مجله مهندسی مکانیک مدرس، اسفند 1395، دوره 16، شماره 12، ص‌ص 703-710

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بهینه‌سازی توپولوژی مسئله انتقال حرارت هدایت با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز و تحلیل اجزاء محدود

حسن‌علی جهانگیری[1]، علی جهانگیری[2*]

1- کارشناسی ارشد، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

*تهران، صندوق پستی 19839-4716، a_jahangiri@sbu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 30 شهریور 1395
پذیرش: 26 آبان 1395
ارائه در سایت: 11 دی 1395

کلید واژگان:
انتقال حرارت
بهینه‌سازی توپولوژی
روش مجموعه سطوح تراز
آنالیز حساسیت
اجزاء محدود

چکیده

بهینه‌سازی توپولوژیکی کیفیت انتقال حرارت دوبعدی در یک محفظه بسته، بعنوان یک مسئله ترموفیزکی نمونه، همواره از اهمیت بسزایی برخوردار بوده است. در این مقاله روش بهینه‌سازی توپولوژی با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز جهت به‌دست آودرن توپولوژی بهینه براساس داده‌های به‌دست آمده از حل مسئله انتقال حرارت دوبعدی شامل بار حرارتی نقطه‌ای و بار حرارتی گسترده در دامنه محاسباتی با استفاده از روش تحلیل اجزاء محدود، توسعه داده شده است. در روش مجموعه سطوح تراز، مرزهای سازه به‌وسیله یک تراز از تابع اسکالر دینامیکی ضمنی از بعد بالاتر معرفی می‌شوند. تغییرات این تابع در مراحل بهینه‌سازی می‌تواند به‌سادگی جدا شدن و متصل شدن مرزهای دینامیکی را مدل‌سازی نماید. برای تشکیل این تابع و تعیین دمای مجهول می‌توان از توابع شکل مورد استفاده در تحلیل اجزاء محدود استفاده کرد. تابع هدف در این مقاله کمینه کردن ظرفیت توان حرارتی بوده و آنالیز حساسیت در چندین مسئله نمونه انتقال حرارت با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز جهت بهینه‌سازی توپولوژی به همراه روش تحلیل اجزاء محدود بررسی شده است. در نهایت نتایج حل سه مسئله نمونه انتقال حرارت شامل بار حرارتی نقطه‌ای، بار حرارتی گسترده و ترکیبی از این دو جهت نشان دادن اعتبار روش مذکور ارائه شده است. با استفاده از این روش، هزینه و زمان محاسبات بهینه سازی کاهش یافته و می‌تواند برای محدوده وسیعی از مسائل بهینه سازی توپولوژی انتقال حرارت محاسباتی به‌کار گرفته شود.

Topology optimization of heat conduction problem via Level-Set method and the Finite Elements analysis

Hassan Ali Jahangiry[1], Ali Jahangiri[2*]

1- Civil Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
2- Faculty of Mechanical and Energy Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran
*P.O.B. 19839-4716, Tehran, a_jahangiri@sbu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 20 September 2016
Accepted 16 November 2016
Available Online 31 December 2016

Keywords:
Heat transfer
Topology Optimization
Level-set Method
Sensitivity Analysis
Finite Elements

ABSTRACT

Topology optimization of the heat transfer quality in two-dimensional heat conduction problem at enclosure as one of the typical thermo-physical problems has always been quite important. In this paper a level set-based topological optimization procedure of two-dimensional heat conduction problem including point and spread thermal on computational domain load using finite elements method is developed. In level-set method, all structural boundaries are parameterized by a level of dynamic implicit scalar function of higher order. Changes of this function can easily model the detachment and attachment of dynamic boundaries in topology procedures. The same shape functions of finite elements analysis are employed to approximate the unknown temperatures and geometry modeling of the design domain. The objective function to minimize thermal power capacity and sensitivity analysis on some heat conduction problems is investigated to deal with the topology optimization using level-set method with the finite elements scheme. Finally, topology optimization results of 3 heat conduction problems under both point and spread thermal load cases are presented to demonstrate the validity of the proposed method. The proposed method leads to a significant reduction of the computational cost and time and it can be applied to a wide range of topology optimization problems arising from the heat transfer.

1- مقدمه

بهینه‌سازی توپولوژی در بسیاری از مسائل مهندسی نظیر مکانیک، آکوستیک، جریان سیال، انتقال حرارت و مهندسی سازه به‌کار گرفته شده است. در طراحی تجهیزات حرارتی، بهینه‌سازی فرآیند انتقال حرارت جهت افزایش کارایی سیستم از اهمیت بسزایی برخوردار است. اخیراً بهینه‌سازی توپولوژیکی در دامنه محاسباتی یک پدیده مشتمل بر انتقال حرارت، جهت

Please cite this article using:
برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:
H. A. Jahangiry, A. Jahangiri, Topology optimization of heat conduction problem via Level-Set method and the Finite Elements analysis, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 12, pp. 703-710, 2016 (in Persian)

بیشینه کردن کیفیت انتقال حرارت و بالا بردن کارایی آن مورد توجه قرار گرفته است. در دهه گذشته تعداد زیادی از محققان از روش‌های مختلف بهینه‌سازی جهت بهبود کیفی سیستم‌های انتقال حرارتی بهره جسته‌اند که در همه این روش‌های پیشنهادی، سرعت و دقت محاسبات اهمیت ویژه‌ای دارد. روش اجزاء محدود نیز در حل معادلات حاکم بر این پدیده‌ها نقش بسزایی ایفا کرده است. در این حوزه، بسیاری از محققان به بررسی شکل دادن و بهینه‌سازی اندازه پره‌های خنک‌کننده [2,1] در عین حال، روش تولید "شبکه درخت مانند" [4,3] جهت طراحی شبکه با انتقال حرارت هدایتی بالا در تجهیزات و قطعات الکترونیکی پرداخته‌اند. تنها در حدود ده سال از پژوهش‌های پیشگامان مبحث بهینه‌سازی توپولوژیکی بوروال و پیترسون [5] که این روش را جهت حل مسائل سیالاتی و حرارتی توسعه داده‌اند می‌گذرد.

در سال‌های اخیر، مفهوم مشتقات توپولوژیک بعنوان یک ابزار جدید برای بهینه‌سازی شکل، توسط گیلوم و ادریس [6] ارائه شده است و این روش‌ها توسط بوروال و پیترسون [5]، جهت افزودن اثر اینرسی توسعه داده شده و توسط سیگموند و ماووت [7] ادامه یافته است.

لی و همکارانش [8] به طراحی توپولوژی و شکل ساختار انتقال حرارت هدایت توسط روش تکامل یافته ساختاری[1] پرداختند. موضوع مورد تحلیل ایشان، بهینه‌سازی انتقال حرارت هدایت در شرایط وجود منبع حرارتی تنها و نیز چندگانه بوده است. روند بهینه‌سازی، توسط حذف تدریجی بخش کوچکی از مواد هادی حرارت که ارتباط اندکی با تابع هدف داشته‌اند، محقق شده است.

نگویا و بژن [9] شبکه‌های درختی سازمان یافته برای انتقال حرارت توسط تئوری سازمان‌یافتگی را بررسی نمودند. ایشان مسیرهای هادی را جهت کاهش مقاومت حرارتی و وادار کردن پخش حرارت ایجاد نمودند.

چنگ و همکارانش [10] روش بهینه‌سازی مصنوعی را برای مسیرهای موثر انتقال حرارت ابداع نمودند. ایده اصلی روش بهینه‌سازی مصنوعی در خصوص مواد دارای ضریب انتقال حرارت هدایتی بالا که در آن گرادیان دمای بالا وجود دارد به تدریج شکل گرفته است. البته هزینه محاسبات روش مصنوعی بالاست. روش معروف و مهم دیگر جهت بهینه‌سازی توپولوژی، روش همگن‌سازی است. که توسط بنسو و کیکوچی [11] توسعه یافته است.

لی و همکارانش [12] روش تکامل یافته ساختاری را برای طراحی بهینه شکل در رژیم جریان هدایت حرارتی پایدار انجام دادند. معیار بهینه‌سازی ایشان توسط انتگرالگیری مقدار شار المان جهت بدست آمدن فرایند بهینه تعریف شده است.

ژو و همکارانش [13] روش بهینه‌سازی توپولوژی را جهت مطالعه طراحی کانال هدایت حرارتی بالای قطعات الکترونیک استفاده نمودند. گرسبورگ و هانسن [14] نتایج بدست آمده از دو روش المان محدود و حجم محدود در خصوص بهینه‌سازی مسائل انتقال حرارت را بررسی کردند.

گاوو و همکارانش [15]، در طول تکرار، اثرات بار حرارتی وابسته به طراحی در دامنه محاسباتی را در نظر گرفتند. در نتیجه، تابع هدف در نظر گرفته شده در حل بهینه این مسئله غیر یکنواخت شده است. در مقاله ایشان روش تکامل یافته ساختاری دو جهته[2] اصلاح شده، توسعه یافته است و نتایج به‌روشنی اثر بار حرارتی وابسته به طراحی و تأثیر محدودیت حجم در حل بهینه را نشان داده است.

[1]Evolutionary Structural Optimization (ESO)
[2]Bidirectional Evolutionary Structural Optimization (BESO)

در مقاله حاضر، سه مورد از مثال‌های در نظر گرفته شده در مقاله گاوو و همکارانش، جهت بهینه‌سازی توپولوژی، در مسئله انتقال حرارت هدایت پایدار، با استفاده از روش اجزاء محدود به‌همراه روش مجموعه سطوح تراز[3] بررسی شده است و با نتایج گاوو و همکارانش مقایسه می‌گردد.

روش مجموعه سطوح تراز برای نخستین بار توسط اشر و ستیان [16] به منظور حل معادلات حاکم بر مرزهای دینامیکی از جمله انتشار امواج مورد استفاده قرار گرفت ولی ایده اصلی استفاده از این روش در بهینه‌سازی توپولوژیکی برای نخستین بار توسط وانگ و همکارانش [17] ارائه شد. کارهای وانگ و همکارانش روش‌های عددی را توسعه داده است. در مقالات آن‌ها مثال‌های عددی زیادی حل گردیده تا قدرت و عملکرد این روش را ثابت کند و اهمیت ادامه تحقیقات در این روش را نشان دهد. همچنین در کارهای آلایر و همکارانش [18]، یک چهارچوب محاسباتی برای بهینه‌سازی شکل و توپولوژی با روش مجموعه سطوح تراز معرفی شده که از گرادیان شکل، برای رشد تابع مجموعه سطوح تراز استفاده شده است و الگوریتم عددی، برای حلّ معادله مجموعه سطوح تراز ارائه گردیده است.

یکی دیگر از ویژگی‌های این پژوهش این است که تابع هدف جهت بهینه‌سازی توپولوژی کمینه کردن ظرفیت توان حرارتی در فرآیند بهینه‌سازی تعریف شده است.

2- فرمول‌بندی مسئله بهینه‌سازی توپولوژی

2-1- معرفی مسئله بهینه‌سازی توپولوژی انتقال حرارت هدایت

در این مقاله مسئله انتقال حرارت هدایت پایدار درون یک محفظه بسته و با شرایط مرزی دریخله در نظر گرفته شده است. در این مسئله که عبارت منبع حرارتی به شکل‌های منبع نقطه‌ای و گسترده می‌تواند در دامنه حل وجود داشته باشد، معادله کلی انتقال حرارت و شرایط مرزی آن به شکل رابطه (1) نوشته می‌شود:

$$\nabla\cdot(k\nabla T)-f=0;\ x\in\Omega \qquad T=0;x\in\partial\Omega \tag{1}$$

در این معادله، T، k و f به ترتیب دما، ضریب انتقال حرارت هدایت و منبع حرارتی می‌باشد. شار حرارتی نیز بصورت $q=k\nabla T$ محاسبه می‌گردد. در رابطه فوق f می‌تواند شامل منبع حرارت سطحی f_t (روی نقاط شبکه بندی اجزاء محدود اعمال می‌شود) و منبع حرارت حجمی f_b (در کل المانهای اجزاء محدود بطور یکنواخت اعمال می‌شود) و یا هر دو بطور همزمان باشد. زمانی که منبع حرارت حجمی مد نظر باشد مقدار آن از رابطه (2) قابل محاسبه است:

$$f_b=\int_{\Omega^e}Q_0H(\phi)N_i\,d\Omega^e \tag{2}$$

در رابطه فوق Q_0 و N_i به ترتیب نرخ تولید حرارت حجمی موجود و تابع شکل روش تحلیل اجزاء محدود [19] می‌باشد.

مفهوم شرط مرزی دریخله القاء شده نیز به معنی وجود دمای ثابت $T=0$ بر روی مرزهای محفظه بسته $(\partial\Omega)$ مطابق شکل 1 می‌باشد.

بطور کلی در مسئله انتقال حرارت هدایت پایدار، هدف طراحی بهینه توپولوژی، یافتن پیکربندی بهینه به‌گونه‌ای است که تولید حرارت برای یک حجم ثابت در دسترس از ماده کمینه گردد. به بیان دیگر توزیع دمای سراسری ماده، کمینه گردد. حجم مصالح در این مسئله نیز مشابه طراحی بهینه توپولوژی سازه‌ها است؛ یعنی در آن متغیرهای چگالی نشان‌دهنده

[3]Level set Method (LSM)

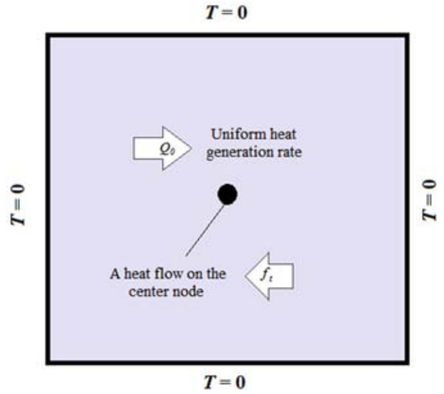

Fig. 1 Schematic illustrations of heat conduction optimization design problems

شکل 1 توصیف شماتیک مسئله‌های طراحی بهینه‌سازی انتقال حرارت هدایت

وجود و یا عدم وجود ماده در دامنه حل هستند. با این تعاریف تابع هدفی که بایستی کمینه گردد، با استفاده از رابطه (3) محاسبه می‌شود:

تابع هدف: $C = \sum \int \frac{1}{2} \nabla T \cdot (k \nabla T) d\Omega$

توابع قید:

1: $V \le V_{max}$

2: محدوددیت‌های طراحی (3)

در آن X متغیر طراحی است که عددی باینری بوده و 0 آن به منزله عدم وجود المان و 1 به معنی وجود المان مادی است. V حجم کنونی مصالح و V_{max} قید حد اکثر حجم مصالح مورد نظر می‌باشد.

2-2- معرفی روش مجموعه سطوح تراز (Level-Set)

روش مجموعه سطوح تراز، یک چارچوب کلی برای محاسبه عددی ارتباط استنتاجی با استفاده از یک بیان ضمنی است. ایده اولیه این روش، در بهینه‌سازی توپولوژی سازه جهت ارائه یک منحنی یا سطحی که دارای تراز صفر در توابع چند بعدی باشد، شکل گرفت [18,17]. سپس تغییر شکل منحنی و سطح جهت تغییر شکل این تابع استفاده شد. بنابراین تابع ضمنی مورد استفاده در این ارتباط یا مرز بگونه‌ای تعریف شد که در یک دامنه حل ارائه شده مانند Ω در شکل 2 با یک مرز معین، تابع ضمنی وجود خواهد داشت که شرایط معادله (4) را ارضاء می‌نماید.

در این مسئله این تابع همان متغیرهای مجموعه سطوح تراز یا متغیرهای طراحی خواهد بود.

$$\begin{cases} \phi(x) > 0, & x \in \Omega^+ \\ \phi(x) = 0, & x \in \partial\Omega \\ \phi(x) < 0, & x \in \Omega^- \end{cases} \tag{4}$$

بردار یکه نرمال محلی n و تابع انحنای منحنی $\nabla \cdot n$ به ترتیب به

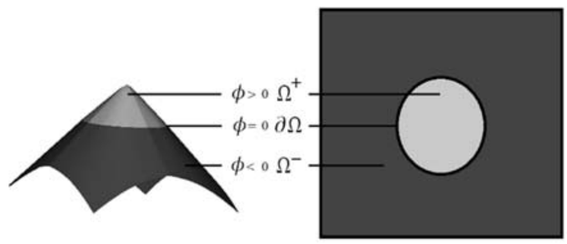

Fig. 2 3D level set surface and divided regions by the zero contour of the level set surface.

شکل 2 نمای سه‌بعدی تابع مجموعه سطوح تراز و نواحی مجزا شده آن توسط کانتور صفر مجموعه سطوح تراز

صورت روابط (5) و (6) ارائه می‌شوند:

$$n = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \tag{5}$$

$$\kappa = \nabla \cdot n = \mathrm{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right) \tag{6}$$

جهت تکمیل معادلات حاکم، تابع سطوح تراز $(\phi(x(t))$، بر روی منحنی یا سطح مرزی با استفاده از معادله همیلتن- ژاکوبی به شکل رابطه (7) توسعه داده می‌شود.

$$\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} - v_n|\nabla\phi(x,t)| = 0 \tag{7}$$

جزء مهمی از روش مجموعه سطوح تراز، انتخاب مقدار اولیه مناسب ϕ_0 و سرعت نرمال v_nاست که بیانگر سرعت نرمال جابجایی $x(t)$ یا همان بردار سرعت تابع مجموعه سطح تراز در سطح تراز صفر تابع بوده و منجر به هدایت توپولوژی به سمت توپولوژی بهینه می‌گردد. همچنین در این روش از توابع هویساید H و تابع دلتای دیراگ δ به‌عنوان ابزار محاسباتی به شرح روابط (8) و (9) استفاده می‌شود.

$$H(\phi(x)) = \begin{cases} 1, & \phi \ge 0 \\ 0, & \phi < 0 \end{cases} \tag{8}$$

$$\delta(\phi(x)) = \frac{\mathrm{d}H(\phi(x))}{\mathrm{d}\phi} = \delta(\phi)|\nabla\phi| \tag{9}$$

بدین ترتیب دامنه محاسباتی و مرزهای دامنه به صورت روابط (10) و (11) تعریف خواهند شد:

$$\Omega = \{x: \quad H(\phi(x)) = 1\} \tag{10}$$

$$\partial\Omega = \{x: \quad \delta(\phi(x)) > 0\} \tag{11}$$

با توجه به موارد ذکر شده، برای یک تابع دلخواه $F(x)$، انتگرال حجمی روی دامنه محاسباتی به شکل رابطه (12) نگاشته می‌شود و اگر $F(x)= 1$ در نظر گرفته شود، انتگرال مذکور طبق رابطه (13) حجم دامنه را محاسبه خواهد نمود.

$$\int_\Omega F(x) H(\phi(x)) d\Omega \tag{12}$$

$$V(\Omega) = \int_\Omega H(\phi(x)) d\Omega \tag{13}$$

انتگرال تابع $F(x)$ روی مرز دامنه محاسباتی نیز با تعریف مشتق سویی تابع هویساید به شکل رابطه (14) نوشته می‌شود:

$$\int_s F(x) ds = \int_\Omega F(x) \delta(\phi(x)) |\nabla\phi(x)| d\Omega \tag{14}$$

جهت استفاده در محاسبات عددی، در این پژوهش از توابع هویساید و دیراگ هموار شده به ترتیب در روابط (15) و (16) استفاده شده است. که در آن Δ عرض تقریب‌سازی تابع هویساید می‌باشد. همچنین توابع دیراگ و هویساید به ترتیب در شکل 3(a) و شکل 3(b) ارائه شده است.

$$H(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le -\Delta \\ \frac{1}{2}\left(1 + \sin\left(\frac{\pi x}{2\Delta}\right)\right) & , -\Delta < x < \Delta \\ 1 & , \quad x \ge \Delta \end{cases} \tag{15}$$

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4\Delta}\cos\left(\frac{\pi x}{2\Delta}\right) & , |x| \le \Delta \\ 0 & , |x| > \Delta \end{cases} \tag{16}$$

2-3- آنالیز حساسیت

به منظور اعمال روش مجموعه سطوح تراز، برخی از داده‌های گرادیان تابع هدف مورد نیاز است. از این‌رو آنالیز حساسیت در مورد مثال‌های این مسئله انتقال حرارت با استفاده از مشتق تابع هدف و قیود به‌فرم تابع لاگرانژین

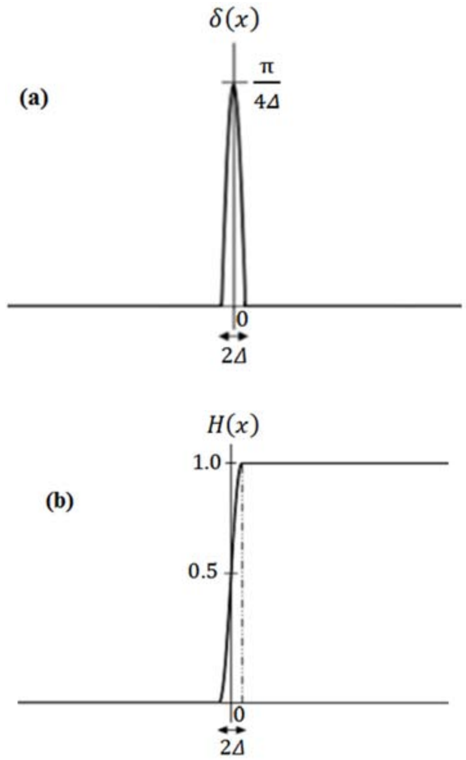

Fig. 3 (a): The Dirac delta and (b): Heaviside function

شکل 3 (a): تابع دلتای دیراگ δ و (b): تابع هویساید H

نسبت به متغیرهای طراحی بیان می‌شود. برای این منظور فرم لاگرانژین مسئله بهینه‌سازی مورد نظر به‌فرم معادله (17) بازنویسی می‌شود.

$$J(\varepsilon,\phi,\lambda)=\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\nabla T\cdot(k(\phi)\nabla T)+\lambda(V(\phi)-V_{\max})\right]d\Omega \tag{17}$$

که در رابطه (17)، λ ضریب لاگرانژ قید حجم می‌باشد.

تغییرات ϕ در رابطه (17) روی مرز مصالح به‌فرم معادله (18) محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\delta_{\phi}J&=\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\nabla T\cdot\left(\frac{\partial k(\phi)}{\partial\phi}\nabla T\right)+\lambda\frac{\partial H(\phi)}{\partial\phi}\right]\delta\ \ |_{\phi=0}d\Omega\\&=\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\nabla T\cdot\left(\frac{\partial k(\phi)}{\partial\phi}\nabla T\right)+\lambda\frac{\partial H(\phi)}{\partial\phi}\right]|\nabla\phi|\delta\ell d\Omega\\&=\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\nabla T\cdot(k\nabla T)+\lambda\right]\delta(\phi)|\nabla\phi|\delta\ell d\Omega\end{aligned} \tag{18}$$

معادله اولر- لاگرانژ مربوط به هر نقطه به‌صورت رابطه (19) بیان می‌شود:

$$\left[\frac{1}{2}\nabla T\cdot(k\nabla T)+\lambda\right]\delta(\phi)|\nabla\phi|=0 \tag{19}$$

در اکثر موارد حل مستقیم معادله‌ی فوق غیرممکن است لذا یکی از روش های عمومی برای حل آن استفاده از معادله مجموعه سطوح تراز مطابق معادله (20) و حل عددی آن با استفاده از شرایط اولیه مشخص می‌باشد.

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}-\left[\frac{1}{2}\nabla T\cdot(k\nabla T)+\lambda\right]\delta(\phi)|\nabla\phi|=0 \tag{20}$$

لذا سرعت نرمال معادله مجموعه سطوح تراز به‌فرم معادله (21) قابل بیان است:

$$v_n=\left[\frac{1}{2}\nabla T\cdot(k\nabla T)+\lambda\right]\delta(\phi) \tag{21}$$

همچنین با استفاده از رابطه (21) ضریب لاگرانژ قید حجم λ به‌صورت معادله (22) قابل محاسبه است:

$$\lambda=-\frac{\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\nabla T\cdot(k\nabla T)\right]\delta^2(\phi)|\nabla\phi|d\Omega}{\int_{\Omega}\delta^2(\phi)|\nabla\phi|d\Omega} \tag{22}$$

همچنین درصورت مد نظر قرار دادن منبع حرارت حجمی، سرعت نرمال مشابه با روند فوق با استفاده از معادله (23) قابل محاسبه است:

$$v_n=\left[\frac{1}{2}\nabla T\cdot(k\nabla T)-Q_0T+\lambda\right]\delta(\phi) \tag{23}$$

2-4- تابع فاصله علامتدار

به منظور اصلاح تابع مجموعه سطوح تراز پس از هر بار بروز رسانی مقادیر مجموعه سطوح تراز نیاز است تا تابع مجموعه سطوح تراز به‌فرم تابع فاصله علامتدار تبدیل شود. نمونه‌ای از تابع فاصله علامت‌دار در شکل 2 قابل مشاهده است. تبدیل تابع مجموعه سطوح تراز به تابع فاصله علامتدار دو ویژگی عمده به‌همراه خواهد داشت. یکی عدم ایجاد شیب‌های بسیار تند و کند به دلیل حل معادله $|\nabla\phi|=1$ که باعث می‌شود شیب تابع مجموعه سطوح تراز در تمامی نقاط برابر 1 گردد و دیگری جلوگیری از افزایش بیش از حد مقادیر مجموعه سطوح تراز در هر نقطه که هر دو مورد فوق سرعت همگرایی به جواب بهینه را تحت تاثیر قرار خواهند داد. این مرحله از بهینه‌سازی به مرحله دوباره مقدار دهی تابع مجموعه سطوح تراز موسوم است. برای این منظور معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مطابق رابطه (23) مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathrm{sign}(\phi)(|\nabla\phi|-1)=0 \tag{24}$$

در رابطه (24)، $\mathrm{sign}(\phi)$ تابع فاصله علامت‌دار می‌باشد که با استفاده از رابطه (25) می توان آنرا برای فرایندهای عددی به صورت تقریبی محاسبه نمود:

$$\mathrm{sign}(\phi)=\frac{\phi}{\sqrt{\phi^2+|\nabla\phi|^2h^2}} \tag{25}$$

در رابطه فوق h می‌تواند برابر با عرض مش‌بندی در نظر گرفته شود.

2-5- حل عددی

به منظور حل عددی معادله مجموعه سطوح تراز از روش‌های تفاضل محدود استفاده می‌شودکه با استفاده از معادلات (26) تا (29) به‌صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\phi^{n+1}=\phi^n+\Delta t\left[\max(v_n,0)\nabla^{+}+\min(v_n,0)\nabla^{-}\right] \tag{26}$$

در رابطه فوقΔt، گام زمانی بوده که می‌بایست شرایط CFL را اقناع کند لذا برای این منظور رابطه (27) مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$\Delta t=\frac{\varepsilon h}{\max\{|v_n|\}} \tag{27}$$

همچنین ∇^{+} و ∇^{-} به‌ترتیب به‌صورت معادلات (28) و (29) قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned}\nabla^{+}=&\left[\max\left(D_{ij}^{-x},0\right)^2+\min\left(D_{ij}^{+x},0\right)^2\right.\\&\left.+\max(D_{ij}^{-y},0)^2+\min(D_{ij}^{+y},0)^2\right]^{0.5}\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\nabla^{-}=&\left[\max\left(D_{ij}^{+x},0\right)^2+\min\left(D_{ij}^{-x},0\right)^2\right.\\&\left.+\max(D_{ij}^{+y},0)^2+\min(D_{ij}^{-y},0)^2\right]^{0.5}\end{aligned} \tag{29}$$

در رابطه فوق $D_{ij}^{\pm x}$ و $D_{ij}^{\pm y}$ عملگرهای تفاضل پیش‌رونده و پس‌رونده در محاسبه گرادیان تابع مجموعه سطوح تراز می‌باشند.

3- نتایج مثالهای عددی مسئله بهینه‌سازی توپولوژی انتقال حرارت

همانطور که پیش از این ذکر شد، در این مقاله، از مثال‌های استفاده شده در پژوهش گاوو و همکارانش [15] جهت مقایسه و تحلیل بهره گرفته می‌شود.

شایان ذکر است که در این پژوهش ورودی اولیه برای تمامی مسائل مطابق شکل 4 شامل 25 حفره بوده لذا شروع فرایند بهینه‌سازی با حجمی معادل با 70٪ حجم کل دامنه آغاز شده و تابع هدف نیز همان کمینه کردن ظرفیت توان حرارتی در دامنه محاسباتی می‌باشد. دامنه طراحی شامل محفظه بسته مربعی شکل واحد مطابق شکل 1 در نظر گرفته شده است. کل دامنه با 1600 المان مربعی متقارن 4 گرهی شبکه‌بندی شده لذا در کل شامل 1681 نقطه گرهی می‌باشد. لذا مقادیر h، ε و Δ به ترتیب برابر با 0.025، 0.2 و $0.2h$ در نظر گرفته شده است. ضریب هدایت حرارتی یک ماده با هدایت حرارتی بسیار بالا در این محفظه معادل 1 لحاظ شده و شرایط مرزی دریخله بطور یکسان به‌صورت دمای صفر روی همه مرزهای خارجی اعمال شده است. همچنین قید حداکثر حجم مصالح برای تمامی مسائل برابر با 50٪ حجم کل سازه در نظر گرفته شده است.

3-1- معرفی مثال شماره 1

در این مثال فقط یک منبع حرارتی نقطه‌ای در نقطه مرکزی شبکه‌بندی دامنه محاسباتی معادل f_i=0.5 در نظر گرفته شده است.

از آنجا که در این مثال فقط یک بار حرارتی متمرکز در وسط دامنه در نظر گرفته شده است، حل مطلوب یافتن کوتاه‌ترین مسیرهای پخش حرارت از مرکز دامنه به سمت هر چهار مرز خواهد بود. این مسیرها در شکل 5 بدست آمده است و همانطور که مشخص است حل عددی حاضر شبیه به یک پیکربندی صلیبی کاملاً مشابه حل این مسئله در مراجع [15,13] است.

در شکل 6 نمودار روند همگرایی مربوط به قید حجم و تابع هدف مسئله مثال 1 نشان داده شده است. همانطور که واضح است مسئله مزبور در کمتر از 100 تکرار اول حل شده است که خود حاکی از کیفیت تحلیل می‌باشد لذا ادامه فرایند فقط به منظور کنترل پایداری حل انجام یافته است.

3-2- معرفی مثال شماره 2

در این مثال نرخ تولید حرارت یکنواخت در سرتاسر دامنه محاسباتی معادل Q_{i0} =10 لحاظ شده است. همانطور که در شکل 7 دیده می‌شود بر اساس نتیجه بهینه و مطلوب، مسیرهای پخش حرارت در اطراف چهار مرز توزیع شده‌اند. زمانی که تنها از نرخ تولید حرارت یکنواخت در سرتاسر دامنه استفاده شود عمده حرارت ایجاد شده در ناحیه مرکزی دامنه قرار می‌گیرد لذا می‌بایست با حذف قسمت عمده‌ای از مصالح موجود در ناحیه مرکزی دامنه، حرارت ایجاد شده در این منطقه را کاهش داده و با افزایش مصالح در نواحی دورتر از مرکز، حرارت ایجاد شده در آن نواحی را به‌گونه‌ای افزایش دهد تا در نهایت توپولوژی ایجاد شده بتواند حرارت موجود را تعدیل کند. در شکل 8 نمودار روند همگرایی مربوط به قید حجم و تابع هدف مسئله مثال 2 نشان داده شده است. همانطور که واضح است مسئله مزبور در کمتر از 50 تکرار اول حل شده است که خود حاکی از کیفیت تحلیل می‌باشد لذا ادامه فرایند فقط به‌منظور کنترل پایداری حل انجام یافته است.

3-3- معرفی مثال شماره 3

در این مثال علاوه بر یک منبع حرارتی نقطه‌ای در نقطه مرکزی شبکه‌بندی دامنه محاسباتی معادل f_i=0.5 نرخ تولید حرارت یکنواخت در سرتاسر دامنه محاسباتی معادل Q_{i0} =10، نیز لحاظ شده است.

همانطور که در شکل 9 دیده می‌شود بر اساس نتیجه بهینه و مطلوب، مسیرهای پخش حرارت به‌صورت ترکیبی از دو مثال قبلی درون دامنه حل توزیع شده‌اند.

در شکل 10 نمودار روند همگرایی مربوط به قید حجم و تابع هدف مسئله مثال 3 نشان داده شده است. همانطور که واضح است مسئله مزبور در کمتر از 50 تکرار اول حل شده است که خود حاکی از کیفیت تحلیل می‌باشد لذا ادامه فرایند فقط به منظور کنترل پایداری حل انجام یافته است.

4- جمع بندی و نتیجه گیری

در این پژوهش از روش مجموعه سطوح تراز برای تصویرنمایی توپولوژی بهینه استفاده گردید. با توجه به اینکه در این روش تصویر روی سطح تراز صفر تابع به‌عنوان توپولوژی تشکیل شده در نظر گرفته می‌شود، لذا شکل

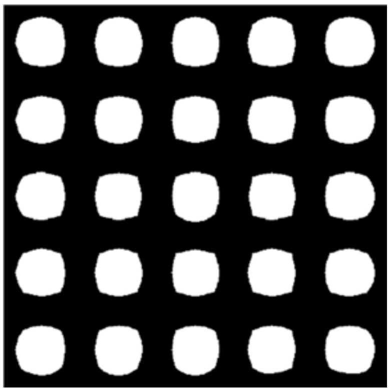

Fig. 4 The initial input structure

شکل 4 سازه ورودی اولیه

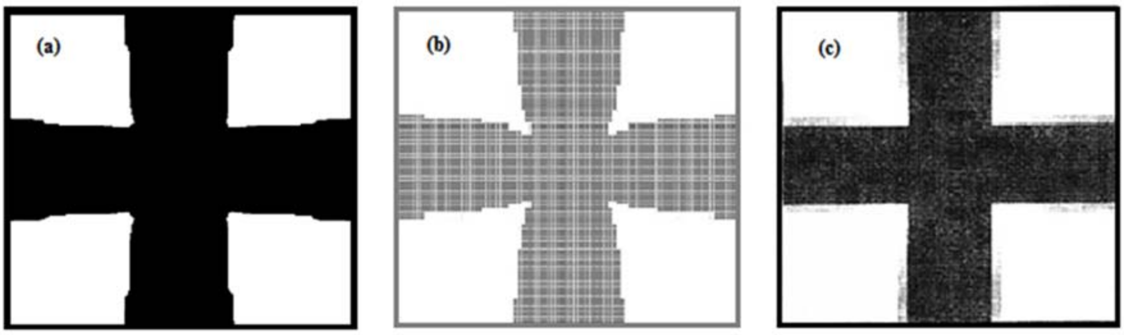

Fig. 5 Optimal Result of example 1: (a) current study; (b) Ref [15]; (c) Ref [13].

شکل 5 نتایج بهینه مثال 1: (a) مطالعه حاضر، (b) مرجع [15]، (c) مرجع [13]

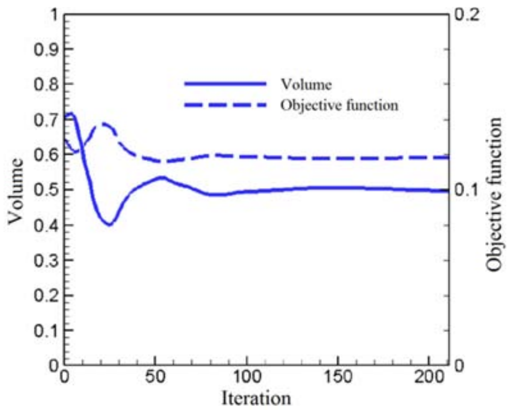

Fig. 6 Iteration histories of the objective function and volume constraint

شکل 6 نمودار روند همگرایی برای تابع هدف و قید حجم

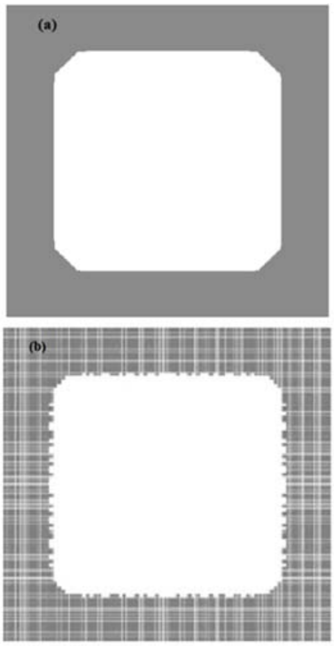

Fig. 7 Optimal Result of example 1: (a) current study; (b) Ref [15].

شکل 7 نتایج بهینه مثال 2: (a) مطالعه حاضر، (b) مرجع [15]

بهینه، شامل مرزهای بسیار هموار و فاقد مصالح میانه یا المان‌های خاکستری می‌باشد که خود دقت در تعیین توپولوژی نهایی و تخمین حجم واقعی مصالح را بسیار بالا خواهد برد.

بطور کلی در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی که شامل نرخ تولید حرارت یکنواخت در سرتاسر دامنه محاسباتی می‌باشد، اثر تغییرات شار حرارتی نسبت به متغیرهای طراحی در معادله (23) براحتی از بین نمی‌رود. در نتیجه مجموع دو ترم اول معادله (23) می‌تواند مثبت یا منفی باشد که این بدان معناست که سرعت نرمال معادله مجموعه سطوح تراز، رفتار غیر یکنواختی نسبت به تغییرات متغیرهای طراحی از خود نشان خواهد داد.

برای بررسی نهایی روش حل عددی ارائه شده، 9 وضعیت ویژه مطابق شکل 11 در نظر گرفته شده است که در آن ابتدا حالت (a)، محفظه با لحاظ نرخ تولید حرارت یکنواخت در سرتاسر دامنه محاسباتی معادل $Q_{i0}=10$، و در ادامه حالت b با افزودن یک منبع حرارتی نقطه‌ای در نقطه مرکزی شبکه دامنه محاسباتی معادل $f_i=0.5$ به حالت قبلی و به تدریج افزایش مقداری این منبع حرارتی نقطه‌ای در حالات c تا h بررسی شده و در نهایت حالت i فقط

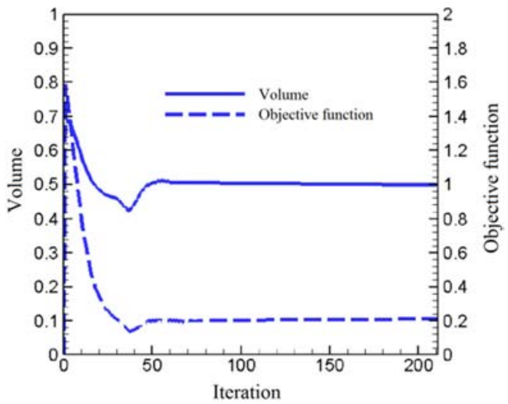

Fig. 8 Iteration histories of the objective function and volume constraint

شکل 8 نمودار روند همگرایی برای تابع هدف و قید حجم

شامل یک منبع حرارتی نقطه‌ای در نقطه مرکزی شبکه دامنه محاسباتی معادل $f_i=6$ به تنهایی در نظر گرفته شده است. همانطور که از شکل 11 بر

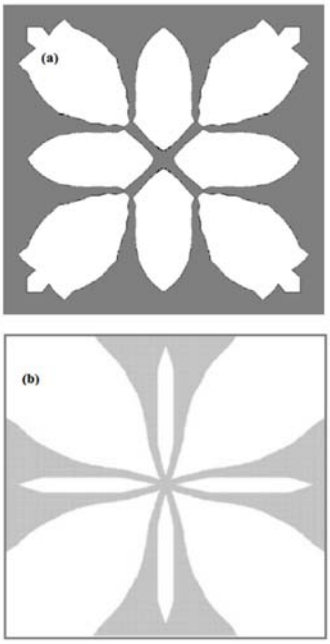

Fig. 9 Optimal Result of example 1: (a) current study; (b) Ref [15]

شکل 9 نتایج بهینه مثال 1: (a) مطالعه حاضر، (b) مرجع [15]

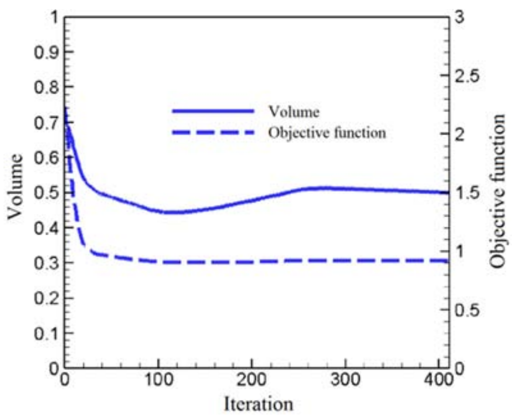

Fig. 10 Iteration histories of the objective function and volume constraint

شکل 10 نمودار روند همگرایی برای تابع هدف و قید حجم

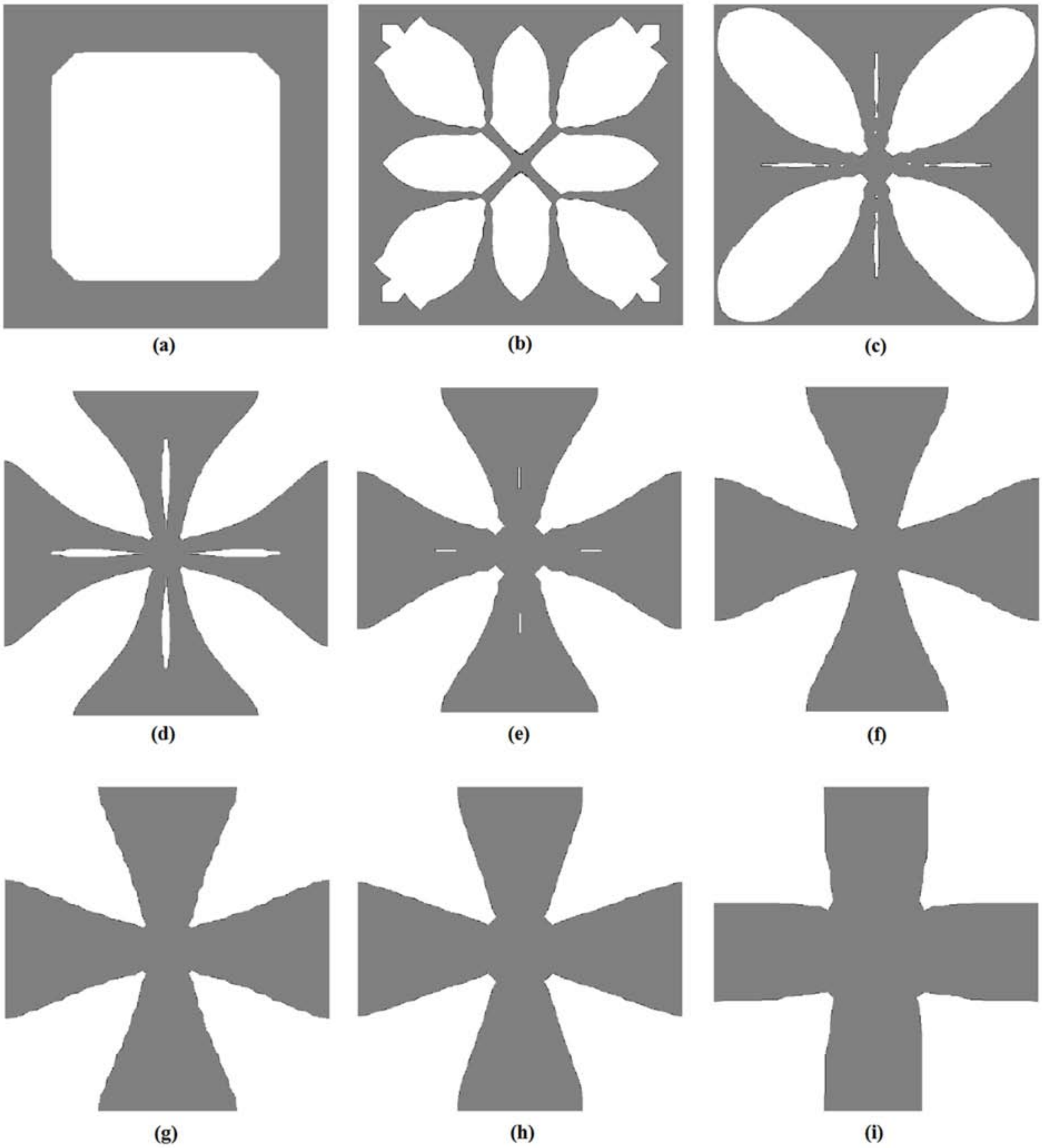

Fig. 11 Optimal Result of current study; (a): Only Q_{i0} =10, (b): f_i=0.5 + Q_{i0} =10, (c): f_i=1.5 + Q_{i0} =10,(d): f_i=2.0 + Q_{i0} =10 ,(e): f_i=3.0 + Q_{i0} =10 ,(f): f_i=4.0 + Q_{i0} =10 ,(g): f_i=5.0 + Q_{i0} =10 ,(h): f_i=6.0 + Q_{i0} =10 ,(i): Only f_i=6.0

شکل 11 نتایج بهینه مطالعه حاضر؛ (a): فقط Q_{i0} =10، (b): f_i=0.5 + Q_{i0} =10، (c): f_i=1.5 + Q_{i0} =10، (d): f_i=2.0 + Q_{i0} =10، (e): f_i=3.0 + Q_{i0} =10، (f): f_i=4.0 + Q_{i0} =10، (g): f_i=5.0 + Q_{i0} =10، (h): f_i=6.0 + Q_{i0} =10، (i): فقط f_i=6.0

می‌آید به تدریج با افزایش قدرت منبع نقطه‌ای شرایط حاکم بر توپولوژی بهینه بدست آمده به‌طرف وضعیت منبع حرارتی قوی‌تر سوق پیدا کرده است. این حاکی از آن است که قوی شدن منبع نقطه‌ای توانسته تا حدود زیادی شرایط توپولوژی بهینه را به سود خود تحت تاثیر قرار دهد.

5- فهرست علایم

f	منبع حرارت
h	عرض مش بندی تحلیل اجزاء محدود
$H(\phi)$	تابع هویساید
k	ضریب انتقال حرارت
n	بردار نرمال یکه
N_i	تابع شکل تحلیل اجزاء محدود
q	شار حرارت
Q_0	نرخ تولید حرارت حجمی
$\mathrm{sign}(\phi)$	تابع فاصله علامتدار
V_{max}	قید حداکثر حجم مصالح
v_n	سرعت نرمال معادله همیلتون-ژاکوبی
X_i	متغیر طراحی

علایم یونانی

Δ	عرض تقریب سازی تابع هویساید
$\delta(\phi)$	تابع دلتای دیراک
$\lvert\nabla\phi\rvert$	اندازه گرادیان متغیر طراحی
∇^+ و ∇^-	عملگرهای تفاضل محدود پیشرونده و پسرونده
ε	ضریب ثابت به منظور اقناع شرط CFL
κ	انحنا
λ	ضریب لاگرانژ قید حجم
ϕ	متغیر تابع مجموعه سطوح تراز
Δt	گام زمانی

6- مراجع

[1] A. V. Attetkov, I. K. Volkov, E. S. Tverskaya, The optimum thickness of a cooled coated wall exposed to local pulse-periodic heating, *Journal of Engineering Physics and Thermophysics,* Vol. 74, No. 6, pp. 1467-1474, 2001.

[2] M. Sasikumar, C. Balaji, Optimization of convective fin systems: A holistic approach, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* Vol. 39, No. 1, pp. 57-68, 2002.

[3] D. K. Yang, K. S. Lee, S. Song, Fin spacing optimization of a fin-tube heat exchanger under frosting conditions, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* Vol. 49, No. 15-16, pp. 2619-2625, 2006.

[4] W. Wu, L. Chen, F. Sun, Improvement of tree-like network constructal method for heat conduction optimization, *Science in China, Series E: Technological Sciences,* Vol. 36, No. 7, pp. 773-781, 2006.

[5] T. Borrvall, J. Petersson, Topology optimization of fluid in Stokes flow, *International Journal of Numerical Methods in Fluids,* Vol. 41, No. 1, pp. 77-107, 2003.

[6] P. Guillaume, K.S. Idris, Topological sensitivity and shape optimization for the stokes equations, *SIAM Journal on Control and Optimization (SICON),* Vol. 43, No. 1, pp. 1-31, 2005.

[7] O. Sigmund, K. Maute, Topology optimization approaches: A comparative review, *Structural and Multidisciplinary Optimization,* Vol. 48, No. 6, pp. 1031-1055, 2013.

[8] Q. Li, G. P. Steven, O. M. Querin, Y. Xie, Shape and topology design for heat conduction by evolutionary structural optimization, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* Vol. 42, No. 17, pp. 3361-3371,1999.

[9] M. Neagu, A. Bejan, Constructal-theory tree networks of constant thermal resistance, *Journal of Applied Physics,* Vol. 86, No. 2, pp. 1136-1144, 1999.

[10] X. Cheng, Z. Li, Z. Guo, Constructs of highly effective heat transport paths by bionic optimization, *Science In China Series E-Engineering & Materials Science,* Vol. 46, No. 3, pp. 296-302, 2003.

[11] M.P. Bendsøe, N. Kikuchi, Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 71, No. 2, pp. 197-224, 1988.

[12] Q. Li, G. P. Steven, Y. M. Xie, O. M. Querin, Evolutionary topology optimization for temperature reduction of heat conducting fields, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* Vol. 47, No. 23, pp. 5071-5083, 2004.

[13] K. T. Zuo, L. P. Chen, Y. Q. Zhang, S.T. Wang, Structural optimal design of heat conductive body with topology optimization method, *Chinese Journal of Mechanical Engineering,* Vol. 41, No. 4, pp. 13-16, 2005. (in Chinese)

[14] A. Gersborg-Hansen, M. P. Bendsøe, O. Sigmund, Topology optimization of heat conduction problems using finite volume method *Structural and Multidisciplinary Optimization,* Vol. 31, No. 4, pp. 251-259, 2006.

[15] T. Gao, W. H. Zhang, J. H. Zhu, Y. J. Xu, D. H. Bassir, Topology optimization of heat conduction problem involving design-dependent heatm load effect, *Finite Elements in Analysis and Design,* Vol. 44, No. 14, pp. 805-813, 2008.

[16] S. Osher, J. A. Sethian, Front propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations, *Journal of Computational Physics,* Vol. 79, No. 1, pp. 12-49, 1988.

[17] M. Y. Wang, X. Wang, D. Guo, A level set method for structure topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 192, No. 1-3, pp. 227-246, 2003.

[18] G. Allaire, F. Jouve, A. M. Toader, Structural optimization using sensitivity analisys and a level-set method, *Journal of Computational Physics,* Vol. 194, No. 1, pp. 363-393, 2004.

[19] J. N. Reddy, *An Introduction to The Finite Element Method*, 2nd Eddition, Vol. 2, pp. 1-80, (Translated by A. Rastgoo, N. Soltani), University of Tehran Press, 2012. (in Persian فارسی)