مجله مهندسی مکانیک مدرس، اسفند 1395، دوره 16، شماره 12، ص‌ص 756-766

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل ریاضی خمش غیرارتجاعی چرخه‌ای مقاطع لوله‌ای فولادی با مدل تنش-کرنش پیوسته

محمد معتمدی[1]، مصطفی زین‌الدینی[2*]، جواد فاخری[3]

1- دانشجوی دکتری، مهندسی عمران، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
2 - استاد، مهندسی عمران، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
3- مربی، مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تهران، تهران
* تهران، صندوق پستی 1996715433، zeinoddini@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 26 مرداد 1395
پذیرش: 03 آذر 1395
ارائه در سایت: 15 دی 1395

کلید واژگان:
لوله‌های فولادی
بارگذاری یکسویه و چرخه‌ای خمش خالص
رفتار نرم شوندگی/ سخت‌شوندگی چرخه‌ای

چکیده

در این تحقیق اطلاعات حاصل از بررسی نظری رفتار نرم‌شوندگی/ سخت‌شوندگی و پدیده خرابی خمیری پیش‌رونده اعضای فولادی با مقطع لوله‌ای، تحت بارگذاری خمش خالص در محدوده غیرارتجاعی ارائه می‌شود. در این مطالعه برای حل مسئله، از تحلیل ریاضی استفاده شده است. پدیده‌های فیزیکی مورد توجه در تحلیل شامل رفتار غیرارتجاعی مصالح، بیضی‌شدگی چرخه‌ای تجمعی سطح مقطع (مشابه رفتارخزش) و رفتار خمیری چرخه‌ای شامل اثرات بوشینگر، رفتار نرم‌شوندگی/ سخت‌شوندگی چرخه‌ای مصالح و پدیده خرابی خمیری پیش‌رونده است. روابط لنگر- انحنا بر پایه مقطع بیضی‌شده استخراج شده‌اند. رفتار مصالح در محدوده غیرخطی بر اساس معادله غیرخطی تنش- کرنش تورگارد لحاظ شده است که این امر موجب ساده‌سازی تحلیل شده است. یک مدل رفتاری ترکیبی شامل قانون سخت‌شوندگی پویای غیرخطی بعلاوه سخت‌شوندگی همسانگرد به منظور مدل‌سازی رفتار تنش- کرنش محوری چرخه‌ای در نظر گرفته شده است. تحلیل‌ها تحت بارگذاری خمش خالص تکرارشونده کم‌چرخه به صورت انحنا- کنترل انجام شده است. رشد چرخه به چرخه بیضی‌شدگی مقطع با استفاده از قانون اصلاح شده خزش بایلی- نیوتن در محاسبات لنگر خمشی آورده شده است پیش‌بینی‌های مدل با تعدادی از داده‌های تجربی در دسترس که به صورت آزمایش یکسویه و چرخه‌ای در محدوده خمیری بر روی لوله‌های فولادی انجام شده مقایسه شده است و نتایج محاسبات همخوانی قابل قبولی با داده‌های آزمایشگاهی دارند.

Closed form solutions for inelastic cyclic bending of steel tubulars using continuous stress-strain model

Mohammad Mo'tamedi[1], Mostafa Zeinoddini[1*], Javad Fakheri[2]

1- Department of Civil Engineering, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.
2- Department of Civil and Environmental Engineering, Tehran University, Tehran, Iran.
* P.O.B. 1996715433, Tehran, Iran, zeinoddini@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 16 August 2016
Accepted 23 November 2016
Available Online 04 January 2017

Keywords:
Steel circular tubular
Monotonic and cyclic inelastic pure bending
Cyclic softening/ hardening behavior

ABSTRACT

The current paper deals with the cyclic softening/hardening and strain ratcheting behavior of circular steel tubes under repeated inelastic pure bending. A relatively simple mathematical solution is proposed to tackle the problem. Key physical features involved are the elastic after-effect, accumulated cyclic (creep type) ovalisation of the cross-section, cyclic plasticity including the Bauschinger effect, cyclic softening/hardening of the material and ratcheting effect. The moment-curvature formulation of the tube is derived in an ovalised configuration. Tvergaard stress-strain relation is used to describe the elasto-plastic stress–strain relationship of the material. This continuous nonlinear constitutive model considerably abridges the solution. A combined nonlinear kinematic/nonlinear isotropic hardening rule is used to describe the cyclic uniaxial stress-strain. The analysis of the low cycle pure inelastic bending of the tube is performed under a curvature-control regime. The cycle by cycle growth (creep type) in the ovalization of the cross-section is modeled using a modified version of the Bailey–Norton creep law. The model predictions are examined against a number of available test data on the inelastic monotonic and cyclic bending of tubes and reasonable agreements are observed.

1- مقدمه

اعضای لوله‌ای فولادی کاربری‌های فراوانی در سازه‌های مهندسی دارند. در ساخت نیروگاه‌های اتمی، پالایشگاه‌ها، سکوهای دریایی، خطوط لوله خشکی و خطوط لوله دریایی همگی از اعضای لوله‌ای استفاده می‌شود. معمولاً نسبت قطر متوسط، D، به ضخامت، t، عضو لوله‌ای مورد استفاده در این سازه‌ها در محدوده $15 \le D/t \le 80$ قرار دارد [1]. در شرایط بهره‌برداری، این لوله‌ها ممکن است در معرض بارگذاری چرخه‌ای[1] خمشی، محوری یا ترکیبی از

[1] Cyclic

Please cite this article using:
برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:
M. Mo'tamedi, M. Zeinoddini, J. Fakheri, Closed form solutions for inelastic cyclic bending of steel tubulars using continuous stress-strain model, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 16, No. 12, pp. 756-766, 2016 (in Persian)

آن‌ها قرار گیرند. تحت این شرایط، تجمع تغییرشکل‌ها و کرنش‌های خمیری می‌تواند منجر به کاهش کارایی و در نهایت واماندگی[1] شود. تجمع کرنش ناشی از بارگذاری چرخه‌ای، خرابی خمیری پیش‌رونده[2] نامیده می‌شود. این پدیده می‌تواند ناشی از تکرار فرآیندهای حرارتی یا بارگذاری چرخه‌ای مکانیکی باشد. پاسخ خرابی خمیری پیش‌رونده مصالح[3] خصوصاً متأثر از تاریخچه تنش است که به بارگذاری خارجی و همچنین هندسه بستگی دارد. رفتارهایی از قبیل سخت‌شوندگی/ نرم‌شوندگی چرخه‌ای به‌طور ویژه به خرابی خمیری پیش‌رونده مرتبط است[2].

سیستم‌ها و اجزای لوله‌ای نیروگاه‌ها ممکن است به علت نیروهای ناشی از زمین‌لرزه یا سایر حوادث پیش‌بینی‌نشده تحت لنگرهای تکرارشونده، وارد محدوده خمیری شوند، طی چنین بارگذاری‌های چرخه‌ای، درصورتی‌که بارگذاری در یک جهت به صورت نیرو-کنترل باشد، آنگاه تجمع کرنش خمیری در آن جهت می‌تواند به خرابی خمیری پیش‌رونده منجر شود [3]. تداوم بارگذاری چرخه‌ای که توأم با خرابی خمیری پیش‌رونده است ممکن است به خرابی از نوع شکست خمیری یا خستگی در سازه منجر شده [4] و به علت تغییر شکل بیش‌ازحد سازه دچار واماندگی شود[5].

تحقیق حاضر با رویکرد تحلیل ریاضی به مطالعه رفتار سخت‌شوندگی/ نرم‌شوندگی چرخه‌ای و پدیده خرابی خمیری پیش‌رونده در مقاطع لوله‌ای فولادی تحت چرخه‌های خمش خالص در محدوده غیرخطی می‌پردازد. این موضوع پیش‌ازاین به‌صورت تجربی و عددی توسط دیگر محققین مورد بررسی قرار گرفته است. در مطالعه اخیر تلاش شده است یک تحلیل ریاضی برای رفتار چرخه‌ای مقاطع لوله‌ای فولادی به‌نسبت جدار ضخیم ($D/t \leq 30$) با در نظر گرفتن هر دو نوع خرابی پیش‌رونده خمیری سازه‌ای (هندسی) و مصالح ارائه گردد. راه‌حل ارائه شده با نتایج آزمایشگاهی موجود در ادبیات فنی مقایسه شده و تطابق خوبی مشاهده شده است.

2- مرور ادبیات فنی

در تحلیل خرابی خمیری پیش‌رونده می‌توان از سه رویکرد تجربی، شبیه‌سازی عددی و تحلیل ریاضی استفاده کرد. چن و همکاران [6] مرور جامعی از کارهای انجام‌شده توسط محققین با رویکرد تجربی و شبیه‌سازی عددی ارائه کرده‌اند. این مطالعه به‌خوبی نشان می‌دهد کارهای تجربی حجم عمده‌ای از پژوهش‌های قبلی را به خود تخصیص داده‌اند. مدل‌های پیشنهادشده برای رفتار مصالح و شبیه‌سازی عددی ازنظر فراوانی به ترتیب در رتبه‌های بعدی قرار می‌گیرند. بر اساس مرور ادبیات فنی که چن و همکاران [6] تا سال 2013 و زهساز و همکاران [7] تا سال 2016 نتیجه‌گیری کرده‌اند، هنوز راه‌حل بسته ریاضی دقیقی برای تحلیل رفتار خرابی خمیری پیش‌رونده لوله‌ها تحت چرخه‌های غیرارتجاعی خمش در دسترس نیست. بر اساس نظر برادفورد و تیپینگ [8] تا سال 2015 تنها چند مورد حل ریاضی روش بسته دقیق برای مسائل خرابی خمیری پیشرونده ارائه شده که عمدتاً ناظر به هندسه‌های بسیار ساده و حالات بارگذاری ایده‌آل هستند. در سال‌های اخیر حتی موضوع بسیار ساده‌تر ارائه حل بسته ریاضی برای خمش یک‌سویه غیرارتجاعی اعضای لوله‌ای از موضوعات موردتوجه محققین بوده است، به‌عنوان نمونه می‌توان به کار پونایا و همکاران [9] در سال 2009 اشاره کرد. آن‌ها تلاش نموده‌اند یک رابطه حل بسته برای پیش‌بینی پاسخ لنگر-انحنای لوله‌های فلزی تحت خمش خالص یک‌سویه ارائه دهند. شاهین و الچالاکانی [10] در سال 2014 ضمن تأکید بر پیچیده و شدیداً غیرخطی بودن رفتار خمش خالص لوله‌های فولادی عنوان می‌دارند تعدادی رابطه ریاضی برای تحلیل رفتار یک‌سویه در ادبیات فنی وجود دارد اما اغلب این روابط فاقد کاربرد طراحی هستند زیرا از نوع حل بسته نمی‌باشند. آن‌ها تلاش نموده‌اند تا یک رابطه ساده حل بسته با کاربرد آسان برای پیش‌بینی لنگر نقطه حدی لوله‌های فولادی تحت خمش خالص ارائه دهند. دآنیلو و همکاران [11] در 2015 یک رابطه صریح ریاضی برای پیش‌بینی ضریب اضافه ظرفیت تیرهای لوله‌ای فولادی تحت خمش خالص ارائه کردند. در سال 2016 چِن و همکاران [12] بر پایه نظریه خمیری کرنش کل هِنکی[4] روشی تحلیلی برای تعیین ظرفیت خمش نهایی لوله‌های فولادی ارائه دادند که در آن سخت‌شوندگی کرنشی مصالح[5] به‌صورت خطی- ارتجاعی فرض شده است. بر اساس مطالعات پارامتری انجام‌شده در این تحقیق، سخت‌شوندگی کرنشی تأثیر عمده‌ای در ظرفیت خمشی نهایی لوله‌های فولادی دارد.

ازجمله محققین قبلی که در راستای ارائه حل بسته ریاضی برای رفتار غیرارتجاعی اعضای لوله‌ای تحت خمش خالص چرخه‌ای تلاش کرده‌اند می‌توان از الچالاکانی [13] نام برد که نتایج مطالعات تحلیلی و آزمایشگاهی خود را در سال 2007 ارائه دادند. در این تحقیق رفتار مصالح به‌صورت دوخطی فرض شده و برای پاسخ غیرارتجاعی اعضای لوله‌ای در یک چرخه کامل بارگذاری خمشی خالص یک حل بسته ریاضی ارائه شده است. همچنین بیضی‌شدگی سطح مقطع لوله با استفاده از یک رابطه تجربی در راه‌حل تحلیلی لحاظ شده است. در سال 2008 چانگ و همکاران [14] تأثیر لنگر متوسط[6] را بر پاسخ و شکل خرابی لوله‌های جدار نازک تحت لنگر خمشی چرخه‌ای مورد بررسی قرار دادند. طی این مطالعه تحلیلی و آزمایشگاهی با استفاده از ترکیب نظریه اندوکرونیک[7] و اصل کار مجازی روابطی بین لنگر، انحنا و بیضی‌شدگی مقطع برای لوله‌های جدار نازک تحت بارگذاری خمشی چرخه‌ای ارائه شده است.

ازنظر محققین قبلی رفتار لوله‌های فولادی تحت لنگر خمشی خالص موضوعی پیچیده و شدیداً غیرخطی است [10]. به این دلیل تحلیل‌های اجزاء محدود پیشرفته، علیرغم به‌کارگیری مدل‌های رفتاری جدید و پیچیده، هنوز در شبیه‌سازی توأمان خرابی خمیری پیش‌رونده در هر دو بعد سازه‌ای (شبیه‌سازی بیضی‌شدگی مقطع یا وقوع چین خوردگی) و مصالح (تجمع کرنش‌های خمیری) ناکارآمد هستند. به‌عنوان نمونه رحمان و همکاران [15] کارایی تعدادی از مدل‌های خمیری چرخه‌ای را برای شبیه‌سازی پاسخ خرابی خمیری پیش‌رونده لوله‌های فولادی تحت خمش تکرارشونده مورد ارزیابی قرار دادند. آن‌ها گزارش کردند که هیچ‌کدام از مدل‌ها نتوانسته‌اند در حد قابل قبولی تغییرات هم‌زمان لنگر-چرخش، بیضی‌شدگی مقطع و کرنش خمیری پیش‌رونده محیطی را شبیه‌سازی نمایند. آن‌ها نتیجه‌گیری کردند که علی‌رغم پیشرفت‌های قابل‌توجه در مدل‌سازی خمیری چرخه‌ای، روش‌های اجزای محدود هنوز توانایی لازم برای شبیه‌سازی پاسخ‌های چرخه‌ای سازه‌ای را ندارند. این به آن دلیل است که پارامترهای این مدل‌ها فقط بر اساس پاسخ‌های مصالح تعیین می‌شوند. زکوی و همکاران [16] و زهساز و همکاران [7] از روش اجزای محدود بر مبنای یک مدل سخت‌شوندگی ترکیبی ایزوتروپیک/کینماتیک برای شبیه‌سازی خرابی خمیری پیش‌رونده لوله‌های فولادی تحت لنگر خمشی خالص استفاده نمودند. نتایج کار آن‌ها نشان

[1] Failure
[2] Ratcheting
[3] Material ratcheting
[4] Hencky's total strain theory
[5] Strain hardening material
[6] Mean moment
[7] Endochronic

می‌دهد که مدل اجزای محدود مقادیر دست بالایی را برای نرخ رشد کرنش خمیری پیش‌رونده در مقایسه با داده‌های آزمایشگاهی ارائه می‌دهد.

تعدادی از محققین نیز مقالاتی در خصوص خرابی خمیری پیش‌رونده در مراجع داخل کشور منتشر نموده‌اند. ازجمله در سال 2014 پیکانو و همکاران [17] در یک مطالعه آزمایشگاهی موضوع کمانش موضعی خطوط لوله‌ی دریایی دارای خوردگی تحت بارگذاری محوری متناوب را مورد بررسی قرار دادند. در سال 2016 شریعتی و همکاران [18] در مطالعه‌ای آزمایشگاهی رفتار پدیده خرابی خمیری پیش‌رونده و نرم‌شوندگی پوسته‌های جدار نازک فولادی زنگ‌نزن SS304L را تحت بارگذاری خمش خالص تناوبی موردمطالعه قراردادند.

مرور ادبیات فنی ارائه‌شده در بالا به‌خوبی بیانگر آن است که در مقایسه با گزینه‌های پرهزینه آزمایشگاهی و هنوز کم‌دقت عددی در شبیه‌سازی توأمان رفتار لوله‌های فولادی تحت چرخه‌های غیرارتجاعی خمش در هر دو بعد سازه‌ای و مصالح، تحلیل ریاضی یک رویکرد مطرح در مواجهه با مسئله است. عمده کارهای تحلیل‌های ریاضی انجام‌شده در گذشته تحت رژیم بارگذاری یک‌سویه بوده است. راه‌حل‌های ریاضی برای تحلیل رفتار خرابی خمیری پیشرونده بسیار نادر می‌باشند. در اکثر مدل‌های ریاضی پیشین رابطه تنش-کرنش به‌صورت دوخطی بوده و این مدل‌ها قابلیت شبیه‌سازی رفتارهای سخت‌شوندگی/ نرم‌شوندگی چرخه‌ای و پدیده خرابی خمیری پیش‌رونده را به‌صورت جامع نداشته‌اند. لذا توسعه راه‌حل‌های ریاضی - برای موضوع خرابی خمیری پیش‌رونده در مقاطع لوله‌ای فولادی در معرض خمش خالص غیرارتجاعی چرخه‌ای دارای اهمیت است.

3- تحلیل ریاضی رفتار غیرخطی مقطع لوله‌ای تحت خمش خالص یکسویه

در این بخش رفتار یک عضو لوله‌ای فولادی نسبتاً جدار ضخیم ($D/t \leq$ 30) تحت بارگذاری خمش خالص یکسویه در حالت ارتجاعی- خمیری به صورت تحلیلی بررسی می‌گردد. از نتایج تحلیل یکسویه در بخش بعدی برای تحلیل رفتار ارتجاعی- خمیری[1] لوله تحت خمش خالص چرخه‌ای استفاده خواهد شد. فرضیه‌های به‌کار رفته در این تحلیل به شرح زیر است:

- این تحلیل برای حالت قبل از وقوع هر نوع ناپایداری جزئی یا کلی[2] معتبر است.
- تحلیل انجام شده بر مبنای تنش‌های تک محوره در راستای محور لوله بوده و از تأثیر دیگر تنش‌ها صرف‌نظر شده است.
- مقطع لوله تحت کرنش‌های ایجاد شده (کرنش‌های فراتر حد تناسب) مسطح باقی می‌ماند.
- رفتار مصالح فراتر حد تناسب[3] از یک منحنی پیوسته بر اساس رابطه تورگاد[4] تبعیت می‌کند.
- ضریب ارتجاعی مصالح و منحنی تنش-کرنش تحت فشار و کشش یکسان است.
- تحت خمش مقطع لوله از حالت مدور خارج می‌شود مقطع لوله پس از خمش به صورت یک بیضی در نظر گرفته شده است.
- بیضی‌شدگی مقطع در حالت بارگذاری یکسویه بر اساس رابطه مرجع [19] و حالت بارگذاری تکرارشونده بر اساس رابطه پیشنهادی نگارندگان مقاله حاضر در نظر گرفته شده است.

[1] Elastoplastic
[2] Local or global instability
[3] Proportional limit
[4] Tvergaard

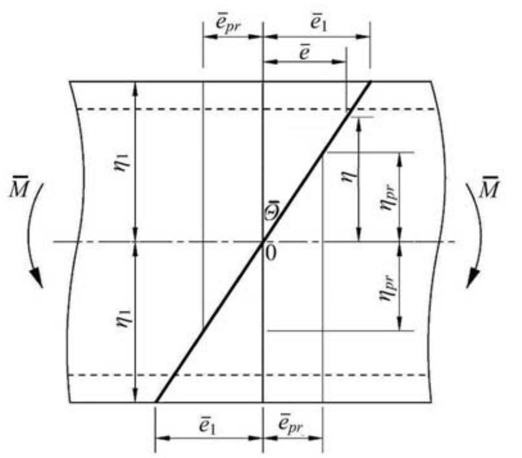

Fig. 1 Schematic strain profiles in a tubular section subject to inelastic monotonic pure bending

شکل 1 طرح‌واره توزیع کرنش در یک عضو با سطح مقطع لوله‌ی تحت خمش خالص ارتجاعی- خمیری

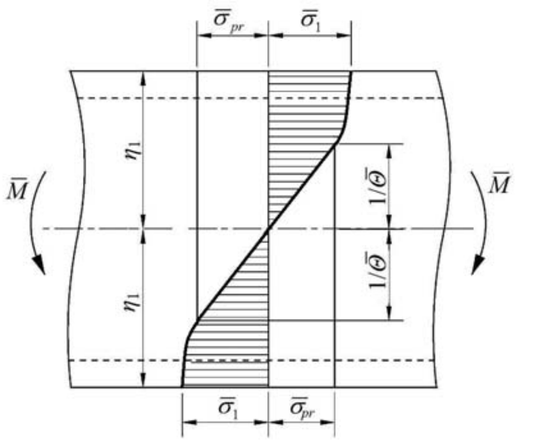

Fig. 2 Schematic stress profiles in a tubular section subject to inelastic monotonic pure bending

شکل 2 طرح‌واره توزیع تنش در یک عضو با سطح مقطع لوله‌ی تحت خمش خالص ارتجاعی- خمیری

بر پایه فرضیه‌های درنظرگرفته‌شده، تحت خمش خالص، طرح‌واره[5] توزیع کرنش در مقطع عضو مطابق شکل 1 و طرح‌واره توزیع تنش در مقطع عضو مطابق شکل 2 خواهد بود.

در شکل‌های 1 و 2، پارامترهای $\bar{\sigma}$ و $\bar{e}$ به ترتیب تنش و کرنش کششی یا فشاری در تارهای طولی تیر تحت خمش است که با استفاده از پارامترهای σ_{pr} و e_{pr} به عنوان تنش حد تناسب و کرنش حد تناسب به‌صورت رابطه (1) بی‌بعد شده‌اند:

$$\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_{pr} \qquad \text{و} \qquad \bar{e} = e/e_{pr} \tag{1}$$

همچنین پارامترهای $\bar{\sigma}_1$ و $\bar{e}_1$ به ترتیب معرف تنش و کرنش بی‌بعد در دورترین تار از تار خنثی است و $\bar{\Theta}$، زاویه نسبی چرخش سطح مقطع است. در شکل‌های فوق، η، فاصله بی‌بعد هر تار از تار خنثی است که در رابطه (7) تعریف شده است. $\eta_1 = 0.5$، فاصله بی‌بعد دورترین تار از تار خنثی و η_{pr}، فاصله بی‌بعد دورترین تار ارتجاعی از تار خنثی است.

طبق قانون تعادل در مقطع یک تیر تحت بارگذاری خمش خالص M می‌توان نوشت:

[5] Schematic

$$\int_A \sigma\, dA = 0 \tag{2}$$

$$\int_A \sigma y\, dA = M \tag{3}$$

که در آن dA جزء سطح (یک نوار باریک از مقطع موازی محور x) در فاصله y از محور تقارن و σ تنش در این جزء سطح است (شکل 3)، با جایگذاری رابطه (1) در معادلات (2) و (3) خواهیم داشت:

$$\int_A \sigma_{pr}\cdot\bar{\sigma}\, dA = 0 \tag{4}$$

$$\int_A \sigma_{pr}\cdot\bar{\sigma} y\, dA = M \tag{5}$$

در حالت ارتجاعی، محور تقارن بر محور تار خنثی مقطع منطبق است. خمش خالص در اعضای با مقطع لوله‌ای منجر به بیضی‌شدگی مقطع می‌شود لذا معادلات رفتاری لوله برای حالت مقطع بیضی‌شده نوشته می‌شود که بدیهی است مقطع دایره (بدون بیضی‌شدگی) حالت خاصی از حل مسئله محسوب می‌شود.

در شکل 3، $2a$ قطر بزرگتر، $2b$ قطر کوچکتر از بیضی بیرونی است همچنین $2a'$ قطر بزرگتر، $2b'$ قطر کوچکتر از بیضی داخلی است. با در نظر گرفتن m به عنوان نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک بیضی، p به عنوان نسبت قطر کوچک داخلی به قطر کوچک خارجی مقطع بیضی شده لوله و q به عنوان نسبت قطر بزرگ داخلی به قطر بزرگ خارجی مقطع بیضی‌شده لوله مطابق شکل 3 خواهیم داشت:

$$a = m\cdot b \;،\; b' = p\cdot b \;،\; a' = q\cdot a \tag{6}$$

مطابق شکل 3 فاصله هر تار از تار خنثی، y، است که این پارامتر در محاسبات به صورت بی‌بعدشده مطابق رابطه (7) در نظر گرفته می‌شود:

$$\eta = y/2b \tag{7}$$

برای عضو لوله‌ای در حالت بیضی‌شده، المان سطح، dA، را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$dA = 2m\sqrt{b^2-y^2}\,dy \qquad b' \le |y| \le b$$
$$dA = 2m\left(\sqrt{b^2-y^2} - q\sqrt{b^2-\frac{1}{p^2}y^2}\right)dy \quad |y| \le b' \tag{8}$$

با جایگذاری رابطه (7) در رابطه (8) خواهیم داشت:

$$dA = 4mb^2\sqrt{1-4\eta^2}\,d\eta \qquad 0.5p \le |\eta| \le p$$
$$dA = 4mb^2\left(\sqrt{1-4\eta^2} - q\sqrt{1-\frac{4}{p^2}\eta^2}\right)d\eta \qquad |\eta| \le 0.5p \tag{9}$$

در اینجا، رابطه تنش و کرنشِ فراتر از حد تناسب به صورت منحنی

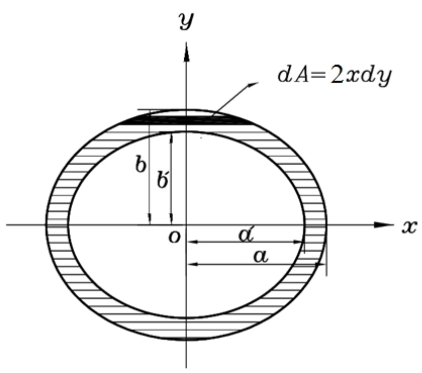

Fig. 3 The ovalised cross section of the tube.

شکل 3 سطح مقطع بیضی شده لوله

پیوسته بر اساس رابطه تورگارد (رابطه (10)) تعریف می‌شود:

$$\sigma = \sigma_{pr}\left(\frac{nEe}{\sigma_{pr}} + 1 - n\right)^{1/n} \tag{10}$$

که در آن، E، ضریب ارتجاعی مصالح است و n پارامتر سخت‌شوندگی است. با استفاده از رابطه (1)، رابطه (10) در حالت بی‌بعد به‌صورت رابطه (11) قابل بازنویسی است:

$$\bar{\sigma} = (n\bar{e} + 1 - n)^{1/n} \tag{11}$$

پارامتر E_T به عنوان شیب خط مماس بر منحنی تنش-کرنش در محدوده سخت‌شوندگی تعریف می‌شود که در حالت بی‌بعد به صورت $G_T = E_T/E$ نوشته می‌شود و مقدار عددی G_T بر اساس داده‌های آزمایش کشش یکسویه بر روی نمونه استاندارد بدست می‌آید. بنابراین با حل معادله (12) پارامتر n قابل تعیین خواهد بود:

$$G_T = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{e}} = (n\bar{e}_1 + 1 - n)^{\frac{1}{n}-1} \tag{12}$$

فراتر از حد تناسب، برای تارهای واقع در ناحیه کششی و فشاری ناشی از خمش، مشابه حالت کشش ساده، از منحنی تنش-کرنش تورگاد مطابق رابطه (11) استفاده می‌شود که در ناحیه فشاری مقادیر تنش و کرنش منفی در نظر گرفته شده است:

$$\bar{\sigma}_1 = (n\bar{e} + 1 - n)^{1/n} \tag{13}$$
$$\bar{\sigma}_2 = -(-n\bar{e} + 1 - n)^{1/n} \tag{14}$$

بدیهی است با فرض اینکه حد تناسب، e_{pr}، در کشش و فشار یکسان باشد و رفتار مصالح فراتر از حد تناسب در فشار و کشش به طور کامل مشابه باشد، محور تار خنثی منطبق بر محور تقارن مقطع خواهد بود. بدون در نظر گرفتن این فرض، موقعیت تار خنثی از محور تقارن عضو منحرف می‌شود. بر اساس شکل 1 رابطه بین زاویه نسبی چرخش سطح مقطع، $\bar{\Theta}$، وکرنش بی‌بعد شده، $\bar{e}$، به‌صورت رابطه (15) است:

$$\bar{e} = \bar{\Theta}\cdot\eta \tag{15}$$

با جایگذاری رابطه (15) در رابطه‌های (13) و (14) خواهیم داشت:

$$\bar{\sigma}_1 = (n\bar{\Theta}\cdot\eta + 1 - n)^{1/n} \tag{16}$$
$$\bar{\sigma}_2 = -(-n\bar{\Theta}\cdot\eta + 1 - n)^{1/n} \tag{17}$$

قسمت میانی مقطع تیر حالت ارتجاعی دارد. در تارهای واقع در این محدوده، خواهیم داشت:

$$\bar{\sigma} = \bar{\Theta}\cdot\eta \tag{18}$$

با جایگذاری روابط (9) و (15) تا (18) در معادله (5) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\bar{M} = {} & \frac{256m}{\pi(m+1)^3(1-n^4)}\cdot \\ & \Big\{\int_{-0.5}^{-0.5p}\left[-(-n\bar{\Theta}\cdot\eta + 1 - n)^{\frac{1}{n}}\right]\eta\sqrt{1-4\eta^2}\,d\eta + \\ & \int_{-0.5p}^{-1/\bar{\Theta}}\left[-(-n\bar{\Theta}\cdot\eta + 1 - n)^{\frac{1}{n}}\right]\cdot \\ & \eta\left(\sqrt{1-4\eta^2} - q\sqrt{1-\frac{4}{p^2}\eta^2}\right)d\eta + \\ & \int_{-1/\bar{\Theta}}^{1/\bar{\Theta}}[\bar{\Theta}\cdot\eta]\cdot\eta\left(\sqrt{1-4\eta^2} - q\sqrt{1-\frac{4}{p^2}\eta^2}\right)d\eta + \\ & \int_{1/\bar{\Theta}}^{0.5p}\left[(n\bar{\Theta}\cdot\eta + 1 - n)^{\frac{1}{n}}\right]\cdot \\ & \eta\left(\sqrt{1-4\eta^2} - q\sqrt{1-\frac{4}{p^2}\eta^2}\right)d\eta + \\ & \int_{0.5p}^{0.5}\left[(n\bar{\Theta}\cdot\eta + 1 - n)^{\frac{1}{n}}\right]\eta\sqrt{1-4\eta^2}\,d\eta\Big\}\end{aligned} \tag{19}$$

که در آن:

$$M = M_{pr}\cdot\bar{M} \quad , \quad n_t = \frac{R'}{R}$$
$$R = \frac{a+b}{2} \quad , \quad R' = \frac{a' + b'}{2} \tag{20}$$

و لنگر خمشی خالص متناظر با تنش حد تناسب برابر است با:

$$M_{pr} = \frac{\sigma_{pr}}{32}\pi b^3(m+1)^3(1-n_t{}^4) \quad (21)$$

رابطه تنش-کرنش مورد استفاده در انتگرال‌های بدست‌آمده در معادله خمش، قابل جایگذاری با معادله‌های تنش- کرنش به‌صورت دوخطی یا روابط تجربی تنش-کرنش از قبیل لودویک[1]، ووس[2]، تورگارد، رمبرگ- اسگود[3] و ... یا تعریف رابطه تنش و کرنش به‌صورت نقطه – نقطه است که بر اساس شکل تابع زیر انتگرال می‌توان از حل بسته ریاضی یا روش‌های عددی برای حصول جواب بهره برد، از آنجا که انتگرال‌های بدست آمده در معادله خمش به ازای هر رابطه تنش- کرنش به شکل توابع چندجمله‌ای دارای حل بسته است در تحلیل جاری انتگرال مربوط به ناحیه ارتجاعی دارای حل بسته می‌باشد ولی انتگرال‌های مربوط به ناحیه خمیری به‌صورت نامعین قابل‌حل نیست لذا به‌منظور حصول حل بسته ریاضی ابتدا رابطه تنش- کرنش تورگارد به کمک بسط تیلور بسط داده شده و سپس بسط حاصل از آن با جایگذاری در معادله انتگرالی "لنگر- انحنا" تحلیل شده است که با توجه به طولانی بودن پاسخ‌ها فقط نتایج به‌دست‌آمده ارائه شده است.

معادله (19) به‌صورت $\bar{M} = f(\bar{e})$ است که رابطه بین کرنش بی‌بعد شده، با لنگر خمشی بی‌بعد را بیان می‌کند، با در نظر گرفتن رابطه بین کرنش و انحنا[4] به‌صورت رابطه (22) معادله (19) قابل بازنویسی برحسب پارامتر انحنا، κ، خواهد بود.

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{\bar{e}_1 \cdot e_{pr}}{R} \quad (22)$$

ملاحظه اثرات بیضی‌شدگی مقطع در تخمین پاسخ لنگر-انحنا از نکات برجسته این کار بوده که در آن از یک رابطه نیمه‌تجربی برای لحاظ کردن اثر بیضی‌شدگی مقطع استفاده شده است. با فرض رفتار کاملاً ارتجاعی لوله و تغییرشکل مقطع به‌صورت بیضی کامل، بر پایه مطالعات کالادینه [20] و نستر و همکاران [21]، رابطه ساده‌شده بین بیضی‌شدگی مقطع و انحنای لوله به‌صورت رابطه (23) تعیین می‌شود:

$$\frac{\Delta D_o}{D_o} = \frac{(1-\upsilon^2)^2}{16}\left(\frac{\kappa}{\kappa_o}\right)^2 \quad (23)$$

که در آن D_o قطر خارجی لوله بدون درنظرگرفتن بیضی‌شدگی مقطع است، ΔD_o اختلاف قطر کاهش یافته به علت وقوع بیضی‌شدگی نسبت به D_o است و انحنا با جمله $\kappa_0 = t/D_0{}^2$ بی‌بعد شده است که در آن t ضخامت اولیه لوله است. قابل‌توجه است که در معادله (23) بیضی‌شدگی مقطع متناسب با مجذور انحنا بوده و وابسته به ضریب ارتجاعی مصالح نیست. بر اساس داده‌های آزمایشگاهی بر روی لوله‌های فلزی تحت بارگذاری یک‌سویه غیرارتجاعی، کایریاکیدس و همکاران [22] گزارش کردند که رابطه بین بیضی‌شدگی مقطع با انحنا روندی درجه دو دارد. یوادا [19] رابطه نیمه‌تحلیلی بیضی‌شدگی مقطع- انحنا برای لوله‌ها تحت خمش خالص غیرارتجاعی را به‌صورت رابطه (24) ارائه کرد:

$$\frac{\Delta D_o}{D_o} = Ce_1{}^2 \quad (24)$$

با در نظر گرفتن رابطه e_1 و انحنا به‌صورت رابطه (22)، رابطه "بیضی‌شدگی- انحنای بی‌بعد" لوله به‌صورت رابطه (25) قابل بازنویسی است.

$$\frac{\Delta D_o}{D_o} = C_1\left(\frac{\kappa}{\kappa_o}\right)^2 \quad (25)$$

که در آن C_1، بر اساس تعریف یوادا [19]، پارامتری است که مرتبط با خصوصیات مصالح و نسبت لاغری (D/t) است و بر اساس داده‌های آزمایشگاهی تعیین می‌شود، توجه شود که رابطه (25) تحت بارگذاری خمش غیرارتجاعی، روندی توان دو برای "بیضی‌شدگی - انحنا" ارائه می‌دهد.

3-1- صحت‌سنجی مدل یک‌سویه

به‌منظور صحت‌سنجی رابطه (19)، از یکسری داده‌های آزمایشگاهی استفاده شده که این آزمایش‌ها توسط دیگر محققین بر روی لوله‌های فولادی انجام شده است. هندسه و خصوصیات مصالح بکار رفته در این آزمایش‌ها در جدول 1 آورده شده است. در این جدول، پارامترهای σ_y و n به ترتیب تنش حد تناسب و پارامتر سخت‌شوندگی مربوط به رابطه تورگارد است. قابل ذکر است که نتایج مورد استفاده از مرجع [23] بر اساس حل اجزاء محدود است.

شکل 4 مقایسه بین داده‌های تجربی مرجع [22] و نتایج به‌دست‌آمده از رابطه (25) به ازای $C_1 = 0.032$ را به صورت بیضی‌شدگی مقطع – انحنا ارائه می‌دهد. شکل 5 مقایسه بین داده‌های تجربی مرجع [22] و نتایج حاصل از تحلیل ریاضی بر اساس معادله (19) بر روی لوله‌های فولادی تحت بارگذاری یکسویه را نمایش می‌دهد، محورهای قائم و افقی این نمودار به ترتیب با عبارات $M_0 = \sigma_{pr}D_o{}^2t$ و $\kappa_0 = t/D_o{}^2$ بی‌بعد شده‌اند.

مطابق شکل 5 دو نمودار در قسمت اولیه، بر هم منطبق هستند و از یک نقطه به بعد با افزایش تأثیر بیضی‌شدگی مقطع، دو منحنی از هم جدا می‌شوند.

جدول 1 پارامترهای هندسی و خواص مصالح ارائه شده توسط محققین پیشین و مورد استفاده در صحت‌سنجی مدل ریاضی تحت بارگذاری یکسویه

Table 1 Geometric and material parameters in the previous experiments used for validation of the current monotonic analytical solution.

نوع مصالح	D_o (mm)	t (mm)	D_o/t	E (GPa)	σ_y (MPa)	n	منابع
فولاد زنگ‌نزن 304	31.69	1.232	25.7	201	280	12.9	[22]
فولاد X52	26.42	1.016	26	205	246	9.05	[23]
فولاد کربنی 1018	31.78	0.889	35.7	207	512	21	[24]
فولاد کربنی 1020	31.84	1.293	24.6	205	277.2	∞	[25]

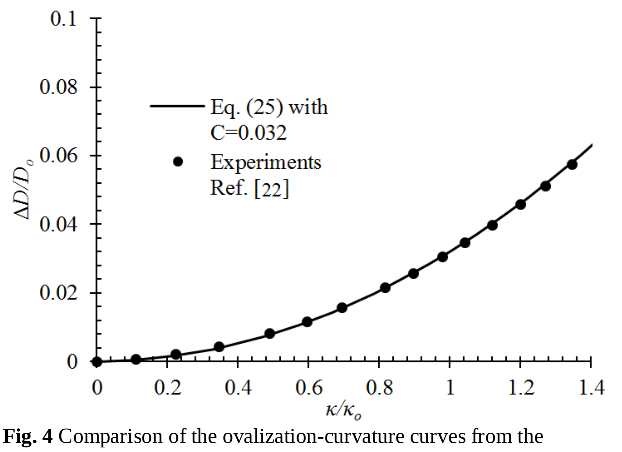

Fig. 4 Comparison of the ovalization-curvature curves from the experiments conducted by [22] with Eq. (25)

شکل 4 نمودار مقایسه منحنی بیضی شدگی- انحنا بر اساس داده‌های آزمایشگاهی مرجع [22] و نتایج به‌دست‌آمده از رابطه (25)

[1] Ludwik
[2] Voce
[3] Ramberg-Osgood
[4] Curvature

شکل‌های 6 تا 11 مقایسه منحنی‌های لنگر-انحنا و بیضی‌شدگی- انحنا، مراجع [23]، [24] و [25] را با نتایج تحلیل ریاضی حاضر نشان می‌دهد.

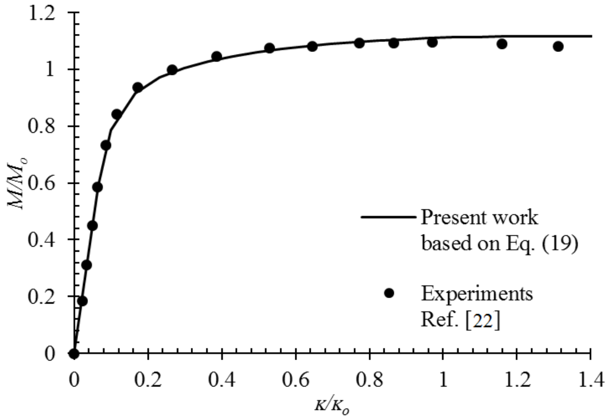

Fig. 5 Comparisons between the moment-curvature responses in experiments conducted by [22] and the analytical solution in the current study.

شکل 5 مقایسه پاسخ لنگر- انحنا بر اساس داده‌های آزمایشگاهی مرجع [22] و حل ریاضی ارائه شده

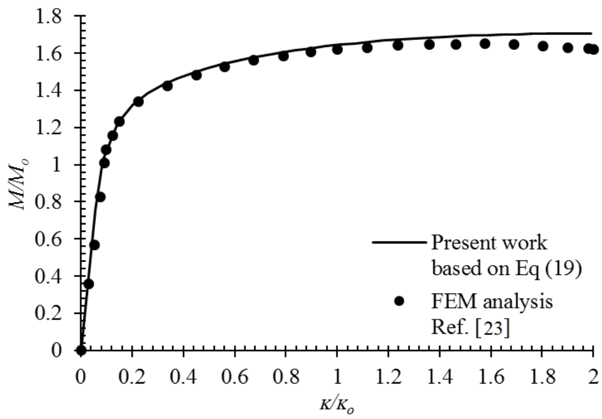

Fig. 6 Comparisons between the moment-curvature responses in experiments conducted by [23] and the analytical solution in the current study.

شکل 6 مقایسه پاسخ لنگر- انحنا بر اساس داده‌های آزمایشگاهی مرجع [23] و حل ریاضی ارائه شده

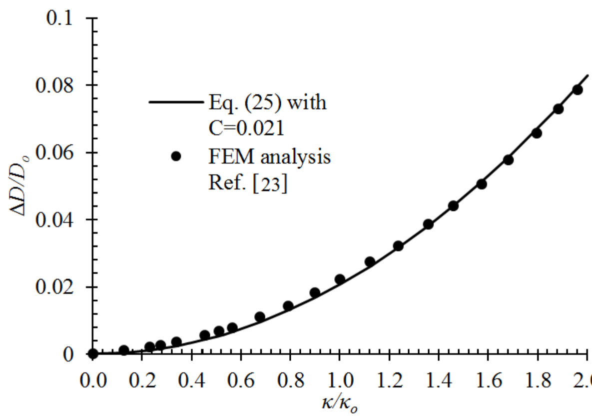

Fig. 7 Comparison of the ovalization-curvature curves from the experiments conducted by [23] with Eq. (25)

شکل 7 نمودار مقایسه منحنی بیضی شدگی- انحنا بر اساس داده‌های آزمایشگاهی مرجع [23] و نتایج به‌دست‌آمده از رابطه (25)

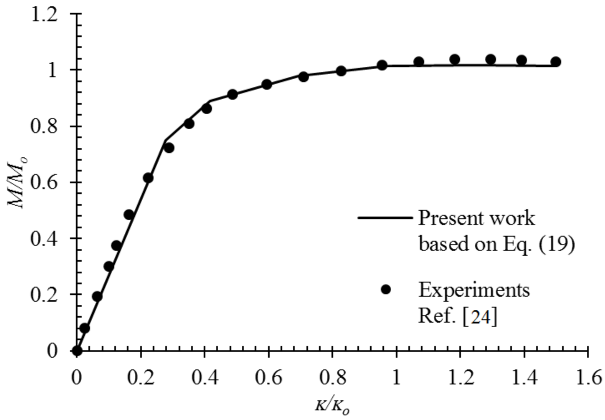

Fig. 8 Comparisons between the moment-curvature responses in experiments conducted by [24] and the analytical solution in the current study.

شکل 8 مقایسه پاسخ لنگر- انحنا بر اساس داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24] و حل ریاضی ارائه شده

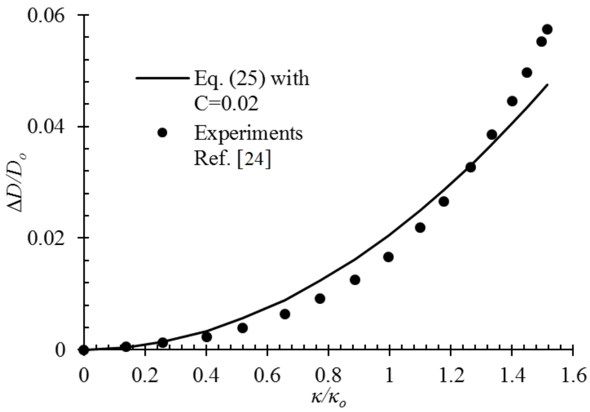

Fig. 9 Comparison of the ovalization-curvature curves from the experiments conducted by [24] with Eq. (25)

شکل 9 نمودار مقایسه منحنی بیضی شدگی- انحنا بر اساس داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24] و نتایج به‌دست‌آمده از رابطه (25)

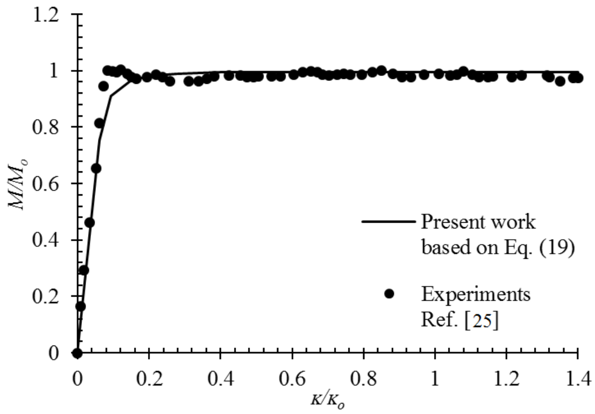

Fig. 10 Comparisons between the moment-curvature responses in experiments conducted by [25] and the analytical solution in the current study.

شکل 10 مقایسه پاسخ لنگر- انحنا بر اساس داده‌های آزمایشگاهی مرجع [25] و حل ریاضی ارائه شده

مشاهده می‌شود سازگاری مناسبی بین حل ریاضی ارائه شده و داده‌های آزمایشگاهی بر روی لوله‌های فولادی تحت بارگذاری خمش خالص یکسویه غیر ارتجاعی وجود دارد.

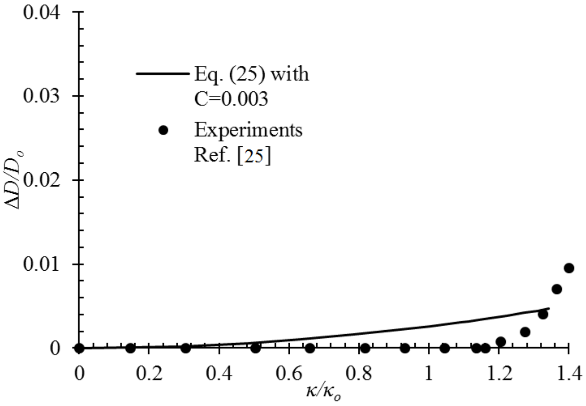

Fig. 11 Comparison of the ovalization-curvature curves from the experiments conducted by [25] with Eq. (25)

شکل 11 نمودار مقایسه منحنی بیضی شدگی- انحنا بر اساس داده‌های آزمایشگاهی مرجع [25] و نتایج به‌دست‌آمده از رابطه (25)

4- بررسی تحلیلی مقطع لوله‌ای تحت خمش تکرارشونده

در این بخش رفتار ارتجاعی- خمیری عضو لوله‌ای فولادی تحت بارگذاری خمش خالص تکرارشونده به صورت تحلیلی بررسی می‌گردد، به این منظور معادلات به‌دست آمده در بخش 3 در خصوص رفتار لوله تحت خمش خالص یکسویه، برای تحلیل رفتار لوله تحت بارگذاری خمش خالص تکرارشونده توسعه داده شده است.

تاریخچه تنش و رفتار خمیری چرخه‌ای ایجاب می‌کند که مدل رفتاری مناسبی به منظور شبیه‌سازی رفتار نرم‌شوندگی و سخت‌شوندگی، کرنش خمیری تجمعی چرخه به چرخه و تغییرات حلقه هیسترزیس[1] تنش و کرنش، در نظر گرفته شود. در این بخش به لحاظ قابل حل بودن معادلات، یک مدل ساده‌شده برای رفتار هیسترزیس مصالح انتخاب شده است که رابطه تنش-کرنش در هر نیم‌چرخه[2] بارگذاری را تعریف می‌کند. با تعریف رابطه تنش-کرنش در هر نیم‌چرخه و تعیین میزان بیضی‌شده مقطع، پاسخ غیرخطی لنگر– انحنا لوله در هر نیم‌چرخه مشابه حل ارائه شده در بخش 3 برای بارگذاری یکسویه قابل تحلیل خواهد بود و با تکرار حل در نیم‌چرخه‌های متوالی معادلات حاکم بر رفتار عضو لوله‌ای فولادی تحت بارگذاری خمش خالص تکرارشونده در محدوده غیرارتجاعی به دست می‌آید.

حل ارائه شده حالت غیرخطی مصالح، اثرات هیسترزیس و غیرخطی بودن هندسی به علت بیضی‌شدگی مقطع را در نظر می‌گیرد. به‌منظور صحت‌سنجی مدل ریاضی ارائه شده از یکسری داده‌های آزمایشگاهی استفاده شده که همخوانی قابل قبول بین داده‌های آزمایش و نتایج مدل حاضر مشاهده شده است.

4-1- روابط تنش - کرنش تکرارشونده محوری مصالح

در هر نیم‌چرخه، رابطه تنش - کرنش در ناحیه ارتجاعی به‌صورت خطی و فراتر از ناحیه ارتجاعی با استفاده از رابطه تورگاد تعریف شده است. شکل 12 طرح‌واره نمودار تنش– کرنش تکرارشونده را برای مصالح لوله نشان می‌دهد. رابطه تنش - کرنش در نیم‌چرخه ابتدایی (مسیر OAB که در حقیقت فاز بارگذاری یکسویه است) به کمک سیستم مختصات $\sigma - e$ تعریف می‌شود (k=0، که پارامتر k شماره نیم‌چرخه بارگذاری است.) مسیر OAB بارگذاری ارتجاعی- خمیری یکسویه (کشش) را نشان می‌دهد. نقطه B نشان‌دهنده

[1] Hysteresis
[2] Semi-cycle

نقطه پایانی مرحله بارگذاری است که در آن کرنش به مقدار از پیش تعریف شده e_0 می‌رسد، تنش در نقطه B، σ_0 است که بر اساس میزان سخت‌شوندگی و تنش حد تناسب از رابطه تورگاد تعیین می‌شود.

در شکل 12، در نیم‌چرخه اول (مسیر BDE) نقطه B به‌عنوان مرکز سیستم مختصات جدید $S - \varepsilon$ در نظر گرفته می‌شود که برای تعریف رابطه تنش - کرنش در نیم‌چرخه اول (k=1) از این سیستم مختصات استفاده می‌شود، در اینجا پارامتر ε معرف کرنش تکرارشونده و پارامتر S معرف تنش تکرارشونده است. مسیر تنش – کرنش نیم‌چرخه اول از نقطه B شروع می‌شود که در آن خط BD موازی خط OA ناحیه ارتجاعی در بارگذاری یکسویه است. نقطه D بر اساس رفتار نرم‌شوندگی یا سخت‌شوندگی تکرارشونده مصالح تعریف می‌شود.

تغییرات چرخه‌ای اندازه سطح تسلیم در هر نیم‌چرخه، با پارامتر ایزوتوپیک R_k تعریف می‌شود که این پارامتر وابسته به کرنش خمیری تجمعی در هر نیم‌چرخه k است (p_k) و با استفاده از قانون سخت‌شوندگی ایزوتوپیک غیرخطی به‌صورت معادله (26) تعریف می‌شود:

$$R_k = Q(1 - e^{-b_p p_k}) \tag{26}$$

که پارامتر Q حداکثر تغییر در اندازه سطح تسلیم از شروع بارگذاری تا رسیدن به چرخه پایدار و پارامتر b_p نرخ پایدار شدن چرخه‌ها است، Q و b_p پارامترهای سخت‌شوندگی مصالح است که بر اساس داده‌های به‌دست‌آمده از آزمایش محوری تکرارشونده بر روی نمونه‌های استاندارد تعیین می‌شود، در معادله (26) پارامتر p_k به‌صورت تقریبی با استفاده از رابطه (27) تعیین می‌شود که توسط مرجع [26] ارائه شده است:

$$p_k = \frac{kp_0}{2} \tag{27}$$

در رابطه (27) p_0 عرض اولین حلقه تنش و کرنش است (فاصله O_1 تا O_2 در شکل 12)، با ترکیب قانون سخت‌شوندگی ایزوتروپیک غیرخطی (معادله (26)) و قانون سخت‌شوندگی کینماتیک، خواهیم داشت:

$$\bar{S}_{\mathrm{pr,k}} = 2 + \frac{Q(1 - e^{-b_p p_k})}{\sigma_{pr}} \tag{28}$$

$$\bar{S}_{\mathrm{pr,k}} = \frac{S_{pr,k}}{\sigma_{pr}} \tag{29}$$

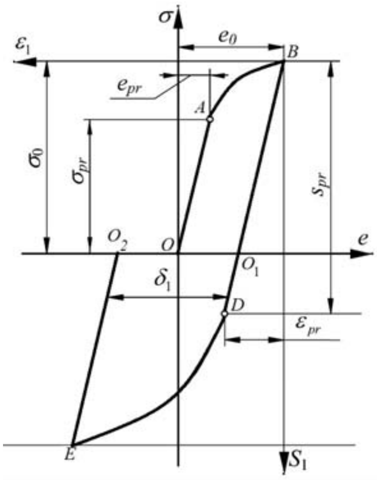

Fig. 12 Definition for the stress and strain path in the first and zeroth half-cycle

شکل 12 نمودار طرحواره منحنی تنش - کرنش در نیم چرخه‌های صفر و یک

که σ_{pr} تنش حد تناسب در نیم‌چرخه صفرم بارگذاری (بارگذاری یکسویه) است و $S_{pr,k}$ تنش حد تناسب در نیم‌چرخه kام است. با استفاده از رابطه (30) مسیر غیرخطی رابطه تنش و کرنش، فراتر از تنش حد تناسب تعریف می‌شود.

$$\overline{\sigma} = \overline{S}_{\mathrm{pr,k}}\left(\frac{n\bar{e}}{\overline{S}_{pr,k}} + 1 - n\right)^{\frac{1}{n}} \tag{30}$$

مشابه حالت بارگذاری یکسویه، پارامتر G_k، به عنوان شیب خط مماس بر منحنی تنش-کرنش بی‌بعدشده در محدوده سخت‌شوندگی تعریف می‌شود، می‌توان G_k را با استفاده از یک قانون توانی ساده در نیم‌چرخه‌های مختلف تعریف کرد. با اعمال اصلاحاتی از مرجع [27]، پارامتر G_k به صورت رابطه (31) تعریف می‌شود.:

$$G_k = \frac{1}{1+X_1k^{\xi}} \qquad \text{برای نیم‌چرخه‌های فرد}$$

$$G_k = \frac{1}{1+X_2(k-1)^{\xi}} \qquad \text{برای نیم‌چرخه‌های زوج} \tag{31}$$

که در آن، ζ، ثابت مصالح است که بر پایه نرخ تغییرات شیب خط مماس بر منحنی تنش-کرنش بی‌بعدشده در محدوده سخت‌شوندگی نسبت به تعداد نیم‌چرخه‌ها تعیین می‌شود، و X_1 و X_2 به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$X_1 = \frac{1}{G_1} - 1$$

$$X_2 = \frac{1}{G_2} - 1 \tag{32}$$

که در آن G_1 و G_2 شیب خط مماس بر منحنی تنش-کرنش بی‌بعدشده در محدوده سخت‌شوندگی در نیم‌چرخه اول و دوم است. ζ، G_1 و G_2 را می‌توان بر اساس آزمایش تنش- کرنش محوری تکرارشونده تعیین کرد. با معلوم بودن تنش حد تناسب در هر نیم‌چرخه مطابق رابطه (28) و شیب خط مماس بر ناحیه سخت‌شوندگی در هر نیم‌چرخه، G_k ، با استفاده از مشتق رابطه (30) مقدار پارامتر n در هر نیم‌چرخه، از حل معادله (33) قابل محاسبه خواهد بود.

$$G_k = \left(\frac{n\bar{e}_1}{\overline{S}_{\mathrm{pr,k}}} + 1 - n\right)^{\frac{1}{n}-1} \tag{33}$$

با تعیین پارامتر n و مختصات تنش حد تناسب، مطابق رابطه (30)، تنش در نقطه E (نقطه انتهایی نیم‌چرخه اول) قابل تعیین خواهد بود. قابل ذکر است که شرایط بارگذاری خمشی تکرارشونده انحنا-کنترل کرنش در نقطه E مقدار از پیش تعیین شده در نظر گرفته می‌شود.

مدل رفتاری مورد استفاده در کار حاضر، به‌صورت مدل سخت‌شوندگی پویای غیرخطی است که با سخت‌شوندگی همسانگرد غیرخطی ترکیب شده است. در مدل سخت‌شوندگی پویای غیرخطی اندازه سطح تسلیم ثابت بوده و به واسطه جابجایی سطح تسلیم تغییرات غیرخطی تنش- کرنش در ناحیه خمیری، شیب سخت‌شوندگی در هر نیم‌چرخه و همچنین نقطه شروع تسلیم در هر نیم‌چرخه تعیین می‌شود. در مدل حاضر با استفاده از رابطه تورگارد رفتار تنش- کرنش در ناحیه خمیری به صورت غیرخطی است و تغییرات شیب سخت‌شوندگی در هر نیم‌چرخه به‌واسطه تغییرات n (پارامتر سخت‌شوندگی رابطه تورگارد) ایجاد می‌شود که محاسبه n بر اساس شیب سخت‌شوندگی در هر چرخه G_k انجام می‌شود (رابطه (33)). همچنین نقطه شروع تسلیم در هر نیم‌چرخه بر اساس موقعیت و اندازه دایره تسلیم تعریف می‌شود (رابطه (28)). با ترکیب مدل سخت‌شوندگی پویای غیرخطی با سخت‌شوندگی همسانگرد غیرخطی امکان تغییرات اندازه سطح تسلیم جهت شبیه‌سازی رفتارهای سخت‌شوندگی و نرم‌شوندگی مهیا می‌شود (جمله دوم رابطه (28)). بر اساس مرجع [26] مدل ترکیبی سخت‌شوندگی پویای غیرخطی با سخت‌شوندگی همسانگرد غیرخطی برای شبیه‌سازی رفتارهای سخت‌شوندگی یک‌سویه، اثر بوشینگر، نرم‌شوندگی و سخت‌شوندگی چرخه‌ای و اثرات پدیده خرابی خمیری پیش‌رونده معتبر است هرچند میزان دقت این مدل‌ها در شبیه‌سازی هر چه دقیق‌تر پدیده‌های چرخه‌ای جای بحث و بررسی دارد.

برای فرمول‌بندی مسئله در نیم‌چرخه دوم (k =2) سیستم مختصات $S - \varepsilon$ را به اندازه 180 درجه دوران داده و به مرکز مختصات نقطه E منتقل می‌کنیم، مسیر تنش-کرنش در نیم‌چرخه‌های بعدی مشابه شرایط توصیف شده برای نیم‌چرخه اول در نظر گرفته می‌شود. نقطه شروع هر نیم‌چرخه بر اساس تحلیل نیم‌چرخه قبلی‌اش تعیین می‌شود، هر نیم‌چرخه با یک مسیر ارتجاعی شروع می‌شود که شیب آن برابر شیب ناحیه ارتجاعی نیم‌چرخه صفرم (ضریب ارتجاعی) است. ناحیه ارتجاعی هر نیم‌چرخه بر اساس رابطه (28) تعیین می‌شود. برای اکثر فولادها حد تسلیم در کشش و فشار تقریباً یکسان است، لذا می‌توان نوشت:

$$\bar{\mathrm{e}} = \frac{\bar{\theta}}{2} \quad , \quad \bar{\varepsilon}_{\mathrm{k}} = \frac{\bar{\theta}}{2} \tag{34}$$

بنابراین معادله انتگرالی (19) را برای خمش خالص تناوبی می‌توان به‌صورت معادله (35) نوشت:

$$\begin{aligned}
\bar{M} = {} & \frac{256m}{\pi(m+1)^3(1-n^4)} \cdot \\
& \left\{\int_{-0.5}^{-0.5p}\left[-\lambda_k\left(-\frac{n\bar{\Theta}\cdot\eta}{\lambda_k}+1-n\right)^{\frac{1}{n}}\right]\eta\sqrt{1-4\eta^2}\,d\eta + \right. \\
& \int_{-0.5p}^{-1/\bar{\Theta}}\left[-\lambda_k\left(-\frac{n\bar{\Theta}\cdot\eta}{\lambda_k}+1-n\right)^{\frac{1}{n}}\right] \cdot \\
& \eta\left(\sqrt{1-4\eta^2} - q\sqrt{1-\frac{4}{p^2}\eta^2}\right)d\eta + \\
& \int_{-1/\bar{\Theta}}^{1/\bar{\Theta}}[\bar{\Theta}\cdot\eta] \cdot \eta\left(\sqrt{1-4\eta^2} - q\sqrt{1-\frac{4}{p^2}\eta^2}\right)d\eta + \\
& \int_{1/\bar{\Theta}}^{0.5p}\left[\lambda_k\left(\frac{n\bar{\Theta}.\eta}{\lambda_k}+1-n\right)^{\frac{1}{n}}\right] \cdot \\
& \eta\left(\sqrt{1-4\eta^2} - q\sqrt{1-\frac{4}{p^2}\eta^2}\right)d\eta + \\
& \left.\int_{0.5p}^{0.5}\left[\lambda_k\left(\frac{n\bar{\Theta}\cdot\eta}{\lambda_k}+1-n\right)^{\frac{1}{n}}\right]\eta\sqrt{1-4\eta^2}\,d\eta\right\}
\end{aligned} \tag{35}$$

در رابطه (35) پارامتر λ_k از رابطه (36) به دست می‌آید:

$$\lambda_k = 2 + \frac{Q\left(1 - e^{-bp_k(2\eta\overline{\mathrm{e}_1}-1}\right)}{\sigma_{pr}} \tag{36}$$

به‌منظور دستیابی به پاسخ دقیق‌تر "لنگر- انحنا" در لوله‌های فولادی تحت خمش خالص غیرارتجاعی چرخه‌ای لازم است مسیر بیضی‌شدگی مقطع لوله در هر نیم‌چرخه از بارگذاری مشخص باشد. در اینجا بر اساس فیزیک مسئله و روابط پیشنهادی دیگر محققین یک فرمول برای مسیر "بیضی‌شدگی- انحنا" تحت خمش خالص غیرارتجاعی چرخه‌ای ارائه می‌شود.

یک لوله ارتجاعی تحت خمش خالص بیضی‌شدگی برگشت‌پذیر از خود نشان می‌دهد که مسیرهای بارگذاری و باربرداری بر روی هم قرار می‌گیرد و مقطع لوله پس از باربرداری حالت دایره کامل به خود می‌گیرد. تحت بارگذاری خمش خالص تکرارشونده مسیرهای "بیضی‌شدگی- انحنا" در تمام نیم‌چرخه‌ها بر روی هم قرار می‌گیرد و هیچ بیضی‌شدگی پیشرونده یا پسماند در لوله‌های ارتجاعی مشاهده نمی‌شود.

در یک لوله غیرارتجاعی، ابتدا مسیر "بیضی‌شدگی- انحنا" بارگذاری یک‌سویه منطبق بر مسیر "بیضی‌شدگی- انحنا" لوله ارتجاعی رشد می‌کند و با شروع رفتار غیرارتجاعی لوله دو منحنی از هم جدا می‌شوند و نرخ بیضی‌شدگی مقطع در مقایسه با لوله ارتجاعی کاهش می‌یابد. طی باربرداری مصالح ابتدا رفتار ارتجاعی از خود نشان می‌دهند بنابراین نرخ کاهش بیضی‌شدگی مقطع در ابتدا بالا بوده و در ادامه فرآیند باربرداری، رفتار مصالح به‌صورت غیرارتجاعی بوده و به‌تبع آن نرخ کاهش بیضی‌شدگی کاهش می‌یابد. به علت اینکه مسیرهای بارگذاری و باربرداری در لوله غیرارتجاعی بر هم منطبق نیست بیضی‌شدگی پسماند در $\kappa=0$ به وجود می‌آید. تحت چرخه‌های انحنا-کنترل بیضی‌شدگی در هر نیم‌چرخه، بالاتر از بیضی‌شدگی در نیم‌چرخه قبلی قرار می‌گیرد، بدین ترتیب بیضی‌شدگی پیش‌رونده در نیم‌چرخه‌های متوالی اتفاق می‌افتد و مقدار بیضی‌شدگی در $\kappa=0$ نیز به‌طور پیش‌رونده با تکرار هر نیم‌چرخه افزایش می‌یابد. در کل می‌توان این‌گونه جمع‌بندی کرد که مسیر بیضی‌شدگی مقطع لوله در هر نیم‌چرخه نسبت انحنا (مشابه حالت بارگذاری یک‌سویه) رفتاری درجه دو دارد و با تکرار چرخه‌ها، به علت وقوع بیضی‌شدگی پسماند در هر نیم‌چرخه، مسیر بیضی‌شدگی لوله رفتاری پیش‌رونده از خود نشان می‌دهد، به‌عبارت‌دیگر مسیر بیضی‌شدگی لوله ترکیبی از دو رفتار درجه دو نسبت به انحنا و رفتار پیش‌رونده است.

چانگ و پان [28] در توصیف رفتار پیش‌رونده بیضی‌شدگی مقطع لوله، رابطه (37) را بین حداقل بیضی‌شدگی $\Delta D_o/D_o$ در هر چرخه، (مقدار بیضی‌شدگی در $\kappa=0$) دامنه بی‌بعد انحناء چرخه‌ای κ_c/κ_o و تعداد چرخه N ارائه دادند:

$$\frac{\Delta D_o}{D_o} = C_2(\kappa_c/\kappa_0)^{m_1} N^{n_1} \tag{37}$$

که در آن، κ_c، حداکثر انحنای لوله تحت آزمایش خمش چرخه‌ای، m_1 و n_1 ثابت‌های ماده و C_2 ضریب بی‌بعد وابسته به نسبت D_o/t و خصوصیات مصالح است. با ترکیب رفتار درجه دو بیضی‌شدگی لوله نسبت به انحنا (رابطه (25)) با رفتار پیش‌رونده بیضی‌شدگی (رابطه (37)) مسیر کامل بیضی‌شدگی لوله تحت خمش خالص تکرارشونده در محدوده انحنا $\kappa = \pm\kappa_c$ را می‌توان به‌صورت رابطه (38) نوشت:

$$\frac{\Delta D}{D_o} = C_1\left(\frac{\kappa}{\kappa_0}\right)^2 + C_2(\kappa_c/\kappa_0)^{m_1} N^{n_1} \tag{38}$$

2-4- صحت سنجی مدل چرخه‌ای

به منظور صحت‌سنجی مدل تحلیلی، از داده‌های تجربی ارائه شده در مرجع [24] استفاده شده است که در آن لوله‌ای با مشخصات هندسی $D_o = 31.75$ mm و $t = 0.88$ mm تحت بارگذاری خمشی مورد مطالعه قرار گرفته است. جنس لوله از نوع فولاد 1018 و پارامترهای مربوط به خصوصیات مصالح بر اساس رابطه توورگارد مطابق جدول 2 تعریف شده است. این آزمایش به‌صورت انحنا ثابت با حداکثر انحنای $\kappa = 8.95e-4\ \mathrm{mm}^{-1}$ انجام شده است.

در مدل تحلیلی حاضر رابطه تنش- کرنش به‌صورت غیرخطی تعریف شده و پارامترهای لازم بر اساس داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24] به صورت $\sigma_{pr} = 468.3$ MPa، $G_T = 0.02$، $G_1 = G_2 = 0.025$، $\xi = 0.01$، $Q = -87.5$ و $b_p = 5.5$ در نظر گرفته شده است.

با استفاده از روابط (28) و (30) رفتار نرم‌شوندگی تکرارشونده فولاد

جدول 2 پارامترهای مربوط به خصوصیات مصالح فولاد 1018 بر اساس رابطه تورگارد ارائه شده در مرجع [24]

Table 2 Mechanical properties of the carbon steel 1018 based on Tvergaad relation in tests conducted by [24]

	E (Gpa)	σ_{pr} (MPa)	n
منحنی تنش-کرنش تکرارشونده	207	320	6.64
منحنی حلقه پایدار هیسترزیس	207	960	17.7

1018 تحت کرنش ثابت 0.02 ± به صورت منحنی‌های هیسترزیس شکل 13 شبیه‌سازی می‌شود.

با در نظر گرفتن مقادیر پارامترهای $n_1=0.95$، $m_1=2$، $C_1=0.018$ و $C_2=0.006$، در شکل 14 منحنی‌های بیضی‌شدگی مقطع برحسب انحنای لوله بر اساس داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24] و نتایج به‌دست آمده از رابطه (38) ترسیم شده است.

به‌منظور بررسی دقیق‌تر میزان انطباق در منحنی در شکل 14، نمودار Q -Q مقادیر بیضی‌شدگی مقطع در انحنای صفر در هر نیم‌چرخه برای داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24] و مقادیر به‌دست‌آمده از رابطه (38) در

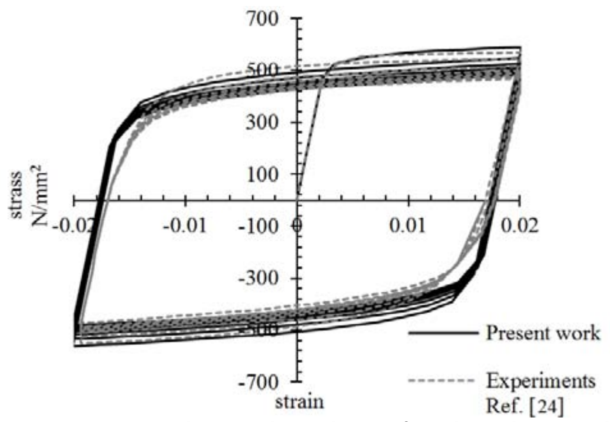

Fig. 13 Comparisons between the predictions from the cyclic material model in the current study with the cyclic coupon test data from [24]

شکل 13 مقایسه بین روابط تنش و کرنش حل تحلیلی حاضر و داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24]

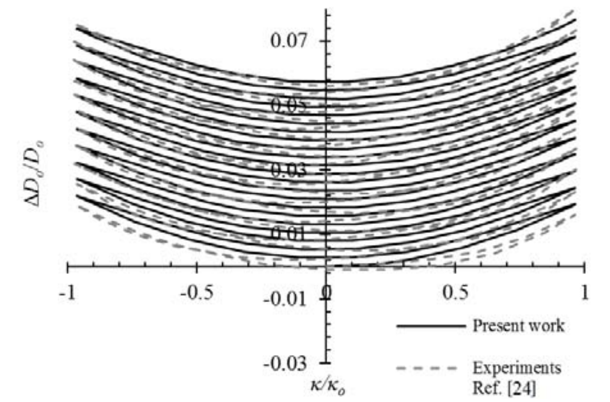

Fig. 14 Comparisons between the “ovalization-curvature” loops from Eq. (38) with the corresponding experimental data from [24]

شکل 14 مقایسه منحنی‌های بیضی شدگی مقطع برحسب انحنای لوله برای داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24] و مقادیر به‌دست‌آمده از رابطه (38)

شکل 15 ترسیم شده است همچنین در شکل 16 نمودار Q -Q مقادیر بیضی‌شدگی مقطع در انحنای کمینه و بیشینه در هر نیم‌چرخه برای داده های آزمایشگاهی مرجع [24] و مقادیر به‌دست‌آمده از رابطه (38) ارائه شده است. مشاهده می‌شود میزان خطای دو منحنی به دست آمده بر اساس رابطه (38) و داده‌های آزمایشگاهی کمتر از 1% است و همخوانی قابل‌قبول بین دو منحنی وجود دارد.

با در نظر گرفتن رفتار بیضی‌شدگی مقطع بر اساس رابطه (38) و حل معادله انتگرالی (35) منحنی‌های لنگر- انحنا مطابق شکل 17 به‌دست می‌آید. به‌منظور نمایش بهتر از صحت‌سنجی، نتایج آزمایشگاهی در اولین و آخرین چرخه بارگذاری [24] با چرخه‌های به‌دست‌آمده از مدل تحلیلی مقایسه شده است. همچنین نمودار مقایسه مقادیر بیشینه و کمینه لنگر در هر نیم‌چرخه برای داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24] و مقادیر به‌دست‌آمده از رابطه (35) در شکل 18 ارائه شده است. مشاهده می‌شود تطابق قابل قبولی مقادیر بیشینه و کمینه لنگر در هر نیم‌چرخه وجود دارد. اختلاف موجود در شکل 17 بین دو منحنی حاصل از رابطه (35) و داده‌های آزمایشگاهی در محدوده انتقال از لنگر ارتجاعی به لنگر خمیری به نظر می‌رسد ناشی از

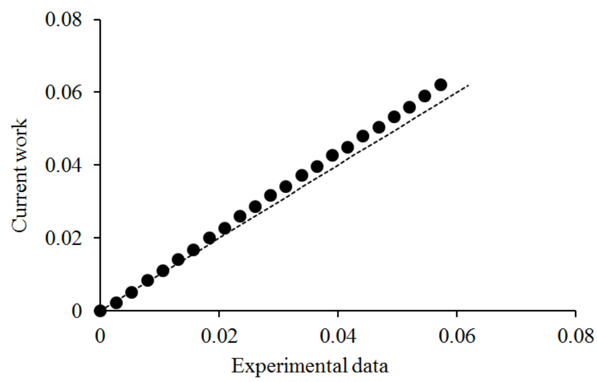

Fig. 15 A Q–Q plot of the ovalization at κ=0 in any half-cycle between the predictions of Eq. (38) with the corresponding experimental data from [24]

شکل 15 نمودار Q -Q مقادیر بیضی‌شدگی مقطع در انحنای صفر در هر نیم‌چرخه برای داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24] و مقادیر به‌دست‌آمده از رابطه (38)

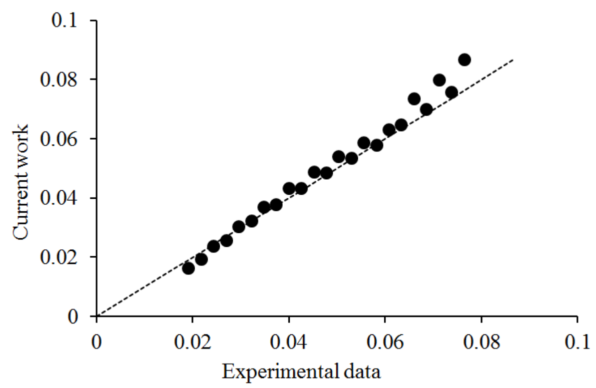

Fig. 16 A Q–Q plot of the ovalization at maximum and minimum curvatures in any half-cycle between the predictions of Eq. (38) with the corresponding experimental data from [24]

شکل 16 نمودار Q -Q مقادیر بیضی‌شدگی مقطع در انحنای کمینه و بیشینه در هر نیم‌چرخه برای داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24] و مقادیر به‌دست‌آمده از رابطه (38)

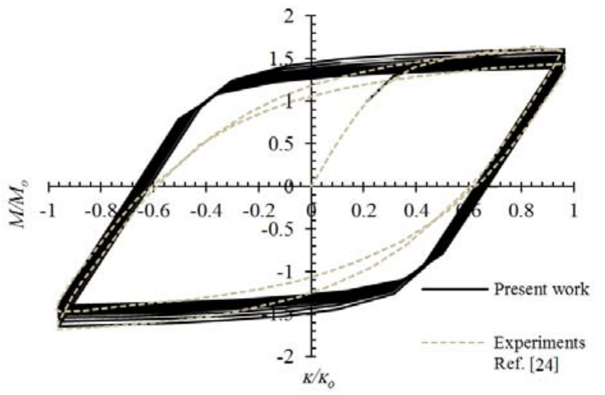

Fig. 17 Simulation of the inelastic cyclic “moment-curvature” path for a steel tube in Ref. [24]experiments provided by Eq. (35)

شکل 17 شبیه‌سازی ریاضی منحنی لنگر-انحنا برای لوله فولادی مورد آزمایش در مرجع [24] با معادله (35)

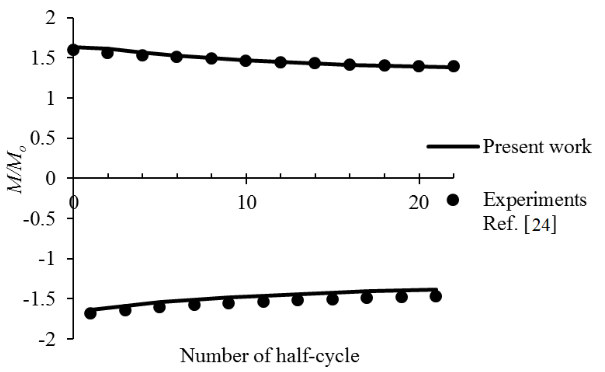

Fig. 18 Maximum and minimum moments in different half-cycles: Predictions from Eq. (35) and the corresponding experimental data from [24]

شکل 18 مقایسه مقادیر کمینه و بیشینه لنگر در هر نیم‌چرخه برای داده‌های آزمایشگاهی مرجع [24] و مقادیر به‌دست‌آمده از رابطه (35)

اختلاف در منحنی تنش- کرنش واقعی و منحنی تنش- کرنش لحاظ شده در مسئله باشد که این اختلاف در شکل 13 مشهود است.

5- نتایج

خلاصه نتایج تحقیق حاضر به‌قرار زیر هستند:

1- مرور ادبیات فنی حاکی از آن است که هنوز راه‌حل بسته دقیقی برای تحلیل رفتار خرابی خمیری پیشرونده لوله‌ها تحت چرخه‌های غیرارتجاعی خمش در دسترس نیست. تنها چند مورد حل ریاضی برای مسائل خرابی خمیری پیشرونده ارائه‌شده که عمدتاً ناظر به هندسه‌های بسیار ساده و حالات بارگذاری ایده‌آل هستند. مقاله حاضر یک حل تحلیلی بسته برای رفتار خمش خالص غیرارتجاعی چرخه‌ای مقاطع لوله‌ای فولادی ارائه می‌دهد. نتایج مدل ارائه‌شده در مقایسه با داده‌های آزمایشگاهی از دقت قابل قبولی برخوردار است.

2- مدل‌های حل بسته ارائه‌شده توسط محققین قبلی بسیار معدود هستند که در اغلب آن‌ها از فرض دوخطی برای رفتار مصالح استفاده شده است. طبعاً این مدل رفتار تفاوت قابل‌توجهی با رفتار واقعی مصالح فولادی دارد. ناپیوستگی موجود در مدل دوخطی موجب انحراف نتایج حل ریاضی از رفتار چرخه‌ای واقعی خواهد شد. در تحقیق حاضر، علیرغم دشواری‌های ریاضی آن، از یک مدل پیوسته

غیرخطی (مدل تورگارد) برای بیان رفتار مصالح هم در حالت یک‌سویه و هم در حالت چرخه‌ای استفاده شده است که دقت نتایج را به میزان زیادی افزایش داده است. مدل ارائه شده حساسیت بالایی به مسیر تنش – کرنش تعریف‌شده دارد که با دسترسی به منحنی دقیق تنش – کرنش چرخه‌ای در محدوده کرنش‌های موردمطالعه در بررسی رفتار خمشی تکرارشونده دقت بالاتری قابل حصول است.

3- یکی از دشواری‌های تحلیل ریاضی یا اجرای محدود پدیده خرابی خمیری پیش‌رونده در اعضای لوله‌ای شبیه‌سازی توأمان خرابی خمیری پیش‌رونده در بعد سازه‌ای (بیضی‌شدگی) و در بعد مصالح (تجمع کرنش‌های خمیری) است. تحقیق حاضر به‌خوبی قادر بوده است با تأثیر دادن بیضی‌شدگی مقطع در حل مسئله خمش یک‌سویه و چرخه‌ای در محدوده غیرارتجاعی، هر دو نوع خرابی خمیری پیش-رونده مصالح و سازه‌ای را به‌صورت توأم پیش‌بینی و تحلیل نماید. این مهم در حل مسئله خمش چرخه‌ای به کمک یک رابطه نیمه تجربی که توسط نگارندگان پیشنهاد شده انجام شده است. این رابطه به‌صورت ترکیبی شامل دو رفتار درجه دو بیضی‌شدگی نسبت به انحنا و رفتار پیشرونده بیضی‌شدگی چرخه‌ای است که اجزای آن از مراجع مختلفی استخراج و تلفیق شده‌اند. توسط این رابطه مسیر بیضی‌شدگی مقطع با دقتی منطقی پیش‌بینی شده و در حل ریاضی لنگر-انحنای عضو لوله‌ای دخالت داده می‌شود.

4- رفتارهای غیرخطی و خمیری چرخه‌ای مصالح (شامل اثر بوشینگر و اثرات نرم‌شوندگی/سخت‌شوندگی چرخه‌ای) در این تحقیق به کمک یک مدل سخت‌شوندگی پویای غیرخطی در ترکیب با سخت‌شوندگی همسانگرد غیرخطی شبیه‌سازی ریاضی شده است.

6- مراجع

[1] S. Kyriakides, P. Shaw, Response and stability of elastoplastic circular pipes under combined bending and external pressure, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 18, No. 11, pp. 957-973, 1982.

[2] S. Kulkarni, Y. Desai, T. Kant, G. Reddy, Y. Parulekar, K. Vaze, Uniaxial and biaxial ratchetting study of SA333 Gr. 6 steel at room temperature, *International journal of pressure vessels and piping*, Vol. 80, No. 3, pp. 179-185, 2003.

[3] T. Hassan, E. Corona, S. Kyriakides, Ratcheting in cyclic plasticity, part II: multiaxial behavior, *International journal of plasticity*, Vol. 8, No. 2, pp. 117-146, 1992.

[4] P. Benham, Axial-load and strain-cycling fatigue of copper at low endurance, *J INST MET*, Vol. 89, pp. 328-338, 1961.

[5] E. Weiß, B. Postberg, T. Nicak, J. Rudolph, Simulation of ratcheting and low cycle fatigue, *International journal of pressure vessels and piping*, Vol. 81, No. 3, pp. 235-242, 2004.

[6] X. Chen, X. Chen, D. Yu, B. Gao, Recent progresses in experimental investigation and finite element analysis of ratcheting in pressurized piping, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 101, No. 1, pp. 113-142, 2013.

[7] M. Zehsaz, F. V. Tahami, H. Akhani, Experimental determination of material parameters using stabilized cycle tests to predict thermal ratchetting, *UPB Scientific Bulletin, Series D*, Vol. 78, No. 2, pp.17-30, 2016.

[8] R. Bradford, D. Tipping, The ratchet–shakedown diagram for a thin pressurised pipe subject to additional axial load and cyclic secondary global bending, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 134, No.1, pp. 92-100, 2015.

[9] S. Poonaya, U. Teeboonma, C. Thinvongpituk, Plastic collapse analysis of thin-walled circular tubes subjected to bending, *Thin-walled structures*, Vol. 47, No. 6, pp. 637-645, 2009.

[10] M. A. Shahin, M. F. Elchalakani, A new model based on evolutionary computing for predicting ultimate pure bending of steel circular tubes, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 94, No. 1, pp. 84-90, 2014.

[11] M. D'Aniello, E. M. Güneyisi, R. Landolfo, K. Mermerdaş, Predictive models of the flexural overstrength factor for steel thin-walled circular hollow section beams, *Thin-Walled Structures*, Vol. 94, pp. 67-78, 2015.

[12] Y.-f. Chen, J. Zhang, H. Zhang, X. Li, J. Zhou, J. Cao, Ultimate bending capacity of strain hardening steel pipes, *China Ocean Engineering*, Vol. 30, pp. 231-241, 2016.

[13] M. Elchalakani, Plastic mechanism analyses of circular tubular members under cyclic loading, *Thin-Walled Structures*, Vol. 45, No. 12, pp. 1044-1057, 2007.

[14] K.-H. Chang, W.-F. Pan, K.-L. Lee, Mean moment effect on circular thin-walled tubes under cyclic bending, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 28, No. 5, pp. 495-514, 2008.

[15] S. M. Rahman, T. Hassan, E. Corona, Evaluation of cyclic plasticity models in ratcheting simulation of straight pipes under cyclic bending and steady internal pressure, *International Journal of Plasticity*, Vol. 24, No. 10, pp. 1756-1791, 2008.

[16] S. Zakavi, M. Zehsaz, M. Eslami, The ratchetting behavior of pressurized plain pipework subjected to cyclic bending moment with the combined hardening model, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 240, No. 4, pp. 726-737, 2010.

[17] M. Peykanu, M. Zeinoddini, M. Motamedi, Experimental modeling of local buckling of corroded offshore pipelines under axial cyclic loadings, *Sharif Civil Engineering Journal*, Vol. 29, No. 4, pp. 17-24, 2014. (in Persian فارسی)

[18] M. Shariati, K. Kolasangiani, B. Jahangiri, A. Saber, Experimental study on ratcheting and softening behavior of stainless steel 304L thin-walled shells under cyclic pure bending load, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 4, pp. 324-332, 2016. (in Persian فارسی)

[19] S. Ueda, Moment-rotation relationship considering flattening of pipe due to pipe whip loading, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 85, No. 2, pp. 251-259, 1985.

[20] C. R. Calladine, *Theory of shell structures*, pp. 595-625, Cambridge University Press, 1989.

[21] J. Knaster, G. Tortora, R. Veness, The Brazier effect and its influence in the design of beampipes for particle colliders, *Vacuum*, Vol. 64, No. 2, pp. 91-98, 2001.

[22] S. Kyriakides, E. Corona, *Mechanics of offshore pipelines: volume 1 buckling and collapse*, pp. 226, Elsevier, 2007.

[23] Y. Bai, R. Igland, T. Moan, Collapse of thick tubes under combined tension and bending, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 32, No. 3, pp. 233-257, 1995.

[24] S. Kyriakides, P. Shaw, Inelastic buckling of tubes under cyclic bending, *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 109, No. 2, pp. 169-178, 1987.

[25] J. F. Hallai, S. Kyriakides, On the effect of lüders bands on the bending of steel tubes. part i: Experiments, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 48, No. 24, pp. 3275-3284, 2011.

[26] J. Lemaitre, J.-L. Chaboche, *Mechanics of solid materials*, pp. 228-238, Cambridge university press, 1994.

[27] M. Daunys, S. Rimovskis, Analysis of circular cross-section element, loaded by static and cyclic elastic–plastic pure bending, *International journal of fatigue*, Vol. 28, No. 3, pp. 211-222, 2006.

[28] K.-H. Chang, W.-F. Pan, Buckling life estimation of circular tubes under cyclic bending, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, No. 2, pp. 254-270, 2009.