مجله مهندسی مکانیک مدرس، اسفند 1395، دوره 16، شماره 12، ص‌ص 365-372

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل پایداری دینامیکی نانولوله‌های کربنی تحت بارگذاری ترکیبی استاتیکی و متناوب محوری با استفاده از روش فلوکت - لیاپانوف

حبیب رمضان‌نژاد آزاربنی[1*]، رضا انصاری[2]

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد رامسر، رامسر
2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت
* رامسر، صندوق پستی 46917-57414، h.ramezannejad@iauramsar.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 28 مرداد 1395
پذیرش: 24 مهر 1395
ارائه در سایت: 28 آذر 1395

کلید واژگان:
پایداری دینامیکی
نانولوله‌های کربنی
بارگذاری دینامیکی محوری
تئوری فلوکت-لیاپانوف
تئوری حل دامنه محدود

چکیده

در این مقاله تحلیل پایداری دینامیکی نانولوله‌های کربنی تک‌لایه و دولایه روی بستر الاستیک تحت بار ترکیبی استاتیکی و متناوب دینامیکی محوری با استفاده از روش‌های فلوکت- لیاپانوف و روش دامنه محدود مورد مطالعه قرار گرفته است. برای این منظور با در نظر گرفتن حضور نیروهای وندروالسی بین لایه‌ها و استفاده از مدل تیر اویلر- برنولی، معادلات حاکم بر رفتار دینامیکی نانولوله‌های کربنی دولایه استخراج شده است. سپس با به‌کارگیری از روش گالرکین به همراه توابع شکل مثلثاتی، معادلات پاره‌ای استخراج‌شده برای نانولوله‌های کربنی با تکیه‌گاه ساده به معادلات دیفرانسیل معمولی با فرم معادلات متیو- هیل تبدیل شد. در ادامه با حل معادلات حاکم با استفاده از روش فلوکت- لیاپانوف به همراه روش انتگرال‌گیری عددی رانگ- کوتا با ضرایب گیل اثرات پارامترهایی شامل تعداد لایه، ضریب بستر الاستیک، فرکانس تحریک و ترکیب فرکانس‌های تحریک بر ناپایداری نانولوله‌های کربنی تک‌لایه و دولایه مورد تحلیل قرار گرفت. با مقایسه نتایج پیش‌بینی شده از روش فلوکت- لیاپانوف در تعیین نواحی پایدار و ناپایدار با نتایج روش تحلیل دامنه محدود تطابق بسیار خوبی مشاهده شد. نتایج حاصل از تحلیل ناپایداری دینامیکی نانولوله‌های کربنی تک‌لایه و دولایه نشان می‌دهد که با افزایش تعداد لایه‌ها، طول نانولوله و ضریب بستر الاستیک سیستم به سمت پایداری بیشتر میل می‌کند. همچنین با افزایش فرکانس تحریک ناپایداری سیستم افزایش می‌یابد.

Dynamic stability analysis of CNTs under combined static and periodic axial loads using Floquet–Liapunov theory

Habib Aamezannejad Azarboni[1*], Reza Ansari[2]

1- Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University of Ramsar, Ramsar, Iran
2- Department of Mechanical Engineering, Guilan University, Rasht, Iran
* P.O.B. 46917-57414, Ramsar, Iran, h.ramezannejad@iauramsar.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 18 August 2016
Accepted 15 October 2016
Available Online 18 December 2016

Keywords:
Dynamic Stability
Carbon Nanotubes
Axial Dynamic Load
Floquet–Lyapunov Theory
Bounded Solution Theory

ABSTRACT

The dynamic stability of single-walled carbon nanotubes (SWCNT) and double-walled carbon nanotubes (DWCNT) embedded in an elastic medium subjected to combined static and periodic axial loads are investigated using Floquet–Lyapunov theory and bounded solution theory. An elastic Euler-Bernoulli beam model is utilized in which the nested slender nanotubes are coupled with each other through the van der Waals (vdW) interlayer interaction. The Galerkin's approximate method on the basis of trigonometric mode shape functions is applied to reduce the coupled governing partial differential equations to a system of the extended Mathieu-Hill equations. Applying Floquet–Lyapunov theory and Rung-Kutta numerical integration method with Gill coefficients, the influences of number of layer, elastic medium, exciting frequency and combination of exciting frequency on the instability conditions of SWCNTs and DWCNTs are investigated. A satisfactory agreement can be observed by comparison between the predicted results of Floquet–Lyapunov theory with those of bounded solutions theory. Based on the results, increasing the number of layers, and elastic medium, dynamic stability of SWCNTs and DWCNTs surrounding elastic medium increase. Moreover, the instability of CNTs increases by increasing the exciting frequency.

1- مقدمه

نانولوله‌های کربنی به خاطر دارا بودن ویژگی‌های فیزیکی و شیمیایی بسیار عالی و چگالی پایین و مقاومت بالا کاربرد وسیعی در صنایع مختلف مانند نانو الکترونیک، نانوکامپوزیت، نانو مخازن برای ذخیره گاز، سنسورهای شیمیایی، نانولوله‌های حاوی سیال و سیستم‌های نانوالکترومکانیک دارند. از خواص و ویژگی‌های خارق‌العاده نانولوله‌ها دارا بودن ضریب سفتی و مقاومت بالا نسبت به وزن در مقایسه با مواد متعارف دیگر است. به‌منظور مدل نمودن رفتار نانولوله‌های کربنی تئوری‌های مختلفی وجود دارد که می‌توان در دو دسته اصلی شامل تئوری اتمی و تئوری مکانیک پیوسته تقسیم‌بندی نمود. تحلیل ارتعاشات، خمش، کمانش و تحلیل‌های ناپایداری نانولوله‌های کربنی همواره

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:
Please cite this article using:
H. Aamezannejad Azarboni, R. Ansari, Dynamic stability analysis of CNTs under combined static and periodic axial loads using Floquet–Liapunov theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 12, pp. 365-372, 2016 (in Persian)

مورد توجه و علاقه محققین بوده است. تحلیل ناپایداری استاتیکی و دینامیکی نانولوله‌های کربنی تحت بارگذاری‌های مختلف شامل بارگذاری خمشی، محوری، پیچشی و یا به‌صورت ترکیبی براساس تئوری‌های متفاوت مدل‌نمودن آن‌ها توسط دانشمندان انجام شده که در ادامه به معرفی تعدادی از این تحقیقات با بررسی نوع مسئله و تئوری‌های مورد استفاده پرداخته می‌شود. هان و همکاران [1] با در نظر گرفتن اثرات محیط الاستیک و نیروهای وندروالسی براساس تئوری پیوسته ناپایداری خمشی و شرایط دوشاخه‌ای شدن نانولوله‌های کربنی دولایه روی بستر الاستیک را مورد بررسی قرار دادند. یون و همکاران [2] با به‌کارگیری مدل کلاسیک تیر اویلر- برنولی تأثیر حرکت سیال بر ناپایداری نانولوله‌های کربنی تک لایه را مورد مطالعه قرار دادند. در ادامه تأثیر حرکت سیال بر ناپایداری فلاتر نانولوله‌های کربنی تک‌لایه یکسرگیردار حاوی سیال و ارتعاشات آزاد توسط یون و همکاران مورد مطالعه قرار گرفت [3]. هاجیو و همکاران [4] مطالعات آزمایشگاهی را با استفاده از تحلیل تصویر برای بررسی ناپایداری کمانش نانولوله‌های کربنی تک‌لایه روی بستر اپوکسی انجام دادند. تحلیل ارتعاشات غیرخطی نانولوله‌های کربنی تک‌لایه به منظور بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری آن توسط رفیعی انجام شد [5]. ولخ و رامش [6] با در نظر گرفتن نظریه اتمی ناپایداری کششی و دوشاخه‌ای شدن نانولوله‌های کربنی تک‌لایه تحت بار کششی را به‌صورت تجربی مورد بررسی قرار دادند. تیلیکوواسکی [7] ناپایداری دینامیکی نانولوله‌های کربنی در محیط حرارتی را با در نظر گرفتن تئوری مکانیک پیوسته به همراه مدل پوسته الاستیک مورد مطالعه قرار داد. وانگ و همکاران [8] در تحلیل ناپایداری نانولوله‌های کربنی تک‌لایه از تئوری‌های مکانیک پیوسته هیبرید و مدل مکانیک مولکولی استفاده کردند. وانگ و کیو [9] با استفاده از تئوری پیوسته تیر الاستیک و روش مشتق تربیعی، شرایط ناپایداری نانولوله‌های کربنی تک‌لایه را مورد تحلیل قرار دادند. وانگ و همکاران [10] در ادامه اثر دما را با در نظر گرفتن تئوری دمایی الاستیسیته مکانیک و مدل تیر اویلر برنولی بر تحلیل ناپایداری نانولوله‌های کربنی تک‌لایه حاوی سیال بررسی کردند. وانگ [11] تحقیقات خود را در زمینه تحلیل ناپایداری کمانش نانولوله‌های کربنی دولایه حاوی سیال را با در نظر گرفتن جابجایی‌های شعاعی داخلی و درجات آزاد منتج براساس مدل تیر الاستیک ادامه داد. وانگ [12] ناپایداری پیچشی نانولوله‌های کربنی تک‌لایه حاوی فلورسن C60 براساس تئوری دینامیک مولکولی انجام داد. با در نظر گرفتن مدل تیر الاستیک براساس تئوری تیر اویلر برنولی، فو و همکاران [13] به‌صورت عددی ناپایداری دینامیکی غیرخطی نانولوله‌های کربنی دولایه را بررسی کردند. ارتعاشات و ناپایداری نانولوله‌های کربنی تک‌لایه حاوی سیال روی بستر ویسکوالاستیک خطی براساس تئوری تیر اویلر-برنولی توسط قوانلو و همکاران [14] انجام شد. قوانلو و فاضل‌زاده [15] در ادامه با استفاده از تئوری غیرموضعی تیر تیموشنکو ارتعاشات و ناپایداری نانولوله‌های کربنی روی بستر ویسکوز سیال را موررد بررسی قرار دادند. در این تحقیق اثرات استهلاک سازه‌ای نانولوله‌های کربنی، حرکت داخلی سیال، ویسکوزیته سیال خارجی، تغییرات دما و پارامتر غیرموضعی برای استخراج معادلات حاکم در نظر گرفته شد. ناتسوکی و همکاران [16] تحلیل ناپایداری پیچشی نانولوله-های کربنی دولایه روی بستر الاستیک را با در نظر گرفتن مدل پیوسته پوسته الاستیک و فنر وینکلر مورد بررسی قرار دادند. با در نظر گرفتن تئوری‌های مکانیک پیوسته هیبریدی و مدل مکانیک مولکولی، تحلیل ناپایداری نانولوله‌های کربنی توسط دان و همکاران [17] انجام شد. کی و وانگ [18] در تحلیل ارتعاشات و ناپایداری نانولوله‌های کربنی دولایه حاوی سیال از تئوری‌های تنش کوپله توسعه یافته و تیر تیموشنکو استفاده کرند. چانگ و لیو [20,19] تئوری غیرموضعی الاستیسیته به همراه مدل پوسته دانل را برای تحلیل ناپایداری و شرایط دوشاخه‌ای شدن نانولوله‌های کربنی دولایه حاوی سیال به‌کار گرفتند. با استفاده از تئوری الاستیسیته حرارتی و مدل غیرموضعی تیر اویلر- برنولی، تحلیل ارتعاشات و ناپایداری نانولوله‌های کربنی دولایه حاوی سیال روی بستر بافت نرم بیولوژیکی به صورت یک بستر ویسکوالاستیک توسط فانگ و همکاران انجام شد [21]. شی [22] برای تحلیل ناپایداری کمانش نانولوله‌های کربنی از مدل غیرموضعی تیر اویلر- برنولی و مدل ریلی وایتنی استفاده کرد. فاضل‌زاده و همکاران [23] شرایط ناپایداری نانولوله‌های کربنی یکسرگیردار روی بستر ویسکوالاستیک را براساس تئوری غیرموضعی تیر اویلر برنولی انجام دادند. تحلیل ناپایداری استاتیکی و دینامیکی نانولوله‌های کربنی حاوی سیال براساس مدل تیر لایه نازک توسط چوی [24] انجام شد. قربان‌پور و همکاران [25] برای تحلیل ارتعاشات و ناپایداری نانولوله‌های کربنی دولایه حاوی سیال روی بستر ویسکوالاستیک از تئوری تیر تیموشنکو استفاده کردند. تحلیل ناپایداری نانولوله‌های کربنی الکتروستاتیکی فعال با در نظر گرفتن تئوری‌های کلاسیک و غیرموضعی الاستیسیته توسط سیدفخرآبادی و همکاران [26] انجام شد. وانگ و لی [27] در تحلیل ناپایداری دینامیکی نانولوله‌های کربنی تحت بار محوری هارمونیک از تئوری غیرموضعی پیوسته و روش بلوتین استفاده کردند. انصاری و همکاران [28] تحلیل ارتعاشات اجباری غیرخطی نانولوله-های کربنی حاوی سیال روی بستر الاستیک ویسکوپاسترناک را با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته مورد بررسی قرار دادند. انصاری و غلامی [29] به تحلیل پایداری غیرخطی نانولوله‌های کربنی تک‌لایه با استفاده از روش فلوکت لیاپانوف و روش دامنه محدود پرداختند.

در این مقاله با استفاده از تئوری پیوسته تیر الاستیک اویلر- برنولی ناپایداری دینامیکی نانولوله‌های کربنی تک‌لایه و دولایه روی بستر الاستیک تحت اعمال بار ترکیبی استاتیکی و دینامیکی متناوب محوری با به‌کارگیری تئوری‌های فلوکت- لیاپانوف و حل دامنه محدود انجام شده است. اثر نیروهای وندروالسی بین لایه‌ای برای استخراج معادلات حاکم بر حرکت نانولوله کربنی در نظر گرفته شده است. برای حل معادلات حاکم از روش گالرکین به همراه توابع شکل مثلثاتی استفاده شده و معادلات دیفرانسیل پاره‌ای به معادلات دیفرانسیل معمولی به فرم معادلات متیو-هیل استخراج شده است. در ادامه با استفاده از روش رانگ – کوتا با ضرایب گیل برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی، اثرات ضریب الاستیک بستر، تعداد لایه، فرکانس تحریک و ترکیب فرکانس‌های تحریک بر حالت پایداری نانولوله‌های کربنی تک‌لایه و دولایه مورد تحلیل قرار گرفته است. استفاده از تئوری‌های فلوکت-لیاپانوف و حل دامنه محدود در تحلیل ناپایداری نانولوله‌ای کربنی دولایه روی بستر الاستیک با در نظر گرفتن اثر نیروهای وندروالسی بین لایه-ای، اعمال ترکیب‌های مختلفی از تحریک هارمونیک بار محوری و حساسیت-سنجی کمی سیستم نسبت به پارامترهای فیزیکی مانند ضریب بستر الاستیک، فرکانس تحریک و تعداد لایه‌ها بر تغییر نواحی پایدار و ناپایدار آن که برای نخستین بار انجام شده از نوآوری‌های این تحقیق به شمار می‌آید و این تحقیق را نسبت به مرجع [29] که منحصراً به تحلیل کیفی تغییر نواحی ناپایدار و پایدار نانولوله کربنی تک‌لایه روی بستر الاستیک تحت بار ترکیبی استاتیکی و دینامیکی تک هارمونیک محوری پرداخته است متمایز می‌کند.

2- معادلات حاکم

یک نانولوله کربنی به طول l، مدول یانگ E، چگالی ρ، سطح مقطع A و ممان اینرسی I را روی بستر الاستیک مطابق "شکل 1" در نظر بگیرید.

با استفاده تئوری مکانیک پیوسته و براساس مدل تیر پیوسته اویلر برنولی معادله حاکم بر حرکت تیر تحت بار محوری به فرم معادله (1) است.

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + F(t)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = P(x,t) \qquad (1)$$

در رابطه (1) $P(x,t)$ را می‌توان به‌صورت اثر عکس‌العمل بین نانولوله و بستر الاستیک با مدل وینکلر و یا فشار ناشی از عکس‌العمل نیروهای وندر والسی بین لایه‌ای در نانولوله‌های چندلایه کربنی در نظر گرفت، هرگاه $P(x,t)$ عکس‌العمل بین نانولوله و بستر الاستیک باشد به‌صورت رابطه (2) تعریف می‌شود [22].

$$P(x,t) = -kw \qquad (2)$$

در رابطه (2) k ضریب بستر الاستیک بوده و علامت منفی در رابطه (2) به خاطر فشاری است که از طرف بستر الاستیک اطراف نانولوله کربنی در خلاف جهت جابجایی نانولوله وارد می‌شود. هرگاه $P(x,t)$ فشار ناشی از عکس‌العمل نیروهای وندر والسی بین لایه‌ای در نظر گرفته شود با رابطه (3) بیان می‌شود.

$$P(x,t) = \sum_{i=1}^{N} C_{ij}(w_i - w_j) \qquad (3)$$

C_{ij} ضریب وندروالسی بوده و به‌صورت رابطه (4) بیان می‌شود [21-19].

$$c_{ij} = \left[\frac{1001\pi\varepsilon\sigma^{12}}{3a^4}E_{ij}^{13} - \frac{1120\pi\varepsilon\sigma^6}{9a^4}E_{ij}^{7}\right]R_j \qquad (4)$$

در رابطه (4) $a = 1.42$Å، σ عمق پتانسیل، ε پارامتری است که با فاصله تعادل به‌دست می‌آید، R_j شعاع jامین لایه و E_{ij}^m با مقدار عددی طبیعی برای m به صورت رابطه (5) ارائه می‌شود [21-19].

$$E_{ij}^m = (R_j + R_i)^{-m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1 - \frac{4R_jR_i}{(R_j+R_i)^2}\cos^2\theta\right]^{-\frac{m}{2}} d\theta \qquad (5)$$

همچنین در رابطه (1) نیروی خارجی به‌صورت ترکیبی از نیروی استاتیکی و هارمونیک با رابطه (6) به نانولوله اعمال می‌شود.

$$F(t) = f_0 + \sum_{r=1}^{R} f_r \cos r\Omega t \qquad (6)$$

در رابطه (6) f_0، f_r و Ω به ترتیب دامنه تحریک استاتیکی، دامنه تحریک هارمونیک و فرکانس تحریک و R تعداد جملات هارمونیک هستند. در رابطه (6) فرض شده است که ترم‌های مختلفی از بار هارمونیک به نانولوله اعمال می‌شود. با اعمال روابط (2)، (3) و (6) در رابطه (1)، معادلات حاکم بر رفتار نانولوله کربنی دولایه روی بستر الاستیک تحت اعمال بار محوری هم‌زمان استاتیکی و دینامیکی هارمونیک با رابطه (7) استخراج می‌شود.

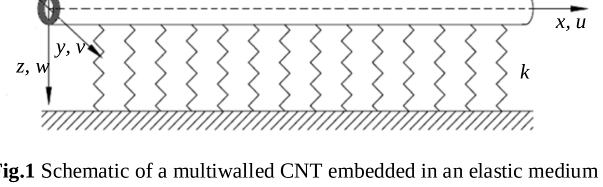

Fig.1 Schematic of a multiwalled CNT embedded in an elastic medium

شکل 1 شماتیکی از نانولوله کربنی چندلایه روی بستر الاستیک

$$\rho A_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + EI_1\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + F\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + c_{12}(w_1 - w_2) = 0$$
$$\rho A_2\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + EI_2\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + F\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + c_{21}(w_2 - w_1) + kw_2 = 0 \qquad (7)$$

شرایط مرزی در دو انتهای تیر به‌صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است. با در نظر گرفتن شرایط مرزی ساده در دو انتهای نانولوله کربنی، تابع جابجایی را می‌توان به‌صورت $w(x,t) = W(t)\sin(m\pi x/l)$ در نظر گرفت. با اعمال تابع مثلثاتی در نظر گرفته شده در رابطه (7) و استفاده از روش گالرکین و انتگرال‌گیری در طول نانولوله، معادلات دیفرانسیل جزیی استخراج شده به معادلات دیفرانسیل معمولی تابع زمان (8) تبدیل می‌شوند.

$$\frac{d^2W_1}{dt^2} + \left(\frac{m^4\pi^4EI_1}{l^4\rho A_1} + \frac{c_{12}}{\rho A_1} - F(t)\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right)W_1 - \frac{c_{12}}{\rho A_1}W_2 = 0$$

$$\frac{d^2W_2}{dt^2} + \left(\frac{m^4\pi^4EI_2}{l^4\rho A_2} + \frac{k}{\rho A_2} + \frac{c_{21}}{\rho A_2} - F(t)\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right)W_2 - \frac{c_{21}}{\rho A_2}W_1 = 0 \qquad (8)$$

با استفاده از پارامترهای رابطه (9)

$$r = \sqrt{\frac{I_1}{A_1}}, a_i = \frac{W_i}{r}, \omega_l = \frac{m^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI_1}{\rho\mu A_1}}, \omega_k = \sqrt{\frac{k}{\rho A_1}}, \omega_c^{ij} = \sqrt{\frac{c_{ij}}{\rho A_1}}$$
$$\mu_i = \frac{A_1}{A_i}, \gamma_i = \frac{I_1}{I_i} \qquad (9)$$

دستگاه معادلات (8) به فرم رابطه (10) بازنویسی می‌شود.

$$\ddot{a}_i + \left(\frac{\mu_i}{\gamma_i} + \mu_i\left(\frac{\omega_k}{\omega_l}\right)^2\delta_{in} + \sum_{j=1,j\neq i}^{N}\left(\frac{\omega_c^{ij}}{\omega_l}\right)^2 - F(t)\left(\frac{m\pi}{l\omega_l}\right)^2\right)a_i - \sum_{j=1,j\neq i}^{N}\left(\frac{\omega_c^{ij}}{\omega_l}\right)^2 a_j = 0 \qquad (10)$$

رابطه (10) را می‌توان به صورت فرمی از معادله متیو-هیل با رابطه (11) ساده‌سازی نمود.

$$\ddot{a}_i + \left(\eta_{ij} - \sum_{r=1}^{R}\beta\cos r\Omega t\right)a_i - \lambda_{ij}a_j = 0 \qquad (11)$$

که $i,j = 1,2$ و همچنین

$$\eta_{ij} = \frac{\mu_i}{\gamma_i} + \mu_i\left(\frac{\omega_k}{\omega_l}\right)^2\delta_{in} + \sum_{j=1,j\neq i}^{N}\left(\frac{\omega_c^{ij}}{\omega_l}\right)^2 - \alpha \qquad (12)$$

$$\alpha = f_0\left(\frac{m\pi}{l\omega_l}\right)^2 \qquad (13)$$

$$\beta = f_r\left(\frac{m\pi}{l\omega_l}\right)^2 \qquad (14)$$

$$\lambda_{ij} = \sum_{j=1,j\neq i}^{N}\left(\frac{\omega_c^{ij}}{\omega_l}\right)^2 \qquad (15)$$

3- روش فلوکت - لیاپانوف

روش فلوکت-لیاپانوف روشی مستقیم برای تحلیل و بررسی ویژگی‌های حل یک سیستم بدون حل کل معادلات است. بر اساس این روش حالت ناپایداری یک سیستم پریودیک با تعیین و شناسایی ماتریس گذرا در یک پریود زمانی قابل بررسی است. قسمت حقیقی مقادیر ویژه این ماتریس را می‌توان به

عنوان معیاری برای تعیین پایداری سیستم در نظر گرفت. با به‌کارگیری روش رانگ-کوتا با ضرایب گیل، روش انتگرال‌گیری عددی بر روی ماتریس گذار قابل‌اعمال است. این روش توسط فریدمن و هاموند پیشنهاد شده است [30]. برای این منظور معادلات فضای حالت با رابطه (16) استخراج می‌شود.

$$\{\dot{y}\} = [\Gamma(t)]\{y\} = \{\psi(t,y)\} \tag{16}$$

که $[\Gamma(t)]$ یک ماتریس پریودیک با دوره تناوب T است. به این معنا که $[\Gamma(t+T)] = [\Gamma(t)]$. با توجه به حالت کلی معادلات فضای حالت، ماتریس $[\Gamma(t)]$ را می‌توان با رابطه (17) بیان کرد.

$$[\Gamma(t)] = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

در رابطه (17) I ماتریس همانی و ماتریس K با رابطه (18) بیان‌می‌شود.

$$K_{mn} = \begin{cases} \eta_{ij} - \sum_{r=1}^{R} \beta \cos r\Omega t, & m = n \\ -\lambda_{ij}, & m \neq n \end{cases} \tag{18}$$

براساس روش پایداری فلوکت-لیاپانوف و با به‌کارگیری از روش انتگرال‌گیری رانگ-کوتا مرتبه چهارم با ضرایب گیل، برای استخراج متغیر حالت در i امین بازه رابطه (19) ارائه شده است.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left[\Lambda_1 + 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Lambda_2 + 2\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Lambda_3 + \Lambda_4\right] \tag{19}$$

که $h = t_{i+1} - t_i$ گام زمانی و بردارهای $\{\Lambda_1\},\{\Lambda_2\},\{\Lambda_3\}\,\{\Lambda_4\}$ با روابط (20) تا (23) بیان می‌شوند.

$$\{\Lambda_1\} = \psi(t_i, y_i) \tag{20}$$

$$\{\Lambda_2\} = \psi\left(\left(t_i + \frac{h}{2}\right), \left(y_i + \frac{1}{2}\Lambda_1\right)\right) \tag{21}$$

$$\{\Lambda_3\} = \psi\left(\left(t_i + \frac{h}{2}\right), \left(y_i + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)h\Lambda_1 + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)h\Lambda_2\right)\right) \tag{22}$$

$$\{\Lambda_4\} = \psi\left((t_i + h), \left(y_i - \frac{1}{\sqrt{2}}h\Lambda_2 + \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)h\Lambda_3\right)\right) \tag{23}$$

رابطه (24) تا (27) با قرار دهی استفاده از معادلات (16) و (20) تا (23) قابل‌استخراج است.

$$\{\Lambda_1\} = [\Pi_1(t_i)]\{y_i\} \tag{24}$$

$$\{\Lambda_2\} = [\Pi_2(t_i)]\{y_i\} \tag{25}$$

$$\{\Lambda_3\} = [\Pi_3(t_i)]\{y_i\} \tag{26}$$

$$\{\Lambda_4\} = [\Pi_4(t_i)]\{y_i\} \tag{27}$$

که

$$\Pi_1(t_i) = \Gamma(t_i) \tag{28}$$

$$\Pi_2(t_i) = \Gamma\left(t_i + \frac{h}{2}\right)\left(I + \frac{h}{2}\Gamma(t_i)\right) \tag{29}$$

$$\Pi_3(t_i) = \Gamma\left(t_i + \frac{h}{2}\right)\left(I + h\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Gamma(t_i) + h\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Pi_2(t_i)\right) \tag{30}$$

$$\Pi_4(t_i) = \Gamma(t_i + h)\left(I + \frac{h}{\sqrt{2}}\Pi_2(t_i) + h\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Pi_3(t_i)\right) \tag{31}$$

با ترکیب معادلات (19)، (20) تا (23) و (28) تا (31) رابطه (32) قابل‌استخراج است.

$$\{y_{i+1}\} = [\Phi(t_i)]\{y_i\} \tag{32}$$

که

$$\Phi(t_i) = [I] + \frac{h}{6}\left[\Pi_1(t_i) + 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Pi_2(t_i) + 2\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Pi_3(t_i) + \Pi_4(t_i)\right] \tag{33}$$

با استفاده از رابطه (33)، رابطه (34) برای استخراج گام به گام متغیرهای حالت محاسبه می‌شود .

$$\begin{aligned} \{y(t_1)\} &= [\Phi(t_0)]\{y(t_0)\} \\ \{y(t_2)\} &= [\Phi(t_1)]\{y(t_1)\} = [\Phi(t_1)][\Phi(t_0)]\{y(t_0)\}. \\ &\;\vdots \\ \{y(t_n)\} &= [\Phi(t_{n-1})]\{y(t_{n-1})\} = [\Phi(t_{n-1})][\Phi(t_{n-2})]\ldots[\Phi(t_1)][\Phi(t_0)]\{y(t_0)\} \end{aligned} \tag{34}$$

4- روش حل دامنه محدود

پاسخ دینامیکی برای نانولوله‌ها تحت بارگذاری پریودیک زمانی از لحاظ دینامیکی پایدار است که حل معادله (11) در کل زمان در دامنه مشخص و محدودی نوسان کند. به عبارت دیگر هرگاه با گذشت زمان دامنه حرکت سیستم به‌طور پیوسته افزایش یابد و واگرایی در پاسخ دینامیکی سیستم مشاهده شود اصطلاحاً بیان می‌شود که سیستم به سمت ناپایداری میل کرده است. در این حالت می‌توان بیان نمود که ریشه‌های معادله مشخصه سیستم مقادیری مثبت داشته و در سمت راست محور موهومی قرار دارند. برای وضعیتی از سیستم که با گذشت زمان پاسخ سیستم به سمت یک حالت حدی میل کرده یا میرا شود سیستم حالت پایدار داشته و در این وضعیت ریشه‌های معادله مشخصه مقادیری منفی داشته و در سمت چپ محور موهومی قرار دارند. معیار روش دامنه محدود براساس این نظریه بنا نهاده شده است که ایجاد واگرایی پیوسته در پاسخ زمانی و رشد دامنه حرکت نشان‌دهنده ناپایداری در سیستم و ایجاد زوال دامنه حرکت یا میل به یک سیکل حدی نشان‌دهند پایداری سیستم محسوب می‌شود.

5- تحلیل نتایج

نانولوله‌های مورد تحلیل در این مقاله دارای ویژگی‌های هندسی شامل شعاع خارجی $r_{\text{out}} = 3$ nm، ضخامت $t = 0.34$ nm و طول $l = 45$ nm هستند. این نانولوله‌ها همچنین دارای ویژگی‌های مکانیکی شامل چگالی $\rho = 1300$ kg/m³ و مدول یانگ $E = 1.1$ TPa هستند. نانولوله کربنی تک‌لایه و دولایه تحت اعمال بار ترکیبی استاتیکی و دینامیکی محوری به فرم معادله (6) هستند. "شکل 2" منحنی تغییرات بارهای مختلف اعمال‌شده بر حسب زمان با ترم-های مختلف هارمونیک را نشان می‌دهد.

با به‌کارگیری از دو روش فلوکت-لیاپانوف و روش دامنه محدود نواحی ناپایدار و پایدار نانولوله کربنی تک‌لایه به ترتیب در "شکل‌های 3 و 4" نشان داده شده است. محور افقی دامنه بار استاتیکی و محور عمودی دامنه بار دینامیکی با یک ترم هارمونیک با فرکانس تحریک $\Omega = 1$ rad/s است. همچنین نواحی هاشور خورده نمایانگر مربوط به وضعیت ناپایدار و نواحی سفید مربوط به وضعیت پایدار نانولوله کربنی تک‌لایه تحت بار ترکیبی استاتیکی و دینامیکی تک‌هارمونیک محوری است. "شکل‌های 5 و 6" محدوده پایداری و ناپایداری را برای نانولوله کربنی دولایه در وضعیتی مشابه نشان می‌دهند.

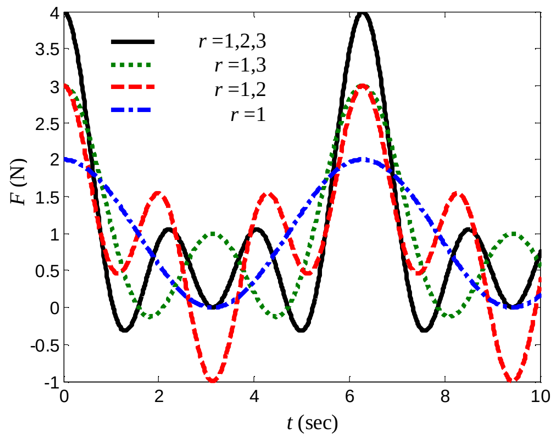

Fig. 2 Combination of static and dynamic axial loads

شکل 2 ترکیب بار استاتیکی و دینامیکی محوری

با توجه به "شکل‌های 3 تا 6" برای حالت پایدار نانولوله‌های کربنی تک‌لایه و دولایه روی بستر الاستیک مشاهده می‌شود که با افزایش دامنه بار استاتیکی توسعه و رشد نواحی پایدار با ایجاد حالت تقارن در راستای بار دینامیکی ایجاد می‌شود. همچنین نواحی پایدار نانولوله کربنی دولایه نسبت به تک‌لایه بیشتر بوده و این روند نشان می‌دهد که افزایش تعداد لایه و در نظر گرفتن نیروهای بین‌لایه‌ای وندروالس موجب پایدارتر شدن نانولوله‌ها می‌شود. افزایش مقدار بار استاتیکی از مقادیر منفی به مثبت و توسعه نواحی پایدار بیان می‌کند نانولوله‌های کربنی در حالت اعمال بار استاتیکی کششی نسبت به بار استاتیکی فشاری پایداری بیشتری را دارند. علاوه‌بر این با بررسی نتایج پیش‌بینی شده از دو روش فلوکت-لیاپانوف و روش حل دامنه محدود برای نانولوله کربنی تک‌لایه و دولایه می‌توان استنباط نمود که نتایج حاصل از دو روش فلوکت-لیاپانوف و روش دامنه محدود با یکدیگر تطابق بسیار نزدیکی دارند. مدت زمان حل روش حل دامنه محدود نسبت به روش فلوکت-لیاپانوف بیشتر است. به همین منظور در ادامه برای تحلیل اثر پارامترهای مختلف بر حالت پایدار سیستم از روش فلوکت-لیاپانوف استفاده شده است.

اثر ضریب بستر الاستیک بر نواحی پایدار و ناپایدار برای نانولوله‌کربنی دولایه روی بستر الاستیک با ضرایب $k = 10^7$ N/m، $k = 10^8$ N/m و $k = 5 \times 10^8$ N/m به ترتیب در "شکل‌های 7 تا 9" نمایش داده شده است.

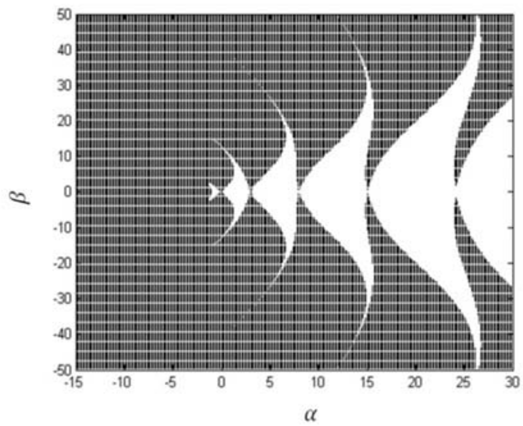

Fig. 3 Dynamic instability regions of a SWCNT using Floquet–Liapunov theory

شکل 3 نواحی ناپایدار دینامیکی نانولوله کربنی تک‌لایه با استفاده از تئوری فلوکت-لیاپانوف

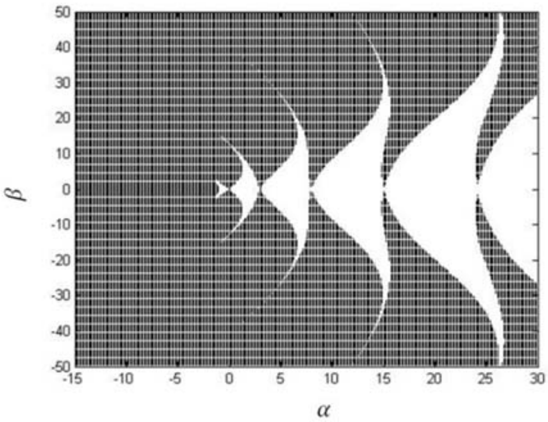

Fig. 4 Dynamic instability regions of a SWCNT using bounded solution theory

شکل 4 نواحی ناپایدار دینامیکی نانولوله کربنی تک‌لایه با استفاده از تئوری حل دامنه محدود

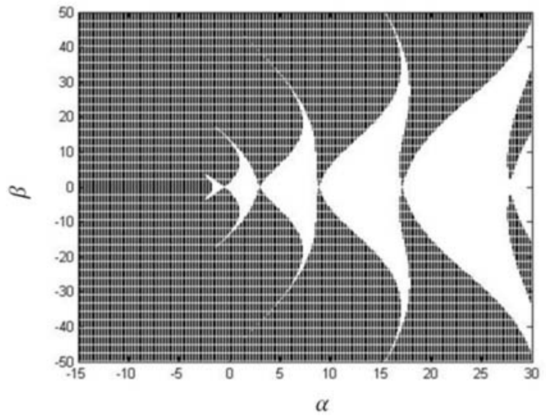

Fig. 5 Dynamic instability region of a DWCNT using Floquet–Liapunov theory

شکل 5 نواحی ناپایدار دینامیکی نانولوله کربنی دولایه با استفاده از تئوری فلوکت-لیاپانوف

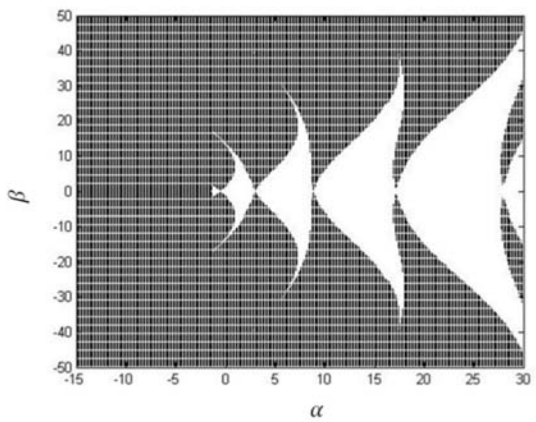

Fig. 6 Dynamic instability region of a DWCNT using bounded solution theory

شکل 6 نواحی ناپایدار دینامیکی نانولوله کربنی دولایه با استفاده از تئوری حل دامنه محدود

در این حالت نانولوله کربنی تحت بار تک هارمونیک با فرکانس $\Omega =$ 1 rad/s قرار دارد. با مقایسه نمودارهای نشان داده شده در "شکل 6" برای $k = 0$ N/m، و "شکل‌های 7 تا 9" روند ارائه شده نشان می‌دهد که سفتی بستر الاستیک اثر مثبت بر توسعه نواحی پایدار داشته است به‌طوری‌که با

افزایش مقدار آن توسعه نواحی ناپایدار کاهش یافته و نانولوله کربنی دولایه در بازه بیشتری از بار استاتیکی و دینامیکی محوری پایدار است. علاوه بر این با توجه به ارتباط مستقیم بین فرکانس طبیعی نانولوله‌های کربنی با ضریب بستر الاستیک می‌توان نتیجه گرفت با افزایش فرکانس طبیعی ناشی از افزایش ضریب بستر الاستیک سیستم پایدارتر است. همچنین روند افزایش پایداری سیستم در حالت اعمال بار کششی نسبت به فشاری به ازای افزایش ضریب بستر الاستیک نیز قابل مشاهده است.

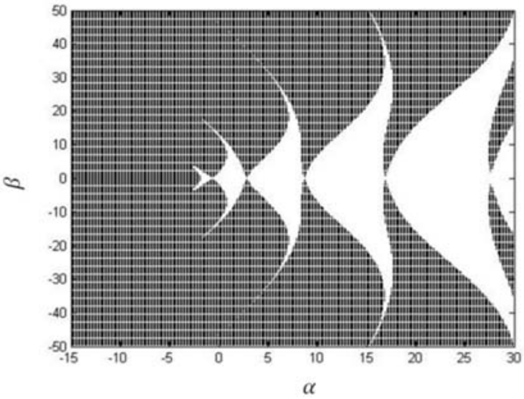

Fig. 7 Dynamic instability region of a DWCNT $k = 10^7$ N/m

شکل 7 نواحی ناپایدار دینامیکی نانولوله کربنی دولایه با $k = 10^7$ N/m

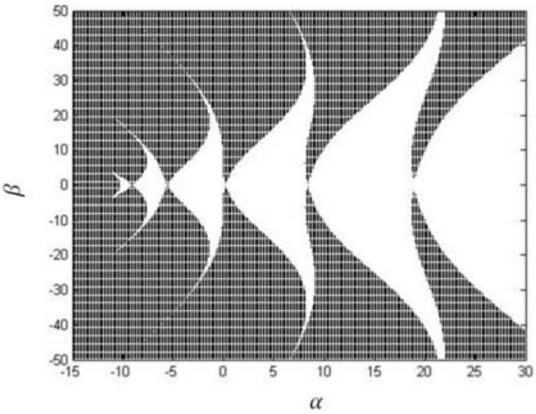

Fig. 8 Dynamic instability region of a DWCNT $k = 10^8$ N/m

شکل 8 نواحی ناپایدار دینامیکی نانولوله کربنی دولایه $k = 10^8$ N/m

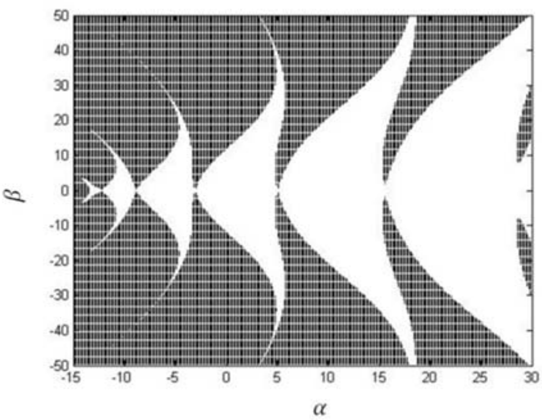

Fig. 9 Dynamic instability region of a DWCN $k = 5 \times 10^8$ N/m

شکل 9 نواحی ناپایدار دینامیکی نانولوله کربنی دولایه $k = 5 \times 10^8$ N/m

به‌منظور تحلیل اثر فرکانس تحریک خارجی بر چگونگی رفتار پایداری دینامیکی نانولوله‌های کربنی دولایه روی بستر الاستیک، نیروی محوری اعمال شده به نانولوله کربنی دولایه با ترکیب بار استاتیکی و یک ترم هارمونیک با فرکانس $\Omega = 1$ rad/s، $\Omega = 2$ rad/s و $\Omega = 3$ rad/s در نظر گرفته که در "شکل‌های 10 و 11" نشان داده شده است.

"شکل‌های 10 و 11" اثر تغییر فرکانس تحریک را به‌ازای مقادیر $\Omega = 2$ rad/s و $\Omega = 3$ rad/s بر تغییرات نواحی پایدار و ناپایدار نانولوله کربنی دولایه روی بستر الاستیک با ضریب $k = 5 \times 10^8$ N/m نشان می-دهند. با مقایسه "شکل‌های 10 و 11" با "شکل 9" که برای $\Omega = 1$ rad/s ارائه شده است می‌توان دریافت که افزایش فرکانس تحریک اثر منفی بر توسعه نواحی پایدار داشته و با افزایش آن توسعه نواحی پایدار کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش فرکانس تحریک علاوه بر کاهش نواحی پایدار مشاهده می‌شود که نانولوله کربنی دولایه در بار استاتیکی کششی کمتری ناپایداری را تجربه می‌کند.

"شکل‌های 12 تا 14" اثر اعمال بارهای هارمونیک با ترکیب فرکانس $\Omega = 1$ rad/s، $\Omega = 2$ rad/s ،$\Omega = 1$ rad/s، $\Omega = 3$ rad/s و $\Omega = 1$ rad/s، $\Omega = 2$ rad/s، $\Omega = 3$ rad/s به‌ترتیب نشان می‌دهند. از بررسی نواحی پایدار و ناپایدار پیش‌بینی شده برای نانولوله کربنی دولایه روی بستر الاستیک با ضریب $k = 5 \times 10^8$ N/m می‌توان استنباط نمود که با افزایش ترم‌های هارمونیک نانولوله کربنی دولایه میل به ناپایداری بیشتر دارد

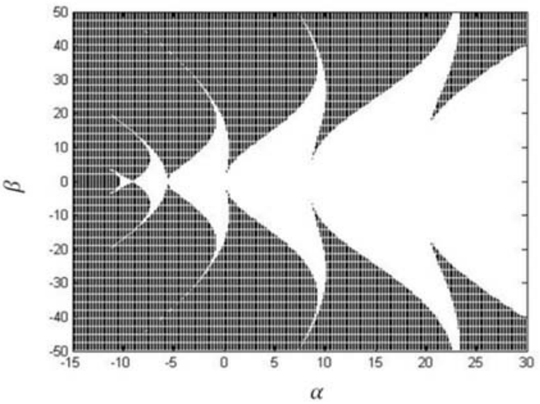

Fig. 10 Dynamic instability region of a DWCNT $\Omega = 2$ rad/s

شکل 10 نواحی ناپایدار دینامیکی نانولوله کربنی دولایه با $\Omega = 2$ rad/s

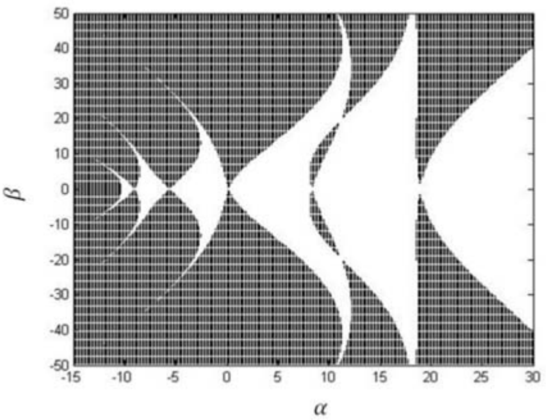

Fig. 11 Dynamic instability region of a DWCNT $\Omega = 3$ rad/s

شکل 11 نواحی ناپایدار دینامیکی نانولوله کربنی دولایه با $\Omega = 3$ rad/s

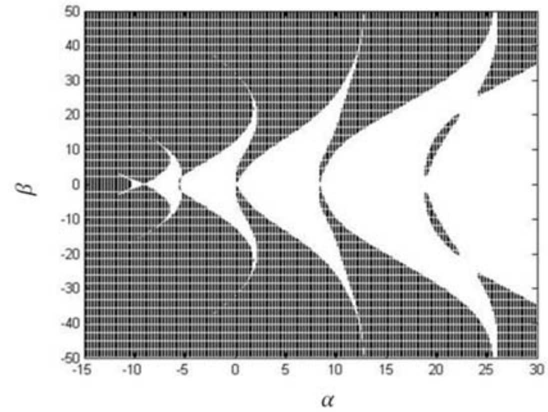

Fig. 12 Dynamic instability region of a DWCNT $\Omega = 1\,,2$ rad/s

شکل 12 نواحی ناپایدار دینامیکی نانولوله کربنی دولایه با $\Omega = 1.2$ rad/s

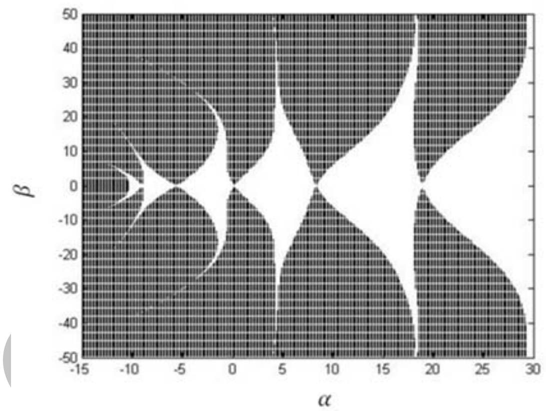

Fig. 13 Dynamic instability region of a DWCNT $\Omega = 1{,}3$ rad/s

شکل 13 نواحی ناپایدار دینامیکی نانولوله کربنی دولایه با $\Omega = 1{,}3$ rad/s

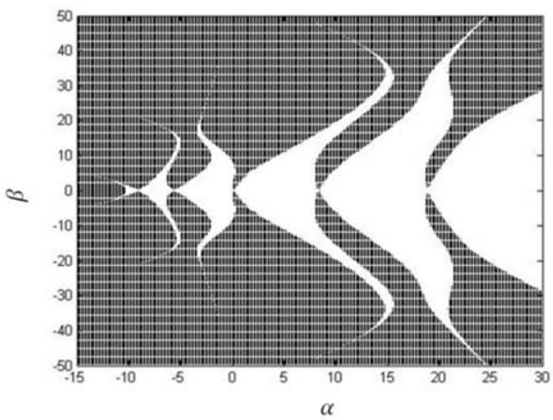

Fig. 14 Dynamic instability region of a DWCNT $\Omega = 1{,}2{,}3$ rad/s

شکل 14 نواحی ناپایدار دینامیکی نانولوله کربنی‌دولایه با $\Omega = 1{,}2{,}3$ rad/s

این نحوه پاسخ در ناپایداری نانولوله کربنی را می‌توان از منحنی بار اعمالی نشان داده شده در "شکل 2" نیز استنباط نمود، زیرا با افزایش ترم‌های هارمونیک برای دامنه ثابت هارمونیک فرکانس‌های مختلف افزایش دامنه نیروی اعمالی رخ داده که این روند منجر به اعمال بار دینامیکی بیشتر است.

6- نتیجه‌گیری

در این مقاله به تحلیل ناپایداری نانولوله‌های کربنی تک‌لایه و دولایه روی بستر الاستیک تحت بار ترکیبی استاتیکی و هارمونیک محوری با استفاده از تئوری فلوکت- لیاپانوف پرداخته شد. برای این منظور از مدل تیر اویلر- برنولی استفاده و با به‌کارگیری از روش گالرکین معادلات دیفرانسیل جزیی حاکم بر رفتار دینامیکی نانولوله‌های کربنی به معادلات دیفرانسیل معمولی با فرم معادلات هتیو-هیل تبدیل شد. معادلات استخراج شده با استفاده از روش انتگرال‌گیری رانگ-کوتا مرتبه چهار به همراه ضرایب گیل حل و اثر پارامترهای مختلف شامل ضریب بستر الاستیک، تعداد لایه، فرکانس تحریک و ترکیب فرکانس‌های تحریک بر ناپایداری نانولوله‌های کربنی مورد تحلیل قرار گرفت. نتایج پیش‌بینی شده با استفاده از روش فلوکت-لیاپانوف با روش حل دامنه محدود مقایسه شد. از تحلیل نتایج حاصل می‌توان نتیجه گرفت که:

1- تئوری فلوکت- لیاپانوف روش عددی بسیار مناسب و دقیق با زمان حل کوتاه برای تحلیل پایداری نانولوله‌های کربنی تحت بار ترکیبی استاتیکی و دینامیکی محوری محسوب می‌شود.

2- نتایج پیش‌بینی شده برای تعیین وضعیت ناپایداری نانولوله‌های کربنی تک‌لایه و دولایه با استفاده از تئوری فلوکت-لیاپانوف تطابق بسیار نزدیکی با نتایج مشابه از تئوری حل دامنه محدود دارد.

3- افزایش ضریب بستر الاستیک اثر مثبت بر توسعه نواحی پایدار داشته به طوری که نانولوله‌های کربنی در بازه بیشتری از مقادیر دامنه بار استاتیکی و هارمونیک پایدار هستند.

4- افزایش تعداد لایه‌ها با اعمال نیروهای وندروالس بین لایه‌ای موجب افزایش پایداری نانولوله‌ها می‌شود.

5- افزایش فرکانس تحریک بار محوری اثر منفی بر توسعه نواحی پایدار داشته و با افزایش این مقدار سیستم به سمت ناپایداری بیشتر میل می‌کند.

6- افزایش تعداد ترم‌های هارمونیک بار خارجی موجب افزایش ناپایداری نانولوله‌ها و تغییر وضعیت نواحی پایدار و ناپایدار می‌شود.

7- نانولوله‌های کربنی در حالت اعمال بار استاتیکی کششی نسبت به بار استاتیکی فشاری پایدارتر هستند.

7- مراجع

[1] Q. Han, G. Lu, L. Dai, Bending instability of an embedded double-walled carbon nanotube based on Winkler and van der Waals models, *Composites Science and Technology*, Vol. 65, No. 9, pp. 1337-1346, 2005.

[2] J. Yoon, C.Q. Ru, A. Mioduchowski, Vibration and instability of carbon nanotubes conveying fluid, *Composites Science and Technology*, Vol. 65, No. 9, pp. 1326-1336, 2005.

[3] J. Yoon, C.Q. Ru, A. Mioduchowski, Flow-induced flutter instability of cantilever carbon nanotubes, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 11, pp. 3337-3349, 2006.

[4] V.G. Hadjiev, D. C. Lagoudas, E. Oh, P. Thakre, D. Davis, Buckling instabilities of octadecylamine functionalized carbon nanotubes embedded in epoxy, *Composites Science and Technology*, Vol. 66, No. 1, pp. 128-136, 2006.

[5] R. Rafiee, Analysis of nonlinear vibrations of a carbon nanotube using perturbation technique, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 3, pp. 60-67, 2011. (in Persian فارسی)

[6] K. Y. Volokh, K. T. Ramesh, An approach to multi-body interactions in a continuum-atomistic context: Application to analysis of tension instability in carbon nanotubes, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 25, pp. 7609-7627, 2006.

[7] A. Tylikowski, Instability of thermally induced vibrations of carbon nanotubes, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 78, No. 1, pp. 49-60, 2007.

[8] Q. Wang, K. M Liew, W.H. Duan, Modeling of the mechanical instability of carbon nanotubes, *Carbon*, Vol. 46, No. 2, pp. 285-290, 2008.

[9] L. Wang, Q. Ni, On vibration and instability of carbon nanotubes conveying fluid, *Computational Materials Science*, Vol. 43, No. 2,

pp. 399-402, 2008.

[10] L. Wang, Q. Ni, M. Li, Q. Qian, The thermal effect on vibration and instability of carbon nanotubes conveying fluid, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 40, No. 10, pp. 3179-3182, 2008.

[11] L. Wang, Q. Ni, M. Li, Buckling instability of double-wall carbon nanotubes conveying fluid, *Computational Materials Science*, Vol. 44, No. 2, pp. 821-825, 2008.

[12] Q. Wang, Torsional instability of carbon nanotubes encapsulating C60 fullerenes, *Carbon*, Vol. 47, No. 2, pp. 507-512, 2009.

[13] F. Yiming, B. Rengui, Z. Pu, Y. Fu, R. Bi, P. Zhang, Nonlinear dynamic instability of double-walled carbon nanotubes under periodic excitation, *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 22, No. 3, pp. 206-212, 2009.

[14] E. Ghavanloo, F. Daneshmand, M. Rafiei, Vibration and instability analysis of carbon nanotubes conveying fluid and resting on a linear viscoelastic Winkler foundation, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 42, No. 9, pp. 2218-2224, 2010.

[15] E. Ghavanloo, S.A. Fazelzadeh, Flow-thermoelastic vibration and instability analysis of viscoelastic carbon nanotubes embedded in viscous fluid, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 44, No. 1, pp. 17-24, 2011.

[16] T. Natsuki, T. Tsuchiya, Q. Ni, M. Endo, Torsional elastic instability of double-walled carbon nanotubes, *Carbon*, Vol. 48, No. 15, pp. 4362-4368, 2010.

[17] W. H. Duan, Q. Wang, K. M. Liew, Modeling the instability of carbon nanotubes: from continuum mechanics to molecular dynamics, *Journal of Nanotechnology in Engineering and Medicine*, Vol. 1, No. 1, pp. 11001-11010, 2010.

[18] L. Ke, Y. Wang, Flow-induced vibration and instability of embedded double-walled carbon nanotubes based on a modified couple stress theory, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 43, No. 5, pp. 1031-1039, 2011.

[19] T. Chang, M. Liu, Flow-induced instability of double-walled carbon nanotubes based on nonlocal elasticity theory, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 43, No. 8, pp. 1419-1426, 2011.

[20] T. Chang, M. Liu, Small scale effect on flow-induced instability of double-walled carbon nanotubes, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 30, No. 6, pp. 992-998, 2011.

[21] Y. Zhen, B. Fang, Y. Tang, Thermal–mechanical vibration and instability analysis of fluid-conveying double walled carbon nanotubes embedded in visco-elastic medium, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 44, No. 2, pp. 379-385, 2011.

[22] J. Shi, T. Natsuki, X. Lei, Q. Ni, Buckling Instability of Carbon Nanotube Atomic Force Microscope Probe Clamped in an Elastic Medium, *Journal of Nanotechnology in Engineering and Medicine*, Vol. 3, No. 2, pp. 209031-5, 2012.

[23] M.A. Kazemi, S.A. Fazelzadeh, E. Ghavanloo, Non-conservative instability of cantilever carbon nanotubes resting on viscoelastic foundation, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 44, No. 7, pp. 1623-1630, 2012.

[24] J. Choi, O. Song, S. Kim, Nonlinear stability characteristics of carbon nanotubes conveying fluids, *Acta Mechanica*, Vol. 224, No. 7, pp. 1383-1396, 2013.

[25] A. Ghorbanpour, M.R. Bagheri, R. Kolahchi, Z. Khoddami, Nonlinear vibration and instability of fluid-conveying DWBNNT embedded in a visco-Pasternak medium using modified couple stress theory, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 27, No. 9, pp. 2645-2658, 2013.

[26] M.M. Seyyed Fakhrabadi, A. Rastgoo, M. Ahmadian, Size-dependent instability of carbon nanotubes under electrostatic actuation using nonlocal elasticity, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 80, No. 1, pp. 144-152, 2014.

[27] Y. Wang, F. Li, Dynamical parametric instability of carbon nanotubes under axial harmonic excitation by nonlocal continuum theory, *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, Vol. 95, No. 1, pp. 19-23, 2016.

[28] R. Ansari, A. Norouzzadeh, R. Gholami, Forced vibration analysis of conveying fluid carbon nanotube resting on elastic foundation based on modified couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 3, pp. 27-34, 2015. (in Persian فارسی)

[29] R. Ansari, R. Gholami, Dynamic stability of embedde single walled carbon nanotubes including thermal effects, *Transactions of Mechanical Engineering*, Vol. 39, No. 1, pp. 153-161, 2015.

[30] P. Friedmann, C.E. Hammond, T. Woo, Efficient numerical treatment of periodic systems with application to stability problems, *Inernational Journal of Numerical Methods in Engeenring*, Vol. 11, No. 7, pp. 1117-1136, 1977.