



مقایسه اثر مدل هیدرودینامیکی و مدل هیدرواستاتیکی برای ترم تصحیح فشار موجود در مدل دوسیالی در مدل سازی جریان های دوفازی گاز-مایع

کاظم اسماعیلی¹، وحید شکری^{2*}

1- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد ساری، ساری
2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد ساری، ساری
* ساری، صندوق پستی 4816119318@iausari.ac.ir، shokri.vhd

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 20 مرداد 1395
پذیرش: 28 مهر 1395
ارائه در سایت: 03 آذر 1395

چکیده

در این مقاله یک مطالعه عددی با استفاده از مدل دو سیالی برای مقایسه اثر مدل هیدرودینامیکی و هیدرواستاتیکی برای ترم تصحیح فشار موجود در مدل دو سیالی جهت ارائه مدل دقیق تر انجام شده است. مدل دو سیالی توسط حل گر ریمنی تقریبی گدونفی حل شده است. مدل دو سیالی یک بار با استفاده از ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی و یک بار توسط ترم تصحیح فشار هیدرودینامیک برای چهار مسأله نمونه، شیر آب، جدایش آب و هوا، لوله شاک سرعت نسبی بزرگ و لوله شاک تامی اعمال شده است. با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی هندسه قائم، این ترم حذف می شود، مدل دو سیالی در این هندسه هیچگاه هایپرپولیک نمی شود. بنابراین ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی نمی تواند به صورت یک ترم پایدار کننده عمل کند. همچنین ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی در لوله های افقی برای شرایط اتمسفریک جواب های بهتری نسبت به ترم تصحیح فشار هیدرودینامیک ارائه می کند. اما در شرایط غیره اتمسفریک، ترم تصحیح فشار هیدرودینامیکی جواب های بهتری را ارائه می کند. بنابراین برای انتخاب ترم تصحیح فشار مناسب برای مدل دو سیالی باید هندسه (قائم یا افقی) و شرایط جریان (اتمسفریک یا تحت فشار) در نظر گرفته شود و ترم تصحیح فشار هیدرودینامیک در سیستم معادلات دو سیالی، در محدود وسیع تری نسبت به ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی هایپرپولیک می باشد.

Comparison of the effect of hydrodynamic and hydrostatic models for Pressure correction term in two-fluid model in modeling gas-liquid two-phase flows

Kazem Esmaeili, Vahid Shokri*

Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Sari Branch, Sari, Iran
* P.O.B. 4816119318, Sari, Iran, shokri.vhd@iausari.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 10 August 2016
Accepted 19 October 2016
Available Online 23 November 2016

Keywords:

Two phase flow
Two-fluid model
Pressure correction term
Numerical simulation

ABSTRACT

This paper presents a numerical study using two-fluid model in order to compare the effect of hydrodynamic and hydrostatic models for pressure correction term in two-fluid model in modeling gas-liquid two-phase flows to provide a more accurate model. Two-fluid model is solved by Godunov Approximate Riemann Solver. The two-fluid model is applied using both hydrodynamic pressure correction term and hydrostatic pressure correction term for four sample examples including Water Faucet Case, Water-Air Separation Case, Toumi's Shock Tube Case, and Large Relative Velocity Shock Tube Case. Hydrostatic pressure correction term is neglected for vertical geometry, therefore, in this geometry; two-fluid model cannot be hyperbolic. Thus, hydrostatic pressure correction term is not a stabilizing term. Also, in horizontal pipe and for atmospheric conditions, hydrostatic pressure correction term presents better results than hydrodynamic pressure correction term. But, in non-atmospheric conditions, hydrodynamic pressure correction term presents better results. Therefore, in order to select a suitable pressure correction term for two-fluid model, we consider geometry (vertical or horizontal) and flow conditions (atmospheric or under-pressure). Also, hydrodynamic pressure correction term in two-fluid equations system is hyperbolic in a broader range than hydrostatic pressure correction term.

1- مقدمه

وجود دارد. همچنین در نیروگاه های بخار و خنک کاری نیروگاه های هسته ای جریان دوفازی از بخار آب و آب در لوله ها جاری هستند. به طور کلی سه مدل متفاوت برای شبیه سازی سیستم های جریان دو فازی وجود دارد: مدل هموزن پایدار¹ [1]، مدل شار رانشی¹ [2] و مدل دو سیالی² [3,4]. در این

پیش بینی دقیق دینامیک سیال مرتبط با جریان دوفازی همیشه از اهمیت بالایی برخوردار است. برای مثال، در صنعت نفت در انتقال نفت خام از سکوها دور از ساحل به تجهیزات ساحلی نظیر تصفیه کننده ها یا جداکننده ها، مخلوطی از نفت خام، گاز، آب و ذرات پخش شده احتمالی همانند ماسه

¹ Homogeneous Equilibrium Model

که در رابطه فوق، $\delta = 1.2$ ، α_g و α_l به ترتیب کسر حجمی فاز گاز و کسر حجمی فاز مایع، ρ_g و ρ_l به ترتیب چگالی فاز گاز و مایع، u_g و u_l به ترتیب سرعت فازهای گاز و مایع می باشد. اوج و فلاتن طرح های ترکیبی جداسازی بردار شار را برای حل مدل دوسیالی به کارگیری کردند [9]. آن ها در مدل شان از همان فرض فشار به کارگیری شده توسط پایلر و همکاران [8] استفاده کردند. عیسی و کمپف [10] از مدل دوسیالی برای شبیه سازی جریان اسلاگ در لوله های افقی و کمی شیب دار استفاده کردند. آن ها در مدل شان از ترم تصحیح فشار در فاز گاز صرف نظر کردند ($\Delta P_{gi} = P_g - P_{gi} = 0$)، همچنین فشار فاز گاز در فصل مشترک را برابر فشار مایع در فصل مشترک در نظر گرفتند ($P_{gi} = P_{li}$) و تغییر فشار فاز مایع در راستای قائم را بصورت هیدرواستاتیکی در نظر گرفتند. در "شکل 1" نمای جانبی لوله جریان دو فازی نشان داده شده است.

$$P = P_g = P_{gi} = P_{li} \quad (8)$$

$$P_l(y) = P + \rho_l G (h_l - y) \cos \beta \quad (9)$$

که در روابط فوق P بیانگر فشار فاز گاز (و فشار فاز مایع در فصل مشترک و فشار فاز مایع در فصل مشترک) و $P_l(y)$ فشار فاز مایع، ρ_l چگالی فاز مایع، G شتاب گرانش، h_l ارتفاع فاز مایع و β شیب لوله می باشد.

بونیزی و عیسی [11] مدلی را برای شبیه سازی حباب دار شدن رژیم جریان دوفازی اسلاگ ارائه کردند. آن ها در مدل دوسیالی در نظر گرفته شده برای ترم های فشار از همان فرضیات ارائه شده توسط عیسی و کمپف [10] استفاده کردند. بونیزی و عیسی [12] با استفاده از مدل چند سیالی رژیم اسلاگ را در جریان سه فازی گاز، نفت و مایع شبیه سازی کردند. در مدل آن ها یک فاز گاز و یک فاز مخلوط (نفت پخش شده در آب) وجود داشت و از همان فرضیات فشار عیسی و کمپف [10] برای ترم فشار استفاده کردند. کارنیرو و همکاران [13] و هانیانگ و لیون [14] از مدل دو سیالی گذرا برای بررسی ناپایداری های فصل مشترکی و شروع رژیم اسلاگ در جریان های دوفازی گاز-مایع در کانال افقی استفاده کردند. آن ها در مدل شان برای P_g و P_l از فرض فشار هیدرواستاتیک استفاده کردند و فشارهای هر فاز در فصل مشترک را با کشش سطحی بهم مربوط کردند:

$$P_{gi} - P_{li} = \sigma \frac{\partial^2 h_l}{\partial y^2} \quad (10)$$

که در رابطه فوق σ کشش سطحی می باشد.

گارسیا و سالوادور [15] روش های دقت بالا را بر مدل دوسیالی شش معادله ای اعمال کردند. آن ها در مدل شان از فرضیات به کارگیری شده توسط پایلر و همکاران [8] برای ترم های فشار استفاده کردند. کارنیرو و نیکله [16] از مدل دوسیالی برای مدل سازی مشخصه های جریان اسلاگ در خطوط لوله شیب دار استفاده کردند. آن ها در مدل شان از فرض فشار هیدرواستاتیک برای فازهای گاز و مایع استفاده کردند و فشار فاز گاز در فصل مشترک را برابر فشار فاز مایع در فصل مشترک در نظر گرفتند. انصاری و شکری [17] یک

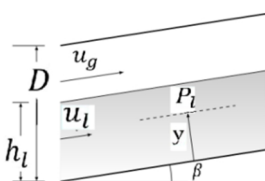


Fig. 1 Side view two-phase flow pipelines

شکل 1 نمای جانبی لوله جریان دوفازی

مقاله، تمرکز روی مدل دو سیالی می باشد. در فرمولاسیون مدل دوسیالی معادلات بقا (جرم، مومنتوم و انرژی) برای هر فاز به صورت جداگانه ارائه می گردد. بنابراین جزئیات دقیق تری از هر فاز توسط این مدل در اختیار قرار می گیرد و از سوی دیگر، کامل ترین مدل در میان انواع مدل های جریان دوفازی می باشد. فرم متوسط گیری شده مدل دوسیالی بر پایه ی متوسط گیری سطحی از معادلات سه بعدی استوار است، که تمام کمیت های جریان بر روی سطح مقطع لوله انتگرال گیری شده است و متعاقباً با استفاده از مقادیر میانگین مناسب جایگزین شده است [5]. فعل و انفعالات بین فازهای مایع و گاز توسط روابط بسندگی³ که اثر قابل توجهی بر میدان حل دارند، ارائه می شود.

در مدل دوسیالی بین فشار هر فاز و فشار هر فاز در فصل مشترک تمایز وجود دارد. اختلاف فشار هر فاز با فشار همان فاز در فصل مشترک ترم تصحیح فشار نامیده می شود:

$$\Delta P_{ki} = P_k - P_{ki} \quad (1)$$

که ΔP_{ki} ترم تصحیح فشار فاز k ام (اگر $k = g$ فاز گاز است و اگر $k = l$ فاز مایع است) است. P_{ki} فشار فاز k ام و P_k فشار فاز k ام در فصل مشترک است.

عیسی و وودبرن [6] از مدل دو سیالی برای مدل سازی ناپایداری های فصل مشترکی و شکل گیری اسلاگ در جریان های دو فازی افقی استفاده کردند. آن ها در مدل شان $\Delta P_{ki} = 0$ در نظر گرفتند. یعنی در مدل آن ها بین "فشار فاز" و "فشار گاز در فصل مشترک" تمایزی وجود ندارد. فاز گاز با یک فشار P_g و فاز مایع با یک فشار P_l نشان داده می شود. از طرف دیگر در مدل آن ها فرض شده $P = P_g = P_l$. یعنی فشار گاز و مایع با هم برابر در نظر گرفته شده است و کل سیستم دو فازی با یک تک فشار P مدل می شود.

$$P = P_g = P_{gi} = P_l = P_{li} \quad (2)$$

ماسلا و همکارانش [7] یک شبیه سازی گذرا از جریان های دو فازی در لوله ها با استفاده از مدل دو سیالی ارائه کردند. آن ها فشار فاز گاز در فصل مشترک را با فشار مایع در فصل مشترک برابر فرض کردند ($P = P_{gi} = P_{li}$). اما ترم تصحیح فشار را در مدل شان به صورت ذیل لحاظ کردند:

$$\Delta P_g = P_g - P \quad (3)$$

$$\Delta P_l = P_l - P \quad (4)$$

که در روابط فوق ΔP_g ترم تصحیح فشار فاز گاز، ΔP_l ترم تصحیح فشار فاز مایع و P فشار فصل مشترک می باشد و این ترم های تصحیح فشار از فرض تغییر فشار هیدرواستاتیکی در راستای محور قائم به دست می آیند.

پایلر و همکاران [8] مدل دو سیالی ایزنتروپیک و مدل 6 معادله ای را در کارشان مورد استفاده قرار دادند. آن ها در مدل دو سیالی ایزنتروپیک از فرضیات ذیل برای فشار استفاده کردند:

$$P = P_g = P_l \quad (5)$$

$$P_i = P_{gi} = P_{li} \quad (6)$$

که در روابط فوق P فشار فاز (در این مدل فشار دو فاز برابر در نظر گرفته شده است) و P_i فشار فصل مشترک می باشد و رابطه بین P_i و P به صورت رابطه (7) پیشنهاد شد:

$$\Delta P = P - P_i = \delta \frac{\alpha_l \alpha_g \rho_l \rho_g}{\rho_g \alpha_l + \rho_l \alpha_g} (u_g - u_l)^2 \quad (7)$$

¹ Drift Flux Model

² Two Fluid Model

³ Closure Relations

الگوریتم جدید برای حل مدل دو سیالی جهت تحلیل ناپایداری کلونین - هلمهولتز ارائه کردند که فرضیات آن ها برای ترم فشار فازها همانند کارنیرو و نیکل [16] بود. عیسی و همکارانش [18] از مدل دو سیالی برای شبیه سازی دقیق جریان اسلاگ در خطوط لوله نفت و گاز استفاده کردند. آن ها در مدل شان از فرض فشار هیدرواستاتیکی برای فازهای گاز و مایع استفاده کردند. انصاری و دارمی زاده [19] از مدل دوسیالی هیپربولیک برای مدل سازی عددی جریان اسلاگ در کانال های افقی و مایل استفاده کردند. آن ها فشار هر فاز و فشار فصل مشترک را به طور مجزا محاسبه و برای ترم تصحیح فشار از مدل هیدرودینامیکی استفاده کردند. آمبرسو و همکارانش [20] یک روش از گدغنی برای مدل هفت معادله ای یا دوسیالی دو فشاری جریان دوفازی تراکم پذیر ارائه کردند. آن ها دو فاز را تراکم پذیر و فرض فشار هیدرودینامیک را همانند پایلر و همکارانش [8] در نظر گرفتند. عیسی و امامزاده [21] از مدل دوسیالی یک بعدی برای شبیه سازی عددی جریان حلقوی در داخل لوله های افقی و عمودی استفاده کردند. آن ها در مدل شان از فرض فشار هیدرواستاتیکی برای فازهای مایع و مخلوط استفاده کردند. زنگ و همکارانش [22] مقایسه ای از طرح هایی از خانواده AUSM ضمنی و صریح برای جریان های چندفازی قابل تراکم با فرض عبارت تصحیح فشار هیدرودینامیکی انجام دادند. مونکجورد و هامر [23] مدل دو سیالی را برای شبیه سازی جریان گذرا مخلوط غنی از دی اکسیدکربن در لوله را بررسی کردند و همانند پایلر و همکارانش [8] فرض فشار هیدرودینامیک را در نظر گرفتند. در نهایت وانگ و همکارانش [24] شبیه سازی عددی جریان دوفازی متوسط گیری سطحی را با استفاده از یک الگوریتم مبتنی بر فشار با فرض برابری فشار فازها با هم و فشار فصل مشترک فازها با هم و با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرودینامیکی ارائه شده توسط پایلر و همکاران [8] ارائه کردند.

از مروری بر مقالات فوق معلوم شده است که در مدل سازی جریان های دو فازی گاز- مایع با استفاده از مدل دو سیالی، از دو مدل برای بیان ترم تصحیح فشار استفاده شده است: مدل هیدرواستاتیکی و مدل هیدرودینامیکی که به کارگیری هر کدام از این مدل ها روی طبیعت ریاضی مدل های دو سیالی و الگوریتم حل عددی و دقت جوابها تاثیر مستقیم دارد. با توجه به بررسی های صورت گرفته، در هیچ مرجعی مقایسه اثری که هریک از این دو مدل بر جواب های به دست آمده از مدل دو سیالی دارند مورد بررسی قرار نگرفته است، که بررسی اثر مدل هیدرودینامیکی و مدل هیدرواستاتیکی برای ترم تصحیح فشار موجود در مدل دو سیالی در مدل سازی جریان های دو فازی گاز- مایع نوآوری مقاله حاضر می باشد.

2- معادلات حاکم

اساس مدل دو سیالی، وجود دو سری معادلات بقاء برای بالانس جرم، مومنتوم و انرژی برای هر فاز می باشد. فرم متوسط گیری شده مدل دو سیالی با انتگرال گیری سطحی از خواص سیال روی سطح مقطع جریان به دست می آید. انتقال مومنتوم و انرژی بین دیواره ها و سیالات توسط ترم های چشمه در معادلات ظاهر می شوند و این ترم های چشمه توسط روابط تجربی بدست می آیند [4]. علاوه بر این، تقابل دینامیکی بین فازها در فصل مشترک توسط نیروهای فصل مشترکی که توسط ترم چشمه در معادلات بقاء ظاهر می شوند، محاسبه می گردد.

در تحقیق حاضر، جریان ایزوترم فرض شده است. معادلات بقای جرم و مومنتوم برای فازهای گاز و مایع به صورت ذیل می باشد:

معادله بقای جرم گاز:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_g \alpha_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_g \alpha_g u_g) = 0 \quad (11)$$

معادله بقای جرم مایع:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_l \alpha_l) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_l \alpha_l u_l) = 0 \quad (12)$$

معادله بقای مومنتوم گاز:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_g \alpha_g u_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_g \alpha_g u_g^2) \\ = -\frac{\partial}{\partial x}((P_g - P_{gi})\alpha_g) - \alpha_g \frac{\partial P_{gi}}{\partial x} + S_g \end{aligned} \quad (13)$$

معادله بقای مومنتوم مایع:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_l \alpha_l u_l) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_l \alpha_l u_l^2) \\ = -\frac{\partial}{\partial x}((P_l - P_{li})\alpha_l) - \alpha_l \frac{\partial P_{li}}{\partial x} + S_l \end{aligned} \quad (14)$$

$$S_k = -\rho_k \alpha_k G \sin \beta + F_{kw} \pm F_i \quad (15)$$

که در روابط فوق برای فاز k ($k = g$) فاز گاز است و $k = l$ فاز مایع است، ρ_k چگالی فاز k ، α_k کسر حجمی فاز k ، u_k سرعت فاز k ، P_k فشار فاز k ، P_{ki} فشار فاز k در فصل مشترک است. در معادله (15)، S_k عبارت های چشمه که شامل نیروی های گرانشی، نیروی اصطکاک هر فاز با دیوارها (F_{kw} علامت دیوار لوله است) و F_i نیروی اصطکاک فازها در فصل مشترک می باشد. ضریب نیروی اصطکاک فازها در فصل مشترک (F_i)، در معادله مومنتوم فاز گاز مثبت و در معادله مومنتوم فاز مایع منفی می باشد. در معادلات مومنتوم فوق ترم $P_g - P_{gi}$ را با ΔP_{gi} نشان می دهند و به آن ترم تصحیح فشار برای فاز گاز گفته می شود و نیز ترم $P_l - P_{li}$ را با ΔP_{li} نشان می دهند و به آن ترم تصحیح فشار برای فاز مایع گفته می شود. ترم های فشار در معادلات مومنتوم فوق را می توان براساس نوع بسط مشتق بر متغیرها، به دو صورت زیر نوشت.

فرم یک [25]:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}((P_k - P_{ki})\alpha_k) - \alpha_k \frac{\partial P_{ki}}{\partial x} \\ = -\frac{\partial(\alpha_k P_k)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha_k P_{ki})}{\partial x} - \alpha_k \frac{\partial P_{ki}}{\partial x} \\ = -\frac{\partial \alpha_k}{\partial x} P_k + \alpha_k \frac{\partial P_{ki}}{\partial x} + P_{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} - \alpha_k \frac{\partial P_{ki}}{\partial x} \\ = -\frac{\partial(\alpha_k P_k)}{\partial x} + P_{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} \end{aligned} \quad (16)$$

فرم دو [1]:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}((P_k - P_{ki})\alpha_k) - \alpha_k \frac{\partial P_{ki}}{\partial x} \\ = -\alpha_k \frac{\partial(P_k - P_{ki})}{\partial x} - \Delta P_{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} - \alpha_k \frac{\partial P_{ki}}{\partial x} \\ = -\alpha_k \frac{\partial P_k}{\partial x} + \alpha_k \frac{\partial P_{ki}}{\partial x} - \Delta P_{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} - \alpha_k \frac{\partial P_{ki}}{\partial x} \\ = -\alpha_k \frac{\partial P_k}{\partial x} - \Delta P_{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} \end{aligned} \quad (17)$$

بنابراین طبق بررسی های صورت گرفته، ترم های فشار مدل دو سیالی به دو صورت ذیل در مقالات گزارش شده است:

$$-\frac{\partial}{\partial x}((P_k - P_{ki})\alpha_k) - \alpha_k \frac{\partial P_{ki}}{\partial x} = \quad (18)$$

$$-\frac{\partial(\alpha_k P_k)}{\partial x} + P_{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} = \quad (19)$$

$$-\alpha_k \frac{\partial P_k}{\partial x} - \Delta P_{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} \quad (20)$$

حال با اعمال فرضیات مختلف برای ترم فشار، صورت های مختلف مدل دو سیالی به دست می آیند.

1-1- حالت اول (فرض فشار هیدرو استاتیک)

عیسی و کمیف با در نظر گرفتن معادله (19) و فرض فشار هیدرواستاتیک برای فاز مایع و محاسبه فشار متوسط فاز مایع با انتگرال گیری نسبت به سطح مقطع لوله روابط ذیل را برای ترم فشار مدل دو سیالی ارائه کردند [21,10].

$$-\frac{\partial}{\partial x}((P_g - P_{gi})\alpha_g) - \alpha_g \frac{\partial P_{gi}}{\partial x} = -\alpha_g \frac{\partial P}{\partial x} \quad (21)$$

که در کار فوق فرض شده فشار فاز گاز با فشار فاز مایع در فصل مشترک باهم برابرند ($P_g = P_{gi} = P$).

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}((P_l - P_{li})\alpha_l) - \alpha_l \frac{\partial P_{li}}{\partial x} \\ = -\alpha_l \frac{\partial P}{\partial x} - \rho_l \alpha_l G \cos \beta \frac{\partial h_l}{\partial x} \end{aligned} \quad (22)$$

که فرض شده فشار فاز مایع در فصل مشترک برابر فشار فاز گاز در فصل مشترک می باشد ($P_g = P_{li} = P$) و فشار در فاز مایع به صورت هیدرواستاتیکی در راستای قائم تغییر می کند.

2-2- حالت دوم (فرض فشار هیدرو دینامیکی)

پایر و همکاران [8] و اوج و فلائن [9] از معادله (18) برای ترم های فشار استفاده کردند و فرض کردند که فشار فاز گاز با فشار فاز مایع برابر است ($P_g = P_l = P$) و فشار فازها در فصل مشترک نیز با هم برابرند ($P_{gi} = P_{li} = P_i$) و رابطه ذیل را برای تصحیح فشار ارائه کردند:

$$\Delta P_{ki} = P_k - P_{ki} = \delta \frac{\alpha_l \alpha_g \rho_l \rho_g}{\rho_g \alpha_l + \rho_l \alpha_g} (u_g - u_l)^2 \quad (23)$$

که در رابطه فوق $\delta = 1.2$ است [9].

همچنین در برخی مراجع [1] معادله (20) برای ترم های فشار معادله مومنوم استفاده شده است و رابطه ذیل برای ترم تصحیح فشار ارائه گردید و با نماد P_c علامت گذاری شده است:

$$P_c = \Delta P_{ki} = \rho_l \alpha_l G \cos \beta \frac{\partial h_l}{\partial \alpha_l} \quad (24)$$

که با قرار دادن رابطه فوق در معادله (20) رابطه ذیل به دست می آید:

$$\begin{aligned} -\alpha_k \frac{\partial P_k}{\partial x} - \rho_l \alpha_l G \cos \beta \frac{\partial h_l}{\partial \alpha_l} \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} \\ = -\alpha_k \frac{\partial P_k}{\partial x} - \rho_l \alpha_l G \cos \beta \frac{\partial h_l}{\partial x} \end{aligned} \quad (25)$$

که رابطه فوق همان معادله (22) می باشد یعنی همان فرض فشار هیدرواستاتیک. بنابراین بررسی های فوق نشان می دهند در مقالات برای ترم های فشار در معادله مومنوم دو نوع رابطه ارائه شده است:

1- مدل هیدرواستاتیک (معادله 22)

2- مدل هیدرو دینامیک (معادله 23)

در نتیجه فرم نهایی مدل دو سیالی با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیک و هیدرو دینامیک به ترتیب به صورت ذیل می باشند:

3-2- مدل دو سیالی با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیک

معادله بقای جرم گاز:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_g \alpha_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_g \alpha_g u_g) = 0 \quad (26)$$

معادله بقای جرم مایع:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_l \alpha_l) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_l \alpha_l u_l) = 0 \quad (27)$$

معادله بقای مومنوم گاز:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_g \alpha_g u_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_g \alpha_g u_g^2 + \alpha_g P) = P \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + S_g \quad (28)$$

معادله بقای مومنوم مایع:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_l \alpha_l u_l) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_l \alpha_l u_l^2 + \alpha_l P) = (P - P_c) \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} + S_l \quad (29)$$

$$P_c = \rho_l \alpha_l G \cos \beta \frac{\partial h_l}{\partial R_l} \quad (30)$$

در مدل دو سیالی ارائه شده، فرض شده فشار فاز گاز با فشار فاز مایع در فصل مشترک باهم برابرند ($P_g = P_{gi} = P$) و نیز فرض شده فشار فاز مایع در فصل مشترک برابر فشار فاز گاز در فصل مشترک می باشد ($P_{gi} = P_{li} = P$) و فشار در فاز مایع به صورت هیدرواستاتیکی در راستای قائم تغییر می کند.

4-2- مدل دو سیالی با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرو دینامیک

معادله بقای جرم گاز:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_g \alpha_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_g \alpha_g u_g) = 0 \quad (31)$$

معادله بقای جرم مایع:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_l \alpha_l) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_l \alpha_l u_l) = 0 \quad (32)$$

معادله بقای مومنوم گاز:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_g \alpha_g u_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_g \alpha_g u_g^2 + \alpha_g P) \\ = P_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + S_g \end{aligned} \quad (33)$$

معادله بقای مومنوم مایع:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_l \alpha_l u_l) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_l \alpha_l u_l^2 + \alpha_l P) = P_i \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} + S_l \quad (34)$$

در مدل دو سیالی ارائه شده، فشار فاز گاز با فشار فاز مایع برابر است ($P_g = P_l = P$) و فشار فازها در فصل مشترک نیز با هم برابرند ($P_{gi} = P_{li} = P_i$).

برای بسته شدن سیستم معادلات روابط دیگری نیز لازم است. اولین رابطه قید هندسی است که بیان می کند مجموع کسر حجمی های دو فاز، برابر واحد است:

$$\alpha_l + \alpha_g = 1 \quad (35)$$

علاوه بر معادلات بالا، برای بسته شدن سیستم معادلات، زیر مدل های ترمودینامیکی نیز لازم است. برای فاز k ام، معادله حالت زیر برای بیان رابطه بین چگالی و فشار در نظر گرفته شده است [9]:

$$\rho_k = \rho_{k,0} + \frac{P_k - P_{k,0}}{C_k^2} \quad (36)$$

$\rho_{k,0}$ و $P_{k,0}$ مقادیر مرجع برای چگالی و فشار هستند. C_i سرعت صوت در هر فاز می باشد و طبق نظریه اوجه و فلائن به صورت زیر در نظر گرفته می شود [9]:

$$\frac{\partial P_k}{\partial \rho_k} = C_k^2 \quad (37)$$

فرض C_i ثابت به صورت ضمنی بیان می کند که جریان ایزنتروپیک است.

فشار و چگالی مرجع برای مایع و گاز به صورت زیر فرض می شود [9]:

$$P_{l,0} = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ pa} \quad \rho_{l,0} = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$P_{g,0} = 0 \quad \rho_{g,0} = 0$$

مقادیر زیر برای سرعت صوت مایع و گاز در نظر گرفته می شود [9]:

$$C_l^2 = 10^6 \text{ (m/s)}^2 \quad C_g^2 = 10^5 \text{ (m/s)}^2$$

در این تحقیق قصد بر این است تا تاثیر مدل هیدرواستاتیک و مدل هیدرو دینامیک برای ترم تصحیح فشار موجود در مدل دو سیالی با استفاده از یک مطالعه عددی بررسی گردد و دو مدل ارائه شده برای ترم های فشار مورد استفاده در مدل دوسیالی مورد مقایسه قرار گیرند. برای این منظور مدل دو

نوشت.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = H \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} + S \quad (39)$$

Q بردار متغیرهای پایستار است. F بردار فلاکس پایستار. دو بردار S و $H \frac{\partial \alpha_k}{\partial x}$ بردارهای انتقال فصل مشترک می باشند. بردارهای مدل دوسیالی تک فشار با در نظر گرفتن دو ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیک و هیدرودینامیک به صورت ذیل می باشد. در جدول 1 بردارهای مدل دوسیالی با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیک و در جدول 2 بردارهای مدل دوسیالی با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرودینامیک ارائه شده است.

برای سیستم غیرپایستار (39) فرم معادله جداسازی شده به صورت زیر درمی آید:

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j-1/2}^n - F_{j+1/2}^n) + \Delta t \left(H \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} \right) + \Delta t S_j \quad (40)$$

در معادله (40)، بالانویس n و $n+1$ به ترتیب بیانگر گام زمانی قدیم و جدید می باشند. j نشانگر سلول است. برای محاسبه ترم فلاکس عددی $F_{j+1/2}^n$ از روش لاکس-فردریچز استفاده شده است.

4-1- روش عددی لاکس-فردریچز

در این روش ترم فلاکس به صورت زیر محاسبه می شود [27]:

$$F_{j+1/2}^{nLF} = \frac{1}{2} (F_{j+1}^n + F_j^n) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) \quad (41)$$

فلاکس عددی در سلول j ام بصورت $F_j^n = F(Q_j^n)$ تعریف می شود که با توجه به عبارت فلاکس فیزیکی که توسط مدل بیان می شود به دست می آید. معادلات مدل دوسیالی تک فشار دارای ترم های غیرپایستار $H \frac{\partial \alpha_k}{\partial x}$ می باشند که باید به صورت مناسبی جداسازی شود. عدم جداسازی مناسب این ترم سبب ایجاد ناپایداری در جواب ها می شود. برای جداسازی ترم غیرپایستار $H \frac{\partial \alpha_k}{\partial x}$ رابطه ذیل ارائه شده است:

$$H \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} = H \alpha_g \alpha_l \frac{\partial BG}{\partial x} \quad (42)$$

$$H \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} = H \alpha_l \alpha_g \frac{\partial BL}{\partial x} \quad (43)$$

ترم مشتق $\partial BG / \partial x$ و $\partial BL / \partial x$ با استفاده از طرح مرکزی جداسازی شده است.

جدول 1 تفکیک بردارهای مدل دوسیالی با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیک

Table 1 Discretization of vectors of two-fluid model by considering hydrostatic pressure correction term

Q	$(\rho_g \alpha_g, \rho_l \alpha_l, \rho_g \alpha_g u_g, \rho_l \alpha_l u_l)$
F	$(\rho_g \alpha_g u_g, \rho_l \alpha_l u_l, \rho_g \alpha_g u_g^2 + \alpha_g P, \rho_l \alpha_l u_l^2 + \alpha_l P)$
H	$(0, 0, P, P - P_c)$
S	$(0, 0, -\rho_g \alpha_g G \sin \beta + F_{gw} + F_l, -\rho_g \alpha_g G \sin \beta + F_{kw} - F_l)$

جدول 2 تفکیک بردارهای مدل دوسیالی با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرودینامیک

Table 2 Discretization of vectors of two-fluid model by considering hydrostatic pressure correction term

Q	$(\rho_g \alpha_g, \rho_l \alpha_l, \rho_g \alpha_g u_g, \rho_l \alpha_l u_l)$
F	$(\rho_g \alpha_g u_g, \rho_l \alpha_l u_l, \rho_g \alpha_g u_g^2 + \alpha_g P, \rho_l \alpha_l u_l^2 + \alpha_l P)$
H	$(0, 0, P_l, P_l)$
S	$(0, 0, -\rho_g \alpha_g G \sin \beta + F_{gw} + F_l, -\rho_g \alpha_g G \sin \beta + F_{kw} - F_l)$

سیالی یک بار با استفاده از مدل هیدرودینامیکی و با دیگر با استفاده از مدل هیدرواستاتیکی با به کارگیری حل عددی در چهار مسأله نمونه معروف اعمال شده و جواب ها مورد مقایسه قرار خواهند گرفت. به خاطر بودن ناپیوستگی در میدان حل در فصل مشترک دو فاز مسأله حاصل یک مسأله ریمنی می باشد و از حل گرهای ریمنی برای حل عددی استفاده گردیده است.

3- آنالیز هیبربولیکی مدل دوسیالی تک فشار

مدل های جریان های دو فازی نسبت به حقیقی یا موهومی بودن ریشه های معادله مشخصه شان به شدت حساس می باشند. اگر ریشه های معادله مشخصه معادلات دیفرانسیل حاکم بر مدل موهومی باشند یک مسأله مقدار اولیه بدرفتار تشکیل می شود که نتیجه آن به وجود آمدن ناپایداری های غیرمحدود است و در نهایت جواب همگرا به دست نمی آید و ریشه های معادله مقادیر مشخصه معادلات حقیقی باشند یک مسأله خوش رفتار تشکیل شده و ناپایداری های غیرمحدود حذف می شوند [26]. حد پایداری مدل دوسیالی با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیک، همان حد ناپایداری کلونین هلمهلتز می باشد که به صورت زیر به دست آمده است [1].

$$(u_g - u_l)^2 \leq \sqrt{\frac{(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g) \rho_l - \rho_g}{\rho_l \rho_g} G \cos \beta \frac{A}{\partial A_l}} \quad (38)$$

یعنی حد ناپایداری کلونین هلمهلتز با حد خوش رفتاری مدل دو سیالی تک فشار با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیک یکسان است. از طرفی می توان نشان داد که اگر اختلاف سرعت دو فاز از این مقدار بیشتر شود، فصل مشترک دو فاز از نظر فیزیکی نیز ناپایدار می شود، یعنی حد فیزیکی ناپایداری فصل مشترک با حد خوش رفتاری مدل دوسیالی تک فشار با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیک برابر است. اگر اختلاف سرعت دو فاز از این حد بیشتر شود، ریشه های معادله مشخصه مدل موهومی شده و مدل بدرفتار می شود. این بدرفتاری باعث می شود که نتایج مدل دو سیالی فیزیکی واقعی جریان را نشان ندهد

4- روش حل عددی معادلات

الگوریتم های حل عددی برحسب رفتار ترم فشار به دو دسته تقسیم می شوند. دسته اول الگوریتم های بر مبنای فشار می باشند و از میان آن ها می توان به الگوریتم تصحیح فشار بر مبنای الگوریتم سیمپل و روش حل عددی حجم محدود [17,10] اشاره کرد. این دسته از الگوریتم ها از یک شبکه جابه جا شده برای محاسبه ترم فشار و سرعت استفاده می کنند و نیاز است تا معادلات بقاء به صورت تکراری و در یک شبکه بسیار ریز حل شوند. این مسائل سبب می شوند محاسبات کامپیوتری بسیار زمان بر شوند. دسته دوم الگوریتم ها بر مبنای حلگرهای ریمن می باشند که از میان آن ها می توان به روش گدونفی با فلاکس تقریبی [9] اشاره کرد. این دسته روش ها از تعمیم متدهای حل جریان شاک به مسایل جریان دوفازی به وجود آمده اند و از توانمندی این روش ها در تسخیر شاک، برای پیش بینی ناپیوستگی های موجود در فصل مشترک جریان های دوفازی استفاده شده است. همچنین به دلیل موفق بودن روش های تسخیر شاک در پیش بینی گرادین های شدید، دقت جواب هایی که توسط حلگرهای ریمن در پیش بینی ناپیوستگی های موجود در میدان حل اختیار قرار می گیرد از الگوریتم های بر مبنای فشار و روش حجم محدود بیشتر می باشد. به دلایل ذکر شده در این مقاله از دسته دوم الگوریتم ها یعنی از حلگرهای ریمن از نوع گودونفی استفاده شده است.

معادلات مدل دو سیالی تک فشار را می توان به صورت غیرپایستار زیر

فرض های ارائه شده برای ترم تصحیح فشار مقایسه شده اند. در "شکل های 3" میزان وابستگی جواب ها به سلول محاسباتی برای پروفیل کسر حجمی فاز گاز در زمان 0.6 ثانیه برای $CFL = 0.5$ نشان داده شده است.

در "شکل 3" جواب مستقل از سلول محاسباتی با استفاده از ترم تصحیح فشار هیدرودینامیک برای پروفیل کسر حجمی فاز گاز نشان داده شده است و مشخص گردید در سلول محاسباتی 6400 جواب ها مستقل از سلول محاسباتی شده است. می توان مشاهده کرد که در سلول 6400 نتایج تطابق خوبی با حل تحلیلی دارند. اکنون به بررسی اثر ترم تصحیح فشار هیدرودینامیک و ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیک بر روی تغییرات پروفیل فشار، کسر حجمی فاز گاز و سرعت فاز گاز و سرعت فاز مایع برای سلول

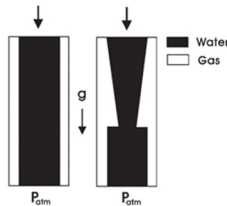


Fig. 2 Schematic of the water faucet case

شکل 2 شماتیک مسأله شیر آب

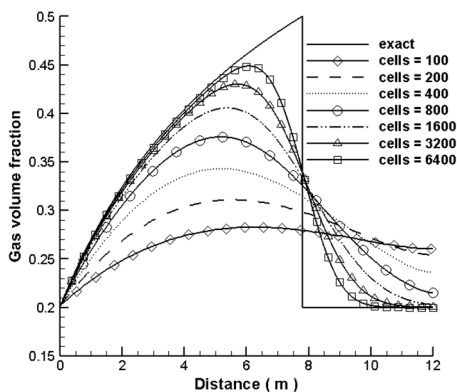


Fig. 3 Water faucet case, independent results of computational cells of gas volume fraction profiles for hydrostatic pressure correction term

شکل 3 مسأله شیر آب، جواب های مستقل از سلول محاسباتی پروفیل کسر حجمی فاز گاز برای ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیک

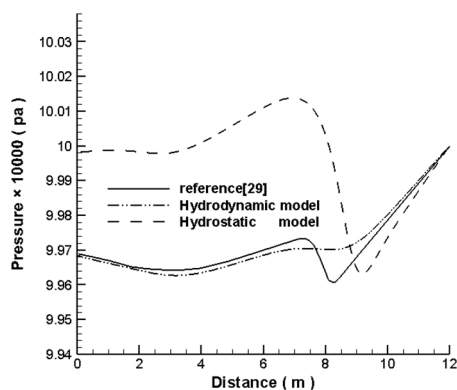


Fig. 4 Water faucet case, comparison of the effect of the pressure correction term for pressure profile

شکل 4 مسأله شیر آب، مقایسه اثر ترم تصحیح فشار برای پروفیل فشار

$$H\alpha_g\alpha_l \frac{\partial BG}{\partial x} = H\alpha_g\alpha_l \frac{BG_{j+1} - BG_{j-1}}{2\Delta x} \quad (44)$$

$$H\alpha_l\alpha_g \frac{\partial BL}{\partial x} = H\alpha_l\alpha_g \frac{BL_{j+1} - BL_{j-1}}{2\Delta x} \quad (45)$$

که

$$BG = \log\left(\frac{\alpha_g}{\alpha_l}\right) \quad (46)$$

$$BL = \log\left(\frac{\alpha_l}{\alpha_g}\right) \quad (47)$$

2-4- محاسبه گام زمانی

برای محاسبه گام زمانی، ابتدا Δx اندازه گام مکانی مشخص می شود سپس با استفاده از رابطه زیر، Δt یا اندازه گام زمانی محاسبه می شود [1]:

$$\Delta t = CFL \frac{\Delta x}{\lambda_{\max}^n} \quad (48)$$

در تحقیق حاضر مقدار عدد کورانت-فردریچز-لوی بین مقدار 2.0 تا 7.0 در نظر گرفته شده است. λ_{\max}^n بیشترین مقدار سرعت موج در میدان حل در زمان n می باشد. با توجه به این که بیشترین مقدار سرعت موج در هر گام زمانی می تواند دارای مقادیر متفاوتی باشد، بنابراین محاسبات عددی با گام زمانی متغیر ادامه پیدا می کند تا به زمان محاسباتی موردنظر برسد. بیشترین مقدار سرعت موج برای مدل دو سیالی تک فشار، برابر است با بیشترین مقدار مشخصه معادلات حاکم در میدان حل. مقدار مشخصه مدل دوسییالی با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیک توسط اوساما [1] ارائه شده است و مقدار مشخصه مدل دوسییالی با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرودینامیک توسط اوج و فلاتن [9] ارائه شده است. برای یک سیستم با k معادله دیفرانسیل و M سلول محاسباتی، بیشترین مقدار مشخصه معادلات حاکم در میدان حل به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\lambda_{\max}^n = \max_j \{ \max_k |\lambda_j^k| \} \quad \text{for } j = 1, \dots, M \quad k = 1, Neq \quad (49)$$

5- اعتباریابی مدل ها و روش عددی

در این قسمت جهت مشاهده اثر ترم تصحیح فشار بر دقت جواب ها، چهار مسأله نمونه، شیر آب، جدایش آب و هوا، لوله شاک سرعت نسبی بزرگ و لوله شاک تامی با استفاده از مدل دو سیالی مورد تحلیل قرار گرفته که به ترتیب دو مسأله نمونه اول کانال قائم و دو مسأله نمونه دوم کانال افقی هستند.

5-1- مسأله شیر آب

این سیستم شامل یک لوله عمودی، به ارتفاع 12 متر و قطر 1 متر می باشد. در لحظه اولیه سرعت آب 10 متر بر ثانیه و سرعت هوا صفر، کسر حجمی آب 8.0 و دمای سیستم 50 درجه سانتی گراد پر شده است. فشار در انتهای کانال 100000 پاسکال می باشد. شرایط ورودی معادل شرایط اولیه می باشد و برای خروجی لوله شرط مرزی کاملاً توسعه یافته برقرار می باشد. در اطراف آب، هوا با دانسیته 1.16 کیلوگرم بر متر مکعب است [28]. شماتیک مسأله شیر آب در "شکل 2" نشان داده شده است.

حل تحلیلی این مسأله اوج و فلاتن [29] ارائه شده است. در نتایج عددی به بررسی اثر ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیک [10] و ترم تصحیح فشار هیدرودینامیک [9] پرداخته شده است. ابتدا جواب های مستقل از شبکه محاسباتی پروفیل کسر حجمی فاز گاز برای دو فرض ارائه شده برای ترم تصحیح فشار به دست آمدند. و در گام بعدی پارامترهای جریان توسط

سیالی ارائه شده با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی برای مسأله شیر آب، با توجه به قائم بودن کانال، زاویه β در معادله (29) صفر می شود و اثر ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی در معادلات مدل دو سیالی حذف گردد و در واقع فرض برابری فشارها در نظر گرفته شده است، یعنی $P_{il} = P_{ig} = P_l = P_g = P$ این فرض سبب می شود که ریشه های معادله مشخصه، بی قید و شرط مختلط شوند و در این صورت استفاده از این مدل محل اشکال است. در "شکل 5" پروفیل کسر حجمی فاز گاز با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی رشد بیشتری نسبت به پروفیل کسر حجمی فاز گاز با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرودینامیکی دارد. با رشد بیشتر پروفیل کسر حجمی فاز گاز با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی، سطح مقطع عبور فاز گاز در داخل کانال افزایش می یابد، در نتیجه کاهش پروفیل سرعت فاز گاز در "شکل 6" نشان داده شده است.

نتایج بدست آمده با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی، در "شکل 7" انحراف پروفیل سرعت فاز مایع نسبت به حل تحلیلی مسأله شیر آب و در "شکل 5" تطابق بیشتر پروفیل کسر حجمی فاز گاز با حل تحلیلی مسأله شیر آب را نشان داده است. علت این تناقض به این دلیل است، با توجه به این که حد ناپایداری کلون هلمهلتز و حد خوش رفتاری مدل دوسیالی تک فشار با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی برابر است [1]، بنابراین با توجه به قائم بودن کانال زاویه β در معادله (29) صفر می شود، و در نتیجه سمت چپ شرط حد ناپایداری کلون هلمهلتز معادله (38) صفر می شود و سرعت نسبی فازها باید کوچکتر یا مساوی صفر شود $(u_g - u_l)^2 \leq 0$. اما با توجه به سرعت اولیه دو فاز برای مسأله نمونه شیر آب این شرط برقرار نمی شود. بنابراین مسأله نمونه شیر آب یک مسأله مقدار اولیه بد رفتار می باشد که اعتبارسنجی نتایج به دست آمده با مقایسه حل تحلیلی مسأله امکان پذیر می باشد.

2-5- مسأله جدایش آب و هوا

این سیستم شامل یک لوله عمودی به طول 5.7 متر که در لحظه اولیه توسط مایع و گاز ساکن با فشار یکنواخت پر شده است. هر دو انتهای لوله بسته می باشد و سرعت هر دو فاز در نقاط انتهایی صفر فرض می شود. در لحظه اولیه در لوله فشار یکنواخت 100000 پاسگال و کسر حجمی مایع $\alpha_L = 0.5$ می باشد [30]. در "شکل 8" شماتیک مسأله جدایش آب و هوا نشان داده شده است.

حل تحلیلی این مسأله اوج و فلاتن [29] ارائه شده است. طبق حل تحلیلی ارجاع داده شده بعد از زمان 0.87 ثانیه انتظار می رود دو فاز کاملاً از هم جدا شده و فاز مایع در قسمت پایین لوله و فاز گاز بر روی فاز مایع قرار گیرد و در نتیجه کسر حجمی مایع و سایر متغیرها به سمت حالت ایستایی میل کنند [29].

مسأله جدایش آب و هوا به دو دلیل یک مسأله چالش برانگیز است:

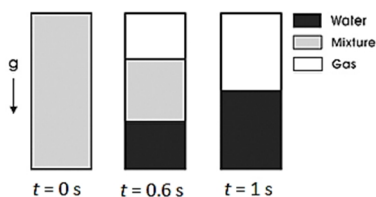


Fig. 8 Schematic of water and air separation case

شکل 8 شماتیک مسأله جدایش آب و هوا

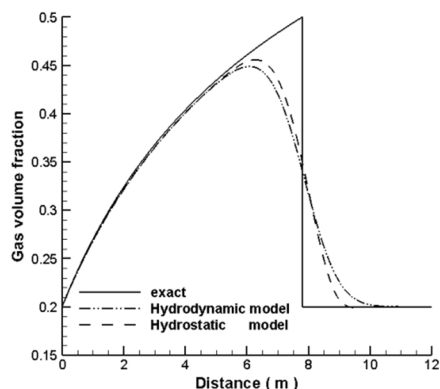


Fig. 5 Water faucet case, comparison of the effect of the pressure correction term for gas volume fraction profile

شکل 5 مسأله شیر آب، مقایسه اثر ترم تصحیح فشار برای پروفیل کسر حجمی فاز گاز

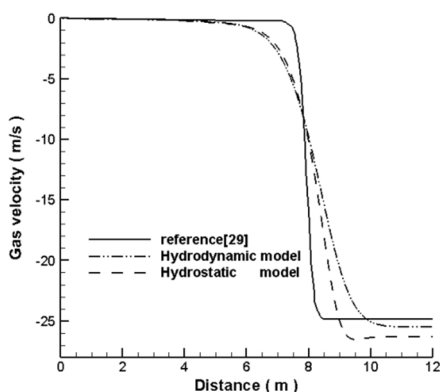


Fig. 6 Water faucet case, comparison of the effect of the pressure correction term for gas velocity profile

شکل 6 مسأله شیر آب، مقایسه اثر ترم تصحیح فشار برای پروفیل سرعت فاز گاز

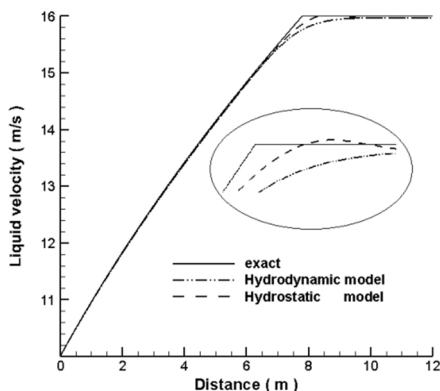


Fig. 7 Water faucet case, comparison of the effect of the pressure correction term for liquid velocity profile

شکل 7 مسأله شیر آب، مقایسه اثر ترم تصحیح فشار برای پروفیل سرعت فاز مایع

محاسباتی با تعداد 6400 گره در زمان 0.6 ثانیه و برای $CFL = 0.5$ مورد بررسی قرار می گیرند.

نتایج به دست آمده برای پروفیل فشار در "شکل 4" نشان می دهد در مسأله نمونه شیر آب که یک کانال قائم می باشد، ترم تصحیح فشار هیدرودینامیک تطابق بهتری با حل تحلیلی مسأله شیر آب دارد. در مدل دو

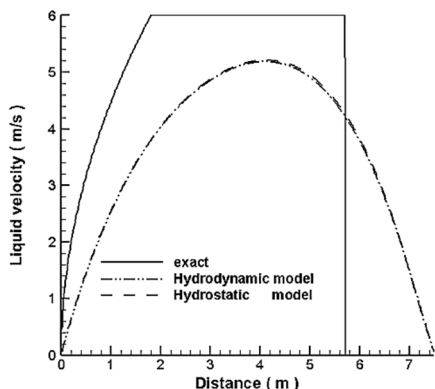


Fig. 11 Water and air separation case, comparison of the effect of the pressure correction term for liquid velocity profile

شکل 11 مسأله جدایش آب و هوا، مقایسه اثر ترم تصحیح فشار برای پروفیل سرعت فاز مایع

نتایج به دست آمده در "شکل 9" برای پروفیل فشار نشان می دهد در مسأله نمونه جدایش آب و هوا در زمان 6.0 ثانیه دو فاز مایع و گاز در حال جدایش می باشند اما جدایش کامل دو فاز مایع و گاز صورت نگرفته است. در مدل دو سیالی ارائه شده با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی برای مسأله جدایش آب و هوا با توجه به قائم بودن کانال زاویه β در معادله (29) صفر می شود و اثر ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی در معادلات مدل دو سیالی دیده نمی شود، در واقع اثر وزن فاز مایع که در انتهای کانال قرار دارد را در نظر نمی گیرد و می توان اختلاف اثر ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی و ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی در مدل دوسیالی برای پروفیل فشار، در انتهای کانال مشاهده کرد.

در "شکل 10" پروفیل کسر حجمی فاز گاز برای دو ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی و هیدرواستاتیکی برای مسأله نمونه جدایش آب و هوا نشان داده شده است، که دارای اختلاف بسیار کم در انتهای کانال می باشند. این اختلاف نتایج ناشی از در نظر گرفته نشدن اثر وزن فاز مایع در انتهای کانال در مدل دوسیالی با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی می باشد. با توجه به پروفیل کسر حجمی فاز گاز نشان داده شده در "شکل 10" برای دو ترم تصحیح فشار، ملاحظه می شود گرادین های شدید با دقت پیش بینی نشده اند. دلیل این عدم تطابق خطای برش روش عددی لاکس فریدریچز می باشد. روش عددی لاکس فریدریچز یک روش مرتبه اول است، بنابراین خطای برش آن مرتبه دوم می باشد و این خطای برش مرتبه دوم سبب ایجاد یک دیفیوژن عددی می شود که این دیفیوژن عددی سبب پخش ناپیوستگی در میدان حل می شود و نمی تواند گوشه های تیز حل تحلیلی مسأله جدایش آب و هوا را پوشش دهد.

در "شکل 11" تغییرات پروفیل سرعت فاز مایع برای دو فرض ترم تصحیح فشار نتایج یکسان را نشان می دهند. با توجه به این که اثر ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی در معادلات مدل دو سیالی دیده نمی شود اما نتایج عددی تقریباً یکسان را مشاهده می شود، زیرا که در زمان 6.0 ثانیه جدایش کامل صورت نگرفته و دو فاز تقریباً همگن می باشند.

5-3- مسأله لوله شاک سرعت نسبی بزرگ

این مسأله یک مسئله مقدار اولیه ریمنی می باشد که شامل یک کانال به طول 100 متر است که در مکان 50 متری توسط دیافراگمی به دو قسمت تقسیم می شود و دو انتهای کانال بسته می باشد. مشخصات این مسأله و

1- حضور گرادین های شدید

2- میل کسر حجمی به 0 و 1

در این مدل بدون در نظر گرفتن ترم تنش، سرعت گاز در انتهای لوله که گاز در حال کم شدن است، خیلی زیاد شده و به چندین هزار متر بر ثانیه می رسد و مشکلات ناپایداری ایجاد می کند. برای رفع این مشکل اوجه، منکبورد و پیلیز ترم تنش فصل مشترک را به صورت ترم چشمه در معادلات مومنتوم اعمال کردند مقادیر پارامترهای آن با تبعیت از محققین ذکر شده است. Φ پارامتر اصطکاکی است و یک مقدار مثبت می باشد و به صورت زیر محاسبه می شود [9].

$$F_g^d = -\Phi \alpha_l \alpha_g \rho_g (u_g - u_l) \quad (50)$$

$$\Phi = C e^{-\omega \alpha_g} \quad (51)$$

که $\omega = 50$ و $C = 5 \times 10^4 \text{ 1/s}$ است. F_g^d ترم چشمه فاز گاز می باشد. ترم چشمه فاز مایع به صورت $F_l^d = -F_g^d$ نوشته می شود.

اکنون به بررسی اثر ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی و ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی بر روی تغییرات پروفیل فشار، کسر حجمی فاز گاز و سرعت فاز مایع و گاز برای سلول محاسباتی با تعداد 380 گره در زمان 6.0 ثانیه و برای $CFL = 0.5$ پرداخته می شود.

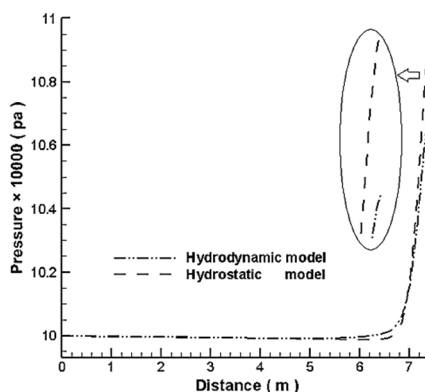


Fig. 9 Water and air separation case, comparison of the effect of the pressure correction term for pressure profile

شکل 9 مسأله جدایش آب و هوا، مقایسه اثر ترم تصحیح فشار برای پروفیل فشار

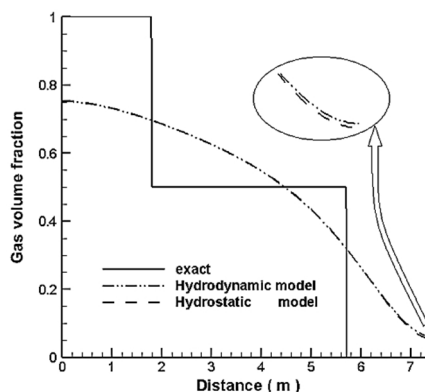


Fig. 10 Water and air separation case, comparison of the effect of the pressure correction term for gas volume fraction profile

شکل 10 مسأله جدایش آب و هوا، مقایسه اثر ترم تصحیح فشار برای پروفیل کسر حجمی فاز گاز

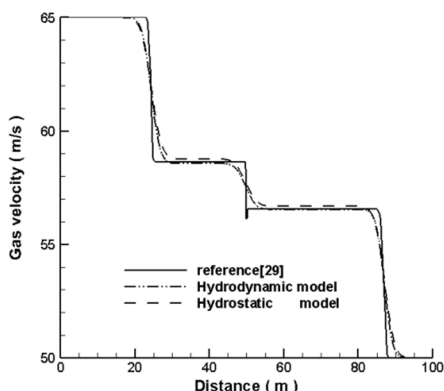


Fig. 14 Large relative velocity of shock tube case, comparison of the effect of the pressure correction term for gas velocity profile

شکل 14 مسأله لوله شاک سرعت نسبی بزرگ، مقایسه اثر ترم تصحیح فشار برای پروفیل سرعت فاز گاز

شده است. مشخص شده به ازای سلول محاسباتی 1600 جوابها مستقل از شبکه محاسباتی شده است.

پروفیل تغییرات فشار در "شکل 13" نشان می دهد در مسأله نمونه سرعت نسبی بزرگ، ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیک با دقت بالاتری پروفیل تغییرات فشار را در ناحیه ناپیوستگی نسبت به ترم تصحیح فشار هیدرودینامیک پیش بینی می کند. مسأله نمونه سرعت نسبی بزرگ، یک کانال افقی می باشد که زاویه آن با سطح افق صفر می باشد و بنابراین $\cos \beta$ در معادله (29) برابر یک می شود، در نتیجه اثر ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیک در معادلات مدل دو سیالی دیده می شود. در این مسأله نمونه، در لحظه اولیه بین دو طرف دیافراگم گرادیان فشار وجود ندارد. بنابراین اثر وزن فاز مایع در ایجاد اختلاف فشار در دو طرف دیافراگم تاثیر مهمی دارد. نتایج نشان می دهند مدل دو سیالی ارائه شده با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیک مدل مناسب تری برای پیش بینی پروفیل تغییرات فشار در کانال افقی بدون حضور گرادیان های شدید فشار می باشد.

در "شکل های 14" پروفیل سرعت فاز گاز بررسی شده است، نتایج عددی به دست آمده برای پروفیل سرعت فاز گاز با در نظر گرفتن دو ترم تصحیح فشار تقریباً یکسان می باشد. در واقع ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیک تغییرات پروفیل فشار در ناحیه ناپیوستگی را دقیق تر پیش بینی کرده است و در حقیقت تاثیر بارز ترم تصحیح فشار در پیش بینی پارامتر فشار مسأله می باشد.

4-5- مسأله لوله شاک تامی

این سیستم شامل یک لوله به طول 100 متر است که در مکان 50 متری توسط دیافراگمی به دو قسمت تقسیم می شود و دو انتهای کانال بسته می باشد. مشخصات این مسأله و شرایط اولیه در سمت چپ و راست دیافراگم در جدول 4 ارائه شده است [32].

در این مسأله در لحظه اولیه $u_G = u_L$ است و مقدار ΔP مطابق با معادله (23) صفر می شود، که باعث می شود سیستم معادلات بدرفتار شود، بدین منظور مقدار ΔP برای مسأله نمونه لوله شاک تامی به شکل زیر پیشنهاد شده است [33].

$$\Delta P = P - P_i = \delta \frac{\alpha_g \alpha_l \rho_g \rho_l}{\rho_g \alpha_l + \rho_l \alpha_g} (u_g - u_l)^2 + (1 - \beta) P \quad (52)$$

شرایط اولیه در سمت چپ و راست دیافراگم در جدول 3 ارائه شده است [31].

در "شکل 12" میزان وابستگی جوابها به سلول محاسباتی برای پروفیل سرعت فاز گاز در زمان 1.0 ثانیه برای $CFL = 0.5$ نشان داده شده است.

در "شکل 12" جوابهای مستقل از سلول محاسباتی برای پروفیل سرعت فاز گاز با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرودینامیکی نشان داده

جدول 3 شرایط اولیه در سمت چپ و راست دیافراگم مسأله لوله شاک سرعت نسبی بزرگ

Table 3 initial conditions of the left and right of diaphragm in large relative velocity of shock tube case

راست	چپ	کمیت
0.3	0.29	کسر حجمی گاز
1(m/s)	1(m/s)	سرعت مایع
50(m/s)	65(m/s)	سرعت گاز
265(kpa)	265(kpa)	فشار
1000(kg/m ³)	1000(kg/m ³)	چگالی مایع
2.65(kg/m ³)	2.65(kg/m ³)	چگالی گاز

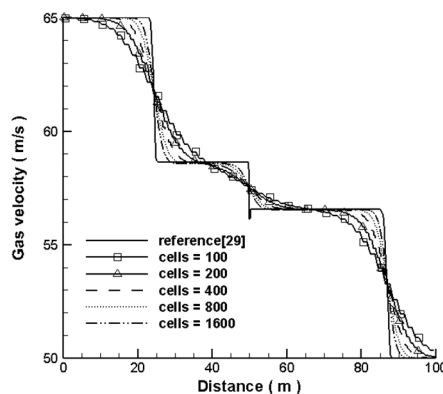


Fig. 12 Large relative velocity of shock tube case, independent results of computational cells of gas velocity profiles for hydrostatic pressure correction term

شکل 12 مسأله لوله شاک سرعت نسبی بزرگ، جوابهای مستقل از سلول محاسباتی پروفیل سرعت فاز گاز برای ترم تصحیح فشار هیدرودینامیک

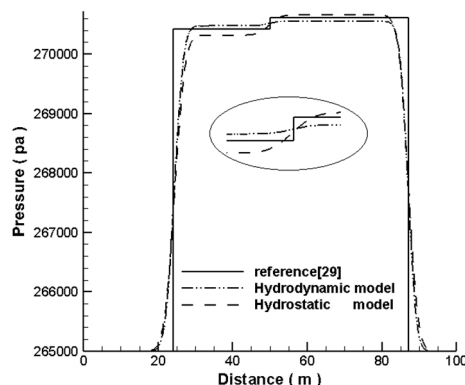


Fig. 13 Large relative velocity of shock tube case, comparison of the effect of the pressure correction term for pressure profile

شکل 13 مسأله لوله شاک سرعت نسبی بزرگ، مقایسه اثر ترم تصحیح فشار برای پروفیل فشار

جدول 4 شرایط اولیه در سمت چپ و راست دیافراگم مسأله لوله شاک تامی [32]

Table 4 initial conditions of the left and right of diaphragm in Toumi's shock tube case

راست	چپ	کمیت
0.1	0.25	کسر حجمی گاز
0	0	سرعت مایع
0	0	سرعت گاز
10(mpa)	20(mpa)	فشار
1000(kg/m ³)	1000(kg/m ³)	چگالی مایع
100(kg/m ³)	200(kg/m ³)	چگالی گاز

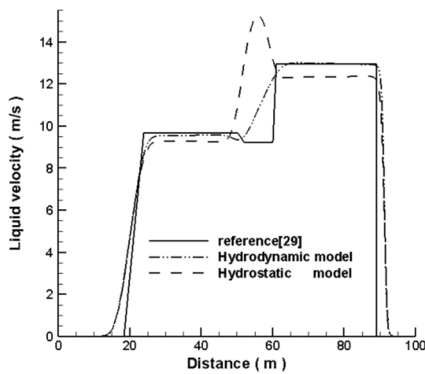


Fig. 17 Toumi's shock tube case, comparison of the effect of the pressure correction term for liquid velocity profile

شکل 17 مسأله لوله شاک تامی، مقایسه اثر ترم تصحیح فشار برای پروفیل سرعت فاز مایع

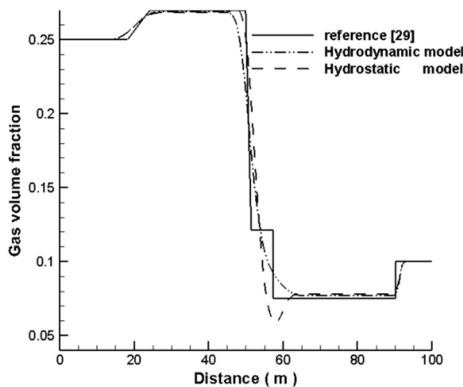


Fig. 18 Toumi's shock tube case, comparison of the effect of the pressure correction term for gas volume fraction profile

شکل 18 مسأله لوله شاک تامی، مقایسه اثر ترم تصحیح فشار برای پروفیل کسر حجمی فاز گاز

شده است. مشخص شده به ازای سلول محاسباتی 1600 جوابها مستقل از شبکه محاسباتی شده است.

در "شکل 16" پروفیل تغییرات فشار برای دو ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیک و هیدرو دینامیک نشان داده شده است. در "شکل 16" با در نظر گرفتن دو ترم تصحیح فشار هیدرو استاتیک و هیدرودینامیک، در ناحیه دیافراگم نتایج عددی متفاوتی برای پروفیل تغییرات فشار نشان داده شده است.

در "شکل 17 و 18" به ترتیب پروفیل سرعت فاز مایع و پروفیل کسر حجمی فاز گاز بررسی شده است، نتایج عددی به دست آمده برای پروفیل سرعت فاز گاز، پروفیل سرعت فاز مایع و پروفیل کسر حجمی فاز گاز با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیک، در محدوده دیافراگم پرش های بیش از حدی را نشان می دهند که با حل تحلیلی مطابقت ندارند و جوابها غیرفیزیکی می باشند.

در مسئله نمونه لوله شاک تامی در مقایسه با مسأله لوله شاک سرعت نسبی بزرگ، در لحظه اولیه گرادیان شدید فشار در دو طرف دیافراگم وجود دارد، بنابراین اثر تغییرات فشار ناشی از وزن فاز مایع در مقایسه با گرادیان شدید فشار در دو طرف دیافراگم ناچیز است. نتایج نشان می دهند در

که در آن $\beta = 0.999999$ در نظر گرفته می شود تا دیفیوژن کمی وارد سیستم شود. $\delta = 2$ برای این مسأله استفاده می شود [33].

در "شکل 15" وابستگی جوابها به سلول های محاسباتی مختلف برای پروفیل سرعت فاز گاز با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرودینامیک نشان داده شده است. زمان محاسبه تغییرات پروفیل سرعت فاز گاز و مقدار CFL به ترتیب 0.08 ثانیه و 0.2 در نظر گرفته شده است.

در "شکل 15" جوابهای مستقل از سلول محاسباتی برای پروفیل سرعت فاز گاز با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرودینامیکی نشان داده

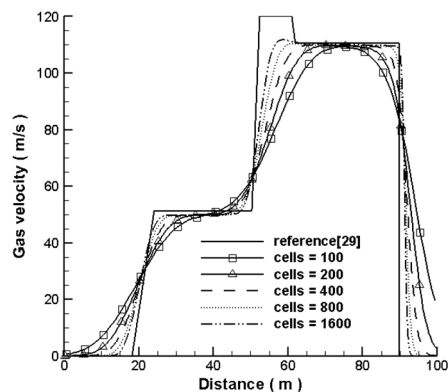


Fig. 15 Toumi's shock tube case, independent results of computational cells of gas velocity profiles for hydrostatic pressure correction term

شکل 15 مسأله لوله شاک تامی، جوابهای مستقل از سلول محاسباتی پروفیل سرعت فاز گاز برای ترم تصحیح فشار هیدرودینامیک

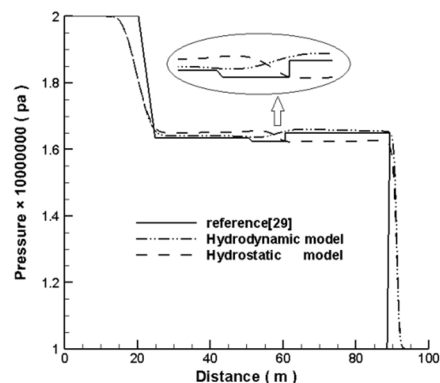


Fig. 16 Toumi's shock tube case, comparison of the effect of the pressure correction term for pressure profile

شکل 16 مسأله لوله شاک تامی، مقایسه اثر ترم تصحیح فشار برای پروفیل فشار

6, pp. 891-916, 2003.

[9] S. Evje, T. Flåtten, Hybrid flux-splitting schemes for a common two-fluid model, *Journal of Computational Physics*, Vol. 192, No. 1, pp. 175-210, 2003.

[10] R. Issa, M. Kempf, Simulation of slug flow in horizontal and nearly horizontal pipes with the two-fluid model, *International journal of multiphase flow*, Vol. 29, No. 1, pp. 69-95, 2003.

[11] M. Bonizzi, R. Issa, A model for simulating gas bubble entrainment in two-phase horizontal slug flow, *International journal of multiphase flow*, Vol. 29, No. 11, pp. 1685-1717, 2003.

[12] M. Bonizzi, R. Issa, On the simulation of three-phase slug flow in nearly horizontal pipes using the multi-fluid model, *International journal of multiphase flow*, Vol. 29, No. 11, pp. 1719-1747, 2003.

[13] J. Carneiro, A. Ortega, A. Niecekele, Influence of the interfacial pressure jump condition on the simulation of horizontal two-phase slug flows using the two-fluid model, *WIT Transactions on Engineering Sciences*, Vol. 50, No. 3, pp. 123-132, 2005.

[14] G. Hanyang, G. Liejin, Stability of stratified flow and slugging in horizontal gas-liquid flow, *Progress in Natural Science*, Vol. 15, No. 11, pp. 1026-1034, 2005.

[15] J. García-Cascales, J. Corberán-Salvador, Extension of a high-resolution scheme to 1D liquid-gas flow, *International journal for numerical methods in fluids*, Vol. 50, No. 9, pp. 1063-1084, 2006.

[16] J. Carneiro, A. Niecekele, Investigation of slug flow characteristics in inclined pipelines, *Computational Methods in Multiphase Flow IV*, Vol. 56, No. 4, pp. 185-194, 2007.

[17] M. Ansari, V. Shokri, New algorithm for the numerical simulation of two-phase stratified gas-liquid flow and its application for analyzing the Kelvin-Helmholtz instability criterion with respect to wavelength effect, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 237, No. 24, pp. 2302-2310, 2007.

[18] R. Issa, J. Castagna, A. Sheikh, Accurate simulation of intermittent/slug flow in oil and gas pipelines, *15th International Conditioning on Multiphase Production Technology*, Cannes, France, June 15-17, 2011.

[19] M. R. Ansari, A. Daramizadeh, Numerical modeling of two phase slug flow in horizontal and inclined channels using hyperbolic two fluid model, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 4, pp. 34-47, 2012.

[20] A. Ambroso, C. Chalons, P.-A. Raviart, A Godunov-type method for the seven-equation model of compressible two-phase flow, *Computers & Fluids*, Vol. 54, No. 54, pp. 67-91, 2012.

[21] M. Emamzadeh, R. I. Issa, One-dimensional model for numerical simulation of annular flow in horizontal and vertical pipes, *Multiphase Science and Technology*, Vol. 25, No. 1, 2013.

[22] Q. Zeng, N. Aydemir, F. Lien, T. Xu, Comparison of implicit and explicit AUSM-family schemes for compressible multiphase flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 77, No. 1, pp. 43-61, 2015.

[23] S. T. Munkejord, M. Hammer, Depressurization of CO₂-rich mixtures in pipes: Two-phase flow modelling and comparison with experiments, *International Journal of Greenhouse Gas Control*, Vol. 37, pp. 398-411, 2015.

[24] Z. Wang, J. Gong, C. Wu, Numerical Simulation of One-Dimensional Two-Phase Flow Using a Pressure-Based Algorithm, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, Vol. 68, No. 4, pp. 369-387, 2015.

[25] M. Montini, *Closure relations of the one-dimensional two-fluid model for the simulation of slug flows*, PhD Thesis, Imperial College London, London, 2011.

[26] V. H. Ransom, D. L. Hicks, Hyperbolic two-pressure models for two-phase flow, *Journal of Computational Physics*, Vol. 53, No. 1, pp. 124-151, 1984.

[27] E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. A Practical Introduction*: Springer Science & Business Media, 2013.

[28] V. Ransom, Numerical Benchmark Test No. 2.3: Expulsion Of Steam By Sub-Cooled Water, *Multiphase science and technology*, Vol. 3, No. 1-4, pp. 124-150, 1987.

[29] S. Evje, T. Flåtten, Hybrid central-upwind schemes for numerical resolution of two-phase flows, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, Vol. 39, No. 2, pp. 253-273, 2005.

[30] F. Coquel, K. El Amine, E. Godlewski, B. Perthame, P. Rasle, A numerical method using upwind schemes for the resolution of two-phase flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 136, No. 2, pp. 272-288, 1997.

[31] J. Cortes, A. Debussche, I. Toumi, A density perturbation method to study the eigenstructure of two-phase flow equation systems, *Journal of Computational Physics*, Vol. 147, No. 2, pp. 463-484, 1998.

[32] I. Toumi, An upwind numerical method for two-fluid two-phase flow models, *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 123, No. 2, pp. 147-168, 1996.

[33] S. T. Munkejord, *Analysis of the two-fluid model and the drift-flux model for numerical calculation of two-phase flow*, PhD Thesis, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2006.

شرایطی که گرادیان شدید فشار بر مسائل جریان دوفازی حاکم می باشد، ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی فیزیکی واقعی جریان را نشان نمی دهد. بنابراین می توان نتیجه گرفت در شرایطی که گرادیان شدید فشار بر مسائل جریان دوفازی حاکم باشد، ترم تصحیح فشار هیدرودینامیک مدل مناسب تری نسبت به ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی، برای مدل سازی عددی جریان های دوفازی با استفاده از مدل دوسیالی می باشد.

6- جمع بندی

با در نظر گرفتن ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی برای هندسه قائم، این ترم حذف می شود، مدل دوسیالی در این هندسه هیچگاه هایدربولیک نمی شود. بنابراین ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی نمی تواند به صورت یک ترم پایدار کننده عمل کند. فرض ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی به واسطه وجود زاویه β ، در کانال های قائم با توجه به این که $\cos 0 = 0$ ، ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی در معادلات مدل دوسیالی دیده نمی شود و عدم تاثیر ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی را می توان در نتایج به دست آمده برای کانال قائم مشاهده کرد.

فرض ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی در کانال های افقی و در شرایطی که فشار نزدیک فشار اتمسفریک باشد نتایج بهتری برای پارامترهای جریان نسبت به فرض ترم تصحیح فشار هیدرودینامیک ارائه می دهد. فرض ترم تصحیح فشار هیدرودینامیک مستقل هندسه (قائم یا افقی) می باشد و می توان اثر این ترم تصحیح فشار را در معادلات مدل دوسیالی مشاهده کرد و زمانی که فشار فازها بسیار بالاتر از فشار اتمسفر باشد (مثل مسأله نمونه لوله شاک تامی) ترم تصحیح فشار هیدرودینامیک جواب های دقیق تری نسبت به ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی ارائه می کند و نتایج عددی حاصل از فرض ترم تصحیح فشار هیدرودینامیک مطابقت مناسبی با حل تحلیلی مسائل دارد. در نهایت، می توان بیان کرد استفاده از ترم تصحیح فشار هیدرودینامیک در سیستم معادلات دوسیالی، در محدود وسیع تری نسبت به ترم تصحیح فشار هیدرواستاتیکی هایدربولیک است.

7- مراجع

[1] C. Omgba-Essama, *Numerical modelling of transient gas-liquid flows (application to stratified & slug flow regimes)*, PhD Thesis, Cranfield University, Cranfield, 2004.

[2] T. Hibiki, M. Ishii, One-dimensional drift-flux model and constitutive equations for relative motion between phases in various two-phase flow regimes, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, No. 25, pp. 4935-4948, 2003.

[3] M. Ishii, *Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow*, pp. 419-430, Paris: Eyrolles, 1975.

[4] M. Ishii, K. Mishima, Two-fluid model and hydrodynamic constitutive relations, *Nuclear Engineering and design*, Vol. 82, No. 2, pp. 107-126, 1984.

[5] G. B. Wallis, *One-Dimensional two-Phase Flow*, pp. 55-63, New York: McGraw-Hill, 1969.

[6] P. Woodburn, R. Issa, Well-posedness of one-dimensional transient, two-fluid models of two-phase flows, *Third International Conditioning of Multiphase Flow*, Lyon, France, June 8-12, 1998.

[7] J. Masella, Q. Tran, D. Ferre, C. Pauchon, Transient simulation of two-phase flows in pipes, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 24, No. 5, pp. 739-755, 1998.

[8] H. Paillere, C. Corre, J. G. Cascales, On the extension of the AUSM+ scheme to compressible two-fluid models, *Computers & Fluids*, Vol. 32, No.