی زمان برای مقادیر متفاوت پارامترهای بی بعد: (a) ولتاژ نهایی (نیروی الکترواستاتیک)، (b) نیروی موینگی ( $\gamma_{fr} = 0, \delta = 0, d_1 = 0.2, d_2 = 0.2$ )

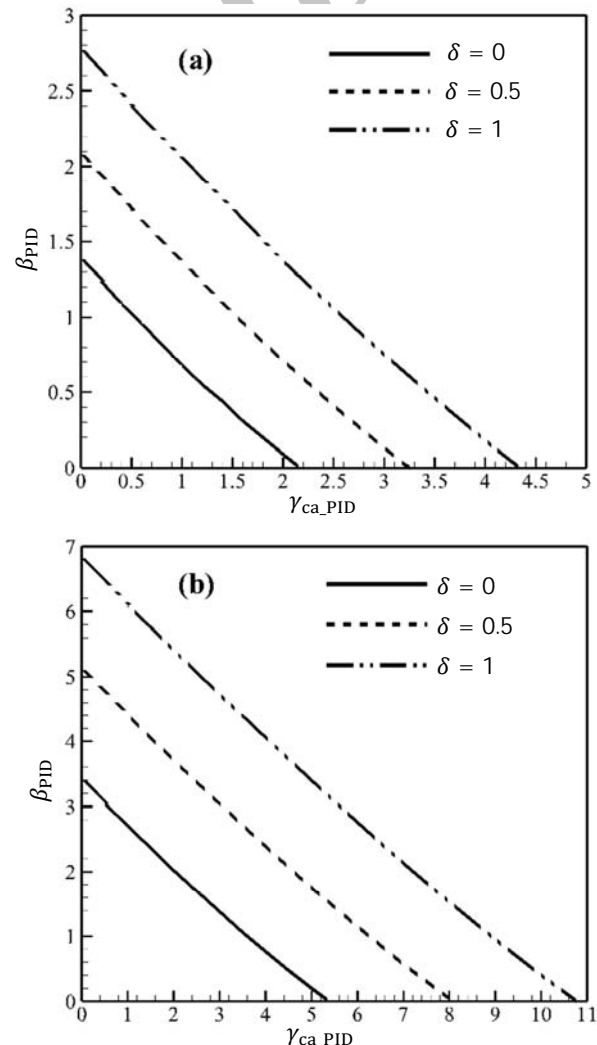


Fig 7 Variation of pull-in voltage parameter against pull-in capillary force parameter for different values of size effect parameter ( $\gamma_{fr} = 0, \eta = 0$ ): (a)  $d_1 = d_2 = 0$ , (b)  $d_1 = 0, d_2 = 0.2$

شکل 7 تغییرات پارامتر ولتاژ نهایی نسبت به پارامتر موینگی نهایی برای مقادیر متفاوت پارامتر اثر اندازه ( $\gamma_{fr} = 0, \eta = 0$ ): (a)  $d_1 = d_2 = 0$  (b)  $d_1 = 0, d_2 = 0.2$



را در غیاب نیروهای بین مولکولی و نیروی موینگی را برای دو حالت استاتیکی و دینامیکی نشان می‌دهد.

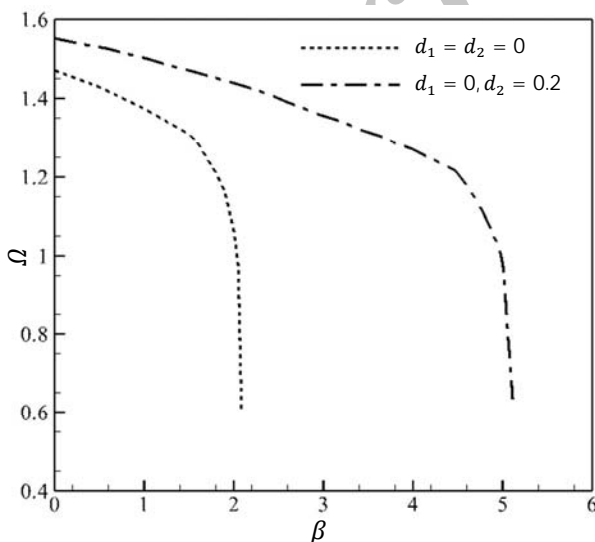
همان‌طور که مشاهده می‌شود افزایش در مقدار تنش سطحی منجر به افزایش مقادیر ولتاژ پولین (پارامتر بی‌بعد نیروی الکترواستاتیک) در هر دو حالت استاتیکی و دینامیکی می‌شود. در مقادیر برابر تنش سطحی در حالت استاتیکی نسبت دینامیکی، نیروی بیشتری جهت رسیدن به پولین نیاز است. علاوه بر این، با افزایش تنش سطحی، نسبت پولین استاتیکی به پولین دینامیکی افزایش می‌یابد.

#### 4-5- اثر کوتاه شدن الکتروود زیر پایه

در شکل 10 تغییرات پارامتر بی‌بعد فرکانس اصلی نانوتیر نسبت به پارامتر بی‌بعد ولتاژ، برای دو نمونه تیر با الکتروود زیر پایه با طول کامل ( $d_1 = d_2 = 0$ ) و نیمه متاثر ( $d_1 = 0, d_2 = 0.2$ ) نشان داده شده است. همان‌گونه که در شکل 10 دیده می‌شود، با افزایش ولتاژ میان دو الکتروود، فرکانس اصلی نانوتیر به‌طور مداوم کاهش و نرخ کاهش تا رسیدن به ولتاژ پولین افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش مقدار پارامتر  $d_2$  و نیمه متاثر شدن نانوتیر، برای مقادیر یکسان از پارامتر بی‌بعد ولتاژ، فرکانس اصلی افزایش می‌یابد. علاوه بر این از شکل 10 می‌توان نتیجه گرفت که با ناپایدار شدن نانوتیر فرکانس اصلی نانوتیر نیمه متاثر بیشتر از نانوتیر با طول الکتروود زیر پایه کامل می‌شود.

#### 5- جمع بندی و نتیجه گیری

در این پژوهش از تئوری تنش مزدوج اصلاح شده به منظور به دست آوردن مدلی جامع برای بررسی ناپایداری‌های استاتیکی و دینامیکی پولین میکرو/نانوکلیدهای یکسرگردار، استفاده شده است. در این مدل اثرات نیروهای الکترواستاتیک، موینگی، اثر تنش سطحی، ضریب استهلاک، اثر میدان لبه، اثر اندازه و مکان و طول الکتروود زیر پایه در نظر گرفته شده‌اند و نتایج بر اساس رفتار آن‌ها نسبت به یکدیگر به دست آمده‌اند. برای حل معادلات از روش حل عددی اجزا محدود استفاده گردید. نتایج مهم پژوهش



**Fig 10** Variation of fundamental frequency against Dimensionless voltage parameter for different values of  $d_2$  and ( $\gamma_{fr} = 0, \delta = 0.5, \eta = 0, d_1 = 0$ )

شکل 10 تغییرات فرکانس اصلی نانوتیر نسبت به پارامتر بی‌بعد ولتاژ برای مقادیر متفاوت  $d_2$  و ( $\gamma_{fr} = 0, \delta = 0.5, \eta = 0, d_1 = 0$ )

به عبارت دیگر نیروی جاذبه‌ای که از طرف نیروهای الکترواستاتیک و موینگی باید به نانوتیر وارد شود تا تیر حرکت کند افزایش یافته است. این بدین معنی است که تئوری تنش مزدوج اصلاح شده، میکرو/نانوتیر را سخت‌تر از تئوری کلاسیک ارزیابی می‌کند. لذا در نظر گرفتن پارامتر اثر اندازه در طراحی و تحلیل میکرو/نانوکلیدها بسیار حائز اهمیت است و همچنین این نتیجه، لزوم استفاده از تئوری‌های غیر کلاسیک مانند تئوری تنش مزدوج اصلاح شده در بررسی دقیق تر پارامترهای نانوکلیدهای نیمه متاثر را نشان می‌دهد.

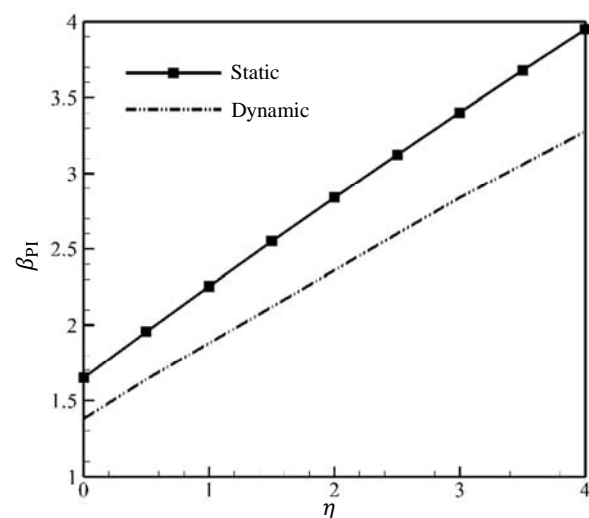
#### 4-3- اثر نیروی الکترواستاتیک و موینگی

در شکل‌های 8a و 8b به ترتیب ناپایداری دینامیکی نانوتیر یکسرگردار نیمه متاثر در صورت وجود تحریک ناشی از نیروهای الکترواستاتیک و موینگی بررسی شده است.

در هر شکل اثرات تنها یک نیرو بررسی شده و از اثرات دیگر نیروها صرف نظر شده است. شکل‌های مذکور انحراف نهایی تیر در طی زمان برای پارامترهای بی‌بعد و متفاوت نیروهای الکترواستاتیک و موینگی را نشان می‌دهند. با توجه به شکل‌های 8 زمانی که نیروها بین دو تیر از مقدار پولین دینامیکی بیشتر شود، روند خصوصیت پاسخ تیر به این نیروها در طی زمان تغییر می‌کند. این نمودارها نشان می‌دهند که دامنه ارتعاشات با افزایش نیروها، بیشتر می‌شود. در نتیجه بیشتر شدن هر کدام از پارامترها از مقدار پولین دینامیکی آن‌ها، معادله حرکت تیر ناپایداری خود را از دست می‌دهد و سیستم از نظر دینامیکی ناپایدار می‌شود. بعد از مقدار پولین دینامیکی، تغییری جزئی در مقدار نیروها باعث این ناپایداری می‌شود. قابل ذکر است که پیش از رسیدن به مقادیر پولین پارامترها، تیر رفتار حرکتی متناوبی دارد و در صورت بیشتر شدن از مقدار پولین الکتروود متحرک بر روی پایه سقوط می‌کند. با توجه به شکل‌های 8، در صورت تحریک میکرو/نانوتیر یکسر گردار نیمه متاثر مقادیر پولین برای پارامترهای بی‌بعد نیروهای الکترواستاتیک و نیروی موینگی به ترتیب برابر با 3.44886 و 5.45845 می‌باشند.

#### 4-4- اثر سطحی

شکل 9 اثر تغییر پارامتر بی‌بعد اثر تنش سطحی بر پارامتر بی‌بعد ولتاژ پولین



**Fig 9** Variation of pull-in Voltage against surface effect parameter for static and dynamic modes ( $\gamma_{fr} = 0, \delta = 0, d_1 = 0.2, d_2 = 0.2$ )

شکل 9 تغییرات پارامتر ولتاژ نهایی نسبت به پارامتر اثر تنش سطحی برای دو حالت استاتیکی و دینامیکی ( $\gamma_{fr} = 0, \delta = 0, d_1 = 0.2, d_2 = 0.2$ )

حاضر را می توان به صورت زیر خلاصه نمود:

- افزایش اثر میدان لبه باعث کاهش ولتاژ پولین  $\beta_{PI}$  می شود. لذا برای مقادیر بزرگ اثر میدان لبه، می بایست این اثر در روابط در نظر گرفته شود. تأثیر تغییر اندازه پارامتر میدان لبه بر نرخ تغییر پارامترهای  $\beta_{PI}$  و  $\gamma_{ca\_PI}$  برای نانوتیر نیمه متاثر بیشتر از نانوتیر با الکتروود با طول کامل است.
- در حالت دینامیکی، میکرو/نانوکلیدها در مقادیر یکسان نیروی موینگی و اثر میدان لبه در ولتاژهای کمتری نسبت به حالت استاتیکی به ناپایداری می رسند و با افزایش پارامتر نیروی موینگی، نسبت ولتاژ پولین استاتیکی  $\beta_{PI}$  به ولتاژ پولین دینامیکی  $\beta_{PID}$  افزایش می یابد.
- با کوتاه شدن طول الکتروود زیر لایه در میکرو/نانوکلید یکسر گیردار از سمتی که سر آزاد تیر قرار دارد، مقدار نهایی پارامترهای بی بعد ولتاژ پولین و اثر موینگی افزایش می یابند.
- برای نانوتیر یکسر گیردار، با افزایش اثر اندازه، مقادیر نهایی پارامترهای ولتاژ و موینگی افزایش می یابد و این مساله برای نانوتیرهای نیمه متاثر نیز صادق است.
- مقدار نیروی الکترواستاتیک و موینگی به پارامتر اثر اندازه وابسته است و با افزایش پارامتر اثر اندازه مقادیر نیروهای الکترواستاتیک و موینگی بحرانی افزایش می یابد. همچنین در نانوتیرهای نیمه متاثر، تأثیر تغییر مقدار پارامتر اثر اندازه بر پارامتر ولتاژ پولین، بیشتر از نانوتیرها با الکتروود زیر لایه کامل می باشد.
- تئوری تنش مزدوج اصلاح شده، میکرو/نانوتیر را سخت تر از تئوری کلاسیک ارزیابی می کند. لذا در صورت افزایش پارامتر اثر اندازه، به نیروی بیشتری جهت انحراف تیر نیاز است و سختی کلید را افزایش می دهد.
- در حالت دینامیکی پیش از رسیدن تیرک به وضعیت پولین، تیر رفتار حرکتی متناوبی دارد. دامنه ارتعاشات تیر با افزایش نیروهای بین دو الکتروود تا پیش از پدیده پولین، بیشتر می شود. در صورت بیشتر شدن نیروهای بین دو الکتروود از مقدار پولین دینامیکی، معادله حرکت تیر پایداری خود را از دست می دهد و سیستم از نظر دینامیکی ناپایدار می شود.
- افزایش در مقدار تنش سطحی منجر به افزایش مقادیر ولتاژ پولین (پارامتر بی بعد نیروی الکترواستاتیک) در هر دو حالت استاتیکی و دینامیکی می شود.
- در مقادیر برابر تنش سطحی در حالت دینامیکی نسبت به حالت استاتیکی، نیروی بیشتری جهت رسیدن به پولین نیاز است. علاوه بر این، با افزایش تنش سطحی، نسبت پولین استاتیکی به پولین دینامیکی افزایش می یابد.
- با افزایش ولتاژ میان دو الکتروود، فرکانس اصلی نانوتیر به طور مداوم کاهش و نرخ کاهش تا رسیدن به ولتاژ پولین افزایش می یابد. همچنین با افزایش مقدار پارامتر  $d_2$  و نیمه متاثر شدن نانوتیر، برای مقادیر یکسان از پارامتر بی بعد ولتاژ، فرکانس اصلی افزایش می یابد. با ناپایدار شدن نانوتیر

### 6- فهرست علائم

A	سطح مقطع تیر $(\mu\text{m})^2$
b	پهنای تیر $(\mu\text{m})^2$
c	سرعت نور $(\text{ms}^{-1})$
$c_d$	ضریب استهلاک
$\hat{c}$	پارامتر بی بعد استهلاک
$D_1, D_2$	فاصله بین انتهای الکتروود زیر لایه و کلید (m)
$d_1, d_2$	فاصله بی بعد بین انتهای الکتروود زیر لایه و کلید
E	مدول الاستیسیته ینانگ (GPa)
$g_0$	فاصله اولیه بین الکتروود و پایه $(\mu\text{m})^2$
$H(x)$	تابع پلهای هویساید
$H'$	تابع بی بعد پلهای هویساید
h	ضخامت تیر $(\mu\text{m})^2$
I	ممان اینرسی سطح $(\text{m}^4)$
L	طول تیر $(\mu\text{m})^2$
l	پارامتر مقیاس طول
$M_x$	ممان کل
$m_{ij}$	جز منحرف شده تانسور تنش مزدوج
$n_i$	مؤلفه بردار واحد عمود بر سطح
q	نیروی وارده بر تیر $(\text{Nm}^{-1})$
T	پارامتر بی بعد زمان
$tr(\cdot)$	تریس ماتریس
U	انرژی کرنشی
V	ولتاژ اعمالی بین پایه و الکتروود
W	کار نیروها
$W_d$	کار ناشی از استهلاک
w	انحراف تیر $(\mu\text{m})^2$
$Y_{xy}$	ممان مزدوج
$\mu$	مدول برشی
$\rho$	چگالی $(\text{kgm}^{-3})$
$\lambda$	ثابت اول لام
$\sigma_{ij}$	تانسور تنش
$\sigma_s$	تنش سطحی
$\epsilon_{ij}$	تانسور کرنش
$\epsilon_x$	کرنش محوری
$\psi(x, t)$	زاویه چرخش حول محور $y$
$\chi_{ij}$	تانسور انحنای
$\delta_{ij}$	تابع دلتای کرونگر
$\delta$	اثر اندازه
$\epsilon_0$	ضریب خلأ $(\text{c}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2})$
$\nu$	ضریب پواسون
$\gamma_{LA}$	تنش سطحی مایع-هوا

### علائم یونانی

- Vol. 35, No. 2, pp. 941-951, 2011.
- [18] S. Chatterjee, G. A. Pohit, large deflection model for the pull-in analysis of electrostatically actuated microcantilever beams, *Journal of Sound Vibrations*, Vol. 322, No. 4-5, pp. 969-986, 2009.
- [19] M. Moghimi Zand, M. T. Ahmadian, B. Rashidian, Dynamic pull-in instability of electrostatically actuated beams incorporating casimir and van der waals force, *Journal of Mechanical Engineering Science: Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 224, No. 9, pp. 2037-2047, 2010.
- [20] M. Rahaeifard, M. T. Ahmadian, K. Firoozbakhsh, Size-dependent dynamic behavior of microcantilevers under suddenly applied DC voltage, *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 228, No. 5, pp. 1-11, 2013.
- [21] M. Moghimi Zand, Analytic study of nonlinear dynamics in electrostatically-actuated microbeams considering Timoshenko theory, *ISME: Annual International Mechanical Engineering Conference*, Tehran, Iran, May 12-14, 2015. (in Persian فارسی)
- [22] K. F. Wang, B. L. Wang, A general model for nano-cantilever switches with consideration of surface effect and nonlinear curvature, *Physica E*, Vol. 66, No. 29, pp. 197-208, 2015.
- [23] Y. Hayamizu, t. Yamada, K. Mizuno, R. C. Davis, D. N. Futaba, M. Yumura, K. Hata, Integrated three-dimensional microelectromechanical devices from processable carbon nanotube wafers, *nature nanotechnology*, Vol. 3, No. 5, pp. 289-299, 2008.
- [24] F. Yang, A.C.M. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 10, pp. 2731-2743, 2009.
- [25] W.D. Nix, H. Gao, Indentation size effects in crystalline materials: a low for strain gradient plasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 46, No. 3, pp. 411-425, 1998.
- [26] R. D. Mindlin, H. F. Tiersten, Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, No. 1, pp. 415-448, 1962.
- [27] M. Asghari, M. Rahaeifard, M.H. Kahrobaiyan, M. T. Ahmadian, The modified couple stress functionally graded Timoshenko beam formulation, *Materials & Design*, Vol. 32, No. 3, pp. 1435-1443, 2011.
- [28] S. K. Park, X. L. Gao, Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 16, No. 11, pp. 2355-2359, 2006.
- [29] S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, Third edition, pp. 409-413, McGraw-Hill, New York, 1970.
- [30] J. He, C. M. Lilley, Surface effects on the persistence length of nanowires and nanotubes, *Nano Letters*, Vol. 8, No. 5, pp. 1798-1803, 2008.
- [31] M. E. Gurtin, A. I. Murdoch, A continuum theory of elastic material surfaces, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 57, No. 4, pp. 291-323, 1975.
- [32] M. E. Gurtin, A. Murdoch, Surface stress in solids, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 14, No. 6, pp. 431-440, 1978.
- [33] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Third edition, pp. 25-42, Wiley, New York, 1998.
- [34] A. S. Rollier, B. Legrand, D. Collard, L. Buchaillot, The stability and pull-in voltage of electrostatic parallel-plate actuators in liquid solutions, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 16, No. 4, pp. 794-801, 2006.
- [35] R. Legtenberg, H. A. C. Tilmans, J. Elders, M. Elwenspoek, Stiction of surface micromachined structures after rinsing and drying : model and investigation of adhesion mechanisms, *Sensors Actuators Physics*, Vol. 43, No. 1-3, pp. 230-238, 1994.
- [36] E. Yazdanpanahi, A. R. Noghrehabadi, M. Ghalambaz, Balance dielectric layer for micro electrostatic switches in the presence of capillary effect, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 74, No. 7, pp. 83-90, 2013.
- [37] M. Keivani, M. Mardaneh, A. Koochi, M. Rezaei, M. Abadyan, On the dynamic instability of nano wire-fabricated electromechanical Actuators in the Casimir regime : Coupled effects of surface energy and size dependency, *Physica E*, Vol. 76, No. 8, pp. 60-69, 2016.
- [38] S.K. Park, X.L. Gao, Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 16, No. 11, pp. 2355-2359, 2006.
- [39] A. Farrokhhabadi, A. Mohebbshahedin, R. Rach, J. S. Duan, An improved model for the cantilever NEMS actuator including the surface energy, fringing field and Casimir effects, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 75, No. 30, pp. 202-209, 2016.
- [40] M. Rahaeifard, M. T. Ahmadian, K. Firoozbakhsh, Vibration analysis of electrostatically actuated nonlinear microbridges based on the modified couple stress theory, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 39, No. 21, pp. 6694-6704.
- [41] J. N. Reddy, *An Introduction to the Finite Element Method*, Third edition, pp. 233-248, McGraw-Hill, New York, 1993.
- زاویه تماس بین مایع و سطح جامد  $\theta_c$
- پارامتر بی بعد میدان لبه  $\gamma_{fr}$
- پارامتر بی بعد نیروی موبینگی  $\gamma_{ca}$
- پارامتر بی بعد انرژی سطحی  $\eta$
- پارامتر بی بعد فرکانس اصلی  $\Omega$
- فرکانس طبیعی نانوتیر  $\omega$
- زیر نویس ها
- خمشی Bending
- موبینگی capillary
- الکترواستاتیک Elec
- خارجی Ext
- کششی Stretching
- کل Total
- 7- مراجع
- [1] H. Xie, J. Vitard, S. Haliyo, S. Régnier, High-sensitivity mass and position detection of micro-objects adhered to microcantilevers, *Journal of Micro-Nano Mechatronics*, Vol. 4, No. 1-2, pp. 17-25, 2008.
- [2] G. M. Rebeiz, J. B. Muldavin, RF MEMS switches and switch circuits, *IEEE Microwave Magazine*, Vol. 2, No. 4, pp. 59-71, 2001.
- [3] S. Akita, Y. Nakayama, S. Mizooka, Y. Takano, T. Okawa, Y. Miyatake, S. Yamataka, M. Tsuji, T. Nosaka, Nanotweezers consisting of carbon nanotubes operating in an atomic force microscope, *Applied Physics Letters*, Vol. 79, No. 11, pp. 1691-1693, 2001.
- [4] W. P. Taylor, M. G. Allen, C. R. Dauwalter, Fully integrated magnetically actuated micromachined relays, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 7, No. 2, pp. 181-191, 1998.
- [5] R., Batra, M. Porfiri, D. Spinello, Vibrations of narrow microbeams predeformed by an electric field, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 309, No. 98, pp. 600-612, 2008.
- [6] A. Ramezani, A. Alasty, J. Akbari, Analytical investigation and numerical verification of Casimir effect on electrostatic nano-cantilevers, *Microsystem Technologies*, Vol. 14, No. 2, pp. 145-157, 2008.
- [7] M.T. Ahmadian, M. Mojahedi, A. Barari, R. Firoozbakhsh, Characterization of static behavior of a nonlinear doubly clamped microbeam under electrostatic actuation and detection, *ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering*, San Diego, CA, USA, November 15-21, 2013.
- [8] U. B. C. O. Ejike The plane circular crack problem in the linearized couple-stress theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 7, No. 9, pp. 947-961, 1969.
- [9] F. Yang, A. C. M. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 10, pp. 2731-2743, 2002.
- [10] M. Rahaeifard, M. H. Kahrobaiyan, M. Asghari, Static pull-in analysis of microcantilevers based on the modified couple stress theory, *Sensors and Actuators A*, Vol. 171, No. 2, pp. 370-374, 2011.
- [11] Y. Tadi Beni, I. Karimipour, Static pull-in instability analysis of beam type NEMS under molecular force using strain gradient theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 3, pp. 37-49, 2012. (in Persian فارسی)
- [12] H. M. Ouakad, M. I. Younis, Modeling and simulations of collapse instabilities of microbeams due to capillary forces, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2009, No. 1, pp. 1-16, 2009.
- [13] C. H. Mastrangelo, C. H. Hsu, Mechanical stability and adhesion of microstructures under capillary forces: I. Basic theory, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 2, No. 1, pp. 33-44, 1993.
- [14] M. E. Gurtin, A. I. Murdoch, A continuum theory of elastic material surfaces, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 57, No. 4, pp. 291-323, 1975.
- [15] J. He, C. M. Lilley, Surface effect on the elastic behavior of static bending nanowires, *Nano Letters*, Vol. 8, No. 7, pp. 1798-1802, 2008.
- [16] K.F. Wang, B.L. Wang, Influence of surface energy on the non-linear pull-in instability of nano-switches, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 59, No. 9, pp. 69-75, 2014.
- [17] Y. Fu, J. Zhang, Size-dependent pull-in phenomena in electrically actuated nano beams incorporating surface energies, *Applied Mathematical Modelling*,