مجله مهندسی مکانیک مدرس، بهمن 1395، دوره 16، شماره 11، ص‌ص 378-388

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تأثیر خروج از مرکزی بر گالوپینگ غیرخطی کابل‌ها تحت جریان باد و تحریک پایه در شرایط تشدید داخلی 1:1

سمن صدری‌پور [1]، امیر جلالی [2*]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
* شاهرود، صندوق پستی 3619995161، amirjalali@shahroodut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 17 مرداد 1395
پذیرش: 23 مهر 1395
ارائه در سایت: 24 آبان 1395

کلید واژگان:
گالوپینگ
کابل
جریان باد
تیر منحنی‌شکل
تئوری اغتشاشات

چکیده

گالوپینگ کابل‌ها یکی از انواع ارتعاشات خود تحریک است که دارای دامنه‌ی بالا و فرکانس پایین می‌باشد. در این مقاله، به‌منظور بررسی گالوپینگ غیرخطی یک کابل آویخته با درنظر گرفتن سفتی‌های خمشی و پیچشی آن، از مدل تیر منحنی‌شکل استفاده شده است. کابل مورد بررسی تحت نیروهای خارجیِ جریان باد، حرکت پایه سمت راست و در شرایط یخزدگی مقطع آن فرمول‌بندی شده است. با فرض نسبت شکم به دهانه‌ی کوچک و براساس مقادیر پارامترهای کابل در واقعیت، می‌توان به یک مدل کاهش‌یافته دست یافت که شامل معادلات کلاسیک، مانند آن‌چه برای کابل انعطاف‌پذیر به‌دست می‌آید، به همراه یک معادله‌ی اضافه حاکم بر پیچش کابل می‌باشد. این سیستم دو درجه آزادی با به‌کارگیری روش گلرکین با استفاده از یک مُد درون صفحه و یک مُد خارج از صفحه به‌عنوان توابع ویژه گسسته شده است و شامل عبارات غیرخطی مرتبه دو و مرتبه سه می‌باشد. با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه با درنظر گرفتن تشدید داخلی 1:1 معادلات دامنه-فاز به‌دست آمده‌اند. سرعت باد و خروج از مرکزی مقطع به‌عنوان پارامترهای کنترلی در نظر گرفته شده‌اند و تأثیر خروج از مرکزی سطح مقطع بروی دامنه‌ی گالوپینگ مورد بررسی قرار گرفته است. از نتایج چنین برمی‌آید که دامنه‌ی ارتعاشات در سرعت‌های بالا با در نظر گرفتن خروج از مرکزی رفتاری کاملاً متفاوت از خود نشان می‌دهد. بدون در نظر گرفتن خروج از مرکزی دامنه‌ی ارتعاشات با افزایش سرعت، افزایش می‌یابد در حالی‌که با در نظر گرفتن خروج از مرکزی، دامنه در سرعت‌های پایین افزایش ولی در سرعت‌های بالا کاهش می‌یابد.

The Effect of Eccentricity on the Nonlinear Galloping of Cables under Combined Wind Flow and Support Motion in 1:1 Internal Resonance

Saman Sadripour, Amir Jalali*

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
* P.O.B. 3619995161, Shahrood, Iran, amirjalali@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 07 August 2016
Accepted 14 October 2016
Available Online 14 November 2016

Keywords:
Galloping
Cable
Wind Flow
Curved Beam
Perturbation method

ABSTRACT

Galloping of cables is a kind of self-excited vibration and is characterized by high amplitude and low frequency. In this paper for investigating the nonlinear galloping of an inclined cable, considering flexural and torsional stiffness, a cable-beam model is used. The iced cable is formulated under the effects of combined wind flow and support motion. Assuming low sag to span ratio and using physical parameter values of the cable, the governing equations of motion are obtained as classical equations of the perfectly flexible cable, plus a further equation governing the twist motion. These two degrees of freedom system is discretized via the Galerkin method, by taking one in-plane and one out-of-plane modes as trial function. Two resulting non-homogeneous ordinary differential equations are coupled and contain quadratic and cubic nonlinearities in both velocity and displacement terms. By using multiple scale method for 1:1 internal resonance, a first order amplitude-phase modulation equation, governing the slow dynamic of the cable is obtained. In this paper the wind speed and the eccentricity of the iced section are set as control parameters. Without considering the eccentricity, the value of amplitude is increased as the wind speed is increase. But considering the eccentricity, it is reduced to first increasing and then decreasing the amplitude.

1- مقدمه

کابل‌ها سازه‌های سبک و انعطاف‌پذیری هستند که به‌طور گسترده در مهندسی کاربرد دارند و به‌دلیل میل ذاتی آن‌ها به جابه‌جایی‌های بزرگ، مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته‌اند. هنگامی که کابل‌ها در معرض وزش باد قرار می‌گیرند به‌دلیل میرایی کمی که دارند انواع مختلف ارتعاشات را تجربه می‌کنند که از این نوع ارتعاشات می‌توان به ارتعاشات آئولین[1] [1] و گالوپینگ اشاره کرد. ارتعاشات آئولین دارای دامنه‌ی کوچک و فرکانس بالا

[1] Aeolian

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
S. Sadripour, A. Jalali, The Effect of Eccentricity on the Nonlinear Galloping of Cables under Combined Wind Flow and Support in 1:1 Internal Resonance, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 11, pp. 378-388, 2016 (in Persian)

است اما گالوپینگ کابل‌ها یکی از انواع ارتعاشات خود تحریک است که دارای دامنه‌ی بالا و فرکانس پایین می‌باشد و به‌علت نامتقارنی سطح مقطع ناشی از یخ‌زدگی کابل، ضرایب آیرودینامیکی تغییر می‌کنند و در نتیجه ناپایداری رخ می‌دهد و گالوپینگ آغاز می‌شود. این ارتعاشات، خسارت‌های زیادی را به خطوط انتقال نیرو وارد می‌کنند و به‌منظور جلوگیری از این ارتعاشات مطالعه برروی آن‌ها حائز اهمیت می‌باشد. هدف از این مقاله مطالعه برروی ارتعاشات گالوپینگ کابل‌ها می‌باشد.

به‌منظور تحلیل ارتعاشات کابل‌های یخ‌زده، به‌خصوص در طیف غیرخطی، یک فرمول‌بندی دقیق هم برای مدل مکانیکی و هم برای نیروهای آیروالاستیک لازم است. نیروهای آیروالاستیک به سرعت متوسط باد و زاویه‌ی حمله که خود تابعی از سرعت سازه و جریان اطراف آن است، بستگی دارند و معمولا این نیروها را با توجه به نظریه‌ی شبه‌پایا[1] مدل‌سازی می‌کنند.

ابتدایی‌ترین مدل گالوپینگ کابل با درنظر گرفتن نسبت شکم به دهانه‌ی کوچک توسط ایرواین [2] معرفی شد، دِن هارتوگ [3] و پارکینسون [4] مدل یک درجه آزادی را با در نظر گرفتن حرکت عمودی برای گالوپینگ کابل معرفی کردند. جونز [5] و لانگو [6] تقابل میان حرکت عمودی و افقی را درنظر گرفتند و یک مدل گالوپینگ دو درجه آزادی را ارائه دادند. علاوه بر این بلوینز [7] و یو و همکاران [8] تأثیر دوران بر گالوپینگ را بررسی کردند و به این نتیجه رسیدند که دوران در شروع گالوپینگ نقش مهمی را ایفا می‌کند. سپس ایشان [10,9] یک مدل گالوپینگ سه درجه آزادی را ارائه کردند که در آن حرکت عمودی، افقی و دوران را به همراه تأثیر خروج از مرکزی ناشی از وجود یخ در نظر گرفته اند. لانگو و رِگا [11] گالوپینگ غیرخطی کابل‌ها را با استفاده از یک مدل کابل کاملا انعطاف‌پذیر مورد مطالعه قرار دادند و لی [12] این مدل را در شرایط تشدید 2:1 مورد بررسی قرار داده و تنها دوران استاتیکی سطح مقطع آن را در نظر گرفته است. در کار بعدی لانگو و پیکاردو [13] به منظور تصحیح مدل کلاسیک کابل برای به‌حساب آوردن پیچش، یک مدل نسبتاً ساده را ارئه دادند. یو و همکاران [10]، مک‌کانل و چَنگ [14] و وایت و همکاران [15] در کارشان از مدل کابل-تیر استفاده کردند، مزیت این مدل نسبت به مدل‌های قبلی درنظر گرفتن پیچش است، اما در این مدل خمش مورد بررسی قرار نگرفته است و از انحنای اولیه‌ی کابل در تعریف کرنش پیچشی[2] صرف‌نظر شده است. لانگو و همکاران [16] یک مدل خطی از کابل-تیر ارائه کردند که در آن، علاوه بر درنظر گرفتن انحنای کابل، سفتی‌های خمشی و پیچشی نیز درنظر گرفته شده‌اند. در این مدل با حفظ عبارت‌های مهم در معادلات حرکت، معادلات خطی کاهش‌یافته‌ی حرکت استخراج شده است که مشابه معادلات حرکت کابل کاملاً انعطاف‌پذیر به‌همراه یک معادله‌ی اضافه حاکم بر پیچش کابل است که در آن ممان‌های خمشی و پیچشی هر دو درنظر گرفته شده‌اند. سپس ایشان به بررسی تأثیر زاویه‌ی پیچش برروی شروع گالوپینگ [17] پرداختند و به این نتیجه رسیدند که درنظر گرفتن پیچش شرایط پایداری را تحت تأثیر قرار می‌دهد. پس از آن یان و همکاران [18] تاثیر خروج از مرکزی برروی گالوپینگ کابل خطوط انتقال دو سر ثابت را مورد بررسی قرار دادند و از مدل کابل-تیر برای بررسی شرایط تشدید 1:1 استفاده کردند. بررسی پدیده‌ی گالوپینگ با استفاده از مدل‌های المان محدود اخیراً مورد توجه پژوهشگران بسیاری قرار گرفته است به‌عنوان مثال فُتی و همکار [19] و سریواستاوا و چاندرا [20] با استفاده از این مدل‌ها به بررسی پدیده‌ی گالوپینگ پرداخته‌اند. متداول است که نیروهای آیرودینامیکی وارد بر کابل را در حوزه‌ی شبه پایا مدل‌سازی می‌کنند اما برای درنظر گرفتن تأثیر رژیم ناپایا بر پدیده‌ی گالوپینگ رئیسی [21] این پدیده را در حوزه‌ی ناپایا و جریان آشفته مورد بررسی قرار داده است.

در این مقاله، یک مدل غیرخطی کابل-تیر به‌منظور بررسی کابل‌های یخ‌زده که تحت تاثیر جریان باد و حرکت پایه‌ی سمت راست قرار گرفته‌اند، معرفی شده است. کابل موردنظر در این مقاله قادر به جابه‌جایی در سه جهت (مماس بر کابل، عمود بر کابل و عمود بر صفحه‌ی کابل) و دوران در یک جهت می‌باشد، گستره‌ی مورد نظر در این مقاله غیرخطی است و نیروهای آیرودینامیکی در حوزه‌ی شبه پایا مدل‌سازی شده‌اند. مدل بررسی شده در این مقاله، یک مدل غیرخطی از یک کابل شیب‌دار است که در معرض وزش باد و حرکت پایه‌ی سمت راست آن می‌باشد. معادلات حرکت و شرایط مرزی مسأله را می‌توان با استفاده از قانون همیلتون توسعه‌یافته استخراج نمود. معادلات به‌دست آمده، با استفاده از روش گلرکین با در نظر گرفتن یک مُد درون‌صفحه و یک مُد خارج از صفحه گسسته‌سازی می‌شوند، دو معادله‌ی به دست آمده، مرتبه دوم، ناهمگن، کوپله، متغیر با زمان و از نوع معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشند. این معادلات شامل عبارات غیرخطی مرتبه‌ی دو و مرتبه‌ی سه، هم در جابه‌جایی و هم در سرعت هستند. این عبارات غیرخطی را می‌توان با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه در تئوری اغتشاشات[3]، مهار کرد. با شرایط تشدید داخلیِ 1:1، معادلات مدولاسیون دامنه-فاز به دست می‌آیند که بر دینامیک آرام کابل حاکم است. سرعت باد به عنوان پارامتر کنترلی انتخاب شده است.

2- مدل‌سازی

2-1- مدل‌سازی مکانیکی

در این مقاله کابل به صورت یک محور انعطاف‌پذیر با سطح مقطع صلب و صفحه‌ای مدل می‌شود که در آن سطح مقطع عمود بر محور باقی می‌ماند (یعنی سطح مقطع غیرقابل تغییر شکل با برش است). به‌منظور توصیف بهتر مدل کابل-تیر دستگاه مختصات به‌گونه‌ای تعریف می‌گردد که در آن جهت‌های 1، 2 و 3، به ترتیب جهت‌های مماس بر کابل، عمود بر کابل و عمود بر صفحه‌ی کابل می‌باشند. برای توصیف کابل چهار پیکربندی در نظر گرفته می‌شود، الف- پیکربندی Γ_0^1 که در آن کابل فقط تحت جاذبه است و کابل در صفحه‌ی عمودی (x,y) و در نتیجه سطح مقطع آن در صفحه‌ی (y,z) واقع شده است. ب- پیکربندی Γ_0^2 که در آن خروج از مرکزی کابل درنظر گرفته شده است، در این حالت ممان‌های اول سطح S_2 و S_3 به‌منظور درنظر گرفتن خروج از مرکزی تعریف شده‌اند و این پیکربندی نسبت به پیکربندی Γ_0^1 به اندازه‌ی φ_0 دوران می‌کند. ج- پیکربندی مرجع $\bar{\Gamma}$ که در آن کابل در زمان $t = 0^+$ قرار دارد و فقط بخش استاتیکیِ نیروهای آیرودینامیکیِ باد به آن وارد می‌شود و کابل را نسبت به پیکربندیِ قبلی‌اش یعنی Γ_0^2، به اندازه‌ی φ دوران می‌دهد، در این حالت موقعیت هر نقطه از کابل با بردار $\bar{\vec{X}} = \bar{\vec{X}}(s)$ مشخص می‌شود که در آن s پارامتر طول منحنی است و $s\epsilon[0,l]$ و l طول اولیه‌ی کابل است و موقعیت سطح مقطع را می‌توان با استفاده از مختصات اینرسی $\bar{\beta} = \{\overrightarrow{\bar{a}_1}(s,t), \overrightarrow{\bar{a}_2}(s,t), \overrightarrow{\bar{a}_3}(s,t)\}$ تعیین نمود که بر سه‌گانه‌ی فرنت[4] منطبق است. د- پیکربندی واقعی با Γ نمایش داده می‌شود و فرض می‌شود

[1] Quasi static
[2] Torsion strain
[3] Multiple Scale Method in Perturbation
[4] Frenet

که کابل در زمان $t > 0$ در آن قرار دارد و بارهای ناشی از بخش دینامیکی نیروهای آیرودینامیکی باد و حرکت پایه‌ی سمت راست به آن وارد می‌شوند، در این حالت کابل در حالت کلی صفحه‌ای نیست و موقعیت هر نقطه از آن را می‌توان با استفاده از بردار $\vec{X} = \vec{X}(s,t)$ و موقعیت سطح مقطع را با مختصات اینرسی $\beta = \{\vec{a_1}(s,t), \vec{a_2}(s,t), \vec{a_3}(s,t)\}$ نمایش داد. انتقال از پیکربندی مرجع به پیکربندی واقعی را می‌توان با استفاده از بردار جابه‌جایی $\vec{u}$ و زاویه پیچش ϑ به صورت رابطه‌ی (1) و (2) تعریف کرد. پیکربندی مرجع و واقعی و زاویه‌ی آویز کابل در "شکل 1" و مختصات سطح مقطع کابل برای پیکربندی‌های درنظر گرفته شده در "شکل 2" نشان داده شده است.

$$\vec{X} = \vec{\bar{X}} + \vec{u} \quad (1)$$
$$\vec{a_i} = \vec{\bar{a}}_i + \vartheta \times \vec{\bar{a}}_i \quad (2)$$

با استفاده از مرجع [17] و با فرض نسبت شکم به دهانه‌ی کوچک و با در نظر گرفتن سفتی‌های خمشی و پیچشی می‌توان روابط بین کرنش جابه‌جایی را به‌صورت فرمول (3) تا (6) به‌دست آورد.

$$\epsilon = u' - \kappa v + \frac{1}{2}\left[(v' + \kappa u)^2 + w'^2\right] \quad (3)$$
$$k_1 = \vartheta' + \kappa w' + \kappa^2 v w' + w' v'' + \kappa' v w' \quad (4)$$
$$k_2 = -w'' + \kappa \vartheta + [(u' - \kappa v) w']' + \vartheta[(\kappa u)' + v''] \quad (5)$$
$$k_3 = v'' + (\kappa u)' + \vartheta v'' - \frac{1}{2}\kappa\left(\vartheta^2 + w'^2\right) - [(\kappa u + v')(u' - \kappa v)]' \quad (6)$$

که در آن ϵ کرنش کششی، k_1 کرنش پیچشی، k_2 و k_3 کرنش خمشی و $\{u, v, w\}$ مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی $\vec{u}$ در مبنای $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$ است و ϑ پیچش سطح مقطع و κ انحنای اولیه‌ی کابل است. جابه‌جایی‌ها و پیچش سطح مقطع وابسته به پارامتر طول منحنی s و زمان t می‌باشد همچنین علامت ' ′ ' نشان‌دهنده‌ی مشتق نسبت به s می‌باشد.

با استفاده از قانون همیلتون معادلات حرکت را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی (7) به‌دست آورد [6].

$$\begin{aligned}\delta H = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l &\{\rho A(\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{v}\delta\dot{v} + \dot{w}\delta\dot{w}) + \rho J\dot{\vartheta}\delta\dot{\vartheta} \\ &+\rho(\dot{v}S_2\delta\dot{\vartheta} + \dot{\vartheta}S_2\delta\dot{v} + \dot{w}S_3\delta\dot{\vartheta} + \dot{\vartheta}S_3\delta\dot{w}) \\ &+(b_1 - C_u\dot{u})\delta u + (b_2 - C_v\dot{v})\delta v + (b_3 - C_w\dot{w})\delta w \\ &+(c_1 - C_\vartheta\dot{\vartheta})\delta\vartheta + EA\epsilon\delta\epsilon + GJk_1\delta k_1 + EI_2k_2\delta k_2 \\ &+EI_3k_3\delta k_3 + T\delta\epsilon^N + M_2\delta k_2^N + M_3\delta k_3^N \\ &+M_1\delta k_1^N\}dsdt \quad (7)\end{aligned}$$

که در آن l طول، ρ چگالی، A مساحت سطح مقطع، EA سفتی محوری، GJ سفتی پیچشی و EI_2 و EI_3 سفتی‌های خمشی کابل می‌باشند، C_u، C_v، C_w و C_ϑ ضرایب میرایی ساختاری، b_1، b_2، b_3 و c_1 دانسیته‌ی نیروها و کوپل خارجی هستند و بالانویس 'N' نشان‌دهنده‌ی قسمت غیرخطی است، همچنین علامت ' ˙ ' نشان‌دهنده‌ی مشتق نسبت به t می‌باشد و $S_2 = -e_yA$ و $S_3 = e_xA$ به ترتیب ممان اول سطح حول محور $\vec{a_2}$ و $\vec{a_3}$، نیروی $T = \rho A g l^2/8d$ کششی، $M_2 = 0$ و $M_3 = EI_3\kappa$

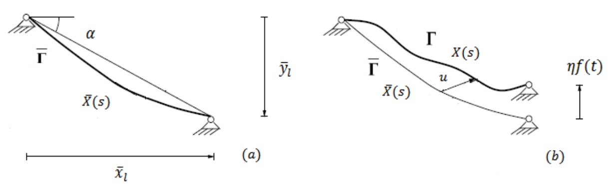

Fig. 1 Inclined cable: (a) reference configuration; (b) reference and actual configuration

شکل 1 کابل آویخته: (a) پیکربندی مرجع؛ (b) پیکربندی مرجع و پیکربندی واقعی

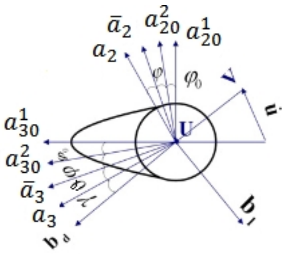

Fig. 2 Cable configurations and corresponding coordinates

شکل 2 پیکربندی های کابل و مختصات مربوط به آن

ممان‌های خمشی و $M_1 = (s - l/2)\rho A g(e_y\cos(\varphi) + e_x\sin(\varphi))$ ممان پیچشی را در زمان $t = 0$ بیان می‌کنند و e_x و e_y خروج از مرکزی مقطع کابل نسبت به محور $\vec{a_2}$ و $\vec{a_3}$ می‌باشد.

با استفاده از مرجع [17] با خلاصه کردن روابط (3) تا (6) به صورت (8) تا (10) و قرار دادن آن‌ها در معادله‌ی (7) معادلات حرکت را می‌توان به صورت روابط (11) تا (14) به همراه شرایط مرزی (15) تا (18) به‌دست آورد.

$$\epsilon = u' - \kappa v + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) \quad (8)$$
$$k_1 = \vartheta' + \kappa w' + w'v'' \quad (9)$$
$$k_2 = -w'' + \kappa\vartheta + \vartheta v'' \quad (10)$$
$$EA\epsilon' - \rho A\ddot{u} - C_u\dot{u} + b_1 = 0 \quad (11)$$
$$EA(\epsilon v')' + EA\kappa\epsilon + Tv'' - \rho A\ddot{v} - C_v\dot{v} - \rho s_2\ddot{\vartheta} + b_2 = 0 \quad (12)$$
$$EA(\epsilon w')' + Tw'' - \rho A\ddot{w} - C_w\dot{w} - \rho s_3\ddot{\vartheta} + b_3 = 0 \quad (13)$$
$$GJk_1{}' - EI_1\kappa k_2 - \rho J\ddot{\vartheta} - C_\vartheta\dot{\vartheta} + c_1 - M_2(v'' + \kappa) - M_3w'' - M_1\kappa v' - \rho s_2\ddot{v} - \rho s_3\ddot{w} = 0 \quad (14)$$
$$u(0) = 0 \quad , \quad u(l) = \eta f(t)\sin\alpha \quad (15)$$
$$v(0) = 0 \quad , \quad v(l) = \eta f(t)\cos\alpha \quad (16)$$
$$w(0) = 0 \quad , \quad w(l) = 0 \quad (17)$$
$$GJk_1(0) = 0 \quad , \quad GJk_1(l) = 0 \quad (18)$$

همچنین از آن‌جا که مربع نسبت فرکانس عرضی به فرکانس طولی و فرکانس عرضی به فرکانس پیچشی کوچک می‌باشد، می‌توان پیچش و کشش را شبه‌پایا فرض کرد، در نتیجه عبارت‌های اینرسی در جهت عرضی و پیچشی برابر با صفر می‌باشند، با قرار دادن $b_1 = 0$ رابطه‌ی (19) به‌دست می‌آید [18].

$$\begin{aligned}u(s,t) = (\eta f(t)\sin\alpha)\frac{s}{l} - \frac{s}{l}\int_0^l\left(\kappa v - \frac{1}{2}\left[v'^2 + w'^2\right]\right)ds \\ +\kappa\int_0^s v(\xi,t)d\xi - \frac{1}{2}\int_0^s\left(v'(\xi,t)^2 + w'(\xi,t)^2\right)d\xi \quad (19)\end{aligned}$$

از آن‌جا که پیچش به راحتی ساده نمی‌شود راحت‌تر است که از آن به‌عنوان معادله‌ی کمکی برای معادلات باقی‌مانده استفاده شود، در نتیجه با قرار دادن $c_1 = 0$ معادلات حرکت به صورت (20) تا (22) خلاصه می‌شوند.

$$\frac{EA}{l}(\kappa + v'')\left[\eta f(t)\sin\alpha - \int_0^l\left(\kappa v - \frac{1}{2}v'^2 - w'^2\right)ds\right] + \bar{T}v'' - \rho A\ddot{v} - \rho s_2\ddot{\vartheta} - C_v\dot{v} + b_2 = 0 \quad (20)$$
$$\frac{EA}{l}w''\left[\eta f(t)\sin\alpha - \int_0^l\left(\kappa v - \frac{1}{2}v'^2 - w'^2\right)ds\right] + \bar{T}w'' - \rho A\ddot{w} - \rho s_3\ddot{\vartheta} - C_w\dot{w} + b_3 = 0 \quad (21)$$
$$GJ\vartheta'' + (GJ + EI_1)\kappa w'' - EI_1\kappa^2\vartheta - M_2(v'' + \kappa) - M_3w'' - M_1\kappa v' - \rho s_2\ddot{v} - \rho s_3\ddot{w} = 0 \quad (22)$$

از آن‌جا که براساس پارامترهای کابل در واقعیت S_2 و S_3 در مقایسه با A خیلی کوچک هستند بنابراین می‌توان از $\rho s_2\ddot{\vartheta}$ و $\rho s_3\ddot{\vartheta}$ در معادلات (20) و (21) صرف‌نظر کرد، سیستم مورد بررسی دارای شرایط مرزی ناهمگن

می‌باشد، لذا به‌منظور به‌دست آوردن سیستم معادل با شرایط مرزی همگن، در ابتدا تبدیل (23) فرض می‌شود.

$$v(s,t) = \hat{v}(s)\eta f(t) + \tilde{v}(s,t) \tag{23}$$

که در آن $\hat{v}(s)$ مولفه‌ی شبه‌پایا و $\tilde{v}(s,t)$ مولفه‌ی دینامیکی حل می‌باشد. مولفه‌ی شبه‌پایای $\hat{v}(s)$ را از حل سیستم ناهمگن خطی‌شده‌ی (24) به‌همراه شرایط مرزی (25) می‌توان به‌دست آورد، که استاتیک صفحه‌ای و خطی‌شده‌ی کابل را توصیف می‌کند و حرکت پایه با دامنه‌ی واحد و مستقل از زمان به آن اعمال می‌شود.

$$\frac{EA}{l}\kappa\sin\alpha - \frac{EA}{l}\kappa^2\int_0^l \hat{v}\,ds + T\hat{v}'' = 0 \tag{24}$$

$$\hat{v}(0) = 0 \quad , \quad \hat{v}(l) = \cos\alpha \tag{25}$$

حل خصوصی این سیستم به‌صورت رابطه (26) به‌دست می‌آید که در آن C_1 و C_2 با روابط (27) و (28) تعریف شده است.

$$\hat{v}(s) = C_1 s^2 + C_2 s \tag{26}$$

$$C_1 = \frac{-3EAmg\cos^2(\alpha)\big(2\sin(\alpha)\bar{T} - mgl\cos^2(\alpha)\big)}{EAm^2g^2\cos^3(\alpha)l^3 + 12\bar{T}^3 l} \tag{27}$$

$$C_2 = \frac{6EAmgl\cos(\alpha)\sin(\alpha)\bar{T} - 2EAm^2g^2\cos^3(\alpha)l^2 + 12\bar{T}^3}{EAm^2g^2\cos^3(\alpha)l^3 + 12\bar{T}^3 l} \tag{28}$$

2-2- بی‌بعد سازی معادلات

با تعریف مقادیر (29)، شکل بی‌بعد معادلات حرکت به‌صورت روابط (30) تا (32) به‌دست می‌آید.

$$s^* = \frac{s}{l} \qquad v^* = \frac{v}{l}$$
$$u^* = \frac{u}{l} \qquad w^* = \frac{w}{l}$$
$$t^* = \omega t \qquad \vartheta^* = \vartheta \tag{29}$$

$$\begin{aligned}&(\hat{v}''\eta f + v'' + \kappa)[\eta f\sin\alpha \\ &\quad - \int_0^1 [\kappa(\hat{v}\eta f + v) - \frac{1}{2}(\hat{v}'\eta f + v')^2 - \frac{1}{2}w'^2]ds] \\ &\quad + \tau(\hat{v}''\eta f + v'') + b_2 - m\big(\hat{v}\eta\ddot{f} + \ddot{v}\big) - c_v\big(\hat{v}\eta\dot{f} + \dot{v}\big) = 0\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}&w''[\eta f\sin\alpha \\ &\quad - \int_0^1 [\kappa(\hat{v}\eta f + v) - \frac{1}{2}(\hat{v}'\eta f + v')^2 - \frac{1}{2}w'^2]ds] \\ &\quad + \tau w'' + b_3 - m\ddot{w} - c_w\dot{w} = 0\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}&\chi\vartheta'' - \kappa^2\vartheta + (1+\chi)\kappa w'' - \frac{M_2 l}{EI}(\hat{v}''\eta f + v'' + \kappa) \\ &\quad - \frac{M_3 l}{EI}w'' - \frac{M_1 l}{EI}\kappa(\hat{v}'\eta f + v') - \frac{\rho s_2\omega^2 l^3\ddot{v}}{EI} \\ &\quad - \frac{\rho s_3\omega^2 l^3\ddot{w}}{EI} = 0\end{aligned} \tag{32}$$

که در آن بالانویس '*' به‌منظور ساده‌سازی حذف شده است و عبارت‌های بی‌بعد در آن به‌صورت (33) به‌دست آمده است.

$$m^* = \frac{\omega^2 l^2}{EA}m \qquad \omega = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{\bar{T}}{m}}$$
$$c_\vartheta{}^* = \frac{\omega}{EA}c_\vartheta \qquad c_{a_1}{}^* = \frac{l}{EA}c_{a_1}$$
$$\tau = \frac{\bar{T}}{EA} \qquad c_n{}^* = \frac{\omega l^2}{EA}c_n$$
$$I_1{}^* = \frac{\omega^2}{EA}I_1 \qquad b_i{}^* = \frac{l}{EA}b_i$$
$$\chi = \frac{GJ}{EI} \qquad \kappa^* = \frac{\kappa}{l} \tag{33}$$

که در آن زیرنویس n نمایش‌دهنده‌ی u, v, w است.

3-2- مدل‌سازی آیرودینامیکی

با استفاده از یک مدل آیرودینامیکی ساده [17,16] نیروهای آیرودینامیکی b_2 و b_3 را با استفاده از فرضیات زیر می‌توان به‌دست آورد: الف- تئوری شبه پایا در نظر گرفته شده است [18]؛ ب- از انحنای کابل صرف‌نظر شده؛ ج- یخ به‌طور یکنواخت طول کابل را پوشانده؛ د- از کوپل‌های آیرودینامیکی صرف نظر شده؛ ه- بارها با درنظر گرفتن دوران پیچشی به‌دست آمده‌اند و از دوران‌های خمشی صرف‌نظر شده است. مانند آن‌چه در شکل 3 نشان داده شده است، باد با سرعت U به صفحه‌ی کابل می‌وزد. با تصویر کردن سرعت باد برروی سطح مقطع کابل با استفاده از رابطه‌ی (34) مولفه‌ی $\tilde{U}$ که برروی مقطع کابل اثر می‌گذارد به‌دست می‌آید که در آن β زاویه‌ی انحراف کابل نسبت به باد و α زاویه‌ی آویز کابل می‌باشد. زاویه‌ی حمله‌ی γ به‌صورت زاویه‌ی بین سرعت باد وزیده شده به مقطع و یک محور مرجع تعریف می‌شود که در این مقاله محور $\overrightarrow{a_3}$ به‌عنوان محور مرجع درنظر گرفته شده است. زاویه‌ی حمله‌ی γ را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی (35) به‌دست آورد که در آن $\tilde{U} = \left\|\vec{\tilde{U}}\right\|$ می‌باشد.

$$\tilde{U} = U\sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(a)\sin^2(\beta)} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\gamma &= -\arcsin\Big(\frac{\vec{\tilde{U}}}{\tilde{U}}\cdot\overrightarrow{a_2}\Big) \\ &= -\arcsin\Big(\frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(a)\sin^2(\beta)}}\Big)\end{aligned} \tag{35}$$

نیروهای آیرودینامیکی b_2 و b_3 را با استفاده از رابطه‌ی (36) می‌توان به‌دست آورد.

$$b_i = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{air}}Vr(C_d[\gamma]\vec{V} + C_l[\gamma]\overrightarrow{a_3}\times\vec{V}) \tag{36}$$

که در آن γ زاویه‌ی حمله، $\vec{V}$ سرعت نسبی باد نسبت به مقطع، ρ_{air} چگالی هوا، r شعاع مشخصه‌ی کابل و $V = \left\|\vec{V}\right\|$ اندازه‌ی سرعت نسبی است، همچنین C_l و C_d ضرایب آیرودینامیکی لیفت و درگ هستند که به شکل مقطع و زاویه‌ی حمله بستگی دارند و با رابطه‌ی (37) تعریف می‌شوند.

$$C_l[\gamma] = aa_{1,0} + aa_{1,1}\chi + \frac{1}{2}aa_{1,2}\chi^2 + \frac{1}{6}aa_{1,3}\chi^3$$

$$C_d[\gamma] = aa_{2,0} + aa_{2,1}\chi + \frac{1}{2}aa_{2,2}\chi^2 + \frac{1}{6}aa_{2,3}\chi^3 \tag{37}$$

که در آن χ به‌صورت (38) تعریف می‌شود و ضرایب $aa_{i,j}$ ضرایب آیرودینامیکی در پیکربندی مرجع می‌باشند که با استفاده از نتایج تجربی به‌دست می‌آیند و به‌صورت روابط (39) و (40) تعریف می‌شود.

$$\chi = -\vartheta + \frac{\dot{v}}{U}\cos(\varphi) - \frac{\dot{w}}{U}\sin(\varphi) \tag{38}$$

$$aa_{1,0} = \overline{c_l[\gamma]} \quad , \quad aa_{1,1} = (\overline{c_l[\gamma]})'$$
$$aa_{1,2} = (\overline{c_l[\gamma]})'' \quad , \quad aa_{1,3} = (\overline{c_l[\gamma]})''' \tag{39}$$
$$aa_{2,0} = \overline{c_d[\gamma]} \quad , \quad aa_{2,1} = (\overline{c_d[\gamma]})'$$
$$aa_{2,2} = (\overline{c_d[\gamma]})'' \quad , \quad aa_{2,3} = (\overline{c_d[\gamma]})''' \tag{40}$$

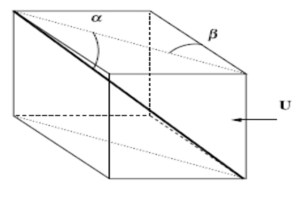

Fig. 3 Inclined cable subjected to wind with slope α and yaw angle β

شکل 3 کابل شیب‌دار با شیب α و زاویه انحراف β در معرض باد

با قرار دادن معادلات (34) و (35) و معادلات (37) تا (40) در معادله‌ی (36)، بسط آن تا مرتبه سوم و سپس تصویر کردن آن بر روی محورهای $\overrightarrow{a_2}$ و $\overrightarrow{a_3}$، مؤلفه‌های نیرو به صورت رابطه‌ی (41) به‌دست می‌آیند.

$$b_i = \bar{b}_i + \sum_{j=1}^{3} c_{ij}(\varphi)\xi_j + \sum_{j,k=1}^{3} c_{ijk}(\varphi)\xi_j\xi_k + \sum_{j,k,l=1}^{3} c_{ijkl}\,\xi_j\xi_k\xi_l \qquad (41)$$

که برای $i = 2,3$ برقرار است و $\xi := (\vartheta, \dot{v}, \dot{w})^T$ برداری است که در آن تمامی متغیرهای مستقل قرار دارند، c_{ij}، c_{ijk} و c_{ijkl} ضرایبی هستند که به C_d و C_l و مشتق آن‌ها نسبت به φ بستگی دارند و تمامی این متغیرها در پیکربندی اولیه محاسبه شده است. ضرایب آیرودینامیکی در پیوست ذکر شده است. $\bar{b}_i$ بخش استاتیکی نیروهای آیرودینامیکی باد و $b_i - \bar{b}_i$ بخش دینامیکی نیروهای باد است، از آن‌جایی که فرض شده که پیکربندی مرجع در زمان $t = 0^+$ تحت قسمت استاتیکی نیروهای باد قرار گرفته است و از آن‌جا که این نیروها در طول کابل یکنواخت می‌باشد، در نتیجه این پیکربندی صفحه‌ای است و با صفحه‌ی عمودی زاویه‌ی φ را ایجاد می‌کند در نتیجه تعادل نیازمند این است که برآیند نیروها در صفحه‌ی کابل قرار گیرد، برای حذف مولفه‌ی برآیند در جهت عمود بر صفحه‌ی کابل رابطه‌ی (42) برقرار است.

$$\bar{b}_3(\varphi, U) + mg\sin(\varphi) = 0 \qquad (42)$$

با استفاده از رابطه‌ی (42) می‌توان مسیر تعادلی حرکت کابل را به‌دست آورد.

3- گسسته‌سازی

در این قسمت معادلات (30) تا (32) با استفاده از روش گلرکین با درنظر گرفتن توابع $v = f_1[s]q_1[t]$، $w = f_2[s]q_2[t]$ و $\vartheta = f_3[s]q_3[t]$ گسسته می‌شود که در آن $f_1[s]$، $f_2[s]$ و $f_3[s]$ شکل مُد در جهت عمود بر کابل، عمود بر صفحه‌ی کابل و در جهت پیچش و $q_1[t]$، $q_2[t]$ و $q_3[t]$ دامنه‌ی آن می‌باشد، با قرار دادن این توابع در معادله‌ی (22) رابطه‌ی (43) به‌دست می‌آید [18]، همچنین با استفاده از رابطه‌ی (43) و توابع تعریف شده، مدل گسسته به‌صورت رابطه‌ی (44) و (45) به‌دست می‌آید.

$$q_3 = \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2 \qquad (43)$$

$$\begin{aligned}
&\ddot{q}_1 + {\omega_1}^2 - \big(\big(h_1\eta\dot{f} + h_2\eta^2\dot{f}^2 + h_3\eta f + h_4\eta^2 f^2\big)q_1 \\
&\quad + \big(m_4 + h_{4,1}\eta\dot{f} + h_{4,2}\eta^2\dot{f}^2\big)q_2 \\
&\quad + \big(m_5 + h_{5,1}\eta\dot{f} + h_{5,2}\eta f\big){q_1}^2 \\
&\quad + \big(m_7 + h_{7,1}\eta\dot{f} + h_{7,2}\eta f\big){q_2}^2 + m_{15}{q_1}^3 + m_{18}{q_2}^3 \\
&\quad + \big(m_6 + h_{6,1}\eta\dot{f}\big)q_1q_2 + \big(m_8 + h_{8,1}\eta\dot{f}\big)q_1\dot{q}_1 \\
&\quad + \big(m_9 + h_{9,1}\eta\dot{f}\big)q_2\dot{q}_1 + \big(m_{11} + h_{11,1}\eta\dot{f}\big)q_1\dot{q}_2 \\
&\quad + \big(m_{12} + h_{12,1}\eta\dot{f}\big)q_2\dot{q}_2 + m_{16}{q_1}^2q_2 + m_{17}q_1{q_2}^2 \\
&\quad + m_{19}\dot{q}_1{q_1}^2 + m_{21}\dot{q}_1{q_2}^2 + m_{25}\dot{q}_2{q_1}^2 + m_{27}\dot{q}_2{q_2}^2 \\
&\quad + m_{22}{\dot{q}_1}^2q_1 + m_{23}{\dot{q}_1}^2q_2 + m_{31}{\dot{q}_2}^2q_1 + m_{32}{\dot{q}_2}^2q_2 \\
&\quad + m_{20}q_1q_2\dot{q}_1 + m_{26}q_1q_2\dot{q}_2 + m_{28}q_1\dot{q}_1\dot{q}_2 \\
&\quad + m_{29}q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_{34}{\dot{q}_2}^3 + \big(m_{14} + h_{14,1}\eta\dot{f}\big){\dot{q}_2}^2 \\
&\quad + \big(m_2 + h_{2,1}\eta\dot{f} + h_{2,2}\eta^2\dot{f}^2\big)\dot{q}_2 + m_{24}{\dot{q}_1}^3 \\
&\quad + \big(m_{10} + h_{10,1}\eta\dot{f}\big){\dot{q}_1}^2 \\
&\quad + \big(m_1 + h_{1,1}\eta\dot{f} + h_{1,2}\eta^2\dot{f}^2\big)\dot{q}_1 \\
&\quad + \big(m_{13} + h_{13,1}\eta\dot{f}\big)\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_{30}{\dot{q}_1}^2\dot{q}_2 + m_{33}\dot{q}_1{\dot{q}_2}^2 \\
&\quad + h_{35,1}\eta f + h_{35,2}\eta^2 f^2 + h_{35,3}\eta^3 f^3 + h_{35,4}\eta\dot{f} \\
&\quad + h_{35,5}\eta^2\dot{f}^2 + h_{35,6}\eta^3\dot{f}^3 + h_{35,7}\eta\ddot{f}\big) = 0
\end{aligned} \qquad (44)$$

$$\begin{aligned}
&\ddot{q}_2 + {\omega_2}^2 - \big(\big(n_3 + g_{3,1}\eta\dot{f} + g_{3,2}\eta^2\dot{f}^2\big)q_1 \\
&\quad + \big(g_1\eta\dot{f} + g_2\eta^2\dot{f}^2 + g_3\eta f + g_4\eta^2 f^2\big)q_2 \\
&\quad + \big(n_5 + g_{5,1}\eta\dot{f}\big){q_1}^2 + \big(n_7 + g_{7,1}\eta\dot{f}\big){q_2}^2 + n_{15}{q_1}^3 \\
&\quad + n_{18}{q_2}^3 + \big(n_6 + g_{6,1}\eta\dot{f} + g_{6,2}\eta f\big)q_1q_2 \\
&\quad + \big(n_8 + g_{8,1}\eta\dot{f}\big)q_1\dot{q}_1 + \big(n_9 + g_{9,1}\eta\dot{f}\big)q_2\dot{q}_1 \\
&\quad + \big(n_{11} + g_{11,1}\eta\dot{f}\big)q_1\dot{q}_2 + \big(n_{12} + g_{12,1}\eta\dot{f}\big)q_2\dot{q}_2 \\
&\quad + n_{16}{q_1}^2q_2 + n_{17}q_1{q_2}^2 + n_{19}\dot{q}_1{q_1}^2 + n_{21}\dot{q}_1{q_2}^2 \\
&\quad + n_{25}\dot{q}_2{q_1}^2 + n_{27}\dot{q}_2{q_2}^2 + n_{22}{\dot{q}_1}^2q_1 + n_{23}{\dot{q}_1}^2q_2 \\
&\quad + n_{31}{\dot{q}_2}^2q_1 + n_{32}{\dot{q}_2}^2q_2 + n_{20}q_1q_2\dot{q}_1 + n_{26}q_1q_2\dot{q}_2 \\
&\quad + n_{28}q_1\dot{q}_1\dot{q}_2 + n_{29}q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + n_{34}{\dot{q}_2}^3 \\
&\quad + \big(n_{14} + g_{14,1}\eta\dot{f}\big){\dot{q}_2}^2 \\
&\quad + \big(n_2 + g_{2,1}\eta\dot{f} + g_{2,2}\eta^2\dot{f}^2\big)\dot{q}_2 + n_{24}{\dot{q}_1}^3 \\
&\quad + \big(n_{10} + g_{10,1}\eta\dot{f}\big){\dot{q}_1}^2 \\
&\quad + \big(n_1 + g_{1,1}\eta\dot{f} + g_{1,2}\eta^2\dot{f}^2\big)\dot{q}_1 \\
&\quad + \big(n_{13} + g_{13,1}\eta\dot{f}\big)\dot{q}_1\dot{q}_2 + n_{30}{\dot{q}_1}^2\dot{q}_2 + n_{33}\dot{q}_1{\dot{q}_2}^2 \\
&\quad + g_{35,1}\eta\dot{f} + g_{35,2}\eta^2\dot{f}^2 + h_{35,3}\eta^3\dot{f}^3\big) = 0
\end{aligned} \qquad (45)$$

به‌طوری که در آن $q_1(t)$ و $q_2(t)$ به‌ترتیب دامنه‌ی درون صفحه و خارج از صفحه را نمایش می‌دهند و که در آن ω_1 و ω_2 فرکانس‌های دایروی به ترتیب در جهت عمود بر کابل و عمود بر صفحه‌ی کابل و ضرایب m_i، n_i، g_i و h_i ضرایب ثابت می‌باشند.

4- تئوری اغتشاشات

در این مقاله روش مقیاس‌های چندگانه (MSM)، به‌منظور توصیف دینامیک آرام سیستم، در معادلات (44) و (45) به‌کار می‌رود. از آن‌جا که در این معادلات ترم‌های غیرخطی مرتبه دو و مرتبه سه وجود دارند، معادلات تئوری اغتشاشات تا مرتبه‌ی سه مورد نیاز است. در این مقاله رزونانس داخلی 1:1 مورد بررسی قرار می‌گیرد یعنی $\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon\sigma$ و متغیرهای زمانی جدید به صورت (46) تعریف می‌شوند .که در آن T_0 مقیاس زمانی سریع و T_1 و T_2 مقیاس‌های زمانی آرام می‌باشند. حرکت پایه از نوع سینوسی به‌صورت $f(t) = \eta sin(\Omega t)$ فرض می‌شود که در آن η دامنه‌ی تحریک پایه و از مرتبه ε است. فرض می‌شود که ضرایب (m_1، m_2، m_4، n_1، n_2 و n_3) از مرتبه‌ی ε باشند و ترم‌های تحریک خارجی به‌گونه‌ای مرتبه‌بندی می‌شوند که در مرتبه سوم ظاهر شوند.

$$T_n = \varepsilon^n t, \quad n = 0,1,2 \qquad (46)$$

$$q_i(t, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{3} \varepsilon^j q_{i,j-1}(T_0, T_1, T_2) \quad , \quad i = 1,2 \qquad (47)$$

$$m_i = \varepsilon m m_i \quad , \quad n_i = \varepsilon n n_i \quad , \quad i = 1-4 \qquad (48)$$

مشتق زمانی اول و دوم نیز به‌صورت رابطه‌ی (48) و (49) تعریف می‌شوند که در آن $D_i = \partial/\partial T_i$ می‌باشد.

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \cdots \qquad (49)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = {D_0}^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2\big({D_1}^2 + 2D_0D_2\big) + \cdots \qquad (50)$$

با قرار دادن معادلات (46) تا (50) در معادلات (43) و (44) و مرتب کردن آن براساس توان ε معادله‌ی (51) و (52) برای $O(\varepsilon)$ و معادله‌ی (53) و (54) برای $O(\varepsilon^2)$ و معادله (55) و (56) برای $O(\varepsilon^3)$ به‌دست می‌آید.

$O(\varepsilon)$

$$D_0^2 q_{1,0} + \omega_1^2 q_{1,0} = 0 \qquad (51)$$

$$D_0^2 q_{2,0} + \omega_2^2 q_{2,0} = 0 \qquad (52)$$

$O(\varepsilon^2)$

$$\begin{aligned}
&{D_0}^2 q_{1,1} + {\omega_1}^2 q_{1,1} = -2D_0D_1q_{1,0} + m_{12}q_{2,0}D_0q_{2,0} \\
&\quad + m_7{q_{2,0}}^2 + m_8q_{1,0}D_0q_{1,0} + m_{14}\big(D_0q_{2,0}\big)^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+m_{13}D_0q_{1,0}D_0q_{2,0} + m_6q_{1,0}q_{2,0} + m_{11}q_{1,0}D_0q_{2,0}\\
&+mm_1D_0q_{1,0} + m_{10}\left(D_0q_{1,0}\right)^2 + m_9q_{2,0}D_0q_{1,0}\\
&+mm_4q_{2,0} + mm_2D_0q_{2,0} + m_5{q_{1,0}}^2
\end{aligned}
\tag{53}
$$

$$
\begin{aligned}
{D_0}^2q_{2,1} + {\omega_2}^2q_{2,1} = &-2D_0D_1q_{2,0} + n_{10}\left(D_0q_{1,0}\right)^2\\
&+n_{11}q_{1,0}D_0q_{2,0} + n_6q_{1,0}q_{2,0} + nn_3q_{1,0} + n_7{q_{2,0}}^2\\
&+n_{13}D_0q_{1,0}D_0q_{2,0} + n_5{q_{1,0}}^2 + nn_1D_0q_{1,0}\\
&+n_{12}q_{2,0}D_0q_{2,0} + n_9q_{2,0}D_0q_{1,0} + nn_2D_0q_{2,0}\\
&+n_8q_{1,0}D_0q_{1,0} + n_{14}\left(D_0q_{2,0}\right)^2
\end{aligned}
\tag{54}
$$

$O(\varepsilon^3)$

$$
\begin{aligned}
{D_0}^2q_{1,2} + {\omega_1}^2q_{1,2} = &-2D_0D_2q_{1,0} - {D_1}^2q_{1,0} - 2D_0D_1q_{1,1}\\
&+m_{23}q_{2,0}\left(D_0q_{1,0}\right)^2 + m_9q_{2,0}D_0q_{1,1} + m_9q_{2,0}D_1q_{1,0}\\
&+m_{21}{q_{2,0}}^2D_0q_{1,0} + m_{20}q_{1,0}q_{2,0}D_0q_{1,0} + m_9q_{2,1}D_0q_{1,0}\\
&+m_{29}q_{2,0}D_0q_{1,0}D_0q_{2,0} + m_{28}q_{1,0}D_0q_{1,0}D_0q_{2,0}\\
&+m_{13}D_0q_{1,0}D_0q_{2,1} + m_{13}D_0q_{1,0}D_1q_{2,0} + m_{13}D_0q_{1,1}D_0q_{2,0}\\
&+m_{13}D_1q_{1,0}D_0q_{2,0} + m_{30}\left(D_0q_{1,0}\right)^2D_0q_{2,0}\\
&+m_{33}D_0q_{1,0}\left(D_0q_{2,0}\right)^2 + m_{19}{q_{1,0}}^2D_0q_{1,0}\\
&+m_{22}q_{1,0}\left(D_0q_{1,0}\right)^2 + m_8q_{1,0}D_1q_{1,0} + m_{34}\left(D_0q_{2,0}\right)^3\\
&+m_6q_{1,0}q_{2,1} + m_6q_{1,1}q_{2,0} + m_{32}q_{2,0}\left(D_0q_{2,0}\right)^2\\
&+m_{17}q_{1,0}{q_{2,0}}^2 + m_{27}{q_{2,0}}^2D_0q_{2,0} + 2m_7q_{2,0}q_{2,1}\\
&+2m_5q_{1,0}q_{1,1} + m_{24}\left(D_0q_{1,0}\right)^3 + m_{16}{q_{1,0}}^2q_{2,0}\\
&+m_{12}q_{2,0}D_1q_{2,0} + mm_4q_{2,1} + m_{18}{q_{2,0}}^3 + m_{15}{q_{1,0}}^3\\
&+m_{11}q_{1,0}D_0q_{2,1} + m_{11}q_{1,0}D_1q_{2,0} + m_{11}q_{1,1}D_0q_{2,0}\\
&+m_{25}{q_{1,0}}^2D_0q_{2,0} + m_{26}q_{1,0}q_{2,0}D_0q_{2,0}\\
&+m_{31}q_{1,0}\left(D_0q_{2,0}\right)^2 + m_{12}q_{2,0}D_0q_{2,1} + m_{12}q_{2,1}D_0q_{2,0}\\
&+2m_{14}D_0q_{2,0}D_0q_{2,1} + 2m_{14}D_0q_{2,0}D_1q_{2,0} + m_8q_{1,0}D_0q_{1,1}\\
&+m_8q_{1,1}D_0q_{1,0} + 2m_{10}D_0q_{1,0}D_0q_{1,1} + 2m_{10}D_0q_{1,0}D_1q_{1,0}\\
&+mm_2D_0q_{2,1} + mm_2D_1q_{2,0} + mm_1D_0q_{1,1} + mm_1D_1q_{1,0}\\
&+h_{35,6}\eta^3\dot f^3 + h_{35,3}\eta^3f^3 + h_{12,1}\eta\dot f q_{2,0}D_0q_{2,0}\\
&+h_{2,1}\eta\dot f D_0q_{2,0} + h_{2,2}\eta^2\dot f^2D_0q_{2,0} + h_{14,1}\eta\dot f\left(D_0q_{2,0}\right)^2\\
&+h_{6,1}\eta\dot f q_{1,0}q_{2,0} + h_{8,1}\eta\dot f q_{1,0}D_0q_{1,0} + h_{10,1}\eta\dot f\left(D_0q_{1,0}\right)^2\\
&+h_{11,1}\eta\dot f D_0q_{1,0} + h_{1,2}\eta^2\dot f^2D_0q_{1,0} + h_{9,1}\eta\dot f q_{2,0}D_0q_{1,0}\\
&+h_{11,1}\eta\dot f q_{1,0}D_0q_{2,0} + h_{13,1}\eta\dot f D_0q_{1,0}D_0q_{2,0} + h_{35,5}\eta^2\dot f^2\\
&+h_{35,4}\eta\dot f + h_{35,1}\eta f + h_{35,2}\eta^2f^2 + h_{35,7}\eta\ddot f + h_{4,1}\eta\dot f q_{2,0}\\
&+h_{4,2}\eta^2\dot f^2q_{2,0} + h_{7,1}\eta\dot f {q_{2,0}}^2 + h_{7,2}\eta f {q_{2,0}}^2 + h_1\eta\dot f q_{1,0}\\
&+h_2\eta^2\dot f^2q_{1,0} + h_3\eta f q_{1,0} + h_4\eta^2f^2q_{1,0} + h_{5,1}\eta\dot f {q_{1,0}}^2\\
&+h_{5,2}\eta f {q_{1,0}}^2
\end{aligned}
\tag{55}
$$

$$
\begin{aligned}
{D_0}^2q_{2,2} + {\omega_2}^2q_{2,2} = &-2D_0D_2q_{2,0} - {D_1}^2q_{2,0} - 2D_0D_1q_{2,1}\\
&+n_{29}q_{2,0}D_0q_{1,0}D_0q_{2,0} + n_{28}q_{1,0}D_0q_{1,0}D_0q_{2,0}\\
&+n_{13}D_1q_{1,0}D_0q_{2,0} + n_{13}D_0q_{1,0}D_0q_{2,1} + n_{13}D_0q_{1,0}D_1q_{2,0}\\
&+n_{13}D_0q_{1,1}D_0q_{2,0} + n_{30}\left(D_0q_{1,0}\right)^2D_0q_{2,0}\\
&+n_{33}D_0q_{1,0}\left(D_0q_{2,0}\right)^2 + n_{32}q_{2,0}\left(D_0q_{2,0}\right)^2\\
&+n_{27}{q_{2,0}}^2D_0q_{2,0} + n_6q_{1,0}q_{2,1} + n_6q_{1,1}q_{2,0} + n_{17}q_{1,0}{q_{2,0}}^2\\
&+n_{16}{q_{1,0}}^2q_{2,0} + n_{19}{q_{1,0}}^2D_0q_{1,0} + 2n_7q_{2,0}q_{2,1}\\
&+2n_5q_{1,0}q_{1,1} + n_{22}q_{1,0}\left(D_0q_{1,0}\right)^2 + n_{34}\left(D_0q_{2,0}\right)^3\\
&+n_{12}q_{2,0}D_1q_{2,0} + n_{24}\left(D_0q_{1,0}\right)^3 + n_8q_{1,0}D_1q_{1,0} + n_{15}{q_{1,0}}^3\\
&+n_{18}{q_{2,0}}^3 + 2n_{14}D_0q_{2,0}D_1q_{2,0} + n_{12}q_{2,0}D_0q_{2,1}\\
&+n_{12}q_{2,1}D_0q_{2,0} + 2n_{10}D_0q_{1,0}D_1q_{1,0} + n_8q_{1,0}D_0q_{1,1}\\
&+n_8q_{1,1}D_0q_{1,0} + 2n_{10}D_0q_{1,0}D_0q_{1,1} + n_{23}q_{2,0}\left(D_0q_{1,0}\right)^2\\
&+n_{20}q_{1,0}q_{2,0}D_0q_{1,0} + n_9q_{2,0}D_0q_{1,1} + n_9q_{2,0}D_1q_{1,0}\\
&+n_9q_{2,1}D_0q_{1,0} + n_{31}q_{1,0}\left(D_0q_{2,0}\right)^2 + n_{25}{q_{1,0}}^2D_0q_{2,0}\\
&+n_{26}q_{1,0}q_{2,0}D_0q_{2,0} + n_{11}q_{1,0}D_0q_{2,1} + n_{11}q_{1,0}D_1q_{2,0}\\
&+n_{11}q_{1,1}D_0q_{2,0} + n_{21}{q_{2,0}}^2D_0q_{1,0} + nn_1D_0q_{1,1}\\
&+nn_1D_1q_{1,0} + nn_2D_0q_{2,1} + nn_2D_1q_{2,0} + nn_3q_{1,1}\\
&+g_{35,3}\eta^3\dot f^3 + g_{10,1}\eta\dot f(D_0q_{1,0})^2 + g_{1,1}\eta\dot f D_0q_{1,0}\\
&+g_{1,2}\eta^2\dot f^2D_0q_{1,0} + g_{8,1}\eta\dot f q_{1,0}D_0q_{1,0} + g_{6,2}\eta f q_{1,0}q_{2,0}\\
&+g_{14,1}\eta\dot f(D_0q_{2,0})^2 + g_{2,1}\eta\dot f D_0q_{2,0} + g_{2,2}\eta^2\dot f^2D_0q_{2,0}\\
&+g_{6,1}\eta\dot f q_{1,0}q_{2,0} + g_{12,1}\eta\dot f q_{2,0}D_0q_{2,0} + g_{9,1}\eta\dot f q_{2,0}D_0q_{1,0}\\
&+g_{11,1}\eta\dot f q_{1,0}D_0q_{2,0} + g_{13,1}\eta\dot f D_0q_{1,0}D_0q_{2,0} + g_{35,1}\eta\dot f\\
&+g_{35,2}\eta^2\dot f^2 + g_4\eta^2f^2q_{2,0} + g_{7,1}\eta\dot f {q_{2,0}}^2 + g_{5,1}\eta\dot f {q_{1,0}}^2\\
&+g_{3,1}\eta\dot f q_{1,0} + g_{3,2}\eta^2\dot f^2q_{1,0} + g_1\eta\dot f q_{2,0} + g_2\eta^2\dot f^2q_{2,0}\\
&+g_3\eta f q_{2,0}
\end{aligned}
\tag{56}
$$

پاسخ معادلات (51) و (52) به‌ترتیب به شکل رابطه‌ی (57) و (58) به‌دست می‌آید، که در آن $\bar{A}_1$ و $\bar{A}_2$ به‌ترتیب مزدوج مختلط A_1 و A_2 هستند و هردو تابعی از (T_1, T_2) می‌باشند، با جای‌گذاری $q_{1,0}$ و $q_{2,0}$ در معادله‌ی $O(\varepsilon^2)$ و معادله‌ی $O(\varepsilon^3)$ و حذف عبارت‌هایی که منجر به عبارات سکولار می‌شوند، روابط (59) تا (62) به‌دست می‌آیند.

$$q_{1,0} = A_1e^{i\omega_1T_0} + \bar{A}_1e^{-i\omega_1T_0} \tag{57}$$

$$q_{2,0} = A_2e^{i\omega_2T_0} + \bar{A}_2e^{-i\omega_2T_0} \tag{58}$$

$$D_1A_1 = f_1(A_1, A_2) \tag{59}$$

$$D_1A_2 = f_2(A_1, A_2) \tag{60}$$

$$D_2A_1 = g1(A_1, A_2, A_1^2\bar{A}_1, A_1A_2\bar{A}_1, A_2^2\bar{A}_1, A_1^2\bar{A}_2, A_1A_2\bar{A}_2, A_2^2\bar{A}_2) \tag{61}$$

$$D_2A_2 = g2(A_1, A_2, A_1^2\bar{A}_1, A_1A_2\bar{A}_1, A_2^2\bar{A}_1, A_1^2\bar{A}_2, A_1A_2\bar{A}_2, A_2^2\bar{A}_2) \tag{62}$$

با استفاده از تعریف شکل قطبی برای A_1 و A_2 به‌صورت (63) که در آن a_j و α_j دامنه و فاز متغیر با زمان هستند، معادلات کاهش‌یافته‌ی مدولاسیون دامنه با تعریف (64)، به‌صورت روابط (65) تا (67) به‌دست می‌آید.

$$A_j = \frac{1}{2}a_j[t]\exp\left(i\alpha_j[t]\right) \qquad j = 1,2 \tag{63}$$

$$\Psi[t] = \alpha_2[t] - \alpha_1[t] + \varepsilon\sigma \tag{64}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_1 = &\ pp_{1,1}a_1 + \frac{1}{4}pp_{3,1}a_1^3\\
&+\left(\cos(\Psi)\,pp_{2,1} - \sin(\Psi)\,pp_{2,2}\right)a_2\\
&+\frac{1}{4}(\cos(\Psi)\,pp_{4,1} - \sin(\Psi)\,pp_{4,2} + \cos(\Psi)\,pp_{6,1}\\
&+\sin(\Psi)\,pp_{6,2})a_1^2a_2 + \frac{1}{4}(\cos(2\Psi)\,pp_{5,1}\\
&-\sin(2\Psi)\,pp_{5,2} + pp_{7,1})a_1a_2^2 + \frac{1}{4}(\cos(\Psi)\,pp_{8,1}\\
&-\sin(\Psi)\,pp_{8,2})a_2^3
\end{aligned}
\tag{65}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_2 = &\ (\cos(\Psi)\,qq_{1,1} + \sin(\Psi)qq_{1,2})a_1 + \frac{1}{4}(\cos(\Psi)\,qq_{3,1}\\
&+\sin(\Psi)qq_{3,2})a_1^3 + qq_{2,1}a_2\\
&+\frac{1}{4}\left(qq_{4,1} + \cos(2\Psi)\,qq_{6,1} + \sin(2\Psi)\,qq_{6,2}\right)a_1^2a_2\\
&+\frac{1}{4}(\cos(\Psi)qq_{5,1} - \sin(\Psi)\,qq_{5,2} + \cos(\Psi)\,qq_{7,1}\\
&+\sin(\Psi)qq_{7,2})a_1a_2^2 + \frac{1}{4}qq_{8,1}a_2^3
\end{aligned}
\tag{66}
$$

$$
\begin{aligned}
a_1a_2\dot{\Psi} = &\left(-\sin(\Psi)\,qq_{1,1} + \cos(\Psi)\,qq_{1,2}\right)a_1^2\\
&+\frac{1}{4}\left(-\sin(\Psi)\,qq_{3,1} + \cos(\Psi)\,qq_{3,2}\right)a_1^4\\
&+\left(\varepsilon\sigma - pp_{1,2} + qq_{2,2}\right)a_1a_2 - \frac{1}{4}pp_{3,2}a_1^2a_2\\
&+\frac{1}{4}(qq_{4,2} - \sin(2\Psi)\,qq_{6,1}\\
&+\cos(2\Psi)\,qq_{6,2})a_1^3a_2
\end{aligned}
$$

$$+\left(-\sin(\Psi)\,pp_{2,1}-\cos(\Psi)\,pp_{2,2}\right)a_2$$
$$+\frac{1}{4}\left(-\sin(\Psi)pp_{4,1}-\cos(\Psi)\,pp_{4,2}\right.$$
$$+\sin(2\Psi)\,pp_{6,1}-\cos(2\Psi)\,pp_{6,2}+\sin(\Psi)\,qq_{5,1}$$
$$+\cos(\Psi)qq_{5,2}\ -\sin(\Psi)\,qq_{7,1}$$
$$\left.+\cos(\Psi)qq_{7,2}\right)a_1^2a_2^2+\frac{1}{4}\left(-\sin(2\Psi)\,pp_{5,1}\right.$$
$$\left.-\cos(2\Psi)\,pp_{5,2}-pp_{7,2}+qq_{8,2}\right)a_1a_2^3$$
$$+\frac{1}{4}\left(-\sin(\Psi)\,pp_{8,1}-\cos(\Psi)\,pp_{8,2}\right)a_2^4 \tag{67}$$

که در آن ضرایب $pp_{i,j}$ و $qq_{i,j}$ تابعی از سرعت باد می‌باشند.

5- نتایج عددی

5-1- پارامترهای عددی

به‌منظور به دست آوردن نتایج عددی مطالعات انجام شده، کابل 4XLGJ-400/50 با سطح مقطع U شکل مانند "شکل 4"، مورد بررسی قرار می‌گیرد، مقادیر پارامترهای این مدل در جدول 1 آمده است.

با این مشخصات کابل به اولین نقطه تقاطع نزدیک است در نتیجه اولین فرکانس‌های طبیعی آن تحت شرایط نبود باد با استفاده از مرجع [2] دارای مقادیر (68) می‌باشد.

$$\omega_{si}=3.11 \qquad \omega_{ai}=6.1$$
$$\omega_{so}=3.05 \qquad \omega_{ao}=6.1 \tag{68}$$

که در آن زیرنویس s نشان‌دهنده‌ی مُد متقارن، a مُد پادمتقارن، i مُد درون صفحه و o مُد خارج از صفحه است. بنابراین قابل مشاهده است که اولین مُد درون صفحه‌ی متقارن با اولین مُد خارج از صفحه‌ی متقارن دارای شرایط تشدید داخلی 1:1 و مدهای متقارن با مدهای پادمتقارن دارای شرایط تشدید داخلی 1:2 می‌باشد. توابع ویژه مربوط به این مدها در "شکل 5 و شکل 6" آورده شده است [2].

با توجه به مشخصات آیرودینامیکی، ضرایب آیرودینامیکی این نوع از مقطع به‌صورت تجربی به‌دست آمده است در این مقاله با توجه به "شکل 4" $\gamma=0$ در پیکربندی مرجع درنظر گرفته شده است. چندجمله‌ای برازش شده با این داده‌های تجربی در رابطه‌ی (69) و (70) آمده است و تغییرات آن با زاویه‌ی حمله در "شکل 7" رسم شده است.

جدول 1 خواص کابل [18]

Table 1 Cable properties [18]

نماد	مقدار	پارامتر
EA	31.3×10^6N	سفتی محوری
GJ	393 Nm²	سفتی پیچشی
EI	1965 Nm²	سفتی خمشی
ξ_s	0.45%	نسبت میرایی سازه‌ای
m	1.8 kg/m	جرم واحد طول
x_l	99.6 m	موقعیت x پایه
y_l	−70.3 m	موقعیت y پایه
ω_1	3.11	فرکانس طبیعی در جهت 1
ω_2	3.05	فرکانس طبیعی در جهت 2
α	−35.2°	زاویه‌ی آویز کابل
$\bar{T}$	107.19 kN	کشش اولیه
β	0°	زاویه‌ی انحراف باد
ε	0.1	ضریب تئوری اغتشاشات

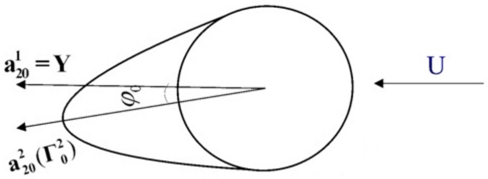

Fig 4 Initial orientation of U shaped cable under wind flow

شکل 4 جهت‌گیری اولیه‌ی کابل U شکل در برابر جریان باد (γ=0)

$$\overline{c_d[\gamma]}=4.5712\gamma^3+1.3518\gamma^2-1.7591\gamma+0.9874 \tag{69}$$
$$\overline{c_l[\gamma]}=8.483\gamma^3+3.3187\gamma^2-1.4791\gamma-0.3046 \tag{70}$$

زاویه‌ی حمله در پیکربندی جاری با سرعت باد تغییر می‌کند و خود تابعی از زاویه‌ی دوران می‌باشد، "شکل 8" تغییرات زاویه‌ی دوران را با سرعت

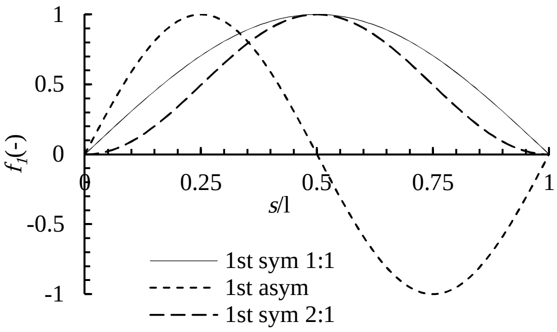

Fig. 5 Eigen function of the in-plane mode for different resonance condition

شکل 5 تابع ویژه مُد درون صفحه برای شرایط رزونانسی مختلف

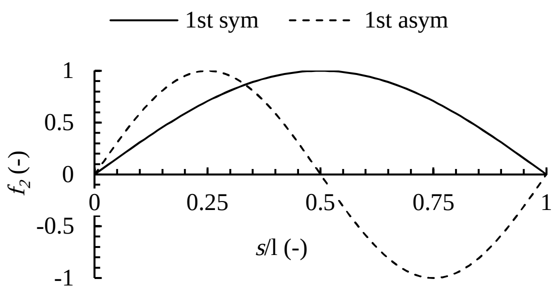

Fig. 6 Out-of-plane mode Eigen function of the w component

شکل 6 تابع ویژه مُد خارج از صفحه مؤلفه‌ی w

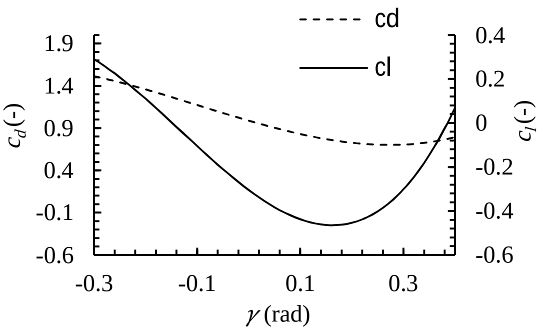

Fig. 7 drag and lift aerodynamic coefficients

شکل 7 ضرایب آیرودینامیکی لیفت و درگ

باد نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود زاویه دوران در ابتدا با شیب ملایم‌تری تغییر می‌کند اما با بالاتر رفتن سرعت تغییرات سریع‌تر اتفاق می‌افتد.

5-2- حل حالت پایا

به‌منظور بررسی پایداری سیستم در حالت رزونانس داخلی 1:1، با قرار دادن $\dot{a}_1 = 0$، $\dot{a}_2 = 0$ و $\dot{\Psi} = 0$ در معادلات مدولاسیون- فاز کاهش‌یافته‌ی (60) تا (62) می‌توان نقاط تعادل سیستم را به‌دست آورد.

در ابتدا به‌منظور اعتبارسنجی نتایج، حل حالت پایا در مطالعه حاضر و مرجع [18] با یک‌دیگر مقایسه می‌شوند از آن‌جا که در این مرجع گالوپینگ غیرخطی یک کابل با پایه‌های ثابت که در یک سطح باهم قرار گرفته‌اند مورد بررسی قرار گرفته است، نتایج کار حاضر با درنظر گرفتن حالت خاص کابل با پایه‌های هم‌سطح (زاویه آویز صفر درنظر گرفته شده است) و بدون تحریک پایه با نتایج مرجع [18] در "شکل 9" مورد مقایسه قرار گرفته است، همان‌طور که مشاهده می‌شود رفتار دو نمودار مشابه یک‌دیگر می‌باشد یعنی بدون درنظر گرفتن خروج از مرکزی در محدوده سرعت مورد بررسی با افزایش سرعت، دامنه‌ی ارتعاشات افزایش می‌یابد، اختلاف موجود به این علت است که نتایج پدیده‌ی گالوپینگ به‌شدت تحت تاثیر زاویه حمله می‌باشد و از آن‌جا که پارامترهای لازم برای به‌دست آوردن زاویه‌ی حمله در این مرجع ذکر نشده است بین دو نمودار اختلاف وجود دارد.

"شکل 10" تغییرات دامنه‌ی a_1 و a_2 را با سرعت باد نشان می‌دهد در این حالت خروج از مرکزی سطح مقطع نادیده گرفته شده است و همان‌طور که مشاهده می‌شود تغییرات دامنه در محدوده‌ی سرعت مورد بررسی با افزایش سرعت، افزایش پیدا می‌کند همچنین دامنه‌ی a_1 نسبت به دامنه‌ی a_2 تغییرات محسوس‌تری با سرعت باد دارد، به عبارتی دامنه ارتعاشات در جهت عمود بر صفحه کابل افزایش بیشتری نسبت به دامنه ارتعاشات عرضی کابل خواهد داشت.

"شکل 11" تغییرات دامنه a_1 را با سرعت باد، با در نظر گرفتن خروج از مرکزی مقطع نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش سرعت دامنه‌ی a_1 مانند حالت بدون درنظر گرفتن خروج از مرکزی، افزایش می‌یابد، اما با افزایش سرعت دامنه شروع به کاهش می‌کند که کاملا برخلاف رفتاری است که در "شکل 10" آمده است.

به عبارت دیگر خروج از مرکزی در این کابل از سرعت حدود 14 متر بر ثانیه به بعد همانند یک میراکننده عمل کرده و دامنه ارتعاشات عمود بر صفحه کابل را کاهش داده و در نهایت آن را حذف می‌کند. به عبارتی در این محدوده سرعتی، نقش میراکنندگی خروج از مرکزی کاملا مشهود می‌باشد.

5-3- نتیجه‌گیری

در این پژوهش به بررسی تأثیر درنظر گرفتن خروج از مرکزی مقطع برروی دامنه ارتعاشات گالوپینگ یک کابل مایل تحت حرکت پایه سمت راست پرداخته شد. در محدوده سرعت مورد بررسی، بدون اعمال تأثیر خروج از مرکزی سطح مقطع کابل، با افزایش سرعت باد دامنه‌ی ارتعاشات نیز افزایش

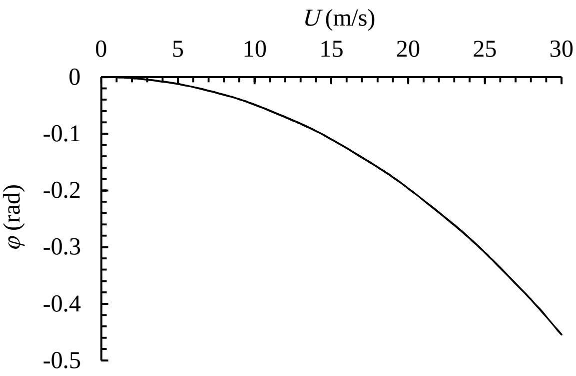

Fig. 8 Nonlinear equilibrium path

شکل 8 مسیر غیرخطی تعادل

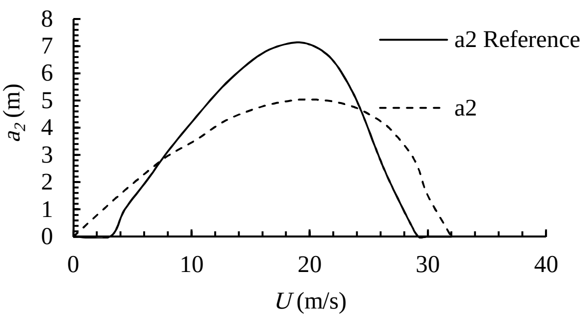

Fig. 9 the Steady-State results of a cable with fixed supports at the same level for current study (----) and [18] (——)

شکل 9 نتایج حل حالت پایا برای کابل افقی با پایه‌های ثابت در مطالعه حاضر (---) و نیز مرجع [18] (——)

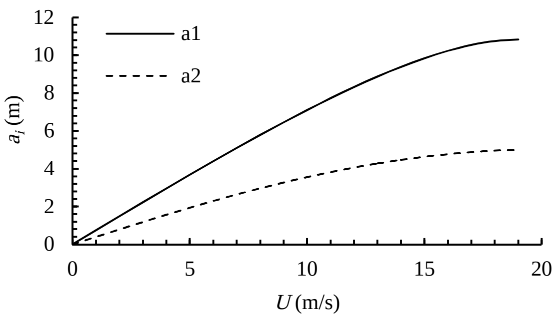

Fig. 10 amplitude versus wind speed of 1:1 resonant case without considering eccentricity

شکل 10 تغییرات دامنه با سرعت باد در حالت تشدید داخلی 1:1 بدون درنظر گرفتن خروج از مرکزی

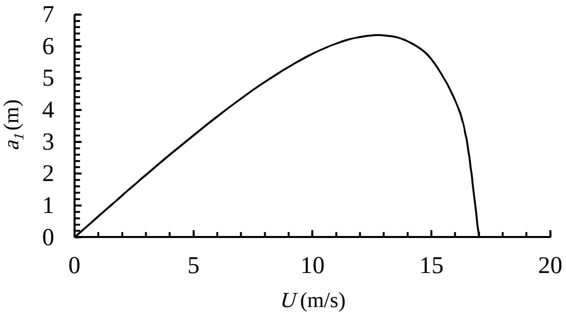

Fig. 11 amplitude versus wind speed of 1:1 resonant case considering eccentricity

شکل 11 تغییرات دامنه با سرعت باد در حالت تشدید داخلی 1:1 با درنظر گرفتن خروج از مرکزی

پیدا می‌کند. درصورتی‌که با اعمال اثر خروج از مرکزی مقطع برای این نمونه کابل در محدوده سرعت مورد بررسی، دامنه در ابتدا افزایش می‌یابد که با آن‌چه از رفتار ارتعاشات گالوپینگ انتظار می‌رفت منطبق است، اما پس از آن خروج از مرکزی تأثیری به‌صورت یک میراکننده در ارتعاشات دارد و با تحت تأثیر قرار دادن زاویه حمله، از دامنه ارتعاشات کاسته می‌شود تا به صفر برسد، این دو رفتار متفاوت نشان می‌دهد که درنظر گرفتن خروج از مرکزی سطح مقطع یکی از پارامترهای بسیار مهم در مدل‌سازی می‌باشد؛ تا آن‌جایی که صرف‌نظر کردن از آن ممکن است رفتاری کاملاً متفاوت با آن‌چه در واقعیت اتفاق می‌افتد را پیش‌بینی کند. از طرف دیگر، از این رفتار کاهش ارتعاشی می‌توان به‌عنوان راه‌حلی برای کنترل ارتعاشات گالوپینگ در کابل‌ها استفاده کرد.

6- فهرست علائم

A	مساحت سطح مقطع کابل (m^2)
A_1	دامنه‌ی مرکب وابسته به زمان آرام در جهت عمود بر کابل
A_2	دامنه‌ی مرکب وابسته به زمان آرام در جهت عمود بر صفحه‌ی کابل
a_1	دامنه‌ی متغیر با زمان t در جهت عمود بر کابل
a_2	دامنه‌ی متغیر با زمان t در جهت عمود بر صفحه کابل
b_2	نیروی آیرودینامیکی لیفت (Nm^{-1})
b_3	نیروی آیرودینامیکی درگ (Nm^{-1})
c_1	مومنتوم آیرودینامیکی (N)
C_d	ضریب آیرودینامیکی درگ
C_l	ضریب آیرودینامیکی لیفت
c_i	ضرایب میرایی ساختاری برای $i = u, v, w, \vartheta$
d	شکم کابل (m)
EA	سفتی محوری کابل (N)
EI_i	سفتی خمشی (Nm^2)
f_i	تابع ویژه
GJ	سفتی پیچشی (Nm^2)
k_1	کرنش پیچشی (m)
k_2	کرنش خمشی (m)
k_3	کرنش خمشی (m)
l	طول اولیه کابل (m)
m	جرم واحد طول کابل (kgm^{-1})
M_1	خمش اولیه کابل حول محور a_1 (Nm)
M_2	خمش اولیه کابل حول محور a_2 (Nm)
M_3	پیچش اولیه کابل (Nm)
q_i	مقدار ویژه
s	پارامتر طول منحنی کابل (m)
S_1	ممان اول سطح در جهت 1 (m^3)
S_2	ممان اول سطح در جهت 2 (m^3)
t	زمان (s)
$\bar{T}$	کشش اولیه کابل (N)
T_0	مقیاس زمانی سریع (s)
T_1	مقیاس زمانی آرام (s)
T_2	مقیاس زمانی بسیار آرام (s)
$\vec{u}$	بردار جابه‌جایی
u	مولفه بردار جابه‌جایی در جهت $\bar{a}_3$
v	مولفه بردار جابه‌جایی در جهت $\bar{a}_1$
$\hat{v}$	مولفه شبه پایای v
$\tilde{v}$	مولفه دینامیکی v
w	مولفه بردار جابه‌جایی در جهت $\bar{a}_2$

علایم یونانی

α	زاویه‌ی آویز کابل (rad)
β	زاویه انحراف باد نسبت به کابل (rad)
γ	زاویه حمله باد نسبت به کابل (rad)
ε	کرنش کششی (m)
η	دامنه‌ی حرکت پایه (m)
κ	انحنای کابل در جهت $\bar{a}_2$ در زمان $t = 0$
ϑ	زاویه پیچش سطح مقطع (rad)
ρ	چگالی کابل (kgm^{-3})
φ	دوران سطح مقطع در اثر وزش باد (rad)
φ_0	دوران سطح مقطع در اثر وجود یخ (rad)
ω_1	فرکانس دایروی در جهت عمود برکابل ($rads^{-1}$)
ω_2	فرکانس دایروی در جهت عمود بر صفحه‌ی کابل ($rads^{-1}$)

زیرنویس‌ها

Air	هوا

7- پیوست

$$b_2 = -kU^2(-\sin(\varphi)\, aa_{2,0} + \cos(\varphi) aa_{1,0})$$
$$c_{21} = -kU^2(\sin(\varphi)\, aa_{2,1} - \cos(\varphi) aa_{1,1})$$
$$c_{22} = -kU(2aa_{2,0} - \cos(\varphi)\sin(\varphi)\, aa_{2,1}$$
$$\begin{aligned} c_{23} = {} & kU(\cos^2(\varphi)\, aa_{2,1} - aa_{21} + aa_{10} \\ & -\sin(\varphi)\cos(\varphi)\, aa_{2,0} + \cos^2(\varphi)\, aa_{1,0} \\ & +\sin(\varphi)\cos(\varphi)\, aa_{1,1}) \end{aligned}$$
$$c_{211} = -\frac{1}{2}kU^2(-\sin(\varphi)\, aa_{2,2} + \cos(\varphi) aa_{1,2})$$
$$\begin{aligned} c_{212} = {} & kU(-\cos^2(\varphi)\, aa_{2,1} - \sin(\varphi)\cos(\varphi)\, aa_{2,2} \\ & -\sin(\varphi)\cos(\varphi)\, aa_{1,1} + 2aa_{2,1} + \cos^2(\varphi) aa_{1,2}) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} c_{213} = {} & -kU(-aa_{2,2} + \cos^2(\varphi)\, aa_{2,2} \\ & +\sin(\varphi)\cos(\varphi)\, aa_{1,2} + aa_{1,1} + \cos^2(\varphi)\, aa_{1,1} \\ & -\sin(\varphi)\cos(\varphi) aa_{2,1}) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} c_{222} = {} & k(\sin(\varphi)\, aa_{2,0} + \frac{1}{2}\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)\, aa_{2,2} \\ & -\frac{1}{2}\cos^3(\varphi)\, aa_{1,2} - 2\cos(\varphi)\, aa_{2,1} \\ & +\cos^3(\varphi)\, aa_{2,1} + \sin(\varphi)\cos^2(\varphi) aa_{1,1}) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} c_{223} = {} & k(\cos^3(\varphi)\, aa_{2,2} + \cos(\varphi)\, aa_{2,0} - \cos(\varphi)\, aa_{2,2} \\ & +2\sin(\varphi)\, aa_{2,1} + \sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\, aa_{1,2} \\ & -2\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\, aa_{2,1} + 2\cos^3(\varphi)\, aa_{1,1} \\ & -\sin(\varphi) aa_{1,0}) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} c_{233} = {} & k(\frac{1}{2}\sin(\varphi)\, aa_{2,2} - \cos^3(\varphi)\, aa_{2,1} \\ & -\frac{1}{2}\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\, aa_{2,2} + \frac{1}{2}\cos^3(\varphi)\, aa_{1,2} \\ & -\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\, aa_{1,1} - \cos(\varphi)\, aa_{1,0} \\ & -\sin(\varphi)\, aa_{1,1} + \cos(\varphi)\, aa_{2,1} - \frac{1}{2}\cos(\varphi) aa_{1,2}) \end{aligned}$$
$$c_{2111} = \frac{1}{6}kU^2(-\sin(\varphi)\, aa_{2,3} + \cos(\varphi) aa_{1,3})$$

$$\begin{aligned}c_{2112} = {} & \frac{1}{2}kU(-\cos^2(\varphi)\,aa_{1,3} + \sin(\varphi)\cos(\varphi)\,aa_{1,2} \\ & -2aa_{2,2} + \sin(\varphi)\cos(\varphi)\,aa_{2,3} + \cos^2(\varphi)aa_{2,2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{2113} = {} & \frac{1}{2}kU(-aa_{2,3} + \cos^2(\varphi)\,aa_{2,3} \\ & -\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,aa_{2,2} + \cos^2(\varphi)\,aa_{1,2} + aa_{1,2} \\ & +\sin(\varphi)\cos(\varphi)aa_{1,3})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{2123} = {} & k(-2\cos^3(\varphi)\,aa_{1,2} - \cos^3(\varphi)\,aa_{2,3} \\ & +\cos(\varphi)\,aa_{2,3} - \cos(\varphi)\,aa_{2,1} \\ & -\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,aa_{1,3} - 2\sin(\varphi)\,aa_{2,2} \\ & +\sin(\varphi)\,aa_{1,1} + 2\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)aa_{2,2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{2122} = {} & k(\frac{1}{2}\cos^3(\varphi)\,aa_{1,3} + 2\cos(\varphi)\,aa_{2,2} \\ & -\frac{1}{2}\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,aa_{2,3} - \cos^3(\varphi)\,aa_{2,2} \\ & -\sin(\varphi)\,aa_{2,1} - \sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,aa_{1,2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{2133} = {} & k(-\cos(\varphi)\,aa_{2,2} - \frac{1}{2}\cos^3(\varphi)\,aa_{1,3} \\ & +\frac{1}{2}\cos(\varphi)\,aa_{1,3} + \sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,aa_{1,2} \\ & +\cos(\varphi)\,aa_{1,1} + \sin(\varphi)\,aa_{1,2} \\ & +\frac{1}{2}\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,aa_{2,3} - \frac{1}{2}\sin(\varphi)\,aa_{2,3} \\ & +\cos^3(\varphi)\,aa_{2,2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{2222} = {} & \frac{-k}{6U}(\cos(\varphi)(-3\cos^3(\varphi)\,aa_{2,2} \\ & +6\cos(\varphi)\,aa_{2,2} - 6\sin(\varphi)\,aa_{2,1} \\ & -3\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,aa_{1,2} - \sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,aa_{2,3} \\ & +\cos^3(\varphi)\,aa_{1,3}))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{2223} = {} & \frac{k}{2U}(-\cos^2(\varphi)\,aa_{2,3} - 2aa_{2,1} \\ & -3\cos^3(\varphi)\,aa_{1,3}\sin(\varphi)\,aa_{2,2} - \cos^2(\varphi)\,aa_{1,2} \\ & +4\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,aa_{2,2} + \cos^4(\varphi)\,aa_{2,3} \\ & -2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,aa_{1,1} + 4\cos^2(\varphi)\,aa_{2,1} \\ & +\cos^3(\varphi)\sin(\varphi)\,aa_{1,3} + 3\cos^4(\varphi)\,aa_{1,2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{2233} = {} & \frac{k}{2U}(2aa_{1,1} - 2aa_{2,2} - 3\cos^4(\varphi)\,aa_{2,2} \\ & +5\cos^2(\varphi)\,aa_{2,2} - \sin(\varphi)\cos(\varphi)\,aa_{1,2} \\ & -4\cos^2(\varphi)\,aa_{1,1} - \cos^2(\varphi)\,aa_{1,3} \\ & +\cos^4(\varphi)\,aa_{1,3} - 3\sin(\varphi)\cos^3(\varphi)\,aa_{1,2} \\ & +\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,aa_{2,3} - 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,aa_{2,1} \\ & -\sin(\varphi)\cos^3(\varphi)\,aa_{2,3})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{2333} = {} & \frac{-k}{6U}(\sin(\varphi)(-3\cos^3(\varphi)\,aa_{2,2} + \cos^3(\varphi)\,aa_{1,3} \\ & -\cos(\varphi)\,aa_{1,3} + 3\cos(\varphi)\,aa_{2,2} - 6\cos(\varphi)\,aa_{1,1} \\ & -3\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,aa_{1,2} - \sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,aa_{2,3} \\ & -3\sin(\varphi)\,aa_{1,2} + \sin(\varphi)aa_{2,3}))\end{aligned}$$

$$b_3 = kU^2(\cos(\varphi)\,aa_{2,0} + \sin(\varphi)aa_{1,0})$$

$$c_{31} = -kU^2(\sin(\varphi)\,aa_{1,1} + \cos(\varphi)aa_{2,1})$$

$$\begin{aligned}c_{32} = {} & kU(\cos^2(\varphi)\,aa_{2,1} + \cos^2(\varphi)\,aa_{1,0} \\ & -\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,aa_{2,0} - 2aa_{1,0} \\ & +\sin(\varphi)\cos(\varphi)aa_{1,1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{33} = {} & kU(-aa_{1,1} + \cos^2(\varphi)\,aa_{1,1} - \cos^2(\varphi)\,aa_{2,0} \\ & -\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,aa_{2,1} - aa_{2,0} \\ & -\sin(\varphi)\cos(\varphi)aa_{1,0})\end{aligned}$$

$$c_{311} = \frac{1}{2}kU^2(\cos(\varphi)\,aa_{2,2} + \sin(\varphi)aa_{1,2})$$

$$\begin{aligned}c_{312} = {} & -kU(\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,aa_{1,2} + \cos^2(\varphi)\,aa_{1,1} \\ & +\cos^2(\varphi)\,aa_{2,2} - 2aa_{1,1} - \sin(\varphi)\cos(\varphi)aa_{2,1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{313} = {} & -kU(-\cos^2(\varphi)\,aa_{2,1} - aa_{1,2} + \cos^2(\varphi)\,aa_{1,2} \\ & -\cos(\varphi)\sin(\varphi)\,aa_{1,1} - aa_{2,1} \\ & -\sin(\varphi)\cos(\varphi)aa_{2,2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{322} = {} & k(\cos^2(\varphi)\,aa_{1,1} + \sin(\varphi)\,aa_{1,0} \\ & +\frac{1}{2}\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)\,aa_{1,2} - 2\cos(\varphi)aa_{1,1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{323} = {} & k(-2\cos^2(\varphi)\,aa_{2,1} + \cos^3(\varphi)\,aa_{1,2} \\ & +2\sin(\varphi)\,aa_{1,1} - \sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,aa_{2,2} \\ & -\cos(\varphi)\,aa_{1,2} + \cos(\varphi)\,aa_{1,0} \\ & -2\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)\,aa_{1,1} + \sin(\varphi)aa_{2,0})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{333} = {} & \frac{k}{6U}(\sin(\varphi)(3\cos^2(\varphi)\,aa_{1,2} + \cos^3(\varphi)\,aa_{2,3} \\ & -\cos(\varphi)\,aa_{2,3} - 3\cos(\varphi)\,aa_{1,2} - 6\cos(\varphi)\,aa_{2,1} \\ & +\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,aa_{1,3} - 3\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,aa_{2,2} \\ & -\sin(\varphi)\,aa_{1,3} - 3\sin(\varphi)aa_{2,2}))\end{aligned}$$

$$c_{3111} = -\frac{kU^2}{6}(\sin(\varphi)\,aa_{1,3} + \cos(\varphi)aa_{2,3})$$

$$\begin{aligned}c_{3112} = {} & \frac{kU}{2}(\cos^2(\varphi)\,aa_{1,2} - \sin(\varphi)\cos(\varphi)\,aa_{2,2} \\ & +\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,aa_{1,3} - 2aa_{1,2} + \cos^2(\varphi)\,aa_{2,3})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{3113} = {} & \frac{1}{2}kU(-\cos^2(\varphi)\,aa_{2,2} - aa_{1,3} \\ & -\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,aa_{2,3} + \cos^2(\varphi)\,aa_{1,3} - aa_{2,2} \\ & -\sin(\varphi)\cos(\varphi)aa_{1,2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{3122} = {} & k(-\frac{1}{2}\cos^3(\varphi)\,aa_{2,3} - \cos^3(\varphi)\,aa_{1,2} \\ & -\sin(\varphi)\,aa_{1,1} + 2\cos(\varphi)\,aa_{1,2} \\ & +\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,aa_{2,2} - \frac{1}{2}\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,aa_{1,3})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{3123} = {} & k(-\sin(\varphi)\,aa_{2,1} + \cos(\varphi)\,aa_{1,3} \\ & -\cos^3(\varphi)\,aa_{1,3} - 2\sin(\varphi)\,aa_{1,2} \\ & +2\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,aa_{1,2} + \sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,aa_{2,3} \\ & +2\cos^3(\varphi)\,aa_{2,2} - \cos(\varphi)aa_{1,1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{3133} = {} & k(-\frac{1}{2}\sin(\varphi)\,aa_{1,3} - \frac{1}{2}\cos(\varphi)\,aa_{2,3} \\ & -\cos(\varphi)\,aa_{2,1} + \frac{1}{2}\cos^3(\varphi)\,aa_{2,3} \\ & +\frac{1}{2}\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,aa_{1,3} + \cos^3(\varphi)\,aa_{1,2} \\ & -\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,aa_{2,2} - \sin(\varphi)\,aa_{2,2} \\ & -\cos(\varphi)aa_{1,2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{3222} = {} & \frac{k}{6U}(\cos(\varphi)(6\sin(\varphi)\,aa_{1,1} + 3\cos^3(\varphi)\,aa_{1,2} \\ & -3\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,aa_{2,2} - 6\cos(\varphi)\,aa_{1,2} \\ & +\cos^3(\varphi)\,aa_{2,3} + \sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,aa_{1,3}))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{3223} = {} & \frac{k}{2U}(4\cos^2(\varphi)\,aa_{1,1} + \cos^4(\varphi)\,aa_{1,3} \\ & -\cos^2(\varphi)\,aa_{1,3} - 2aa_{1,1} - \sin(\varphi)\cos^3(\varphi)\,aa_{2,3} \\ & +\cos^2(\varphi)\,aa_{2,2} - 3\cos^4(\varphi)\,aa_{2,2} \\ & +2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,aa_{2,1} + 4\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,aa_{1,2} \\ & -3\sin(\varphi)\cos^3(\varphi)\,aa_{1,2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{3233} = {} & \frac{-k}{2U}(\sin(\varphi)\cos^3(\varphi)\,aa_{1,3} - 4\cos^2(\varphi)\,aa_{2,1} \\ & +2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,aa_{1,1} + 3\cos^4(\varphi)\,aa_{1,2} \\ & -\cos^2(\varphi)\,aa_{2,3} - \sin(\varphi)\cos(\varphi)\,aa_{1,3} \\ & +\cos^4(\varphi)\,aa_{2,3} - aa_{2,2}\sin(\varphi)\cos(\varphi) + 2aa_{1,2} \\ & -3\sin(\varphi)\cos^3(\varphi)\,aa_{2,2} + 2aa_{2,1} \\ & -5\cos^2(\varphi)\,aa_{1,2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{3333} = {} & \frac{k}{6U}(\sin(\varphi)(3\cos^3(\varphi)\,aa_{1,2} + \cos^3(\varphi)\,aa_{2,3} \\ & -\cos(\varphi)\,aa_{2,3} - 3\cos(\varphi)\,aa_{1,2} - 6\cos(\varphi)\,aa_{2,1} \\ & +\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,aa_{1,3} - 3\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,aa_{2,2} \\ & -\sin(\varphi)\,aa_{1,3} - 3\sin(\varphi)aa_{2,2}))\end{aligned}$$

8- مراجع

[1] M. Sadeghi, A. Rezaei, Extending “Energy Balance Method” for Calculating Cable Vibration with Arbitrary Number of Dampers and their Optimal Placement, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 8, pp. 438-448,

2015. (in Persian فارسی)
[2] H. Max Irvine, *Cable Structure*, pp. 90-107, Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1981.
[3] J. Den Hartog, Transmission line vibration due to sleet, *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers,* Vol. 4, No. 51, pp. 1074-1076, 1932.
[4] G. Parkinson, Phenomena and modelling of flow-induced vibrations of bluff bodies, *Progress in Aerospace Sciences,* Vol. 26, No. 2, pp. 169-224, 1989.
[5] K. F. Jones, Coupled vertical and horizontal galloping, *Journal of engineering mechanics,* Vol. 118, No. 1, pp. 92-107, 1992.
[6] A. Luongo, G. Piccardo, Non-linear galloping of sagged cables in 1: 2 internal resonance, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 214, No. 5, pp. 915-940, 1998.
[7] R. Blevins, W. Iwan, The galloping response of a two-degree-of-freedom system, *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 41, No. 4, pp. 1113-1118, 1974.
[8] P. Yu, A. Shah, N. Popplewell, Inertially coupled galloping of iced conductors, *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 59, No. 1, pp. 140-145, 1992.
[9] P. Yu, Y. Desai, A. Shah, N. Popplewell, Three-degree-of-freedom model for galloping. Part I: Formulation, *Journal of Engineering Mechanics,* Vol. 119, No. 12, pp. 2404-2425, 1993.
[10] P. Yu, Y. Desai, N. Popplewell, A. Shah, Three-degree-of-freedom model for galloping. Part II: Solutions, *Journal of engineering mechanics,* Vol. 119, No. 12, pp. 2426-2448, 1993.
[11] A. Luongo, G. Rega, F. Vestroni, Planar non-linear free vibrations of an elastic cable, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Vol. 19, No. 1, pp. 39-52, 1984.
[12] C. L. Lee, N. C. Perkins, Nonlinear oscillations of suspended cables containing a two-to-one internal resonance, *Nonlinear Dynamics,* Vol. 3, No. 6, pp. 465-490, 1992.
[13] A. Luongo, G. Piccardo, On the Influence of the Torsional Stiffness of Non-linear Galloping of Suspended Cables, in *Proceeding of Suspended Cables." EUROMECH 2nd European Nonlinear Oscillations Conference*, 1996.
[14] K. McConnell, C.-N. Chang, A study of the axial-torsional coupling effect on a sagged transmission line, *Experimental Mechanics,* Vol. 26, No. 4, pp. 324-329, 1986.
[15] W. N. White, S. Venkatasubramanian, P. M. Lynch, C.-L. D. Huang, The equations of motion for the torsional and bending vibrations of a stranded cable, *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 59, No. 2S, pp. S224-S229, 1992.
[16] A. Luongo, D. Zulli, G. Piccardo, A linear curved-beam model for the analysis of galloping in suspended cables, *Journal of Mechanics of Materials and Structures,* Vol. 2, No. 4, pp. 675-694, 2007.
[17] A. Luongo, D. Zulli, G. Piccardo, On the effect of twist angle on nonlinear galloping of suspended cables, *Computers & Structures,* Vol. 87, No. 15, pp. 1003-1014, 2009.
[18] Z. Yan, Z. Yan, Z. Li, T. Tan, Nonlinear galloping of internally resonant iced transmission lines considering eccentricity, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 331, No. 15, pp. 3599-3616, 2012.
[19] F. Foti, L. Martinelli, Finite element modeling of cable galloping vibrations. Part II: Application to an iced cable in 1: 2 multiple internal resonance, *Journal of Vibration and Control*, 2016.
[20] D. Srivastava, D. Chandra, Transmission Line Conductor Galloping Analysis using FEM, *International Journal of Applied Engineering Research*, Vol. 11, No. 10, pp. 6972-6982, 2016.
[21] A. Raeesi, *Wind-induced response of bridge stay cables in unsteady wind*, Ph.D. Thesis, Windsor, Ontario, 2015.