



## حل تشابهی سیال مغناطیسی روی صفحه تخت متحرک: یک مدل ساده جهت بررسی کیفی فرآیند خنک کاری سطوح همراه با مکش ثابت

اسماعیل لکزیان<sup>1\*</sup>، مریم فروزان<sup>2</sup>

1- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار  
2- دانشجوی کارشناسی ارشد، تبدیل انرژی، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار  
\* سبزوار، 9617976487، e.lakzian@hsu.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 12 بهمن 1395  
پذیرش: 26 اسفند 1395  
ارائه در سایت: 03 اردیبهشت 1396

کلید واژگان:

حل تشابهی  
MHD  
عدد بیژن  
انتروبی

### چکیده

در مطالعه حاضر به بررسی و تحلیل انتروبی در لایه مرزی سیال مغناطیسی بر صفحه تخت در حال کشش با اعمال شار حرارتی متغیر و در حضور میدان گرمایی و مکش ثابت پرداخته شده است. جریان سیال تحت تأثیر میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارد. معادلات حاکم شامل معادلات پیوستگی، مومنتم و انرژی است. به کمک حل تشابهی بلازیوس، معادلات حاکم از معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی به معادلات دیفرانسیل خطی تبدیل شده و سپس به روش رانگ-کوتا مرتبه چهارم حل شده‌اند. نتایج مطالعه حاضر و نتایج مطالعات چاپ شده پیشین به منظور اعتبارسنجی مقایسه شده و تطابق کامل مشاهده شد. عدد بیژن به عنوان پارامتر معیار طراحی در مطالعه کیفی جهت بررسی فرآیند خنک کاری در فرآیندهای پوشش‌دهی قطعات صنعتی معرفی شده است. تأثیرات پارامترهای مکش، شار حرارتی، مغناطیس، پارامتر عدد پرنتل و پارامتر منبع گرمایی به صورت مجزا بر سرعت، دما و انتروبی تولیدی بی‌بعد و عدد بیژن ترسیم شده است. نتایج نشان می‌دهد؛ با افزایش پارامترهای عدد پرنتل، مکش، منبع گرمایی، مغناطیس و پارامتر مربوط به شار حرارتی مقدار عدد بیژن به ترتیب کاهش، افزایش، کاهش و کاهش می‌یابد. از نتایج مطالعه حاضر جهت بهبود فرآیند خنک کاری پس از پوشش‌دهی قطعات صنعتی استفاده کرد.

## A Similarity Solution of the MHD Fluid over a Stretching Sheet: A Qualitative Investigation of the Surface with Constant Suction in Cooling Process

Esmail Lakzian\*, Maryam Forozan

Department of Mechanical Engineering, Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran.  
\* P.O.B. 9617976487, Sabzevar, Iran, e.lakzian@hsu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 31 January 2017  
Accepted 16 March 2017  
Available Online 23 April 2017

**Keywords:**  
Similarity solution  
MHD  
Bejan number  
Entropy analysis

### ABSTRACT

In present study, the entropy analysis for laminar MHD flow over a stretching sheet with variable heat flux in presence of heat source and constant suction is done. The flow is influenced by uniform transverse magnetic field. The PDE governing differential equations including continuity, momentum, and energy are reduced to ODE ones by similarity solution. Then, the ODEs are solved by applying the 4<sup>th</sup>-order Runge-Kutta method. To validate, the result of this study and the published result are compared and the agreement is achieved. Bejan number is used as a design criterion parameter for a qualitative study about the cooling. The effects of suction parameter, heat source parameter, magnetic parameter, Prandtl number and heat flux parameter on dimensionless velocity and temperature, dimensionless entropy generation and Bejan number are shown in several plots. The results show that with increasing Prandtl number, suction, heat source parameter, magnetic parameters and parameters related to heat flux, the Bejan number is decreased, increased, decreased and decreased, respectively. The results of this research can be used for the increasing the cooling in the surface in the coating.

### 1- مقدمه

است. در این راستا عوامل مؤثر بر تولید انتروبی و بهینه‌سازی فرآیند خنک کاری در پوشش‌دهی قطعات صنعتی به صورت تشابهی در این مطالعه بررسی شده است.

روش حل تشابهی لایه مرزی جریان بر یک صفحه تخت توسط بلازیوس [1] ارائه شد. توزیع سرعت در لایه مرزی هیدرودینامیکی در روش ارائه شده به وسیله تبدیل معادله غیرخطی مومنتم به معادله دیفرانسیل خطی به کمک

بررسی رفتار لایه مرزی سیال عبوری از سطوح گرم در بسیاری از فرآیندهای مهندسی حائز اهمیت است. چنانچه به سبب خاصیت گرمادایی مایعات، یکی از روش‌های صنعتی خنک‌کننده سطوح با دمای بالا، گذراندن سیال از روی سطوح است. بهینه‌سازی مصرف انرژی در سال‌های اخیر با توجه به اهمیت صرفه‌جویی در انرژی و کاهش هزینه‌های اولیه مورد توجه قرار گرفته

Please cite this article using:

E. Lakzian, M. Forozan, A Similarity Solution of the MHD Fluid over a Stretching Sheet: A Qualitative Investigation of the Surface with Constant Suction in Cooling Process, Modares Mechanical Engineering, Vol. 17, No. 4, pp. 341-348, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

www.sst.ir

بیژن [14] روشی برای بهینه‌سازی انترویی با عنوان حداقل رساندن انترویی تولیدی ارائه کرد. انترویی تولیدی جهت بهینه‌سازی فرایندهای ترمودینامیکی جریان سیال و انتقال حرارت بر صفحه تخت متحرک توسط مولندی و همکاران [15] انجام شد. ایشان از عدد بیژن به عنوان معیار بهینه‌سازی استفاده کردند. براساس نتایج آن‌ها انترویی تولیدی با افزایش سرعت افزایش نشان می‌دهد. مولندی و همکاران [16] به بررسی انترویی تولیدی در مطالعه دوبعدی لایه مرزی سیال بر صفحه تخت با دمای دیواره ثابت پرداختند. نتایج آن‌ها نشان داد افزایش عدد پرنتل سبب کاهش انترویی تولیدی می‌گردد. همچنین با افزایش عدد رینولدز و اکرت انترویی تولیدی کاهش می‌یابد. بررسی آنالیز انترویی در سیال مغناطیسی بر صفحه در حال کشش نفوذپذیر همراه با لغزش جزئی در دمای ثابت سطح به وسیله یزدی و همکاران [17] بررسی شد. از جمله نتایج آن‌ها می‌توان به افزایش انترویی تولیدی با افزایش عدد رینولدز و پارامتر مکش اشاره کرد. ویگاند و همکاران [18] به کمک روش تشابهی به حل معادله انترویی پرداختند. براساس نتایج آن‌ها حل معادله انترویی به روش تشابهی روش مناسبی جهت بررسی پارامترهای مؤثر بر انترویی و درک بهتر رفتار آن‌هاست. بگ و همکاران [19] به مطالعه انترویی تولیدی برای جریان سیال مغناطیسی لزوج کشسان بر سطح در حال کشش و با تخلخل متوسط پرداختند. نتایج نشان داد انترویی تولیدی با افزایش پارامتر مغناطیسی و عدد پرنتل افزایش می‌یابد. بوت و همکاران [20] به بررسی اثرات انترویی در طول جریان لایه مرزی پایدار و انتقال حرارت از سیال لزوج هادی الکتریسته و با وجود کشش صفحه و گرمایش پرداختند و مشاهده کردند انترویی تولیدی محلی با افزایش پارامتر مغناطیسی افزایش می‌یابد. ترابی و همکاران [21] توزیع دمایی و نرخ انترویی تولیدی محلی و کلی در کانال متخلخل همراه با اثرات مغناطیسی غیریکنواخت را مورد بررسی قرار دادند. براساس نتایج آن‌ها، با توجه به شرایط مرزی کانال، نرخ انتقال حرارت قسمت همراه با تخلخل متوسط، انترویی تولیدی کاهش و یا افزایش نشان می‌دهد. لطفی و لکزیان [22] به بررسی نرخ خنک کاری روی صفحه تخت در دماهای بالا که مدل ساده شده‌ای از فرآیند عملیات حرارتی کوئنچ است، پرداختند. از جمله نتایج آن‌ها می‌توان به افزایش انترویی تولیدی، عدد بیژن و نرخ خنک کاری با افزایش سرعت کوئنچ اشاره کرد. همچنین لطفی و لکزیان [23] به بررسی حل تشابهی خنک کاری جریان آرام نانو سیال عبوری بر صفحه بسیار داغ با کسر حجمی متغیر پرداختند. براساس نتایج آن‌ها افزودن نانو ذرات به جریان سیال در حال جوش بر میزان انتقال حرارت صفحه ساکن بیش از صفحه متحرک خواهد بود.

با توجه به مطالعات پیشین انجام شده بسیاری از فرایندهای خنک کاری با عبور سیال در حضور میدان مغناطیسی (MHD) انجام می‌پذیرد؛ بنابراین به کمک آن نرخ خنک کاری کنترل شده و در نهایت قطعه با ویژگی‌های مطلوب تولید می‌شود. در این مطالعه به کمک حل تشابهی به بررسی و تحلیل انترویی تولیدی جریان اجباری سیال مغناطیسی عبوری از صفحه در حال کشش با وجود شار حرارتی متغیر و مکش ثابت و میدان گرمایی پرداخته شد. همچنین برای نخستین بار به بررسی تأثیر عوامل یادشده بر عدد بیژن به عنوان معیار کیفی در خنک کاری در فرآیند پوشش‌دهی قطعات صنعتی پرداخته شده است.

## 2- تحلیل ریاضی و معادلات حاکم

در مطالعه حاضر به بررسی و آنالیز سیال نیوتنی دوبعدی در شرایط پایدار و

تعریف متغیر تشابهی صورت پذیرفت. ابتکار ساکادیس [2] در بررسی و مطالعه رفتار لایه مرزی بر سطح جامد در حال حرکت با سرعت ثابت بود. لکزیان و همکاران [3] با استفاده از حل تشابهی به بررسی لایه مرزی غلظتی در جریان بلازیوس و ساکادیس که تحت تأثیر تشعشع قرار گرفته پرداختند. ایشاک [4] به روش تحلیلی به بررسی لایه مرزی آرام پایدار بر سطح تخت در حال کشش همراه با انتقال گرمای هدایتی به سطح پرداخت. براساس نتایج او تنش برشی با افزایش پارامتر مکش افزایش یافته و در نتیجه نرخ انتقال حرارت از سطح افزایش می‌یابد. لیائو [5] به بررسی رفتار لایه مرزی بر صفحه در حال کشش نفوذپذیر به روش تحلیلی پرداخت. براساس گزارش او روش‌های مشابه برای حل جریان لایه مرزی بر صفحه در حال کشش به مقدار مرزی  $F''(0)$  وابسته است. بررسی جابه‌جایی آزاد بر سطح در حال کشش همراه با مکش و دمش توسط گرلا و همکاران [6] انجام شد. براساس نتایج آن‌ها نرخ انتقال جرم از سطح وابسته به جریان و دماست. مکش و دمش به ترتیب سبب کاهش و افزایش لایه مرزی گرمایی می‌شوند، همچنین ضخامت لایه مرزی گرمایی با افزایش عدد پرنتل کاهش می‌یابد. بررسی انتقال حرارت و جریان سیال لزجت بر سیلندر در حال کشش نفوذپذیر و با وجود جذب و تولید گرمای داخلی توسط واجراولا و همکاران [7] صورت پذیرفت. از جمله نتایج بررسی آن‌ها می‌توان به کاهش ضخامت لایه مرزی گرمایی و گرادیان دمایی دیواره در اثر افزایش عدد پرنتل اشاره کرد. چن و همکاران [8] به بررسی تأثیر دما و شار حرارتی متغیر بر ویژگی‌های انتقال حرارت سطح همراه با کشش خطی و با وجود مکش پرداختند. نتایج آن‌ها نشان داد پارامتر گرما و مکش، ضخامت لایه مرزی گرمایی با افزایش عدد پرنتل کاهش می‌یابد. گرادیان دمای دیواره در عدد پرنتل ثابت با افزایش پارامتر مکش افزایش نشان می‌دهد. انجالی و همکاران [9] اثر اتلاف لزجت بر جریان غیرخطی مغناطیسی بر سطح در حال کشش با شار حرارتی و وجود تخلخل متوسط را به کمک روش تحلیلی بررسی کردند. براساس نتایج آن‌ها پارامتر مغناطیسی سبب کاهش سرعت بی‌بعد در راستای طولی می‌شود. همچنین نشان دادند با افزایش عدد پرنتل دما کاهش می‌یابد. بررسی پارامتر مغناطیسی بر جریان لایه مرزی در صفحه در حال کشش همراه با لغزش و با وجود تخلخل متوسط توسط جین و همکاران [10] بررسی و تحلیل شد. براساس نتایج آن‌ها پروفیل سرعت با افزایش پارامتر مغناطیسی و پارامتر مکش افزایش یافته و نیز تنش برشی و پروفیل‌های سرعت و دما با افزایش پارامتر لغزش به ترتیب افزایش، کاهش و کاهش می‌ابند.

بررسی لایه مرزی آرام پایدار سیال غیرقابل تراکم کشسان همراه با مغناطیسی، مکش و دمش بر صفحه در حال کشش غیرخطی توسط مهاپرتا و همکاران [11] انجام گرفت. آن‌ها نشان دادند پروفیل سرعت به پارامترهای مغناطیسی، کشسان، مکش و دمش وابسته است. علی و همکاران [12] به بررسی جریان لزوج مغناطیسی و با وجود مکش و انتقال حرارت بر صفحه متحرک و همراه با شار حرارتی پرداختند. نتایج آن‌ها نشان داد با افزایش پارامتر مکش، ضریب اصطکاک افزایش و دمای دیواره کاهش می‌یابد. همچنین براساس گزارش آن‌ها عدد پرنتل و مکش پارامترهای مؤثرتری بر پروفیل دمایی است. مطالعه و بررسی لایه مرزی جریان اجباری هیدرودینامیک سیال مغناطیسی بر سطح در حال کشش با وجود و منبع گرما، شار حرارتی و مکش توسط انجالی دوی [13] انجام شد. از جمله نتایج ارائه شده توسط آن‌ها می‌توان به افزایش سرعت بی‌بعد در راستای طولی و کاهش دمای دیواره با افزایش پارامتر مکش اشاره کرد. همچنین آن‌ها نشان دادند دمای سیال با افزایش پارامتر مغناطیسی کاهش می‌یابد.

$$T - T_{\infty} = \frac{Dx^n}{k} \sqrt{\frac{\nu}{a}} \theta(\eta) \quad (8)$$

سرعت در راستای  $x$  و  $y$  به کمک معادله جریان طبق رابطه (9) به دست می‌آیند [8].

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y}, V = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (9)$$

در فرآیند حل تشابهی متغیرهای تشابهی مستقل و وابسته به ترتیب به صورت معادلات (10, 11) تعریف شده‌اند [8].

$$\eta = y \sqrt{\frac{a}{\nu}} \quad (10)$$

$$\psi = \sqrt{a\nu} x F(\eta) \quad (11)$$

که در آن  $a$  پارامتر کشش صفحه است. به کمک روابط (10, 11) معادلات سرعت طبق رابطه‌های (12, 13) است [8].

$$U = axF'(\eta) \quad (12)$$

$$V = -\sqrt{a\nu} F(\eta) \quad (13)$$

سرعت انتقال جرم از دیواره طبق رابطه (14) است [13].

$$V_0 = -\sqrt{a\nu} F(0) \quad (14)$$

با جای گذاری معادلات بی‌بعد شده سرعت (13, 12) در معادله (2)

معادله بی‌بعد مومنتم طبق رابطه (15) به دست می‌آید [13].

$$F''' + FF'' - (F')^2 - M^2 F' = 0 \quad (15)$$

پارامتر  $M^2$  در معادله (15) عدد هارتمن بوده و طبق رابطه (16) تعریف شده است [12].

$$M^2 = \frac{\sigma B_0^2}{\rho a} \quad (16)$$

به کمک معادلات بی‌بعد سرعت (13, 12) شرایط مرزی بی‌بعد به صورت معادله (17) حاصل می‌شود [13].

$$F(0) = su, F'(0) = 1, F'(\infty) = 0 \quad (17)$$

همچنین پارامتر مکش صفحه بوده و طبق روابط (18) تعریف می‌شود [13].

$$su = \frac{V_0}{\sqrt{a\nu}} \quad (18)$$

با استفاده از معادلات (13, 12, 8) در معادله (3) معادله بی‌بعد انرژی به صورت معادله (19) حاصل شد. همچنین شرایط مرزی بی‌بعد طبق معادله (20) است [13].

$$\theta'' + Pr f \theta' - n Pr f' \theta + Pr B \theta = 0 \quad (19)$$

$$\theta'(0) = -1, \theta(\infty) = 0 \quad (20)$$

در معادلات (19, 20) پارامتر  $B$  و  $Pr$  به صورت معادلات (21, 22) تعریف شده است.

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k} \quad (21)$$

$$B = \frac{Q}{\rho c_p} \quad (22)$$

ضریب اصطکاک پوسته یا ضریب درگ اصطکاکی از رابطه (23) محاسبه می‌گردد که در آن  $\tau_w$  تنش برشی دیواره بوده و از رابطه (24) به دست می‌آید [19].

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} \quad (23)$$

$$\tau_w = \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (24)$$

با استفاده از معادلات (13, 12, 10) معادله (25) حاصل می‌شود.

$$C_f = 2 \operatorname{Re}^{-\frac{1}{2}} F''(0) \quad (25)$$

نرخ حجمی تولید انترپی با وجود میدان مغناطیسی از رابطه (26) محاسبه می‌شود [23].

در محور مختصات کارترین پرداخته شده است. همچنین  $U$  و  $V$  به ترتیب سرعت در جهت محورهای  $x$  و  $y$  است. از اثر میدان مغناطیسی القایی ناشی از کشش صفحه صرف نظر می‌شود. وجود منبع حرارت و همچنین شار حرارتی متغیر اعمالی بر سطح در حال کشش در تحلیل معادله انرژی در نظر گرفته شده و از اتلافات لزجت و وزن صرف نظر شده است [13]؛ بنابراین در رابطه (3) جمله آخر به سبب وجود منبع حرارتی در نظر گرفته شده است.  $Q$  نرخ حجمی منبع گرما بوده و چنانچه  $Q > 0$  گرما تولید می‌شود، همچنین  $Q < 0$  به معنای جذب گرماست [7]. در شکل 1 وان آب در فرآیند خنک کاری قطعات پس از فرآیند پوشش‌دهی ارائه شده است. همچنین شکل 2 شماتیک مسأله مورد بررسی در مطالعه حاضر را نشان می‌دهد [13]. تحت فرضیات یادشده معادلات حاکم شامل معادلات پیوستگی (1)، مومنتم (2) و انرژی (3) است [13].

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \sigma \frac{B_0^2}{\rho} U \quad (2)$$

$$\rho c_p \left( U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right) = K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + Q(T - T_{\infty}) \quad (3)$$

شرایط مرزی وابسته به سرعت در معادلات (5, 4) تعریف شده است [13].

$$y = 0 \Rightarrow U = ax, V = -V_0 \quad (4)$$

$$y \rightarrow \infty \Rightarrow U = 0 \quad (5)$$

همچنین شرایط مرزی معادله انرژی در معادلات (6, 7) تعریف شده است [8].

$$y = 0 \Rightarrow -k \frac{\partial T}{\partial y} = q_w = Dx^n \quad (6)$$

$$y \rightarrow \infty \Rightarrow T \rightarrow T_{\infty} \quad (7)$$

توزیع دمایی با استفاده از معادله (8) محاسبه می‌گردد [8].



Fig. 1 The water tank for cooling in quenching process [22]

شکل 1 وان آب در خنک کاری قطعات پس از فرآیند پوشش‌دهی [22]

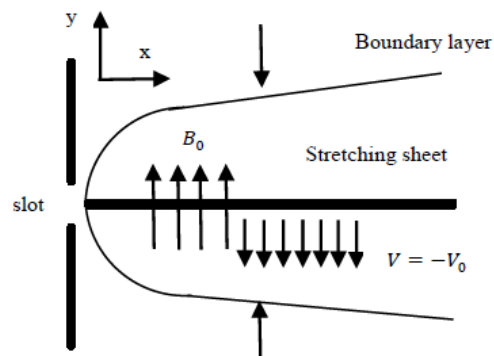
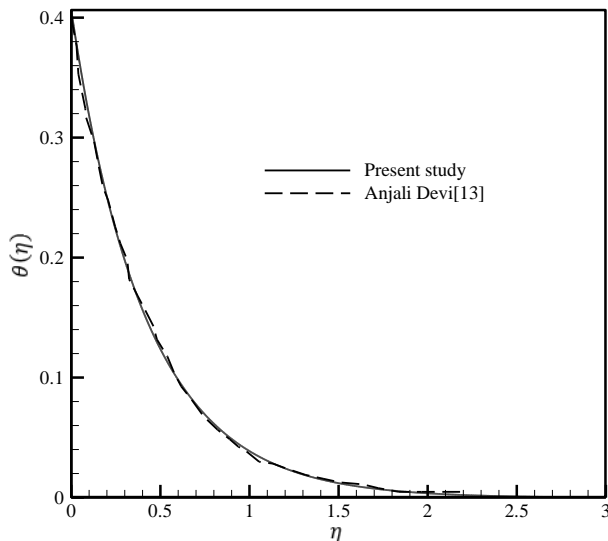
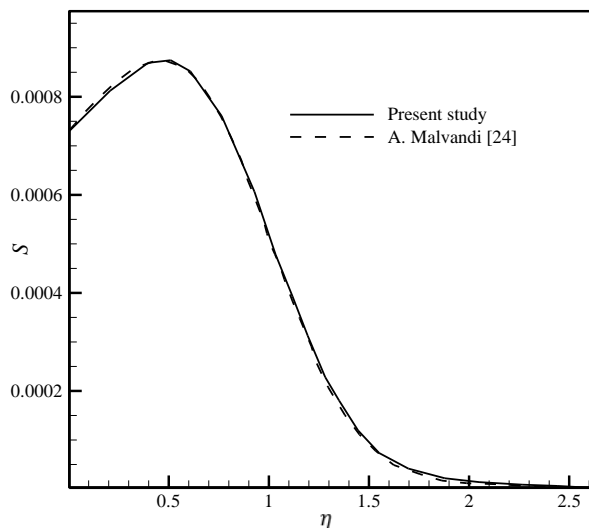


Fig. 2 Schematic diagram of the problem [13]

شکل 2 شماتیک مسأله [13]



**Fig. 3** Comparison between the present study with Anjali Devi's results [13] in ,  $Pr=0.71, n=2, a=1, M^2=2, B=0.05, su=3$   
 شکل 3 مقایسه مقاله حاضر با انجالی دوی [13] در  $a=1, n=2, Pr=0.71, su=3$  ,  $B=0.05, M^2=2,$



**Fig. 4** Validation for the entropy generation fluid over a flat plate inside boundary layer

شکل 4 اعتبارسنجی انتروپی تولیدی در لایه مرزی سیال عبوری از صفحه تخت

#### 4- بررسی و بررسی تأثیرات پارامتر $su$

شکل 5 تأثیرات پارامتر  $su$  بر  $Be, F'(\eta), F''(\eta), \theta(\eta), \theta'(\eta)$  (شکل 5-الف)  $S_F + S_M$  و  $S_h$  (شکل 5-ب) در  $Pr=2.4, n=2, a=1, B=0.05, M^2=2$  ترسیم شده است. با افزایش  $\eta$  در  $su$  مشخص، لایه مرزی حرارتی در  $Pr > 1$  لایه مرزی حرارتی کوچکتر از لایه مرزی سرعتی است (ناپدید می‌شود، در حالی که لایه مرزی سرعتی همچنان وجود دارد [24]). بنابراین با افزایش  $\eta$ ،  $\theta(\eta)$  و  $\theta'(\eta)$  صفر شده و تنها انتروپی اصطکاکی و مغناطیسی به دلیل باقی ماندن  $F'(\eta)$  و  $F''(\eta)$  تولید می‌شوند. در نتیجه انتروپی حرارتی تولیدی و  $Be$  (طبق رابطه 32) کاهش یافته و به صفر میل می‌کند [24]. با افزایش پارامتر  $su$  در  $\eta$  ثابت، ضخامت لایه مرزی حرارتی کاهش می‌یابد [8]. قدر مطلق گرادیان دمایی کاهش یافته و انتروپی حرارتی تولیدی

$$S_g''' = \frac{k}{T^2} \left( \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\mu}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \frac{\sigma B_0^2}{T} U^2 \quad (26)$$

همچنین معادله بی بعد انتروپی طبق رابطه (27) تعریف شده است [16].

$$S = S_g''' \frac{v^2 \Delta T}{u_\infty^4 \mu} \quad (27)$$

بنابراین معادله بی بعد انتروپی به صورت معادله (28) حاصل شد.

$$S = \frac{n^2 \theta^2}{Pr Ec Re^2 (\theta + \theta_\infty)^2} + \frac{\theta'^2}{Pr Ec Re (\theta + \theta_\infty)^2} + \frac{1}{(\theta + \theta_\infty) Re} (F''^2 + M^2 F'^2) \quad (28)$$

محاسبات در  $Re = 1000$  و  $Pr = 2.4$  است.  $\theta_\infty = 6.46$  بوده و همچنین خصوصیات سیال در دمای  $(T_f = \frac{T_\infty + T_w}{2})$  با در نظر گرفتن دمای  $50^\circ C$  بررسی شده است.

در معادله (28)، دمای بی بعد،  $Ec$  عدد اکرت و  $Re$  عدد رینولدز بوده و طبق معادله (31, 30, 29) تعریف شده‌اند.

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (29)$$

$$Ec = \frac{U_\infty^2}{C_p (T_w - T_\infty)} \quad (30)$$

$$Re = \frac{U_\infty x}{\nu} \quad (31)$$

بنابراین  $Be$  طبق معادله (32) تعریف می‌شود [16].

$$Be = \frac{S_h}{S_h + S_F + S_M} \quad (32)$$

در آن  $S_h$  انتروپی حرارتی تولیدی بی بعد،  $S_F$  انتروپی اصطکاکی تولیدی بی بعد و  $S_M$  انتروپی مغناطیسی تولیدی بی بعد است.

### 3- اعتبارسنجی

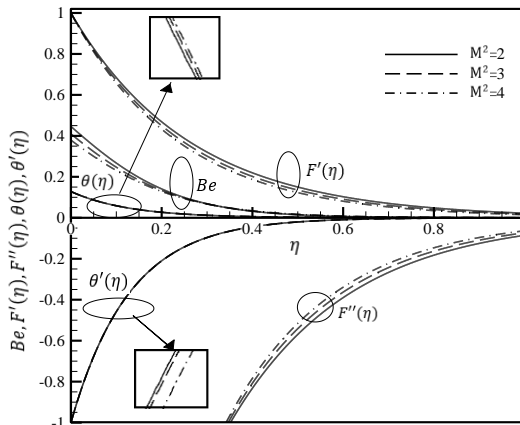
بررسی اثر میدان مغناطیسی بر جریان دو بعدی سیال آرام لزج، غیرقابل تراکم در عبور از صفحه در حال کشش و در حضور منبع حرارتی به روش پرتابی و رانگ کوتای مرتبه چهارم انجام شد. به منظور حل معادلات مومنتم (11) و معادله انرژی (19) علاوه بر شرایط مرزی بی بعد شده، دو شرط  $\theta(0)$  و  $F''(0)$  مورد نیاز است. لکن هیچ مقدار عددی برای  $\theta(0)$  و  $F''(0)$  موجود نیست؛ بنابراین برای تکمیل شرایط مرزی ترکیبی به روش پرتابی و بر مبنای معیار همگرایی مقدار عددی حدس زده شده، مقدار مناسب برای  $\theta(0)$  و  $F''(0)$  انتخاب شد. سپس مسأله با استفاده از روش رانگ-کوتا مرتبه چهارم حل شد. در مطالعه حاضر تحلیل انتروپی و در نهایت  $Be$  مورد بررسی قرار گرفت. نتایج مطالعه حاضر با نتایج انجالی دوی [13] برای اعتبارسنجی مقایسه شد. نتایج مطالعه حاضر و نتایج انجالی دوی [13] به ازای تغییر پارامتر  $M^2$ ، طبق جدول 1 مقایسه شد. در نمودار شکل 3 تطابق خوبی با نتایج مقاله یادشده حاصل شده است. اعتبارسنجی انتروپی تولیدی با توجه به مطالعه ملوندی و همکاران [24] که انتروپی تولیدی بر صفحه تخت و با روش حل تشابهی را ارائه کردند، انجام شد که تطابق کامل بین نتایج در شکل 4 مشاهده می‌شود.

**جدول 1** مقایسه ضریب اصطکاک و دمای دیواره در مطالعه حاضر با انجالی دوی

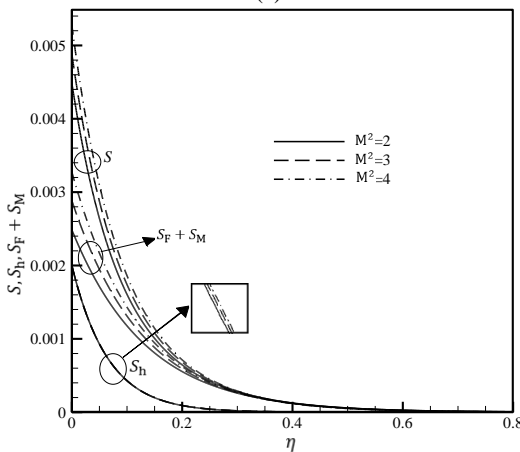
[13] در  $su = 3, B=0.05, a=1, n=2, Pr=0.71, M^2 = 2$

**Table 1** Comparison between the skin friction coefficient and wall temperature in present study with Anjali Devi's results [13] in  $M^2 = 2, Pr=0.71, n=2, a=1, B=0.05, su = 3$

مطالعه حاضر		انجالی دوی [13]	
$\theta(0)$	$F''(0)$	$\theta(0)$	$F''(0)$
0.406670	-3.791287	0.406622	-3.7913



(a)



(b)

**Fig. 6 (a,b)** Effect of  $M^2$  parameter on  $Be, F'(\eta), F''(\eta), \theta(\eta), \theta'(\eta), S, S_h$  and  $S_F + S_M$  in  $Pr=2.4, n=2, a=1, B=0.05, su=3$

شکل 6- الف، ب اثر پارامتر  $M^2$  بر  $Be, F'(\eta), F''(\eta), \theta(\eta), \theta'(\eta), S, S_h$  و  $S_F + S_M$  در  $Pr=2.4, n=2, a=1, B=0.05, su=3$

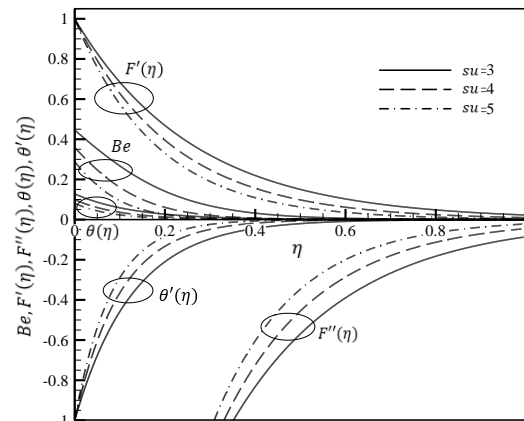
تولیدی بی بعد بسیار اندک است و  $Be$  کاهش می یابد.

### 3-4- تأثیرات پارامتر $Pr$

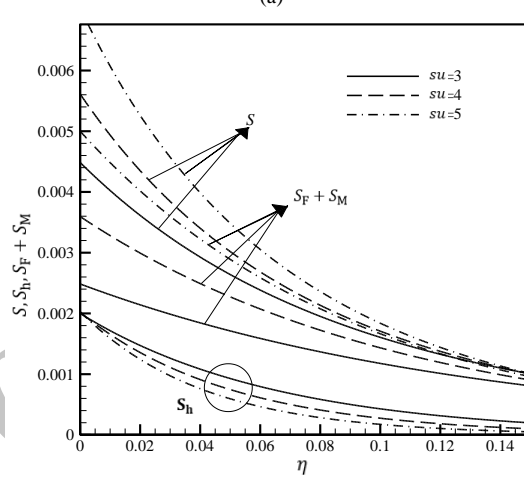
در شکل 7 اثر پارامتر  $Pr$  بر  $Be, F'(\eta), F''(\eta), \theta(\eta), \theta'(\eta)$  (شکل 7- الف)  $S, S_h$  و  $S_F + S_M$  (شکل 7- ب) در  $su=3, n=2, a=1, B=0.05, M^2=2$  ترسیم شده است. چنانچه در نمودار مشاهده می گردد. در  $Pr$  ثابت و پس از  $\eta$  مشخص، با فاصله گرفتن از صفحه و ناپدید شدن لایه مرزی حرارتی ( $Pr > 1$ ) در نظر گرفته شده و ضخامت لایه مرزی حرارتی کمتر از لایه مرزی سرعتی است،  $\theta(\eta)$  و  $\theta'(\eta)$  کاهش یافته و در نتیجه انتروی حرارتی تولیدی بی بعد نیز کاهش و به صفر میل می کند. پس از آن تنها عامل تولید انتروی،  $F'(\eta)$  و  $F''(\eta)$  است. در نتیجه با غلبه اتلافات اصطکاکی و مغناطیس  $Be$  کاهش یافته و به صفر میل می کند. همچنین در  $\eta$  ثابت، با افزایش  $Pr$  ضخامت لایه مرزی حرارتی کاهش می یابد [12]. در نتیجه پروفیل دمایی و همچنین قدر مطلق گرادیان دمایی کاهش یافته و در نتیجه انتروی حرارتی تولیدی کاهش نشان می دهد. در حالی که مجموع انتروی اصطکاکی و مغناطیس تولیدی بی بعد افزایش اندکی نشان می دهد. با افزایش  $Pr$ ، مقدار  $Be$  کاهش می یابد.

### 4-4- تأثیرات پارامتر $n$

شکل 8 اثر پارامتر  $n$  بر  $Be, F'(\eta), F''(\eta), \theta(\eta), \theta'(\eta)$  (شکل 8- الف)



(a)



(b)

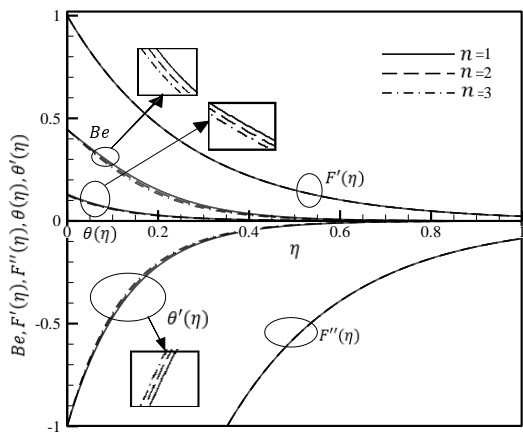
**Fig. 5 (a,b)** Effect of  $su$  parameter on  $Be, F'(\eta), F''(\eta), \theta(\eta), \theta'(\eta), S, S_h$  and  $S_F + S_M$  in  $Pr=2.4, n=2, a=1, B=0.05, M^2=2$

شکل 5- الف، ب اثر پارامتر  $su$  بر  $Be, F'(\eta), F''(\eta), \theta(\eta), \theta'(\eta), S, S_h$  و  $S_F + S_M$  در  $M^2=2, B=0.05, a=1, n=2, Pr=2.4$

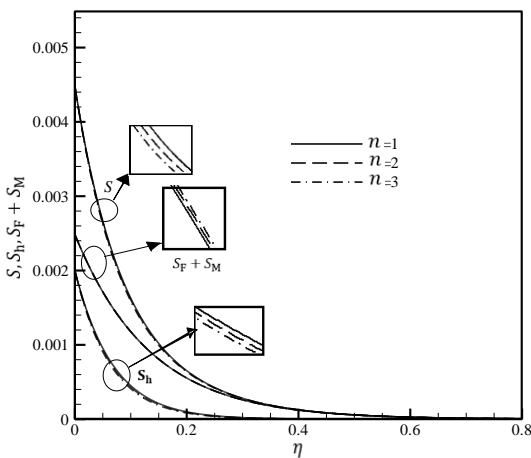
بی بعد نیز کاهش می یابد. به دلیل افزایش مجموع انتروی اصطکاکی و مغناطیسی تولیدی بی بعد، انتروی کل تولید شده بی بعد افزایش نشان می دهد و  $Be$  کاهش می یابد.

### 4-2- تأثیرات پارامتر مغناطیسی $M^2$

شکل 6 تأثیر  $M^2$  بر  $Be, F'(\eta), F''(\eta), \theta(\eta), \theta'(\eta)$  (شکل 6- الف)  $S, S_h$  و  $S_F + S_M$  (شکل 6- ب) در  $su=3, B=0.05, a=1, n=2, Pr=2.4$  نشان می دهد. چنانچه مشاهده می شود در  $M^2$  ثابت و با افزایش  $\eta$  پروفیل دمایی و قدرمطلق گرادیان دمایی کاهش می یابد. در نتیجه انتروی حرارتی تولیدی بی بعد کاهش یافته و در نهایت به صفر میل می کند؛ بنابراین پس از  $\eta$  مشخص، ( $Pr > 1$ ) لایه مرزی حرارتی ناپدید شده و تنها انتروی ناشی از اتلافات اصطکاکی و مغناطیسی تولید شده و  $Be$  به صفر میل می کند. در  $\eta$  ثابت و با افزایش  $M^2$ ، گرمایش اصطکاکی افزایش یافته و در نتیجه سبب افزایش ضخامت لایه مرزی حرارتی می گردد [9]. پروفیل دمایی و قدر مطلق گرادیان دمایی و انتروی حرارتی تولیدی بی بعد افزایش بسیار اندکی نشان می دهد، ولی تغییرات گرادیان سرعت و پروفیل سرعت بیشتر بوده و نقش مؤثرتری در اختلاف انتروی تولیدی بی بعد دارند؛ بنابراین افزایش انتروی حرارتی تولیدی بی بعد در مقایسه با افزایش انتروی مغناطیسی و اصطکاکی



(a)



(b)

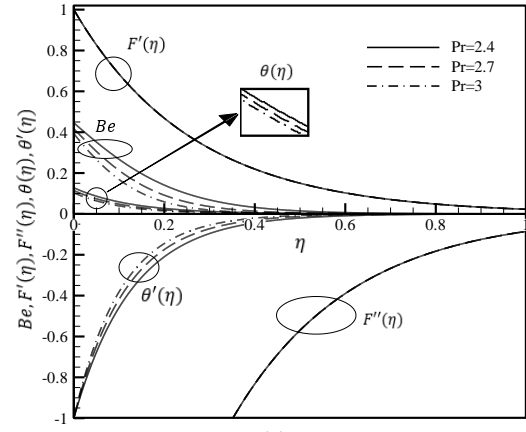
**Fig.8 (a,b)** Effect of  $n$  parameter on  $Be, F'(\eta), F''(\eta), \theta(\eta), \theta'(\eta), S, S_h$  and  $S_F + S_M$  in  $su=3, Pr=2.4, a=1, n=2, M^2 = 2$   
 شکل 8-الف، ب اثر پارامتر  $n$  بر  $Be, F'(\eta), F''(\eta), \theta(\eta), \theta'(\eta)$  و  $S, S_h, S_F + S_M$  در  $M^2 = 2, B=0.05, a=1, Pr=2.4, su=3$

$\theta(\eta)$  و قدرمطلق  $\theta'(\eta)$  افزایش اندکی نشان می‌دهند. در نتیجه انترویی حرارتی تولیدی بی‌بعد نیز افزایش اندکی نشان می‌دهد. این در حالی است که  $F'(\eta)$  و  $F''(\eta)$  یکسان بوده و کاهش بسیار اندک انترویی مغناطیسی و اصطکاکی تولیدی بی‌بعد به سبب افزایش  $\theta(\eta)$  است (تصویر در کادر مربوط به  $S_F + S_M$  با چندین مرحله بزرگ‌نمایی ترسیم شده است)؛ بنابراین  $Be$  نیز افزایش می‌یابد.

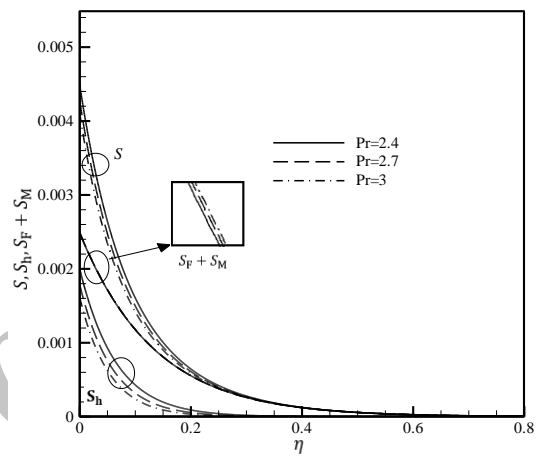
### 5- نتیجه گیری

در مطالعه حاضر به بررسی لایه مرزی جریان سیال، با وجود مغناطیس بر صفحه در حال کشش و همراه با مکش ثابت و شار حرارتی متغیر منبع گرما پرداخته شد، یک روش حل تشابهی جهت تحلیل و بررسی معادلات مومنوم، انرژی و معادله انترویی ارائه و معادلات یادشده از معادلات حاکم از PDE به ODE تبدیل شده و سپس به روش رانگ-کوتا مرتبه چهارم حل شده‌اند. تأثیر پارامترهایی چون عدد پرنتل، مغناطیس، منبع گرمایی، شار حرارتی و مکش بر  $Be$  بررسی شد. نتایج مهم مطالعه حاضر شامل موارد زیر است.

–  $Be$  به صورت نسبت انترویی حرارتی به انترویی کل تعریف شده است. از این جهت در این مطالعه به عنوان پارامتر



(a)



(b)

**Fig. 7 (a,b)** Effect of  $Pr$  parameter on  $Be, F'(\eta), F''(\eta), \theta(\eta), \theta'(\eta), S, S_h$  and  $S_F + S_M$  in  $su=3, n=2, a=1, B=0.05, M^2 = 2$

شکل 7-الف، ب اثر پارامتر  $Pr$  بر  $Be, F'(\eta), F''(\eta), \theta(\eta), \theta'(\eta), S, S_h, S_F + S_M$  در  $M^2 = 2, B=0.05, a=1, n=2, su=3$

$S, S_h$  و  $S_F + S_M$  (شکل 8-ب) در  $Pr=2.4, a=1, B=0.05, M^2 = 2$  ترسیم شده است. در  $n$  ثابت و با افزایش  $\eta$ ، لایه مرزی حرارتی از بین رفته و  $\theta(\eta)$ ، قدرمطلق  $\theta'(\eta)$  و همچنین انترویی حرارتی تولیدی کاهش یافته تا به صفر می‌رسند. پس از آن  $F'(\eta)$ ،  $F''(\eta)$  باقی می‌مانند و سبب تولید انترویی می‌گردند و  $Be$  به صفر میل می‌کند. در  $\eta$  ثابت و با افزایش  $n$ ،  $F'(\eta)$ ،  $F''(\eta)$  یکسان است. با افزایش  $n$  انترویی حرارتی تولیدی بی‌بعد کاهش می‌یابد، ولی به سبب کاهش  $\theta(\eta)$ ، مجموع انترویی اصطکاکی و مغناطیسی تولید شده بی‌بعد افزایش بسیار اندکی نشان می‌دهد. (نمودار انترویی اصطکاکی و مغناطیسی تولیدی بی‌بعد پس از چندین مرحله بزرگ‌نمایی ترسیم شده است) بنابراین  $Be$  نیز کاهش می‌یابد.

### 5-4- تأثیرات پارامتر $B$

شکل 9 در بررسی اثر پارامتر  $B$  بر  $Be, F'(\eta), F''(\eta), \theta(\eta), \theta'(\eta)$  (شکل 9-الف) و  $S, S_h, S_F + S_M$  (شکل 9-ب) در  $Pr=2.4, a=1, n=2, M^2 = 2, su=3$  ترسیم شده است. به ازای  $B$  ثابت و با افزایش  $\eta$  پروفیل دمایی و قدرمطلق گرادیان دمایی کاهش نشان داده و به صفر میل می‌کنند و انترویی تولیدی و  $Be$  نیز به صفر میل می‌کند. همچنین در  $\eta$  ثابت، با افزایش پارامتر  $B$ ، دمای سیال و ضخامت لایه مرزی حرارتی افزایش می‌یابد [13].

(B), Be به عنوان معیار کیفی فرآیند خنک کاری افزایش می‌یابد.

### 6- فهرست علائم

پارامتر مربوط به کشش صفحه	$a$
پارامتر منبع گرمایی	$B$
عدد بیژن	$Be$
قدرت میدان مغناطیسی	$B_0$
ظرفیت گرمایی	$C$
ضریب اصطکاک	$C_f$
ظرفیت گرمایی ویژه در فشار ثابت	$c_p$
مقدار ثابت مثبت	$D$
عدد اکرت	$Ec$
هدایت گرمایی سیال	$K$
پارامتر مغناطیسی	$M^2$
پارامتر مربوط به شار حرارتی	$n$
عدد پرنتل	$Pr$
نرخ حجمی گرما	$Q$
شار حرارتی	$q$
رینولدز	$Re$
پارامتر مکش	$su$
انتروپی	$S$
دما	$T$
سرعت در جهت محور $x$ ( $ms^{-1}$ )	$U$
سرعت در جهت محور $y$ ( $ms^{-1}$ )	$V$

### علائم یونانی

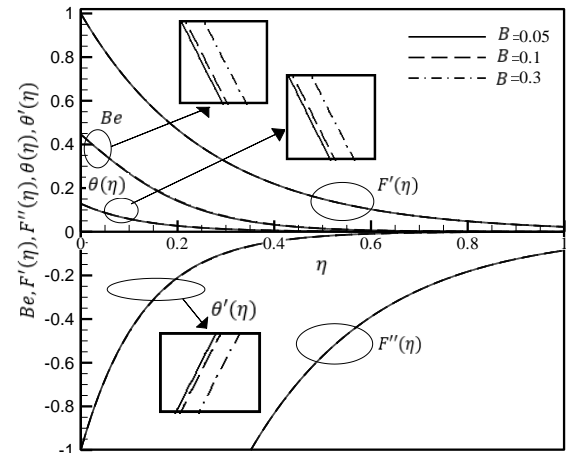
پارامتر بی‌بعد	$\eta$
دمای بی‌بعد	$\theta$
لزجت دینامیکی ( $kgm^{-1}s^{-1}$ )	$\mu$
لزجت سینماتیکی	$\nu$
چگالی ( $kgm^{-3}$ )	$\rho$
هدایت الکتریکی سیال	$\sigma$
تنش برشی	$\tau$
پارامتر جریان	$\psi$

### زیرنویسها

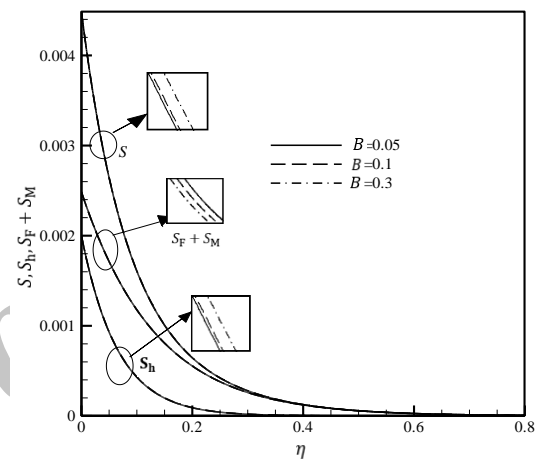
اصطکاک	$F$
تولیدی	$g$
گرمایی	$h$
مغناطیس	$M$
فشار ثابت	$p$
دیواره	$w$
آزاد سیال	$\infty$

### 7- مراجع

- [1] H. Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner reibung, *Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Physik*, Vol. 56, No.1, pp. 1-37, 1908
- [2] B.C. Sakiadis, Boundary layer behaviour on continuous solid surface:II boundary layer on a continuous flat surface, *American Institute of Chemical Engineer*, Vol. 7, No. 2, pp. 221-225, 1961.
- [3] E. Lakzian, M. Karami, M.H. Akbarzadeh, Similarity solution of the concentration boundary layer for blasius and sakiadis flows with



(a)



(b)

**Fig.9 (a,b).** Effect of  $B$  parameter on  $Be, F'(\eta), F''(\eta), \theta(\eta), \theta'(\eta), S, S_h$  and  $S_F + S_M$  in  $su=3, Pr=2.4, a=1, n=2, M^2 = 2$  شکل 9- الف، ب اثر پارامتر  $B$  بر  $Be, F'(\eta), F''(\eta), \theta(\eta), \theta'(\eta), S, S_h$  و  $S_F + S_M$  در  $M^2 = 2, n=2, a=1, Pr=2.4, su=3$

معیار طراحی در مطالعه کیفی جهت بررسی فرآیند خنک کاری پس از پوشش‌دهی در فرآیندهای صنعتی پوشش‌دهی مورد توجه قرار گرفته است.

با افزایش پارامتر مغناطیسی، تغییرات انتروپی اصطکاک و مغناطیسی تولیدی بی‌بعد بیشتر از تغییرات انتروپی حرارتی تولیدی است و بنابراین  $Be$  کاهش می‌یابد. با افزایش مکش ضخامت لایه مرزی حرارتی کاهش می‌یابد و در نتیجه انتروپی حرارتی تولیدی بی‌بعد و  $Be$  کاهش می‌یابد.

با افزایش عدد پرنتل، (برای  $Pr > 1$ )  $Be$  کاهش می‌یابد. با افزایش پارامتر  $B$  به عنوان پارامتر منبع گرمایی ضخامت لایه مرزی حرارتی افزایش می‌یابد، همچنین انتروپی حرارتی بی‌بعد و  $Be$  افزایش بسیار اندکی نشان می‌دهند. با افزایش  $n$  گرادیان و پروفیل سرعتی یکسان بوده و انتروپی تولیدی تنها در اثر تغییر پروفیل و گرادیان دمایی تغییر می‌کند و  $Be$  کاهش می‌یابد.

به اختصار می‌توان بیان کرد که با کاهش میدان مغناطیسی، کاهش مکش، کاهش پارامتر  $n$ ، کاهش عدد پرنتل و افزایش پارامتر منبع گرمایی

- Vol. 7, No. 3, pp. 415-423, 2014.
- [14] A. Bejan, Entropy generation minimization: The new thermodynamics of finite-size device and finite-time processes, *Applied Physics*, Vol. 79, No. 3, pp. 1191-1218, 1996.
- [15] A. Malvandi, F. Hedayati, D. D. Ganji, Thermodynamic optimization of fluid flow over an isothermal moving plate, *Alexandria Engineering*, Vol. 52, pp. 277-283, 2013.
- [16] A. Malvandi, D. Domairry Ganji, F. Hedayat, M. H. Kaffash, M. Jamshidi, series solution of Entropy generation toward an isothermal flat plate, *Thermal Science*, Vol. 16, No. 5, pp. 1289-1295, 2012.
- [17] M. H. Yazdi, S. Abdullah, I. Hashim, A. Zaharim, K. Sopian, Entropy generation analysis of the MHD flow over nonlinear permeable stretching sheet with partial slip, *Recent Researches in Energy & Environment*, Vol. 11, pp. 292-297, 2011.
- [18] B. Weigand, A. Birkefeld, Similarity solution of the entropy transport equation, *Thermal sciences*, Vol. 48, pp. 1863-1869, 2009.
- [19] S. Baag, S. R. Mishra, G. C. Dash, M. R. Acharya, Entropy generation analysis for viscoelastic MHD flow over a stretching sheet embedded in a porous medium, *Ain Shams Engineering*, 2016 (Article in press).
- [20] A. S. Butt, A. Ali, Entropy analysis of magnetohydrodynamic flow and heat transfer over a convectively heated radially stretching surface, *the Taiwan Insitute of Chemical Engineers*, Vol. 45, No. 4, pp. 1197-1203, 2014.
- [21] M. Torabi, K. Zhang, Temperature distribution, local and total entropy generation analyses in MHD porous channels with thick walls, *Energy*, Vol. 87, pp. 540, 2015.
- [22] A. Lotfi, E. Lakzian, Entropy generation analysis for film boiling. a simple model for quenching process, *The European Physical Journal Plus*, Vol. 131, No. 4, pp. 123-131, 2016.
- [23] A. Lotfi, E. Lakzian, A similarity solution of laminar boiling flow of nanofluids on a superheated surface considering variable volume fraction, *Tabriz Mechanical Engineering*. (Article in press فارسی)
- [24] A. Malvandi, D. D. Gnji, F. Hedayati, E. Y. Rad, An analytical study on entropy generation of nanofluids over a flat plate, *Alexandria Engineering*, Vol. 52, No. 4, pp. 595-604, 2013.
- consideration radiation effects, *Tabriz Mechanical Engineering*. (Article in press فارسی)
- [4] A. Ishak, Similarity solutions for flow and heat transfer over a permeable surface with convective boundary condition, *Applied Matematics and Computation*, Vol. 217, pp. 838-842, 2010.
- [5] S. Liao, A new branch of solution of boundary layer flows over an impermeable stretched plate, *Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, No. 12, pp. 2529-2539, 2005.
- [6] R. S. R. Gorla, I. Sidawi, Free convection on vertical stretching surface with suction and blowing, *Flow Turbulent and Combustion*, Vol. 52, pp. 247-257, 1994.
- [7] K. Vajrarel, K. V. Prasad, S. R. Santhi, V. Umesh, Fluid flow and heat transfer over a permeable stretching cylinder, *Applied Fluid Mechanics*, Vol. 7, No. 1, pp. 111-120, 2014.
- [8] C. K. Chen, M. I. Char, Heat transfer of a continuous stretching surface with suction or blowing, *Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 135, No. 2, pp. 568-580, 1988.
- [9] S. P. Anjali Devi, B. Ganga, Dissipation effects on MHD nonlinear flow and heat transfer past a porous surface with rescribed heat flux, *Applied Fluid Mechanics*, Vol. 3, No. 1, pp. 1-6, 2010.
- [10] S. Jain, R. Choudhary, Effects of MHD on boundary layer flow in porous medium due to exponentially shrinking sheet with slip, *procedia Engineering*, Vol. 127, pp. 1203-1210, 2015.
- [11] T. R. Mahaparta, S. Sidui, An analytical solution of MHD flow of two viscoelastic fluids over a sheet shrinking with quadratic velocity, *Alexandria Engineering Journal*, Vol. 55, pp. 163-168, 2016.
- [12] F. M. Ali, R. Nazar, N. M. Arifin, MHD viscous flow and heat transfer due to a permeable shrinking sheet with prescribed surface heat flux, *WSEAS Transactions on Mathematics*, Vol. 5, No. 9, pp. 365-375, 2010.
- [13] S. P. Anjali Devi, J. W. S. Raj, Numerical Simulation of Magnetohydrodynamic Forced Convective Boundary Layer Flow past a Stretching/Shrinking Sheet Prescribed with Variable Heat Flux in the Presence of Heat Source and Constant Suction, *Applied Fluid Mechanics*,