مجله مهندسی مکانیک مدرس، بهمن 1395، دوره 16، شماره 11، ص‌ص 103-112

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

کنترل آرایش ربات چرخ‌دار دیفرانسیلی در تعقیب مسیرهای حرکت زمانی

علی کیماسی‌خلجی*

استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه خوارزمی، تهران

* تهران، صندوق‌پستی 15719-14911، keymasi@khu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 12 مرداد 1395
پذیرش: 27 شهریور 1395
ارائه در سایت: 05 آبان 1395

کلید واژگان:
ربات متحرک چرخ‌دار
سیستم‌های غیرهولونومیک
تعقیب مسیرهای حرکت زمانی
کنترل آرایش

چکیده

کنترل آرایش گروهی ربات‌ها در تعقیب مسیرهای حرکت زمانی یکی از مباحث مطرح در حوزه رباتیک است. استفاده از گروه ربات‌های آرایش‌یافته نسبت به ربات‌های جداگانه دارای مزایایی است که می‌توان به بهره‌وری استفاده از منابع، امکان همکاری ربات‌ها، بالارفتن اطمینان و مقاومت بیشتر در برابر نقایص اشاره کرد؛ بنابراین آرایش کنترلی سیستم‌های رباتیک چند عضوی و خودروهای هوشمند مورد توجه دانشمندان فراوانی قرار گرفته که در این مقاله به آن می‌پردازیم. نخست معادلات سینماتیکی و سینتیکی ربات متحرک دیفرانسیلی استخراج، مسیرهای حرکت زمانی مرجع برای ربات رهبر تولید و یک قانون کنترل سینماتیکی برای تعقیب مسیرهای مرجع ربات رهبر طراحی می‌شود. قانون کنترلی پیشنهاد شده ربات رهبر را به صورت مجانبی حول مسیرهای حرکت زمانی مرجع پایدار می‌سازد. یک الگوریتم کنترل دینامیکی برای تولید گشتاورهای عملگری توسط روش خطی‌سازی فیدبک طراحی می‌شود. در ادامه مسئله کنترل آرایش ربات‌ها مورد بررسی قرار گرفته و الگوریتمی مناسب برای این منظور ارائه می‌شود تا ربات‌های پیرو هنگام تعقیب مسیر توسط ربات رهبر در وضعیت مطلوب نسبت به آن قرار گیرند، همچنین پایداری الگوریتم‌های ارائه‌شده از روش لیاپانوف برای کنترلرهای سینماتیکی، دینامیکی و کنترل آرایش مورد بررسی قرار می‌گیرد. در پایان نتایج به‌دست‌آمده برای مسیرهای مرجع مختلف ارائه می‌شود که کارایی روش پیشنهادشده را نشان می‌دهد.

Formation control of a differential drive wheeled robot in trajectory tracking

Ali Keymasi Khalaji

Department of Mechanical Engineering, Kharazmi University, Tehran, Iran
*P.O.B. 15719-14911 Tehran, Iran, keymasi@khu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 02 August 2016
Accepted 17 September 2016
Available Online 26 October 2016

Keywords:
Wheeled mobile robot
Nonholonomic systems
Trajectory tracking
Formation control

ABSTRACT

One of the main topics in the field of robotics is the formation control of the group of robots in trajectory tracking problem. Using organized robots has many advantages compared to using them individually. Among them the efficiency of using resources, the possibility of robots' cooperation, increasing reliability and resistance to defects can be pointed out. Therefore, formation control of multi-body robotic systems and intelligent vehicles have attracted considerable attention, this is discussed in this paper. First, kinematic and kinetic equations of a differential drive wheeled robot are obtained. Then, reference trajectories for tracking problem of the leader robot are produced. Next, a kinematic control law is designed for trajectory tracking of the leader robot. The proposed controller steers the leader robot asymptotically, following reference trajectories. Subsequently, a dynamic control algorithm for generating system actuator toques is designed based on feedback linearization method. Afterwards, formation control of the robots has been considered and an appropriate algorithm is designed in order to organize the follower robots in the desired configurations, while tracking control of the wheeled robot. Furthermore, the stability of the presented algorithms for kinematic, dynamic and formation control laws is analyzed using Lyapunov method. Finally, obtained results for different reference paths are presented which represent the effectiveness of the proposed controller.

1- مقدمه

امروزه کاربرد ربات‌های متحرک در سیستم‌های مهندسی در حال گسترش است. صنعت، کشاورزی و جنگل‌داری، معدن‌کاری، پزشکی و جراحی توسط رایانه، توان‌بخشی و مراقبت سلامت، تجسس و نجات، کاربردهای خانگی، استفاده در مکان‌های خطرناک یا دور از دسترس و همچنین سرگرمی نمونه‌هایی از این کاربردهاست؛ بنابراین مدل‌سازی و کنترل این سیستم‌ها مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است [1-3]. ربات‌های متحرک چرخ‌دار نمونه‌ای از این سیستم‌هاست که به دلیل تماس میان چرخ‌ها با سطح زمین مقید به قیود غیرهولونومیک است. این قیود در اثر غلتش خالص چرخ‌ها در حرکت رو به جلو و عدم لغزش در جهت جانبی به وجود می‌آیند. در مرجع [4] مدل‌سازی و ویژگی‌های انواع مختلف ربات‌های چرخ‌دار ارائه شده و مورد بحث قرار گرفته است. برای عملکرد خودکار ربات‌های متحرک چرخ‌دار، مسائل کنترلی مختلفی در زمینه کنترل حرکت این سیستم‌ها در تحقیقات مورد توجه قرار گرفته است. تعقیب مسیر در فضای کارتزین[1] [6,5]، پایدارسازی حول وضعیت‌های مطلوب[2] [7,5] و تعقیب مسیرهای

[1] Path following
[2] Point stabilization

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
A. Keymasi Khalaji, Formation control of a differential drive wheeled robot in trajectory tracking, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 11, pp. 103-112, 2016 (in Persian)

حرکت زمانی[1] [9,8] نمونه‌هایی از مسائل مطرح در این زمینه است.

در این مقاله مسئله تعقیب مسیرهای حرکت زمانی مرجع آن مورد بررسی قرار گرفته و الگوریتم‌های کنترلی مختلفی برای حل این مسئله پیشنهاد شده است. کنترل تطبیقی [11,10]، کنترل مود لغزشی [12,11]، کنترل بهینه [13]، کنترل پیش‌بین [14]، شبکه‌های عصبی [16,15] و کنترل فازی [18,17] برخی از الگوریتم‌های ارائه‌شده است.

کنترل آرایش گروهی ربات‌ها در تعقیب مسیرهای حرکت زمانی یکی از مباحث مطرح در این حوزه است. استفاده از گروه ربات‌های آرایش‌یافته نسبت به ربات‌های جداگانه دارای مزایایی است که از جمله آن‌ها می‌توان به بهره‌وری استفاده از منابع (مانند اشتراک استفاده از سنسورها)، امکان همکاری ربات‌ها[2]، بالارفتن اطمینان و مقاومت بیشتر در برابر نقایص[3] اشاره کرد؛ بنابراین آرایش کنترلی سیستم‌های رباتیک چند عضوی[4] و خودروهایی که به صورت هوشمند عمل می‌کنند مورد توجه دانشمندان فراوانی قرار گرفته است.

خواستگاه ایده کنترل آرایش‌یافته ربات‌ها را می‌توان در علوم زیست‌شناسی جستجو کرد. پژوهشگران علوم زیستی گونه‌هایی از رفتارهای آرایش‌یافته را در طبیعت مشاهده کرده‌اند. ایشان دریافتند حیوانات گروه‌هایی را تشکیل می‌دهند تا بتوانند یافته‌هایشان را در آن گروه‌ها به صورت موثرتری تبادل کنند و ازاین شیوه بتوانند غذای بیشتری بیابند و خود را در برابر خطرات احتمالی محافظت کنند، [19]. از نکات قابل توجه زندگی این حیوانات حفظ قلمرو شخصی و زندگی در یک فاصله مشخص از همسایگان هم‌زمان با حضور در گروه است [20].

موارد فروانی از کاراتر بودن کاربرد چند ربات در حالت گروهی نسبت به کاربرد جداگانه چند ربات را می توان بیان کرد. ماموریت‌های جستجو و نجات [22,21]، سیستم‌های هدایت خودکار در بزرگراه‌ها [23]، کنترل ترافیک هوایی [24] از جمله موارد کارایی آن است. استفاده در ارتش برای تجسس و تخریب معادن و غارها و شناسایی و تجسس در میادین جنگی [25]، استفاده در مکان‌های پرخطر مانند نیروگاه‌های هسته‌ای و یا پاک کردن مواد شیمیایی سمی و خطرناک از جمله سایر کاربردهای تعدادی مجموعه ربات‌های آرایش‌یافته است.

روش‌های گوناگونی برای کنترل شکل آرایشی ربات‌های هوشمند به کار گرفته شده است. در حالت کلی این روش‌ها درپی ایجاد آرایش مطلوب از راه هماهنگ‌کردن هرچه بیشتر ربات‌ها هستند. روش‌های مورد استفاده برای کنترل آرایش را می‌توان به سه دسته کلی روش ساختار مجازی[5] [27,26]، روش رفتار مبنا[6] [28-30] و روش راهنما- پیرو[7] [32,31] تقسیم کرد.

روش راهنما- پیرو از میان روش‌های یادشده توجه محققان زیادی را به خود جلب کرده است. سادگی، قابلیت اعتماد بالا و نیاز نداشتن به دانش و محاسبات یک‌پارچه در سیستم از مهم‌ترین مزایای این روش است [33]، همچنین حجم محاسبات این روش کم بوده و قابلیت پیاده‌سازی به‌هنگام بر سیستم را فراهم می‌کند. وابستگی نداشتن پیروها به مسیرهای مرجع از دیگر مزایای این روش است و آرایش ربات به صورت کامل توسط موقعیت ربات رهبر تعیین می‌شود. در روش راهنما- پیرو می‌توان ازمدل‌های زاویه- فاصله و یا فاصله- فاصله استفاده کرد. در مدل زاویه- فاصله ربات‌ها به صورت حلقه یک زنجیر کنترل می‌شوند که در آن هر ربات از یک ربات پیروی می‌کند. در مدل فاصله- فاصله هر ربات از دو ربات به طور هم‌زمان پیروی می‌کند. آرایش گروهی ربات‌ها می‌تواند در اشکال گوناگونی چون خطی و ستونی، گوه‌ای و غیره شکل گیرد. در مرجع [34] مدلی کنترلی با استفاده از تئوری گراف‌ها برای گروهی از ربات‌ها ارائه شده است که می‌تواند آرایشی مناسب برای عبور از میان موانع به وجود آورد. در مرجع [35] روشی بر مبنای میدان‌های برداری برای کنترل آرایش ربات‌های چرخدار و در مرجع [36] نیز الگوریتمی به روش مود لغزشی- فازی ارائه شده است.

اغلب پژوهش‌های انجام گرفته در این حوزه ارائه کنترلرهای سینماتیکی به همراه کنترل حلقه باز برای ربات رهبر بوده است، ولی در حرکت‌های با سرعت بالا و در صورت وجود جرم‌ها و اینرسی‌های غیرقابل چشم‌پوشی نیاز به کنترل دینامیکی برای تولید گشتاورهای عملگری وجود دارد که کمتر در این حوزه مورد توجه قرار گرفته است. کنترل هم‌زمان حلقه بسته سینماتیکی و دینامیکی برای حرکت رهبر و کنترل آرایش حلقه بسته به صورت یک‌پارچه در کارهای پیشین کمتر بررسی شده است. دیفرانسیلی به تفصیل برای ربات دو چرخ در این مقاله طراحی شده است. طراحی‌های صورت گرفته با تغییرات محدودی به سایر سیستم‌های غیرهولونومیک نیز تعمیم‌پذیر است.

در روش راهنما پیرو که در این مقاله بررسی شده است، یکی از ربات‌های گروه به‌عنوان راهنما در نظر گرفته می‌شود و سایر ربات‌ها موظف به پیروی از راهنما هستند. به این ترتیب مسئله هدایت آرایش‌یافته ربات‌ها تبدیل به دو مسئله ساده‌تر می‌شود. یکی مسئله تعقیب مسیر توسط راهنمای گروه و دیگری مسئله حفظ ارایش توسط سایر ربات‌های گروه است. ربات‌های پیرو جهت تشکیل و حفظ نظام آرایش مطلوب موظف به تنظیم موقعیت خود با توجه به موقعیت راهنماست. بدین ترتیب برای تعیین یک مانور آرایشی تنها نیاز است که حرکت راهنما و مکان نسبی میان ربات راهنما و ربات پیرو مشخص شود.

ابتدا مدل سینماتیکی ربات متحرک چرخ‌دار استخراج و مسیرهای حرکت مرجع برای تعقیب ربات رهبر تولید شده است، سپس یک قانون کنترل سینماتیکی برای تعقیب مجانبی مسیرهای مرجع ربات رهبر طراحی و پایداری آن از روش لیاپانوف تحلیل شده است. در ادامه یک کنترلر دینامیکی برای ربات رهبر برای تولید گشتاورهای عملگری مورد نیاز طراحی شده است، مسئله کنترل آرایش ربات‌های رهبر و پیرو تحلیل شده و بر مبنای محاسبات صورت گرفته ورودی‌های کنترلی لازم برای ربات‌های پیرو به منظور حفظ آرایش خود نسبت به ربات رهبر در فرایند تعقیب مسیرهای حرکت زمانی انجام پذیرفته است. نتایج به‌دست‌آمده نشان‌دهنده کارایی الگوریتم کنترلی طراحی شده است.

در این مقاله یک الگوریتم کنترل آرایش برای ربات‌های دو چرخ دیفرانسیلی در تعقیب مسیرهای حرکت زمانی ارائه‌شده و نتایج حاصل از قانون کنترلی طراحی‌شده ارائه گردیده که متضمن دستاوردهایی به شرح زیر است.

- طراحی یک قانون کنترل سینماتیکی فیدبک حالت برای ربات‌های رهبر-پیرو از نوع دیفرانسیلی
- طراحی یک قانون کنترل دینامیکی خطی‌سازی فیدبک جهت تولید گشتاورهای عملگری برای ربات‌های رهبر-پیرو
- طراحی الگوریتمی مناسب برای مسئله کنترل آرایش ربات‌های رهبر- پیرو در ضمن تعقیب مسیرهای حرکت مرجع

1 Trajectory tracking
2 Robot Parallelism
3 Fault tolerant
4 Multi-Agent Robotic Systems
5 Virtual Structure approach
6 Behavior Based approach
7 Leader- Follower approach

- تحلیل پایداری قوانین کنترلی ارائه‌شده و ارائه نتایج حاصل از آن

2- توصیف سیستم و مدل‌سازی

سیستم مورد نظر همان‌گونه که در شکل 1 نمایش داده شده یک ربات چرخ‌دار دیفرانسیلی است، چرخ‌های دیفرانسیلی ربات با عملگرهای مجزا مجهز شده و یک چرخ کروی نیز برای حفظ پایداری آن استفاده شده است، نقطه C نشان‌دهنده مرکز جرم ربات، φ_r و φ_l به ترتیب نمایش‌دهنده جابه‌جایی زاویه‌ای چرخ‌های سمت راست و چپ ربات، a فاصله میان نقاط P و C است، این پارامترها در شکل 1 نمایش داده شده‌اند، وضعیت ربات متحرک با بردار مختصات تعمیم‌یافته $q = (x \quad y \quad \theta)^{\mathrm{T}}$ نشان داده می‌شود که در آن (x, y) مختصات نقطه P و θ جهت‌گیری ربات نسبت به دستگاه مرجع را نشان می‌دهد.

فرضیات یادشده در زیر برای حرکت ربات متحرک در نظر گرفته شده است.

1. حرکت ربات صفحه‌ای است.
2. چرخ‌های ربات در جهت جانبی لغزش نمی‌کنند.
3. چرخ‌های ربات در حرکت رو به جلو غلتش خالص می‌کنند.

وجود قیدهای غیرهولونومیک به دلیل غلتش بدون لغزش چرخ‌ها روی زمین بحث اصلی در سینماتیک روبات‌های متحرک چرخ‌دار است، این قیدها از یک رابطه میان مختصات تعمیم‌یافته و سرعت‌های تعمیم‌یافته تشکیل می شوند، این رابطه نسبت به سرعت‌های تعمیم‌یافته خطی و به صورت رابطه (1) است.

$$a_j^{\mathrm{T}}(q)\dot{q} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{1}$$

قیود سیستم در فرمت ماتریسی نیز به صورت رابطه (2) است.

$$\mathcal{A}^{\mathrm{T}}(q)\dot{q} = 0 \tag{2}$$

در آن $\mathcal{A}(q)$ ماتریس قیدی $n \times m$، n تعداد قیدهای سیستم و m تعداد مختصات تعمیم‌یافته سیستم است.

ربات متحرک چرخ‌دار دارای دیفرانسیلی ماتریس قیدی از رابطه (3) به‌دست می‌آید.

$$\mathcal{A}^{\mathrm{T}}(q) = (\sin\theta \quad -\cos\theta \quad 0) \tag{3}$$

در این صورت ماتریس $\mathcal{S}(q)$ با رتبه m وجود دارد که شامل بردارهای مستقل خطی است که فضای تهی ماتریس قیدی را به صورت رابطه (4) افراز می‌کنند.

$$\mathcal{S}^{\mathrm{T}}(q)\mathcal{A}^{\mathrm{T}}(q) = 0 \tag{4}$$

ماتریس $\mathcal{S}(q)$ برای ربات متحرک چرخ‌دار دیفرانسیلی به صورت رابطه (5) به‌دست می‌آید.

$$\mathcal{S}(q) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

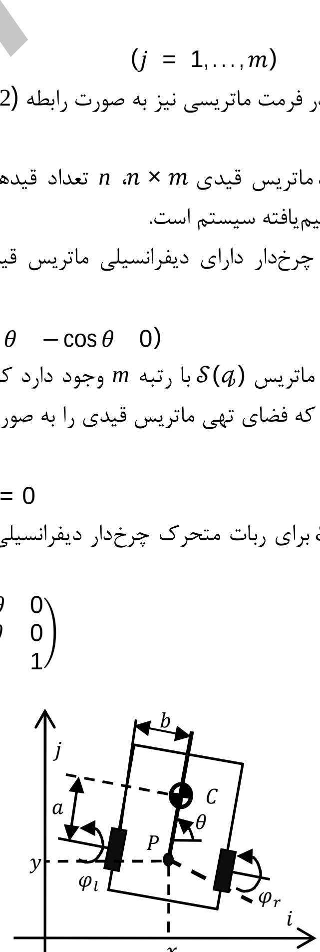

Fig. 1 Differential drive wheeled mobile robot

شکل 1 ربات متحرک چرخ‌دار دیفرانسیلی و پارامترهای سیستم

مدل سینماتیکی به صورت رابطه (6) به‌دست خواهد آمد.

$$\dot{q} = \mathcal{S}(q)v \tag{6}$$

که در آن $v = (u \quad \omega)^{\mathrm{T}}$ بردار ورودی‌های سینماتیکی مستقل سیستم، u سرعت خطی نقطه P و ω سرعت زاویه‌ای ربات است، این ورودی‌ها با سرعت‌های دورانی چرخ‌های دیفرانسیلی به صورت رابطه (7) مرتبط است.

$$\begin{cases} u = \dfrac{r}{2}\,(\dot{\varphi}_r + \dot{\varphi}_l) \\ \omega = \dfrac{r}{2b}\,(\dot{\varphi}_r - \dot{\varphi}_l) \end{cases} \tag{7}$$

r شعاع چرخ‌های دارای عملگر ربات، b نصف فاصله میان چرخ‌های ربات، $\dot{\varphi}_r$ و $\dot{\varphi}_l$ به ترتیب سرعت‌های زاویه‌ای چرخ‌های سمت راست و چپ دارای عملگر ربات است.

3- تعقیب مسیرهای حرکت زمانی

تعقیب مسیرهای حرکت زمانی یکی از مسائل مربوط به کنترل حرکت ربات‌های متحرک خودکار به حساب می‌رود، در این مسئله مطلوب این است که ربات متحرک با آغاز از یک شرایط اولیه مشخص به یک مسیر دلخواه در فضای کارتزین برسد و با یک زمان‌بندی مشخص آن را تعقیب کند، حالت‌های سیستم یا تابعی از آن‌ها از نظر ریاضی یک سری حالت‌ها یا توابع مطلوب را تعقیب می‌کند؛ بنابراین طراحی ورودی‌های کنترلی سیستم باید به گونه‌ای باشد که خطای تعقیب $(x - x_r, y - y_r)$ با گذشت زمان به مبدأ میل کند، که (x, y) مختصات نقطه P در دستگاه اینرسی است، هدف این بخش طراحی بردار ورودی‌های کنترلی v برای نزدیک کردن نقطه P به $P_r = (x_r, y_r)$ است.

4- تولید مسیرهای حرکت مرجع

فرض می‌کنیم مسیر مرجع در فضای کارتزین که باید توسط ربات تعقیب شود به صورت رابطه (8) بیان شود.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{8}$$

ما می‌خواهیم این مسیر را به فضای متغیرهای ربات نگاشت دهیم، در این صورت مسیرهای زمانی تولید شده برای ربات قابل پیمایش خواهند بود.

با استفاده از روابط (6,5) می‌توان رابطه (9) را به‌دست آورد.

$$u = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \tag{9}$$

همچنین θ را می‌توان به صورت رابطه (10) محاسبه کرد.

$$\theta = \mathrm{atan2}\{\dot{y}, \dot{x}\} \tag{10}$$

atan2 معکوس تابع تانژانت در یک دور کامل است.

حال با مشتق‌گیری از رابطه بالا و ترکیب نتایج $\dot{u}$ حذف شده و با استفاده از معادله سوم معادلات سینماتیکی رابطه (11) را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega = \dot{\theta}(t) = \frac{\ddot{y}(t)\,\dot{x}(t) - \ddot{x}(t)\,\dot{y}(t)}{u^2(t)} \tag{11}$$

حال خروجی مطلوب سیستم را در دستگاه مختصات کارتزین به صورت $x_r = x_r(t)$ ،$y_r = y_r(t)$ بیان می‌کنیم که اندیس r برای نشان دادن متغیرهای سیستم روی مسیر مرجع استفاده شده است، از معادلات سینماتیک سیستم بر مسیرهای حرکت زمانی مرجع $\theta_{\mathrm{r}}(t)$، $u_{\mathrm{r}}(t)$، $\omega_{\mathrm{r}}(t)$ محاسبه می‌شوند.

ویژگی 1 مسیرهای مرجع $x_r(t)$، $y_r(t)$، $\theta_r(t)$ ورودی‌های سینماتیکی مرجع $u_{\mathrm{r}}(t)$، $\omega_{\mathrm{r}}(t)$ و مشتقات آن‌ها پیوسته و کراندار

یکنواخت[1] است.

ویژگی 2 ورودی سینماتیکی مرجع u_r دارای علامت معین (مثبت یا منفی) بوده و وقتی t به بی‌نهایت میل می‌کند، ورودی‌های سینماتیکی مرجع $u_\mathrm{r}(t)$، $\omega_\mathrm{r}(t)$ به صفر میل نمی‌کنند.

5- قانون کنترل سینماتیکی

معادلات خطای سیستم برای کنترل تعقیب مسیرهای حرکت زمانی براساس روندی که توضیح داده خواهد شد را تشکیل می‌شود. اگر این معادلات خطا در مبدأ پایدار شوند مسیرهای حرکت زمانی ربات متحرک حول مسیرهای حرکت زمانی مرجع پایدار و بدین ترتیب مسئله تعقیب مسیرهای حرکت زمانی مرجع ربات متحرک حل می‌شود.

هدف طراحی قانون کنترل فیدبک $u = u(q, \dot{q}, q_\mathrm{r}, v)$ برای ربات چرخ‌دار دیفرانسیلی است به طوری که خطای تعقیب $\tilde{e} = q - q_\mathrm{r}$ در مبدأ پایدار شود. این کنترلر از نوع سینماتیکی و ورودی‌های آن سرعت‌های خطی و دورانی است. مفروض است که متغیرهای وضعیت ربات در هر لحظه از زمان با سنسورها اندازه‌گیری می‌شوند و فیدبک‌های کنترلی توسط این متغیرها تولید می‌شود. در ادامه حل این مسأله کنترلی ارائه می‌گردد.

یک بردار خطای نگاشت‌یافته در نظر می‌گیریم که براساس رابطه (12) تعریف شده است.

e=T(θ_r) e (12)

ماتریس تبدیل $T(\theta_r)$ متغیرهای خطای تعقیب را به یک فضای جدید نگاشت می‌دهد و به صورت رابطه (13) تعریف می‌شود.

$$T(\theta_r) = \begin{pmatrix} \cos\theta_r & \sin\theta_r & 0 \\ -\sin\theta_r & \cos\theta_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

بنابراین رابطه (14) را گونه یادشده در زیر خواهد بود.

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{pmatrix} = T(\theta_r) \begin{pmatrix} x - x_r \\ y - y_r \\ \theta - \theta_r \end{pmatrix} \quad (14)$$

حال از رابطه بالا نسبت به زمان مشتق می‌گیریم تا دینامیک خطای تعقیب به صورت رابطه (15) به‌دست آید.

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_r \sin\theta_r & \dot{\theta}_r \cos\theta_r & 0 \\ -\dot{\theta}_r \cos\theta_r & -\dot{\theta}_r \sin\theta_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_r \\ y - y_r \\ \theta - \theta_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta_r & \sin\theta_r & 0 \\ -\sin\theta_r & \cos\theta_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} - \dot{x}_r \\ \dot{y} - \dot{y}_r \\ \dot{\theta} - \dot{\theta}_r \end{pmatrix} \quad (15)$$

معادلات دیفرانسیل خطای تعقیب به صورت رابطه (16) با ساده‌سازی روابط بالا محاسبه می‌شود.

$$\begin{cases} \dot{e}_x = \omega_r e_y + u \cos e_\theta - u_r \\ \dot{e}_y = -\omega_r e_x + u \sin e_\theta \\ \dot{e}_\theta = \omega - \omega_r \end{cases} \quad (16)$$

معادلات خطای تعقیب یادشده را می‌توان به صورت کلی $\dot{e} = f(e, q_\mathrm{r}, v_\mathrm{r}, v)$ نوشت.

در نتیجه دینامیک خطای تعقیب یک سیستم غیرخطی است. هدف طراحی قانون کنترل فیدبک $v = v(q, \dot{q}, q_\mathrm{r}, v_\mathrm{r})$ به گونه‌ای است که دینامیک خطای غیرخطی و شاید متغیر با زمان بالا در مبدأ پایدار شود، در این صورت حرکت ربات با آغاز از یک شرایط اولیه به مسیرهای حرکت زمانی مرجع همگرا می‌شود.

برای محاسبه قانون کنترلی $v = (u, \omega)^\mathrm{T}$ به گونه‌ای که بردار خطای $(e_x, e_y, e_\theta)^\mathrm{T}$ را به صورت مجانبی در مبدأ پایدار کند از تغییر مختصات $(e_x, e_y, e_\theta, u, \omega) \to (z_1, z_2, z_3, w_1, w_2)$ استفاده شده است؛ بنابراین تغییر متغیرهای حالت $z_1 = e_x$، $z_2 = e_y$ و $z_3 = \tan e_\theta$ و تغییر متغیرهای ورودی $w_1 = u \cos e_\theta - u_\mathrm{r}$، $w_2 = \mathrm{d}z_3/\mathrm{d}t$ روی سیستم اعمال می‌شود.

با تغییر متغیرهای بالا به رابطه (17) دست می‌یابیم.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \omega_r z_2 + w_1 \\ \dot{z}_2 = -\omega_r z_1 + (u_r + w_1) z_3 \\ \dot{z}_3 = w_2 \end{cases} \quad (17)$$

حال هدف طراحی ورودی‌های کنترلی w_1 و w_2 را برای سیستم (17) به گونه‌ای است که تک تک متغیرهای $z_i\ (i = 1 \to 3)$ حول صفر پایدار شود، بدین منظور ورودی‌های w_1 و w_2 به صورت رابطه (18) پیشنهاد می‌شود.

$$\begin{cases} w_1 = -k_1 |u_r| \{z_1 + z_2 z_3\} \\ w_2 = -k_2 u_r z_2 - k_3 |u_r| z_3 \end{cases} \quad (18)$$

که در آن $k_i (i: 1 \to 3)$ بهره‌های کنترلی حقیقی مثبت است.

قضیه 1. قانون کنترلی (18)، سیستم دینامیکی معرفی شده در رابطه (17) را حول مبدأ پایداری مجانبی می‌کند.

اثبات. برای این منظور از تابع مثبت معین $\mathcal{V}_1$ براساس رابطه (19) استفاده می‌شود.

$$\mathcal{V}_1 = \frac{1}{2}\left(k_1 z_1^2 + \frac{k_2}{k_3} z_2^2 + \frac{1}{k_3} z_3^2\right) \quad (19)$$

مشتق این تابع به صورت رابطه (20) خواهد بود.

$$\dot{\mathcal{V}}_1 = k_1 z_1 \dot{z}_1 + \frac{k_2}{k_3} z_2 \dot{z}_2 + \frac{1}{k_3} z_3 \dot{z}_3 = k_1 z_1 (\omega_r z_2 + w_1) + \frac{k_2}{k_3} z_2 (-\omega_r z_1 + (u_r + w_1) z_3) + \frac{1}{k_3} z_3 w_2 \quad (20)$$

عبارت $-k_3 |u_\mathrm{r}| z_3$ یک ترم پایدارساز و برای پایدارکردن z_3 به‌کار رفته است. سایر جملات برای تبدیل مشتق تابع لیاپانوف به یک تابع حداقل منفی نیمه معین به کار رفته‌اند. مشتق تابع کاندیدای لیاپانوف $\mathcal{V}_1$ با این انتخاب‌ها برای ورودی‌های سیستم به صورت رابطه (21) خواهد بود.

$$\dot{\mathcal{V}}_1 = -|u_r| \left\{k_1 z_1 + \frac{k_2}{k_3} z_2 z_3\right\}^2 - |u_r| z_3^2 \quad (21)$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود مشتق تابع مثبت معین $\mathcal{V}_1$ با انتخاب بهره‌های کنترلی مثبت یک تابع منفی نیمه معین است؛ بنابراین $\mathcal{V}_1$ یک تابع افزایشی نیست و $z_\mathrm{i} (\mathrm{i}: 1 \to 3)$ کران‌دار کلی[2] است. مشتق تابع لیاپانوف منفی نیمه معین شد و بنابراین نمی‌توان پایداری مجانبی سیستم را نتیجه گرفت. با استفاده از ویژگی 1، u_r پیوسته و مشتق آن کران‌دار کلی است. برای رسیدن به پایداری مجانبی سیستم از لم باربالات[3] استفاده می‌کنیم [37]. در واقع باید ثابت شود که مشتق دوم تابع لیاپانوف کراندار است. با توجه به ویژگی 2 که u_r علامت ثابتی دارد مشتق دوم تابع کاندیدای لیاپانوف $\mathcal{V}_1$ به صورت رابطه (22) محاسبه می‌شود.

$$\ddot{\mathcal{V}}_1 = -\left\{k_1 z_1 + \frac{k_2}{k_3} z_2 z_3\right\}^2 \dot{u}_r \frac{u_r}{|u_r|} - 2|u_r| \left\{k_1 z_1 + \frac{k_2}{k_3} z_2 z_3\right\} \left\{k_1 (\omega_r z_2 + w_1) + \frac{k_2}{k_3} (-\omega_r z_1 + (u_r + w_1) z_3) z_3 + \frac{k_2}{k_3} z_2 w_2\right\} - z_3^2 \dot{u}_r \frac{u_r}{|u_r|} - 2|u_r| z_3 w_2 \quad (22)$$

از آن‌جا که $z_\mathrm{i} (\mathrm{i}: 1 \to 3)$ کران‌دار کلی بوده و طبق ویژگی 1، ورودی‌های سینماتیکی مرجع u_r، ω_r و مشتقات آن‌ها پیوسته و کراندار

[1] Uniformely Bounded

[2] Globally bounded

[3] Barbalat Lemma

یکنواخت و طبق ویژگی 2، u_r دارای علامت معین (مثبت یا منفی) و کاملا مشخص است که $\dot{\mathcal{V}}_1$ کراندار بوده و طبق لم باربالات وقتی t به بی‌نهایت میل می‌کند $\mathcal{V}_1$ به صفر میل خواهند کرد و در نتیجه سیستم پایدار مجانبی است [38].

با جای‌گذاری از ورودی‌های کنترلی روابط (18) در تغییر متغیرهای سیستم، ورودی های سینماتیکی u و ω را به‌دست می‌دهد، این ورودی‌های کنترلی سینماتیکی به‌عنوان فرمان‌های کنترلی برای طراحی کنترلر دینامیکی فرض می‌شوند و بنابراین در ادامه به صورت $v_c = (u_c \quad \omega_c)$ نمایش داده می‌شوند.

6- مدل دینامیکی ربات چرخ‌دار

معادلات دینامیکی ربات چرخ‌دار از طریق روش لاگرانژ به صورت رابطه (23) به‌دست می‌آید.

$$\mathcal{M}(q)\,\ddot{q} + \mathcal{C}(q,\dot{q}) = \mathcal{B}(q)\,\tau + \mathcal{A}^{\mathrm{T}}(q)\,\lambda \tag{23}$$

که در آن $\mathcal{M}(q) \in \Re^{3\times3}$ ماتریس جرمی سیستم، $\mathcal{C}(q,\dot{q}) \in \Re^{3\times1}$ شامل نیروهای جانب مرکز و کوریولیس، $\mathcal{B}(q) \in \Re^{3\times2}$ ماتریس تبدیل ورودی، $\mathcal{A}(q) \in \Re^{1\times3}$ ماتریس قیدی سیستم و λ بردار مضارب لاگرانژ سیستم است و به صورت رابطه (24) به‌دست می‌آید.

$$\mathcal{M}(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & -a\,m\,\sin\theta \\ 0 & m & a\,m\,\cos\theta \\ -a\,m\sin\theta & a\,m\cos\theta & I_\theta \end{bmatrix}$$
$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix}$$
$$\mathcal{C}(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} -a\,m\cos\theta\,\dot{\theta}^2 \\ -a\,m\sin\theta\,\dot{\theta}^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathcal{B}(q) = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \\ b & -b \end{bmatrix} \tag{24}$$

که در آن m جرم ربات، I_θ ممان اینرسی جرمی ربات حول محور عمود بر صفحه حرکت، a فاصله میان مرکز جرم ربات و نقطه میانی چرخ‌های دیفرانسیلی و r معرف شعاع چرخ‌های ربات است.

برای حذف مضارب لاگرانژ روش مکمل متعامد طبیعی می‌تواند استفاده شود [39]. در حقیقت مضارب لاگرانژ را می‌توان با ضرب رابطه (23) در $\mathcal{S}^{\mathrm{T}}(q)$ از سمت چپ و استفاده از رابطه (4) حذف کرد و رابطه (25) را به صورت زیر به‌دست آورد.

$$\bar{\mathcal{M}}_1(q)\,\dot{v} + \bar{\mathcal{M}}_2(q)\,v + \bar{\mathcal{C}}(q,\dot{q}) = \bar{\mathcal{B}}(q)\,\tau \tag{25}$$

که در آن به رابطه (26) دست خواهیم یافت.

$$\bar{\mathcal{M}}_1(q) = \mathcal{S}^{\mathrm{T}}(q)\,\mathcal{M}(q)\mathcal{S}(q) \in \Re^{2\times2}$$
$$\bar{\mathcal{M}}_2(q) = \mathcal{S}^{\mathrm{T}}(q)\,\mathcal{M}(q)\dot{\mathcal{S}}(q) \in \Re^{2\times2}$$
$$\bar{\mathcal{B}}(q) = \mathcal{S}^{\mathrm{T}}(q)\,\mathcal{B}(q) \in \Re^{2\times2} \tag{26}$$

همچنین می‌توان بردار گشتاورهای سیستم را به صورت روابط (28,27) نوشت.

$$\tau = \mathcal{M}_1^{\dagger}(q)\,\dot{v} + \mathcal{M}_2^{\dagger}(q)\,v + \mathcal{C}^{\dagger}(q,\dot{q}) \tag{27}$$

که در آن

$$\mathcal{M}_1^{\dagger}(q) = \bar{\mathcal{B}}^{-1}(q)\,\bar{\mathcal{M}}_1(q)$$
$$\mathcal{M}_2^{\dagger}(q) = \bar{\mathcal{B}}^{-1}(q)\,\bar{\mathcal{M}}_2(q)$$
$$\mathcal{C}^{\dagger}(q,\dot{q}) = \bar{\mathcal{B}}^{-1}(q)\,\bar{\mathcal{C}}(q,\dot{q}) \tag{28}$$

7- قانون کنترل دینامیکی گشتاور محاسبه شده

در این قسمت یک قانون کنترل دینامیکی بر مبنای خطی‌سازی فیدبک برای ربات متحرک چرخ‌دار طراحی می‌شود. خطای تعقیب کنترلر دینامیکی به صورت رابطه (29) در نظر گرفته می‌شود.

$$\mathcal{E} = v_{\mathrm{c}} - v \tag{29}$$

که در آن u_{c} بردار فرمان‌های کنترلی سینماتیکی است که در قسمت پیشین طراحی شد. هدف این قسمت طراحی گشتاورهای عملگری جهت پایدارسازی خطاهای تعقیب حول مبداست. حال قانون کنترلی (30) پیشنهاد می‌شود.

$$\tau = \mathcal{M}_2^{\dagger}(q)\,v + \mathcal{M}_1^{\dagger}(q)\,\dot{v}_{\mathrm{c}} + \mathcal{C}^{\dagger}(q,\dot{q}) + \mathcal{M}_1^{\dagger}(q)\,\mathcal{K}\,\mathcal{E} \tag{30}$$

در آن $\mathcal{K} = \mathrm{diag}(k_1\|\mathcal{E}\|, k_2)$ ماتریس بهره قطری مثبت معین کنترلر است.

قضیه 2. قانون کنترلی (30) برای مدل دینامیکی (27) بردار خطای (29) را حول مبدأ پایدار مجانبی می‌سازد.

اثبات. تابع مثبت معین کاندیدای لیاپانوف (31) را در نظر آورید.

$$\mathcal{V}_2 = \frac{1}{2}\mathcal{E}^{\mathrm{T}}\,\mathcal{E} \tag{31}$$

مشتق اول زمانی این تابع به صورت رابطه (32) است.

$$\dot{\mathcal{V}}_2 = \mathcal{E}^{\mathrm{T}}\,\dot{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^{\mathrm{T}}(\dot{v}_{\mathrm{c}} - \dot{v}) \tag{32}$$

با استفاده از رابطه (27) به رابطه (33) دست خواهیم یافت.

$$\dot{\mathcal{V}}_2 = \mathcal{E}^{\mathrm{T}}\left(\dot{v}_{\mathrm{c}} - {\mathcal{M}_1^{\dagger}}^{-1}(q)\{\tau - \mathcal{M}_2^{\dagger}(q)\,v - \mathcal{C}^{\dagger}(q,\dot{q})\}\right) \tag{33}$$

رابطه (34) از جای‌گذاری رابطه (30) در رابطه بالا به‌دست می‌آید.

$$\dot{\mathcal{V}}_2 = -\mathcal{E}^{\mathrm{T}}\,\mathcal{K}\,\mathcal{E} \tag{34}$$

مشتق تابع کاندیدای لیاپانوف در نظر گرفته شده منفی معین است، در نتیجه خطاهای تعقیب با استفاده از قانون کنترلی طراحی‌شده به سمت مبدأ میل می‌کند و ربات متحرک چرخ‌دار به صورت مجانبی فرمان‌های کنترلی را دنبال خواهد کرد.

8- کنترل آرایش ربات چرخ‌دار

در این قسمت به معرفی و طراحی کنترل آرایش ربات چرخ‌دار دیفرانسیلی می‌پردازیم. در مدل هندسی ارائه‌شده در این پژوهش فرض شده است که ربات‌ها از سنسورهای اسکن لیزری برای یافتن موقعیت نسبی یکدیگر استفاده می‌کنند. به این ترتیب هر ربات قادر است فاصله و زاویه خط واصل میان خود و رهبر گروه را در هر لحظه بیابد. برای انعطاف‌پذیری بیشتر مدل ارائه شده از هندسه زاویه- فاصله استفاده شده است. به این مفهوم که برای مشخص‌شدن موقعیت مطلوب هر کدام از ربات‌های گروه کافی است فاصله ربات تا رهبر و زاویه خط واصل میان آن‌ها با راستای افق مشخص شود. با استفاده از این هندسه می توان تمامی انواع نظام‌های آرایشی را توصیف کرد.

مرکز جرم را جهت بیان ریاضی مسئله به‌عنوان نقطه‌ای مرجع از ربات برای کنترل آرایش در نظر می‌گیریم. ربات پیرو i-ام با توجه به شکل 2 با مختصات وضعیت $\xi_i = (x_{c_i} \quad y_{c_i} \quad \theta_i)^{\mathrm{T}}$ درپی تعقیب ربات رهبر دارای مختصات وضعیت $\xi = (x_c \quad y_c \quad \theta)^{\mathrm{T}}$ و گرفتن آرایش مطلوب دارای مختصات وضعیت $\xi_i^d = (x_{c_i}^d \quad y_{c_i}^d \quad \theta_i^d)^{\mathrm{T}}$ است. بدین منظور ورودی‌های کنترلی برای هدایت ربات پیرو باید به‌گونه‌ای تعیین شود که فاصله و زاویه نسبی ربات رهبر و پیرو که در شکل به ترتیب با پارامترهای l_i و ϕ_i نشان داده شده‌اند، به مقادیر متناظر مطلوب خود یعنی l_i^d و ϕ_i^d همگرا شوند.

بر اساس شکل 2 مختصات تعمیم‌یافته ربات پیرو i-ام به صورت رابطه (35) قابل بیان است.

$$\xi_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ \theta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + l_i\cos(\phi_i + \theta) + a\cos\theta \\ y + l_i\sin(\phi_i + \theta) + a\sin\theta \\ \theta_i \end{pmatrix} \tag{35}$$

همچنین مختصات تعمیم‌یافته مطلوب پیرو i-ام به صورت رابطه (36) قابل بیان است.

$$\xi_i^d = \begin{pmatrix} x_i^d \\ y_i^d \\ \theta_i^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + l_i^d\cos(\phi_i^d + \theta) + a\cos\theta \\ y + l_i^d\sin(\phi_i^d + \theta) + a\sin\theta \\ \theta \end{pmatrix} \tag{36}$$

فاصله نسبی ربات رهبر و پیرو را برحسب مؤلفه‌های آن می‌توان به صورت رابطه (37) بیان کرد.

$$l_i = \sqrt{l_{ix}^2 + l_{iy}^2} \tag{37}$$

این مؤلفه‌ها برحسب متغیرهای سیستم مطابق شکل 2 به صورت رابطه (38) قابل بیان است.

$$\begin{aligned} l_{ix} &= x - a\cos\theta_i - x_i = -l_i\cos(\phi_i + \theta) \\ l_{iy} &= y - a\sin\theta_i - y_i = -l_i\sin(\phi_i + \theta) \end{aligned} \tag{38}$$

برای زاویه نسبی ϕ_i نیز می‌توان مطابق شکل 2 رابطه (39) را نوشت.

$$\phi_i = \mathrm{atan2}\{l_{iy}, l_{ix}\} - \theta_i + \pi \tag{39}$$

برای به‌دست آوردن دینامیک سیستم با مشتق‌گیری از l_i و ϕ_i و با ساده‌سازی رابطه (40) را خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}l_i}{\mathrm{dt}} &= -u\cos\phi_i + u_i\cos\alpha_i + a\,\omega_i\sin\alpha_i \\ \frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{dt}} &= \frac{1}{l_i^2}\{u\sin\phi_i - u_i\sin\alpha_i + a\,\omega_i\cos\alpha_i\} - \omega \end{aligned} \tag{40}$$

که در آن $\alpha_i = \phi_i + \theta - \theta_i$.

حال بردار خطای کنترل آرایش سیستم به صورت رابطه (41) تعریف می‌شود.

$$e_i = \mathcal{T}(\theta_i)(\xi_i^d - \xi_i) \tag{41}$$

با استفاده از روابط (38) خطای کنترل آرایش را می‌توان به صورت رابطه (42) بازنویسی کرد.

$$e_i = \begin{Bmatrix} e_{ix} \\ e_{iy} \\ e_{i\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_i^d\cos(\phi_i^d + \theta - \theta_i) - l_i^d\cos\alpha_i \\ l_i^d\sin(\phi_i^d + \theta - \theta_i) - l_i^d\sin\alpha_i \\ \theta_i^d - \theta_i \end{Bmatrix} \tag{42}$$

دینامیک خطای کنترل آرایش با مشتق‌گیری از رابطه بالا به صورت رابطه (43) به‌دست می‌آید.

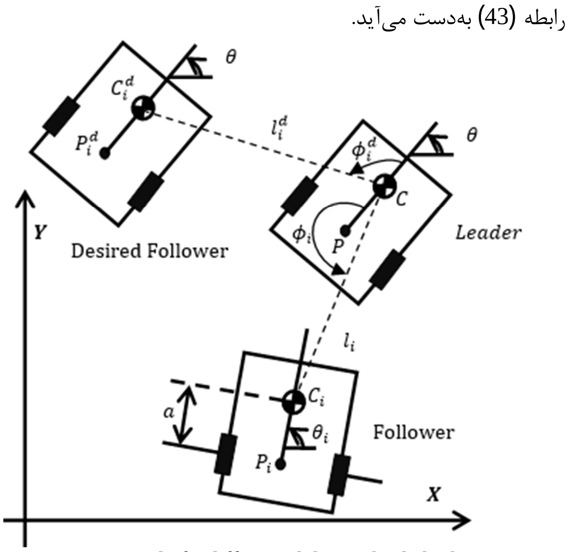

Fig. 2. Formation control of a differential drive wheeled robot

شکل 2 کنترل آرایش ربات متحرک چرخ‌دار دیفرانسیلی

$$\frac{\mathrm{d}e_i}{\mathrm{dt}} = \dot{\mathcal{T}}(\theta_i)(\xi_i^d - \xi_i) + \mathcal{T}(\theta_i)(\dot{\xi}_i^d - \dot{\xi}_i) \tag{43}$$

رابطه (44) را با ساده‌سازی رابطه بالا و با فرض $\mathrm{d}l_i^d/\mathrm{dt} = \mathrm{d}\phi_i^d/\mathrm{dt} = 0$ به صورت زیر خواهیم داشت.

$$\frac{\mathrm{d}e_i}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \theta_i) & -l_i^d\sin(\phi_i^d + \theta - \theta_i) \\ \sin(\theta - \theta_i) & l_i^d\cos(\phi_i^d + \theta - \theta_i) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1 & e_{iy} \\ 0 & -(a + e_{ix}) \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v_i + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_i^d \end{pmatrix} \tag{44}$$

در روابط بالا ورودی‌های کنترل آرایش u_i و ω_i باید به گونه‌ای طراحی شوند که دینامیک خطا حول مبدأ پایدار مجانبی شود، بدین منظور با استفاده از روش خطی‌سازی فیدبک جملات غیرخطی در حد امکان حذف می‌شود؛ بنابراین ورودی‌های کنترلی به صورت رابطه (45) انتخاب می‌شود.

$$v_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \theta_i) & -l_i^d\sin(\phi_i^d + \theta - \theta_i) \\ \frac{1}{a}\sin(\theta - \theta_i) & \frac{l_i^d}{a}\cos(\phi_i^d + \theta - \theta_i) \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_2}{a} & \frac{\beta_3}{a} \end{pmatrix} e_i \tag{45}$$

در آن $\beta_i\,(i: 1 \to 3)$ معرف بهره‌های کنترلی حقیقی مثبت است.

قضیه . قانون کنترلی رابطه (45) برای سیستم دینامیکی رابطه (44) بردار خطای (42) را حول مبدأ پایدار مجانبی می‌سازد.

اثبات. دینامیک خطای سیستم با اعمال ورودی‌های کنترلی رابطه (45) به صورت رابطه (46) خواهد بود.

$$\frac{\mathrm{d}e_i}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -\beta_1 & \omega_i & 0 \\ -\omega_i & -\beta_2 & -\beta_3 \\ 0 & -\frac{\beta_2}{a} & -\frac{\beta_3}{a} \end{pmatrix} e_i + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{a}\sin(\theta - \theta_i) & -\frac{l_i^d}{a}\cos(\phi_i^d + \theta - \theta_i) \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_i^d \end{pmatrix} \tag{46}$$

زاویه مطلوب ربات پیرو در تمام فرایند کنترل به دلیل وجود قید غیرهولونومیک نمی‌تواند ثابت باشد و باید به گونه‌ای انتخاب شود که دینامیک بالا را پایدار مجانبی سازد؛ بنابراین می‌توان به صورت مشابه براساس روش خطی‌سازی فیدبک با حذف برخی از جملات غیرخطی روابط را ساده‌تر کرد و انتخاب رابطه (47) مناسب به نظر می‌رسد.

$$\omega_i^d = \frac{1}{a}\{u\sin(\theta - \theta_i) + l_i^d\omega\cos(\phi_i^d + \theta - \theta_i) + 2\,\beta_2 e_{iy}\} \tag{47}$$

خطای سیستم با این انتخاب دینامیک به صورت رابطه (48) خواهد شد.

$$\frac{\mathrm{d}e_i}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -\beta_1 & \omega_i & 0 \\ -\omega_i & -\beta_2 & -\beta_3 \\ 0 & -\frac{\beta_2}{a} & -\frac{\beta_3}{a} \end{pmatrix} e_i \tag{48}$$

اکنون تابع کاندیدای لیاپانوف (49) برای تحلیل پایداری پیشنهاد می‌شود.

$$\mathcal{V}_3 = \frac{1}{2} e_i^{\mathrm{T}} \mathrm{diag}\left(\left[\frac{\beta_2}{\beta_3 a}, \frac{\beta_2}{\beta_3 a}, 1\right]\right) e_i \tag{49}$$

$\mathrm{diag}(\cdot)$ معرف ماتریس قطری با عناصر قطری تعیین‌شده است. با محاسبه مشتق تابع کاندیدای لیاپانوف بالا رابطه (50) را خواهیم داشت.

$$\dot{\mathcal{V}}_3 = -\mathbb{e}_i^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}\left(\left[\frac{\beta_2\beta_1}{\beta_3 a}, \frac{\beta_2^2}{\beta_3 a}, \frac{\beta_3}{a}\right]\right)\mathbb{e}_i \qquad (50)$$

بنابراین مشتق تابع کاندیدای لیاپانوف در نظر گرفته شده منفی معین است. در نتیجه خطاهای کنترل آرایش با استفاده از قانون کنترلی طراحی‌شده به سمت مبدأ میل می‌کند و ربات‌های پیرو به صورت مجانبی آرایش مطلوب خود را دنبال خواهند کرد.

9- نتایج به‌دست‌آمده

در این قسمت نتایج حاصل از اعمال الگوریتم کنترلی جهت بررسی کارایی کنترلر پیشنهادی روی یک ربات چرخ‌دار رهبر و دو ربات پیرو ارائه می‌شود. مشخصات هندسی و مقادیر پارامترهای سیستم در جدول 1 و پارامترهای کنترلی نیز در جدول 2 ارائه شده است. مطلوب است که ربات رهبر مسیر مرجع مورد نظری را دنبال کند و هم‌زمان ربات‌های پیرو در موقعیتی مشخص نسبت به آن قرار گیرند.

پارامترهای هندسی ربات ارائه‌شده در جدول 1 بر اساس پارامترهای مدل آزمایشگاهی مورد استفاده در مرجع [10] انتخاب شده است. درباره پارامترهای کنترلی ارائه‌شده در جدول 2 نیز بهره‌های کنترلی برای برآورده‌کردن پایداری سیستم حلقه بسته مقادیر مثبتی فرض شده‌اند. بهره‌های کنترلی بزرگ‌تر به عملکرد مناسب‌تر قانون کنترلی و بهره‌های کوچک‌تر به عملکرد نامناسب‌تر سیستم حلقه بسته (پاسخ‌های نوسانی، زمان نشست بالاتر و فراجهش در پاسخ‌های سیستم و ...) منتهی می‌شوند. از سوی دیگر بهره‌های کنترلی بزرگ‌تر منجر به ورودی‌های کنترلی بالاتری خواهد شد و برعکس؛ بنابراین بهره‌های کنترلی برای داشتن هم‌زمان عملکرد مناسب و ورودی‌های کنترلی معقول با استفاده از روش سعی و خطا و بررسی هم‌زمان عملکرد سیستم حلقه بسته و مقدار ورودی‌های کنترلی انتخاب شده‌اند. از آن‌جایی که پایداری مسئله تعقیب مسیرهای حرکت زمانی (روابط 21، 22 و 34) و کنترل آرایش ربات (رابطه 50) اثبات شده، انتظار می‌رود

جدول 1 مقادیر پارامترهای سیستم

Table 1 System parameters

پارامتر	توصیف	مقدار
m	جرم ربات	0.9
I	ممان اینرسی	0.0035
r	شعاع چرخ‌ها	0.026
$2b$	فاصله بین چرخ‌های ربات	0.1190
a	طول PC	0.029

جدول 2 پارامترهای کنترلی

Table 2 Control parameters

پارامتر	توصیف	مقدار
k_1، k_2، k_3	بهره‌های کنترلر سینماتیکی	20, 60, 10
$\mathcal{k}_1$، $\mathcal{k}_2$	بهره‌های کنترلر دینامیکی	2, 50
β_1، β_2، β_3	بهره‌های کنترلر آرایش	2, 5, 1
l_1^d، l_2^d	پارامترهای کنترل آرایش 1	0.1, 0.05
ϕ_1^d، ϕ_2^d	پارامترهای کنترل آرایش 1	$-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$
l_1^d، l_2^d	پارامترهای کنترل آرایش 2	0.2, 0.1
ϕ_1^d، ϕ_2^d	پارامترهای کنترل آرایش 2	$-\theta_r$ ،$-\pi-\theta_r$
l_1^d، l_2^d	پارامترهای کنترل آرایش 3	0.1, 0.1
ϕ_1^d، ϕ_2^d	پارامترهای کنترل آرایش 3	$-\frac{\pi}{2}-\theta_r$ ،$-\frac{\pi}{2}-\theta_r$

خطاهای تعقیب مسیر ربات رهبر و خطاهای کنترل آرایش ربات با شروع از شرایط اولیه مختلف و با گذشت زمان محدودی حول صفر همگرا شده و پاسخ‌های گذرای سیستم از بین رفته، آرایش مطلوب در تعقیب مسیرهای حرکت مرجع دنبال شود.

مسیر حرکت ربات رهبر، ربات‌های پیرو و مسیر مرجع 1 در صفحه حرکت در شکل 3، سیگنال‌های خطای کنترلی برای تعقیب مسیر ربات رهبر و کنترل آرایش ربات‌های پیرو در شکل 4 ترسیم و در شکل‌های 5 و 6 نیز به ترتیب ورودی‌های کنترلی سینماتیکی و دینامیکی ارائه شده است.

در شکل 3 مشاهده می‌شود که مسیر مرجع خطی در صفحه کارتزین توسط ربات رهبر با شروع از یک شرایط اولیه خارج از مسیر به خوبی دنبال شده است. به همین شکل دو ربات پیرو پس از پاسخ گذرای خود در فواصل تعیین شده آرایش مطلوب خود را گرفته‌اند.

با مقایسه شکل‌های 3 و 4 نیز کاملا مشخص است که پیرو 1 با خطای اولیه‌ای حدود 1 متر، پیرو 2 با خطای اولیه‌ای حدود 2 متر، و ربات رهبر با خطای اولیه‌ای در حدود 0.25 متر شروع به حرکت کرده و در زمانی حدود 7.5 ثانیه تقریبا خطاهای کنترلی از بین رفته است و ربات‌ها آرایش مطلوب خود را در تعقیب مسیر خطی در فضای کارتزین گرفته‌اند.

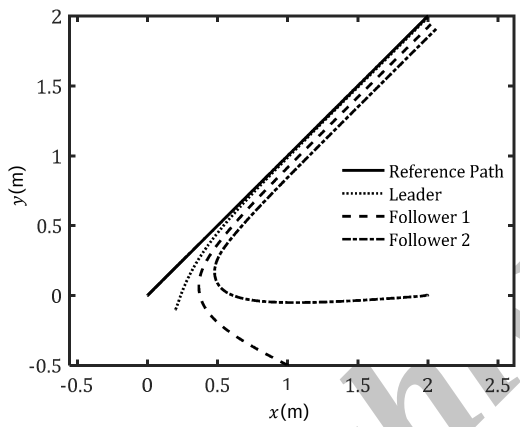

Fig. 3 Motion path for the leader robot, the followers and the reference path 1 in planar motion (formation 1)

شکل 3 مسیر حرکت ربات رهبر، ربات‌های پیرو و مسیر مرجع 1 در صفحه حرکت (آرایش 1)

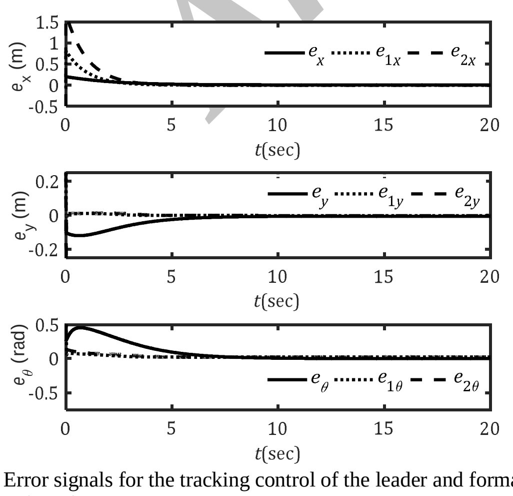

Fig. 4 Error signals for the tracking control of the leader and formation control of the followers

شکل 4 سیگنال‌های خطای کنترلی برای تعقیب مسیر ربات رهبر و کنترل آرایش ربات‌های پیرو

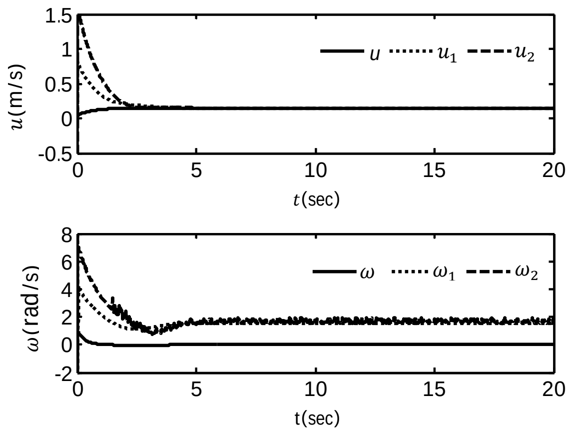

Fig. 5 Kinematic control inputs for the leader and follower robots

شکل 5 ورودی‌های کنترلی سینماتیکی برای ربات رهبر و ربات‌های پیرو

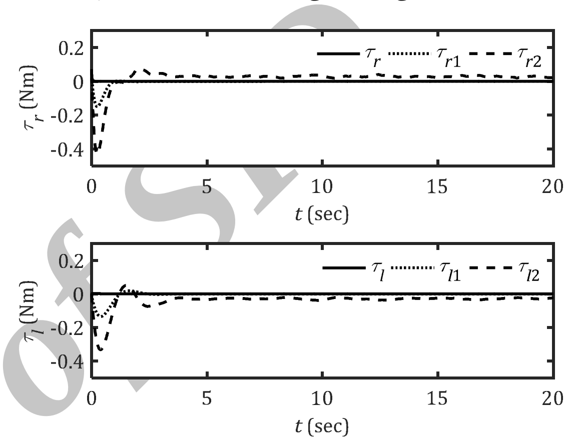

Fig. 6 Dynamic control inputs for the leader and follower robots

شکل 6 ورودی‌های کنترلی دینامیکی برای ربات رهبر و ربات‌های پیرو

ورودی‌های کنترلی هموار و دارای مقادیر و دامنه تغییرات و سرعت تغییرات معقولی است و در زمان $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$ مقدار ورودی‌ها دارای پرش نیست، این موضوع نشان‌دهنده انتخاب مناسب بهره‌های کنترلی است که ورودی‌های کنترلی مناسبی با داشتن عملکرد مناسب سیستم حلقه بسته داشته باشیم.

در شکل 7 مسیر حرکت ربات رهبر، ربات‌های پیرو و مسیر مرجع 2 در صفحه حرکت نشان داده شده‌اند. در شکل 8 سیگنال‌های خطای کنترلی برای تعقیب مسیر ربات رهبر و کنترل آرایش ربات‌های پیرو ترسیم شده است. در شکل 9 نیز مسیر حرکت ربات رهبر، ربات‌های پیرو و مسیر مرجع 3 در صفحه حرکت نشان داده شده‌اند.

با توجه به شکل 7 مسیر مرجع مربعی با گوشه‌های منحنی در صفحه کارتزین توسط ربات رهبر با شروع از یک شرایط اولیه خارج از مسیر به خوبی دنبال شده است. به این ترتیب دو ربات پیرو آرایش مطلوب خود را پس از پاسخ گذرای خود در فواصل تعیین‌شده گرفته‌اند.

با مقایسه شکل‌های 7 و 8 نیز کاملا مشخص است که پیرو 1 با خطای اولیه‌ای حدود 0.7 متر، پیرو 2 با خطای اولیه‌ای حدود 1.15 متر و ربات رهبر با خطای اولیه‌ای در حدود 0.2 متر شروع به حرکت کرده و در زمانی حدود 12 ثانیه تقریبا خطاهای کنترلی از بین رفته است و ربات‌ها آرایش مطلوب خود را در تعقیب مسیر خطی در فضای کارتزین گرفته‌اند.

با توجه به شکل 9 مسیر سینوسی سوار بر یک دایره در صفحه کارتزین توسط ربات رهبر با شروع از یک شرایط اولیه خارج از مسیر به درستی دنبال شده است، دو ربات پیرو نیز آرایش مطلوب را پس از پاسخ گذرای خود در فواصل تعیین شده گرفته‌اند.

در شکل‌های 10 و 11 مسیر حرکت ربات رهبر، ربات‌های پیرو و مسیرهای مرجع در صفحه حرکت با دو آرایش متفاوت نشان داده شده‌اند.

از مقایسه دو آرایش نیز کاملا مشخص است مسیر مرجع در فضای کارتزین برای ربات‌های پیرو در راستاهای افقی و عمودی گسترش پیدا کرده است و الگوریـتم ارائه‌شده عملکرد مناسبی را نشان می‌دهد.

نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهد الگوریتم کنترل دینامیکی عملکرد مناسبی در کنترل آرایش ربات متحرک چرخ‌دار دیفرانسیلی در تعقیب مسیرهای مرجع زمانی از خود نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود ربات رهبر خود را برای مسیرهای مرجع مختلف با شروع از شرایط اولیه و پس از زمانی محدود به مسیر مرجع رسانده و در حاشیه مناسبی از آن قرار گرفته است. خطاهای کنترلی همان‌گونه که با اثبات پایداری در مراحل مختلف طراحی الگوریتم کنترل انتظار می‌رفت با گذشت زمان به صفر همگرا شده و از بین می‌روند، در نتیجه ربات‌های پیرو در آرایش تعیین‌شده مطلوب خود در وضعیت مورد نظر نسبت به مسیر مرجع قرار می‌گیرند، ورودی‌های کنترلی تولیدشده دارای مقادیر مناسبی است و در محدوده معقولی به‌عنوان گشتاورهای عملگری ربات قرار دارند.

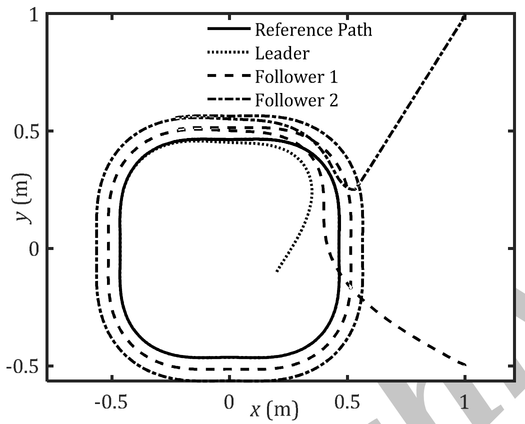

Fig. 7 Motion path for the leader robot, the followers and the reference path 2 in planar motion (formation 1)

شکل 7 مسیر حرکت ربات رهبر، ربات‌های پیرو و مسیر مرجع 2 در صفحه حرکت (آرایش 1)

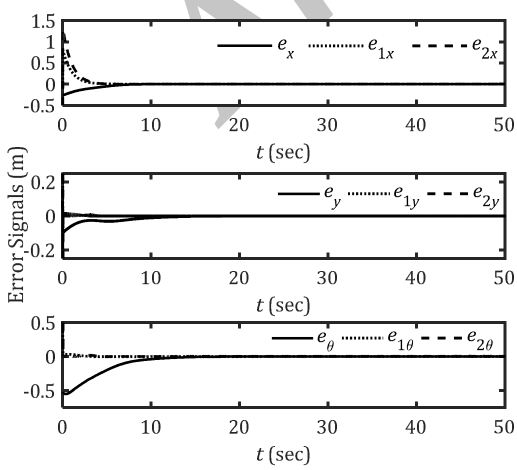

Fig. 8 Error signals for the tracking control of the leader and formation control of the followers

شکل 8 سیگنال‌های خطای کنترلی برای تعقیب مسیر ربات رهبر و کنترل آرایش ربات‌های پیرو

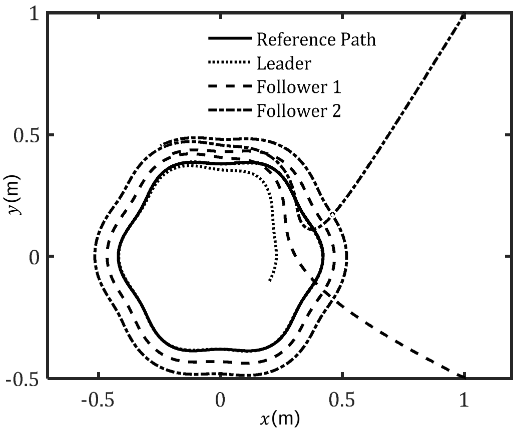

Fig. 9 Motion path for the leader robot, the followers and the reference path 3 in planar motion (formation 1)

شکل 9 مسیر حرکت ربات رهبر، ربات‌های پیرو و مسیر مرجع 3 در صفحه حرکت (آرایش 1)

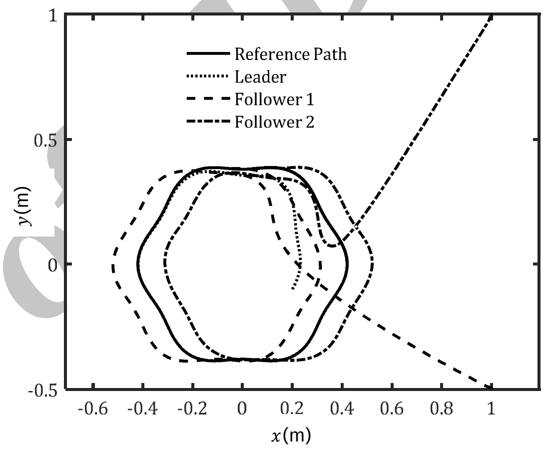

Fig. 10 Motion path for the leader robot, the followers and the reference path 3 in planar motion (formation 2)

شکل 10 مسیر حرکت ربات رهبر، ربات‌های پیرو و مسیر مرجع 3 در صفحه حرکت (آرایش 2)

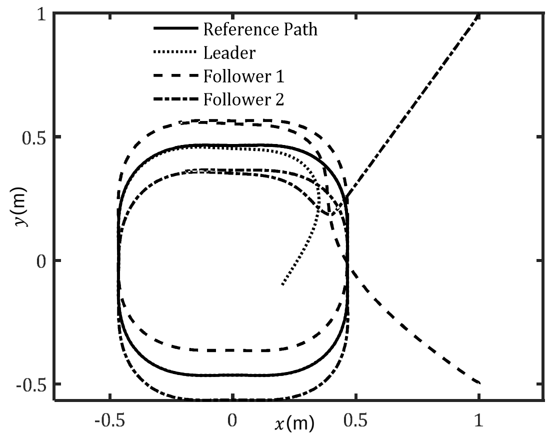

Fig. 11 Motion path for the leader robot, the followers and the reference path 2 in planar motion (formation 3)

شکل 11 مسیر حرکت ربات رهبر، ربات‌های پیرو و مسیر مرجع 2 در صفحه حرکت (آرایش 3)

10- نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی جدید برای کنترل آرایش دینامیکی در تعقیب مسیرهای حرکت یک ربات چرخدار به‌عنوان یک سیستم غیرخطی، کم عملگر و غیرهولونومیک ارائه شده است. نخست معادلات دینامیکی سیستم استخراج، مسیرهای حرکت مرجع مناسب برای ربات رهبر تولید و یک کنترلر سینماتیکی براساس فیدبک حالت‌های سیستم برای ربات رهبر طراحی شد. در ادامه یک قانون کنترل دینامیکی برای تولید گشتاورهای عملگری ربات رهبر به روش خطی‌سازی فیدبک طراحی شد. سپس مسئله کنترل آرایش ربات‌ها مورد بررسی قرار گرفت و الگوریتمی مناسب برای آن پیشنهاد شد تا ربات‌های پیرو هنگام تعقیب مسیر توسط ربات رهبر در وضعیت مطلوبی نسبت به آن قرار گیرند، همچنین پایداری قانون کنترلی از طریق روش لیاپانوف برای کنترلرهای سینماتیکی، دینامیکی و الگوریتم کنترل آرایش بررسی شد. نتایج به‌دست‌آمده کارآمد بودن روش ارائه‌شده برای کنترل آرایش مجموعه ربات‌ها در تعقیب مسیرهای زمانی مرجع مختلف را تأیید می‌کند.

11- مراجع

[1] A. Keymasi Khalaji, S. A. A. Moosavian, Dynamic modeling and tracking control of a car with n trailers, *Multibody System Dynamics*, Vol. 37, No. 2, pp. 211-225, 2016.

[2] A. Keymasi Khalaji, M. Rahimi Bidgoli, S. A. A. Moosavian, Non-model-based control for a wheeled mobile robot towing two trailers *Multi-body Dynamics*, Vol. 229, No. 1, pp. 97-108, 2015.

[3] A. K. Khalaji, S. A. A. Moosavian, Stabilization of a tractor-trailer wheeled robot, *Mechanical Science and Technology*, Vol. 30, No. 1, pp. 421-428, 2016.

[4] G. Campion, G. Bastin, B. Dandrea Novel, Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots, *IEEE Transactions on Robotics and Auto*mation, Vol. 12, No. 1, pp. 47-62, 1996.

[5] C. Samson, Control of chained systems application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 1, pp. 64-77, 1995.

[6] L. Chang Boon, W. Danwei, GPS-Based path following control for a car-like wheeled mobile robot with skidding and slipping, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 16, No. 2, pp. 340-347, 2008.

[7] P. Morin, C. Samson, Control of nonlinear chained systems: From the Routh-Hurwitz stability criterion to time-varying exponential stabilizers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 1, pp. 141-146, 2000.

[8] F. N. Martins, W. C. Celeste, R. Carelli, M. Sarcinelli-Filho, T. F. Bastos-Filho, An adaptive dynamic controller for autonomous mobile robot trajectory tracking, *Control Engineering Practice*, Vol. 16, No. 11, pp. 1354-1363, 2008.

[9] C.-Y. Chen, T.-H. S. Li, Y.-C. Yeh, C.-C. Chang, Design and implementation of an adaptive sliding-mode dynamic controller for wheeled mobile robots, *Mechatronics*, Vol. 19, No. 2, pp. 156-166, 2009.

[10] A. Keymasi Khalaji, S. A. A. Moosavian, Robust Adaptive Controller for a Tractor-Trailer Mobile Robot, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 19, No. 3, pp. 943 - 953, 2014.

[11] A. Keymasi Khalaji, S. A. A. Moosavian, Adaptive sliding mode control of a wheeled mobile robot towing a trailer, *Systems and Control Engineer*ing, Vol. 229, No. 2, pp. 169-183, 2015.

[12] A. Keymasi Khalaji, S. A. A. Moosavian, fuzzy sliding mode control law for a wheeled mobile robot towing a trailer, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 4, pp. 91-98, 2014. (in Persian فارسی)

[13] H. Chih-Lyang Hwang Chih-Lyang, C. Li-Jui Chang Li-Jui, Trajectory tracking and obstacle avoidance of car-like mobile robots in an intelligent space using mixed H2/H∞; decentralized control, *IEEE ASME Trans Mechatron*, Vol. 12, No. 3, pp. 345-352, 2007.

[14] G. Klančar, I. Škrjanc, Tracking-error model-based predictive control for mobile robots in real time, *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 55, No. 6, pp. 460-469, 2007.

[15] J. Ye, Adaptive control of nonlinear PID-based analog neural networks for a nonholonomic mobile robot, *Neurocomputing*, Vol. 71, No. 7–9, pp. 1561-1565, 2008.

[16] J. Ye, Tracking control for nonholonomic mobile robots: Integrating the analog neural network into the backstepping technique, *Neurocomputing*, Vol. 71, No. 16–18, pp. 3373-3378, 2008.

[17] C.-Y. Chen, T.-H. S. Li, Y.-C. Yeh, EP-based kinematic control and adaptive fuzzy sliding-mode dynamic control for wheeled mobile robots, *Information Sciences*, Vol. 179, No. 1–2, pp. 180-195, 2009.

[18] C. Chian-Song, L. Kuang-Yow, Hybrid fuzzy model-based control of nonholonomic systems: A unified viewpoint, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 16, No. 1, pp. 85-96, 2008.

[19] T. Balch, R. C. Arkin, Behavior-based formation control for multirobot

teams, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 14, No. 6, pp. 926-939, 1998.
[20] J. M. Cullen, E. Shaw, H. A. Baldwin, Methods for measuring the three-dimensional structure of fish schools, *Animal Behaviour*, Vol. 13, No. 4, pp. 534-543, 1965.
[21] R. R. Murphy, Human-robot interaction in rescue robotics, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews)*, Vol. 34, No. 2, pp. 138-153, 2004.
[22] I. R. Nourbakhsh, K. Sycara, M. Koes, M. Yong, M. Lewis, S. Burion, Human-robot teaming for search and rescue, *IEEE Pervasive Computing*, Vol. 4, No. 1, pp. 72-79, 2005.
[23] A. Y. S. Lam, Y. W. Leung, X. Chu, Autonomous-vehicle public transportation system: scheduling and admission control, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, Vol. 17, No. 5, pp. 1210-1226, 2016.
[24] K. Margellos, J. Lygeros, Toward 4-D trajectory management in air traffic control: a study based on monte carlo simulation and reachability analysis, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 21, No. 5, pp. 1820-1833, 2013.
[25] D. Voth, A new generation of military robots, *IEEE Intelligent Systems*, Vol. 19, No. 4, pp. 2-3, 2004.
[26] M. Egerstedt, H. Xiaoming, Formation constrained multi-agent control, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 17, No. 6, pp. 947-951, 2001.
[27] W. Ren, R. Beard, Decentralized Scheme for Spacecraft Formation Flying via the Virtual Structure Approach, *Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 27, No. 1, pp. 73-82, 2004.
[28] H. Yamaguchi, A distributed motion coordination strategy for multiple nonholonomic mobile robots in cooperative hunting operations, *Robotics and Autonomous Systems*, Vol.3, No. 4, pp. 2984-2991, 2003.
[29] A. Bazoula, H. Maaref, Formation Control of Multi-Robots via Fuzzy Logic Technique, International Journal of Computers, *Communications & Control (IJCCC)*, Vol. 3, No. 3, pp. 179-184, 2008.
[30] A. Bazoula, H. Maaref, Fuzzy Separation Bearing Control for Mobile Robots Formation, *Proceedings of the World Academy of Science,* Engineering and Technology, Vol. 23, pp. 1-7, 2007.
[31] L. Xiaohai, X. Jizong, C. Zijun, Backstepping based multiple mobile robots formation control, *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2005)*, Edmonton, Canada, August 2-4, 2005.
[32] J. Sanchez, R. Fierro, Sliding mode control for robot formations, in Proceeding of, 438-443.
[33] L. Consolini, F. Morbidi, D. Prattichizzo, M. Tosques, Leader–follower formation control of nonholonomic mobile robots with input constraints, *Automatica*, Vol. 44, No. 5, pp. 1343-1349, 2008.
[34] J. P. Desai, J. P. Ostrowski, V. Kumar, Modeling and control of formations of nonholonomic mobile robots, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 17, No. 6, pp. 905-908, 2001.
[35] J. W. Kwon, D. Chwa, Hierarchical formation control based on a vector field method for wheeled mobile robots, *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 28, No. 6, pp. 1335-1345, 2012.
[36] Y. H. Chang, C. W. Chang, C. L. Chen, C. W. Tao, Fuzzy sliding-mode formation control for multirobot systems: design and implementation, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics*), Vol. 42, No. 2, pp. 444-457, 2012.
[37] J. J. Slotine, W. Li, *Applied Nonlinear Control*, pp. 57-76, New Jersey: Prentice-Hall International, 1991.
[38] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, pp. 167-191, New Jersey: Prentice Hall, 2002.
[39] S. K. Saha, J. Angeles, Dynamics of Nonholonomic Mechanical Systems Using a Natural Orthogonal Complement, *Applied Mech*anics, Vol. 58, No. 1, pp. 238-243, 1991.