



تحلیل تیر از جنس ماده مرکب با نقص هندسی اولیه تحت اثر ضربه خارج از محور

کبری قطره سامانی¹، علیرضا فتوحی^{2*}، علیرضا شفیعی²

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد
2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد
* صندوق پستی 89195-741، afotuhi@yazd.ac.ir

اطلاعات مقاله

چکیده

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 25 بهمن 1395

پذیرش: 23 فروردین 1396

ارائه در سایت: 13 اردیبهشت 1396

کلید واژگان:

مواد مرکب

تیر

ضربه

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم

روش تریب دیفرانسیلی تعمیم یافته

در این پژوهش، براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم معادلات حرکت برای بررسی تغییر شکل یک تیر از جنس ماده مرکب باریک و بلند به دست آمده است. تیر با نقص هندسی اولیه بوده و تحت اثر بار ضربه قرار می گیرد. ضربه اعمالی توسط جسم صلب با سرعت مشخص و به صورت خارج از مرکز و در فاصله معینی از تیر زده می شود. معادلات حرکت با استفاده از اصل همپلتون و براساس روابط کرنش-جابجایی غیرخطی ون-کارمن به دست آمده اند که براساس جابجایی ها و به صورت مجموعه ای از معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی وابسته به یکدیگر و در حالت دینامیکی می باشند. از روش تریب دیفرانسیلی تعمیم یافته برای گسسته سازی معادلات به دست آمده و تبدیل آن ها به مجموعه ای از معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده شده است. روش تکرار نیوتن - رافسون برای حل معادلات جبری غیرخطی سیستم به کار برده شده است. در ادامه با حل معادلات حاکم بر سیستم به بررسی تأثیر مقدار نقص هندسی اولیه تیر بر تغییر شکل آن پرداخته شده است. همچنین تأثیر جرم و سرعت ضربه زننده بر تغییر شکل تیر بررسی و نتایج حاصل از این تحقیق نشان می دهد با افزایش مقدار سرعت اولیه و جرم ضربه زننده، تغییر شکل تیر نیز به طور قابل ملاحظه ای افزایش می یابد.

Analysis of composite beam, having initial geometric imperfection, subjected to off-center impact

Kobra Ghatreh Samani, Ali Reza Fotuhi*, Ali Reza Shafiei

Department of Mechanical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran
*P.O.B.89195-741, Yazd, Iran. afotuhi@yazd.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 13 February 2017
Accepted 12 April 2017
Available Online 03 May 2017

Keywords:

Composite
Beam
Impact
Third Order Shear Deformation Theory
Generalized Differential Quadrature Method

ABSTRACT

In this study, based on the third-order shear deformation theory the equations of motion are obtained to analyze the deformation of a long and slender composite beam. The beam has initial geometric imperfection and is subjected to impact load. The impact procedures are applied by rigid body with a specific speed, off-center and at a certain distance from the beam's surface. Hamilton's principle and the von-Karman nonlinear strain-displacement relationship are used to obtain the equations of motion that are based on displacement and in a set of coupled nonlinear partial differential equations in dynamic mode. The generalized differential quadrature Method (GDQM) is used to discretize the obtained equations and convert them into a set of ordinary differential equations. Newton-Raphson iterative scheme is employed to solve the resulting system of nonlinear algebraic equations. Then, by solving the equations of the system, the effects of initial geometric imperfection on the beam's deflection have been studied. Also, the effects of mass and the initial velocity of the impactor on the beam's deformation are investigated. The results of this research show that an increase in the amount of the initial velocity and mass of the impactor entail an increase in the beam deformation.

1- مقدمه

نمود.

از جمله تحقیقات انجام شده پیرامون تحلیل ستون ها پژوهش آری گور و همکارانش برای به دست آوردن پاسخ دینامیکی یک ستون تحت بار ضربه محوری می باشد. در این مطالعه که به صورت تئوری و آزمایشگاهی انجام شده است ستون با نقص هندسی اولیه در نظر گرفته شده و معیاری هم برای کمانش دینامیکی تعریف شده است [3]. واس و جی کمانش ستون در اثر بار ضربه ای را در حالت خطی بررسی کرده اند. با حل هم زمان معادله موج و معادله تیر اویلر- برنولی اثر انتشار موج نیز در محاسبات لحاظ شده است.

مواد مرکب کاربرد گسترده ای در صنایع مختلف از جمله هوافضا، اتومبیل سازی، کشتی سازی و صنایع دیگر دارند. تاکنون تحقیقات بسیاری برای تحلیل تیرها و ورق ها از جنس مواد مرکب تحت بارگذاری های مختلف از جمله بارهای ضربه ای صورت گرفته است. در برخی از این پژوهش ها به تحلیل ورق ها تحت بارگذاری ضربه ای پرداخته شده که می توان به پژوهش یانگ و چانگ در سال 1989 که با روش المان محدود صورت گرفته [1] و یا پژوهش آبراموویچ و گرانوالد که به صورت آزمایشگاهی انجام شده [2] اشاره

Please cite this article using:

K. Ghatreh Samani, A. R. Fotuhi, A. R. Shafiei, Analysis of composite beam, having initial geometric imperfection, subjected to off-center impact, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 5, pp. 185-192, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

به صورت تیر در نظر گرفته می‌شود، این پژوهش برای تحلیل قطعاتی از جنس مواد مرکب که تحت ضربه قرار می‌گیرند می‌تواند به کار رود.

2- معادلات حرکت

یک تیر به طول l ، عرض b و ضخامت h مطابق "شکل 1"، در نظر بگیرید. میدان جابجایی با توجه به تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم ردی مطابق رابطه (1) در نظر گرفته می‌شوند.

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) + z\phi(x, t) - c_1 z^3 (\phi(x, t) + \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial \bar{w}_0(x)}{\partial x})$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) - \bar{w}_0(x) \quad (1)$$

که در آن $c_1 = 4/3h^2$ در نظر گرفته شده و $\bar{w}_0(x)$ نقص هندسی اولیه را نشان می‌دهد. u_0 ، w_0 و ϕ به ترتیب نشان‌دهنده جابجایی طولی مقطع میانی تیر، جابجایی عرضی و چرخش سطح نسبت به محور عمودی می‌باشند. بنابراین با توجه به رابطه کرنش - تغییرمکان ون - کارمن و میدان جابجایی می‌توان روابط غیرخطی کرنش را به دست آورد.

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi}{\partial x} - c_1 z^3 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x} \right)^2$$

$$\gamma_{xz} = \phi - 3c_1 z^2 \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x} \quad (2)$$

برای به دست آوردن معادلات، تیر از جنس ماده مرکب در نظر گرفته شده که توسط یک جسم صلب با سرعت v_0 ، تحت ضربه در فاصله e از مرکز سطح مقطع تیر قرار می‌گیرد. با استفاده از اصل همپلتون و انتگرال‌گیری جزیه‌جز و همچنین استفاده از روابط کرنش-جابجایی و برابر صفر قرار دادن ضرایب δu_0 ، δw_0 و $\delta \phi$ معادلات غیرخطی حاکم به دست می‌آیند.

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \quad (3-الف)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - c_1 \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} - Q_x + 3c_1 R_x = (I_2 - 2c_1 I_4 + c_1^2 I_6) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (3-ب)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + c_1 \frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} - 3c_1 \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (3-پ)$$

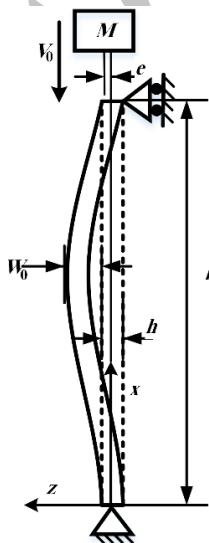


Fig. 1 beam model

شکل 1 مدل تیر

تأثیر جرم و سرعت برخوردکننده بررسی شده و نتایج نشان می‌دهد جرم برخوردکننده تأثیر بسیاری بر زمان کمناش دارد، در صورتی که سرعت برخوردکننده تأثیر چندانی بر روی این کمیت ندارد [4].

برخی پژوهش‌ها برای ساختارهای جدار نازک انجام شده است، کویباک در سال 2011 پاسخ دینامیکی ستون‌های جدار نازک با مقطع عرضی باز تحت بار فشاری ضربه‌ای را مورد بحث قرار داده است. در این پژوهش از روش عددی - تحلیلی برای آنالیز مسئله کمناش دینامیکی استفاده شده است [5]. تیترو و کولاکوسی به تجزیه و تحلیل پاسخ دینامیکی ستون‌های جدار نازک از جنس ماده مرکب با مقطع عرضی باز پرداخته‌اند. نیروهای اینرسی در این پژوهش در نظر گرفته شده‌اند و سه معیار پایداری برای بررسی پاسخ دینامیکی اعمال شده است [6].

جی و واس جابجایی عرضی یک تیر باریک و با نقص هندسی اولیه را تحت بارگذاری ضربه‌ای محوری بررسی کردند. در این مطالعه تأثیر نقص هندسی اولیه بر رفتار ستون بررسی شده است [7]. در سال 2015 رضوانیان و همکارانش تغییرشکل ستون تحت ضربه غیرمحوری با استفاده از یک جسم صلب را بررسی کردند. با به‌کارگیری اصل همپلتون و استفاده از مدل تیر تیموشینکو معادلات حرکت به صورت غیرخطی به دست آمده‌اند. در این پژوهش از روش نیومارک و روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته برای حل معادلات غیرخطی وابسته به زمان استفاده شده است [8].

طاهری و زانگ پاسخ کمناش تیر با نقص هندسی اولیه و تحت نیروی ضربه محوری را با روش دیفرانسیل محدود بررسی کردند. فرض تیر تیموشینکو و رابطه کرنش-تغییرمکان ون-کارمن برای به دست آوردن معادلات استفاده شده است. در سال 2002 تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول [9] و در پژوهشی دیگر در سال 2003 از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالا [10] برای تعیین میدان جابجایی استفاده شده است. تأثیرات نقص هندسی اولیه و همچنین تأثیر سرعت ضربه بر تیر بررسی شده است.

در حالت ضربه سرعت پایین، پژوهش‌هایی بر روی ورق‌ها و تیرها صورت گرفته است. داریوشی و صدیقی [11] با استفاده از تئوری غیرخطی مرتبه بالا، رفتار تیرهای ساندویچی را بررسی کردند. در این پژوهش اثر برخورد ضربه‌زننده در سرعت‌های مختلف به صورت تحلیلی و آزمایشگاهی بررسی شد. پاک‌نژاد و همکارانش [12]، اثرات بار ضربه‌ای با جرم کوچک را روی یک ورق کامپوزیتی با تکیه‌گاه تمام گیردار با استفاده از روش گالرکین مطالعه و تأثیر پارامترهای جرم و سرعت ضربه‌زننده را بر سازه بررسی کردند. صیفوری و همکارانش [13]، اثر ضربه کم‌سرعت قائم بر روی نانو تیر تیموشینکو را براساس تئوری غیرمحلی برای بررسی رفتار دینامیکی نانو تیر ارائه کردند. در این پژوهش تأثیر نسبت جرم نانو تیر به پرتابه بر روی تغییرشکل دینامیکی نانو تیر تیموشینکو بررسی شد.

در مطالعه حاضر، تغییرشکل یک تیر از جنس ماده مرکب با نقص هندسی اولیه تحت ضربه یک جسم صلب بررسی شده است. ضربه به صورت خارج از مرکز به ستون زده می‌شود. با استفاده از اصل همپلتون و براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم معادلات حرکت به صورت مجموعه‌ای از معادلات غیرخطی و دینامیکی به دست آمده است. از روش نیومارک و تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته برای تبدیل معادلات غیرخطی با مشتقات جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده شده است. برای حل معادلات غیرخطی از روش تکرار نیوتن-رافسون استفاده شده و اثر مقدار نقص هندسی اولیه و چیدمان لایه‌ها بر تیر بررسی شده است. تأثیر سرعت و جرم ضربه‌زننده نیز بر تغییرشکل تیر بررسی شده است. با توجه به کاربرد قطعاتی که در سازه‌ها

روابط (4) و (5) و (6) جهت ساده سازی معادلات استفاده شده است.

$$(N_{xx}; M_{xx}) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}(1; z) dz \quad (4)$$

$$(Q_x; R_x) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}(1; z^2) dz \quad (5)$$

$$(I_0; I_2; I_4; I_6) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1; z^2; z^4; z^6) dz \quad (6)$$

شرایط مرزی در $x=l$ براساس اثر ضربه زنده طبق رابطه (7) و در $x=0$ با توجه به فرض تکیه گاه ساده طبق رابطه (8) تعریف می شود.

$$N_{xx} - \frac{M}{b} g + \frac{M}{b} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \frac{M(e - c_1 e^3)}{b} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

$$M_{xx} - c_1 P_{xx} + \frac{M(c_1 e^3 - e)}{b} g + \frac{M(e - c_1 e^3)}{b} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \frac{M(e^2 - 2c_1 e^4 + c_1^2 e^6)}{b} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

$$w_0 = 0 \quad (7)$$

$$u_0 = 0, \quad w_0 = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

در روابط قبل M جرم ضربه زنده و g شتاب گرانش می باشد. با فرض ساکن بودن تیر در لحظه $t=0$ شرایط اولیه برای سیستم به صورت رابطه (9) در نظر گرفته می شود.

$$u_0(x, 0) = \phi(x, 0) = w_0(x, 0) = 0 \quad x \in [0, l]$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial w_0}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad x \in [0, l]$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad x \in [0, l]$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}(l, 0) = -v_0 \quad (9)$$

رابطه بین تنش و کرنش برای لایه k ماده مرکب چندلایه طبق رابطه (10) تعریف می شود.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (10-الف)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (10-ب)$$

که \bar{Q}_{ij} ها ضریب سختی تبدیل ماده می باشند [14]. برای تیر بلند روابط بین تنش و کرنش مطابق معادلات (11-الف و ب) ساده می شوند.

$$\sigma_{xx} = \bar{Q}_{11} \epsilon_{xx} \quad (11-الف)$$

$$\tau_{xz} = \bar{Q}_{55} \gamma_{xz} \quad (11-ب)$$

با جایگذاری روابط (11-الف و ب) در روابط (3-الف، ب و پ) و با توجه به رابطه (2) معادلات حرکت برحسب جابجایی ها به دست می آیند.

$$A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} \right) + (B_{11} - c_1 E_{11}) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - c_1 E_{11} \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \bar{w}_0}{\partial x^3} \right) \right) = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \quad (12-الف)$$

$$(B_{11} - c_1 E_{11}) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} \right) + (D_{11} - 2c_1 F_{11} + c_1^2 H_{11}) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + (c_1^2 H_{11} - c_1 F_{11}) \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \bar{w}_0}{\partial x^3} \right)$$

$$+ (6c_1 D_{55} - A_{55} - 9c_1^2 F_{55}) \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x} \right) = (I_2 - 2c_1 I_4 + c_1^2 I_6) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (12-ب)$$

$$c_1 E_{11} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right) + (c_1 F_{11} - c_1^2 H_{11}) \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right) - c_1^2 H_{11} \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 \bar{w}_0}{\partial x^4} \right) + \frac{3}{2} A_{11} \left(\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \right)$$

$$+ (A_{55} - 6c_1 D_{55} + 9c_1^2 F_{55}) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} \right) + A_{11} \left(\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \right)$$

$$+ (B_{11} - c_1 E_{11}) \left(\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \right) - A_{11} \left(\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x} \right)^2 \right)$$

$$= I_0 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) \quad (12-پ)$$

همانند مراحلی که برای معادلات حرکت انجام شد، برای شرایط مرزی نیز صورت گرفته و بنابراین معادله (7) نیز براساس جابجایی ها مطابق رابطه (13) خواهد شد.

$$A_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x} \right)^2 \right) + (B_{11} - c_1 E_{11}) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - c_1 E_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} \right) = \frac{M}{b} g - \frac{M}{b} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}$$

$$+ \frac{M(c_1 e^3 - e)}{b} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + (B_{11} - c_1 E_{11}) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x} \right)^2 \right)$$

$$+ (D_{11} - 2c_1 F_{11} + c_1^2 H_{11}) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + (c_1^2 H_{11} - c_1 F_{11}) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} \right) = \frac{M(e - c_1 e^3)}{b} g + \frac{M(c_1 e^3 - e)}{b} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}$$

$$- \frac{M(e^2 - 2c_1 e^4 + c_1^2 e^6)}{b} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (13)$$

که در آن

$$(A_{11}; B_{11}; D_{11}; E_{11}; F_{11}; H_{11}) = \sum_{k=1}^N \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{11}^{(k)}(1; z; z^2; z^3; z^4; z^6) dz$$

$$(A_{55}; D_{55}; F_{55}) = \sum_{k=1}^N \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{55}^{(k)}(1; z^2; z^4) dz \quad (14)$$

3- حل عددی

برای حل معادلات پاره ای حاکم بر سیستم روش های نیومارک و تریب دیفرانسیلی تعمیم یافته استفاده می شود تا معادلات به مجموعه ای از معادلات جبری تبدیل شوند.

روش نیومارک یکی از روش های عددی برای حل مسائل دینامیکی می باشد، در این روش توابع شتاب و سرعت برای مرحله $k \geq 1$ به صورت زیر تقریب زده می شوند [15].

$$\begin{aligned}
& (B_{11} - c_1 E_{11}) \left[\sum_{j=2}^N a_{ij}^{(2)} u_0^{k+1}(x_j) + \frac{\pi^3}{2l^3} W_0^2 \sin\left(\frac{2\pi(x_i)}{l}\right) \right. \\
& \left. + \left(\sum_{j=2}^{N-1} a_{ij}^{(1)} w_0^{k+1}(x_j) \right) \left(\sum_{j=2}^{N-1} a_{ij}^{(2)} w_0^{k+1}(x_j) \right) \right] \\
& + (D_{11} - 2c_1 F_{11} + c_1^2 H_{11}) \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}^{(2)} \phi^{k+1}(x_j) \right) \\
& + (c_1^2 H_{11} - c_1 F_{11}) \left(\sum_{j=2}^{N-1} a_{ij}^{(3)} w_0^{k+1}(x_j) + \frac{\pi^3}{l^3} W_0 \cos\left(\frac{\pi(x_i)}{l}\right) \right) \\
& + (6c_1 D_{55} - A_{55} - 9c_1^2 F_{55}) (\phi^{k+1}(x_i) + \sum_{j=2}^{N-1} a_{ij}^{(1)} w_0^{k+1}(x_j) \\
& - \frac{\pi}{l} W_0 \cos\left(\frac{\pi(x_i)}{l}\right)) - \frac{(I_2 - 2c_1 I_4 + c_1^2 I_6)}{\Delta t^2} (\phi^{k+1}(x_i)) = \\
& - (I_2 - 2c_1 I_4 + c_1^2 I_6) \left(\frac{1}{\Delta t^2} \phi^k(x_i) + \frac{1}{\Delta t} \dot{\phi}^k(x_i) - \frac{1}{2} \ddot{\phi}^k(x_i) \right) \quad (\text{ب-21})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{11} \left[\frac{\pi^3}{2l^3} W_0^2 \sin\left(\frac{2\pi(x_i)}{l}\right) \left(\sum_{j=2}^{N-1} a_{ij}^{(1)} w_0^{k+1}(x_j) \right) \right. \\
& \left. - \frac{\pi^2}{2l^2} W_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi(x_i)}{l}\right) \left(\sum_{j=2}^{N-1} a_{ij}^{(2)} w_0^{k+1}(x_j) \right) \right] \\
& + c_1 E_{11} \left(\sum_{j=2}^N a_{ij}^{(3)} u_0^{k+1}(x_j) \right) \\
& + (c_1 F_{11} - c_1^2 H_{11}) \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}^{(3)} \phi^{k+1}(x_j) \right) \\
& - c_1^2 H_{11} \left(\sum_{j=2}^{N-1} a_{ij}^{(4)} w_0^{k+1}(x_j) - \frac{\pi^4}{l^4} W_0 \sin\left(\frac{\pi(x_i)}{l}\right) \right) \\
& + (A_{55} - 6c_1 D_{55} + 9c_1^2 F_{55}) \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} \phi^{k+1}(x_j) \right) \\
& + \sum_{j=2}^{N-2} a_{ij}^{(2)} w_0^{k+1}(x_j) + \frac{\pi^2}{l^2} W_0 \sin\left(\frac{\pi(x_i)}{l}\right) \\
& + A_{11} \left[\left(\sum_{j=2}^N a_{ij}^{(2)} u_0^{k+1}(x_j) \right) \left(\sum_{j=2}^{N-1} a_{ij}^{(1)} w_0^{k+1}(x_j) \right) \right. \\
& \left. + \left(\sum_{j=2}^N a_{ij}^{(1)} u_0^{k+1}(x_j) \right) \left(\sum_{j=2}^{N-1} a_{ij}^{(2)} w_0^{k+1}(x_j) \right) \right] \\
& + \frac{3}{2} A_{11} \left[\left(\sum_{j=2}^{N-1} a_{ij}^{(1)} w_0^{k+1}(x_j) \right)^2 \left(\sum_{j=2}^{N-1} a_{ij}^{(2)} w_0^{k+1}(x_j) \right) \right] \\
& + (B_{11} - c_1 E_{11}) \left[\left(\sum_{j=1}^N a_{ij}^{(2)} \phi^{k+1}(x_j) \right) \left(\sum_{j=2}^{N-1} a_{ij}^{(1)} w_0^{k+1}(x_j) \right) \right. \\
& \left. + \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} \phi^{k+1}(x_j) \right) \left(\sum_{j=2}^{N-1} a_{ij}^{(2)} w_0^{k+1}(x_j) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}^{k+1} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\phi^{k+1} - \phi^k) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\phi}^k - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\phi}^k \\
\phi^{k+1} &= \dot{\phi}^k + (1 + \alpha) \Delta t \dot{\phi}^k + \alpha \Delta t \ddot{\phi}^{k+1} \\
\phi &\in \{u_0, \phi, w_0\} \quad (15)
\end{aligned}$$

در معادله بالا α و β به ثوابت نیومارک معروف هستند که مقدار آن‌ها پایداری و دقت روش را تعیین می‌کند. برای پایداری بدون شرط روش نیومارک در این پژوهش $\alpha=0.5$ و $\beta=1$ در نظر گرفته شده است.

برای تبدیل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای به معادلات جبری از روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته استفاده شده است. در این روش تیر به N نقطه گسسته سازی می‌شود و در هر یک از نقاط مشتقات پاره‌ای به صورت مجموع توابع وزنی خطی در نظر گرفته می‌شوند. ضرایب وزنی برای مشتق مرتبه اول طبق رابطه (16) و برای مشتق مرتبه n با توجه به رابطه (17) تعیین می‌شوند [16].

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{M(x_i)}{(x_i - x_j)M(x_j)} : \text{for } i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, N \quad (\text{الف-16})$$

$$a_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}^{(1)} \quad (\text{ب-16})$$

$$a_{ij}^{(n)} = n \left(a_{ij}^{(1)} a_{ij}^{(n-1)} - \frac{a_{ij}^{(n-1)}}{x_i - x_j} \right) : \text{for } i, j = 1, 2, \dots, N \quad i \neq j \quad (\text{الف-17})$$

$$a_{ii}^{(n)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}^{(n)} \quad (\text{ب-17})$$

که در رابطه (16-الف)، $M(x_k)$ به صورت رابطه (18) با توجه به مختصات نقاط به دست می‌آید.

$$M(x_k) = \prod_{j=1, j \neq k}^N (x_k - x_j) \quad (18)$$

برای تعیین مختصات نقاط در طول تیر از معادله چبیشف - گوس - لوباتو طبق رابطه (19) استفاده شده است [17].

$$x_i = \frac{l}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{i-1}{N-1} \pi\right) \right] \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (19)$$

نقص هندسی اولیه به صورت تابع نیم موج سینوسی طبق رابطه (20) در نظر گرفته شده است [18].

$$\bar{w}_0(x) = W_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (20)$$

که در رابطه بالا W_0 مقدار بیشینه نقص هندسی اولیه را نشان می‌دهد. با توجه به توضیحات عنوان شده و استفاده از روش‌های عددی بالا، معادلات حرکت به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
& A_{11} \left[\sum_{j=2}^N a_{ij}^{(2)} u_0^{k+1}(x_j) + \frac{\pi^3}{2l^3} W_0^2 \sin\left(\frac{2\pi(x_i)}{l}\right) \right. \\
& \left. + \left(\sum_{j=2}^{N-1} a_{ij}^{(1)} w_0^{k+1}(x_j) \right) \left(\sum_{j=2}^{N-1} a_{ij}^{(2)} w_0^{k+1}(x_j) \right) \right] \\
& - c_1 E_{11} \left(\sum_{j=2}^{N-1} a_{ij}^{(3)} w_0^{k+1}(x_j) + \frac{\pi^3}{l^3} W_0 \cos\left(\frac{\pi(x_i)}{l}\right) \right) \\
& + (B_{11} - c_1 E_{11}) \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}^{(2)} \phi^{k+1}(x_j) \right) - \frac{I_0}{\Delta t^2} u_0^{k+1}(x_i) \\
& = -I_0 \left(\frac{1}{\Delta t^2} u_0^k(x_i) + \frac{1}{\Delta t} \dot{u}_0^k(x_i) - \frac{1}{2} \ddot{u}_0^k(x_i) \right) \quad (\text{الف-21})
\end{aligned}$$

4- نتایج عددی

برای حل عددی معادلات از ماده مرکب با جنس شیشه/پوکسی با 8 لایه متقارن $[0]_8$ برای تیر استفاده شده است. خواص این ماده مرکب طبق جدول 1 می باشد، همچنین مشخصات هندسی این تیر نیز در این جدول ذکر شده است. مقدار بیشینه نقص هندسی اولیه برابر 10٪ ضخامت فرض شده است. ضربه زننده به جرم 0.1 کیلوگرم با سرعت 5 متر بر ثانیه و در فاصله 0.0002 متر از مرکز به تیر برخورد می کند.

برای درستی سنجی مطالعه حاضر، نتایج با حاصل پژوهش طاهری و ژانگ [10] برای حالتی که ضربه محوری زده می شود، مقایسه شده است. برای این مقایسه جابجایی محوری تیر در "شکل 2" نشان داده شده است. همان طور که در "شکل 2" مشاهده می شود، با درصد خطای 9% می توان گفت تطابق خوبی وجود دارد. بنابراین می توان از این روش جهت حل معادلات حاکم بر سیستم استفاده نمود. در ادامه به بررسی تیر با نقص هندسی اولیه و به صورت ضربه خارج از محور پرداخته می شود.

با در نظر گرفتن اطلاعات موجود در جدول 1 جابجایی محوری نوک تیر و خیز عرضی وسط تیر در "شکل 3 و 4" برحسب زمان نمایش داده شده است.

با توجه به "شکل 4"، خیز تیر پس از رسیدن موج حاصل از برخورد جسم به وسط تیر شروع می شود و در زمان حدود 0.4 میلی ثانیه به حداکثر مقدار می رسد.

در ادامه برای بررسی تأثیر هر یک از پارامترها بر زمان تماس و تغییر شکل تیر، نمودارها تا لحظه جدایش ضربه زننده از تیر ترسیم خواهد شد. این زمان با در نظر گرفتن این نکته که تا زمانی که نیروی بین

جدول 1 ابعاد و مشخصات مکانیکی تیر

Table 1. Dimensions and mechanical properties of column

پارامتر	مقدار
طول (l)	0.25 (m)
عرض (b)	0.02 (m)
ضخامت (h)	0.0016 (m)
چگالی (ρ)	2100 (kgm ⁻³)
مدول یانگ طولی (E_1)	39 (GPa)
مدول یانگ عرضی (E_2)	8.6 (GPa)
مدول برشی (G_{12})	3.8 (GPa)
ضریب پواسون (ν_{12})	0.28

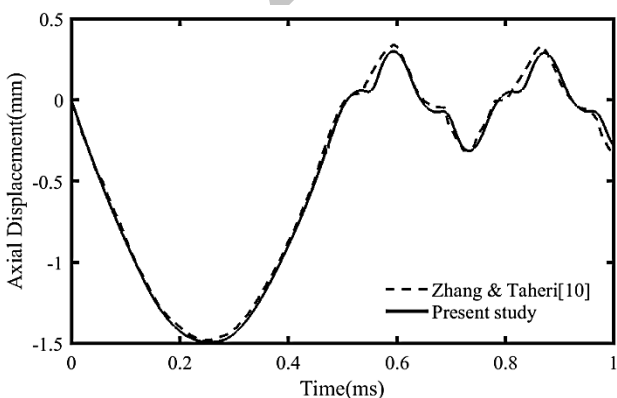


Fig. 2 Axial displacement of the beam

شکل 2 جابجایی محوری تیر

$$-\frac{I_0}{\Delta t^2} w_0^{k+1}(x_i) = -I_0 \left(\frac{1}{\Delta t^2} w_0^k(x_i) + \frac{1}{\Delta t} \dot{w}_0^k(x_i) - \frac{1}{2} \ddot{w}_0^k(x_i) \right) \quad (21-p)$$

مانند معادلات حرکت، شرایط مرزی نیز بازنویسی می شوند.

$$A_{11} \left[\left(\sum_{j=2}^N a_{Nj}^{(1)} u_0^{k+1}(x_j) \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=2}^{N-1} a_{Nj}^{(1)} w_0^{k+1}(x_j) \right)^2 - \frac{\pi^2}{2l^2} W_0^2 \right] + (B_{11} - c_1 E_{11}) \left(\sum_{j=1}^N a_{Nj}^{(1)} \phi^{k+1}(x_j) \right) - c_1 E_{11} \left(\sum_{j=2}^{N-1} a_{Nj}^{(2)} w_0^{k+1}(x_j) \right) + \frac{M}{\Delta t^2} \left(u_0^{k+1}(x_N) + (e - c_1 e^3) \phi^{k+1}(x_N) \right) = Mg + M \left(\frac{1}{\Delta t^2} u_0^k(x_N) + \frac{1}{\Delta t} \dot{u}_0^k(x_N) - \frac{1}{2} \ddot{u}_0^k(x_N) \right) + M(e - c_1 e^3) \left(\frac{1}{\Delta t^2} \phi^k(x_N) + \frac{1}{\Delta t} \dot{\phi}^k(x_N) - \frac{1}{2} \ddot{\phi}^k(x_N) \right) + (B_{11} - c_1 E_{11}) \left[\left(\sum_{j=2}^N a_{Nj}^{(1)} u_0^{k+1}(x_j) \right) - \frac{\pi^2}{2l^2} W_0^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=2}^{N-1} a_{Nj}^{(1)} w_0^{k+1}(x_j) \right)^2 \right] + (c_1^2 H_{11} - c_1 F_{11}) \left(\sum_{j=2}^{N-1} a_{Nj}^{(2)} w_0^{k+1}(x_j) \right) + (D_{11} - 2c_1 F_{11} + c_1^2 H_{11}) \left(\sum_{j=1}^N a_{Nj}^{(1)} \phi^{k+1}(x_j) \right) + \frac{M}{b \Delta t^2} \left[(e - c_1 e^3) u_0^{k+1}(x_N) + (e^2 - 2c_1 e^4 + c_1^2 e^6) \phi^{k+1}(x_N) \right] = \frac{(e - c_1 e^3) M g}{b} + \frac{M(e - c_1 e^3)}{b} \left(\frac{1}{\Delta t^2} u_0^k(x_N) + \frac{1}{\Delta t} \dot{u}_0^k(x_N) - \frac{1}{2} \ddot{u}_0^k(x_N) \right) + \frac{M(e^2 - 2c_1 e^4 + c_1^2 e^6)}{b} \left(\frac{1}{\Delta t^2} \phi^k(x_N) + \frac{1}{\Delta t} \dot{\phi}^k(x_N) - \frac{1}{2} \ddot{\phi}^k(x_N) \right)$$

$$w_0(x_N) = 0 \quad (22)$$

$$u_0(x_1) = 0$$

$$w_0(x_1) = 0$$

$$\sum_{j=1}^N a_{1j}^{(1)} \phi^{k+1}(x_j) = 0 \quad (23)$$

معادلات به صورت مجموعه ای از معادلات جبری که دارای $(3N \times 3N)$ معادله و مجهول است، تبدیل می شوند. سه شرط مرزی در $x=0$ با توجه به معادله (23) و سه شرط مرزی دیگر در $x=l$ با توجه به رابطه (22) اعمال شده و در نهایت برای تعیین جابجایی ها از روش تکرار نیوتن-رافسون استفاده خواهد شد [19]. روش تکرار نیوتن-رافسون یکی از بهترین و قدرتمندترین روش های شناخته شده برای حل مسائل غیرخطی سیستم ها می باشد.

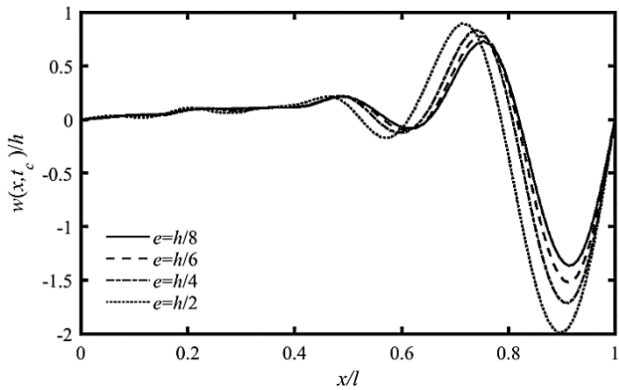


Fig. 6 Effect of off-center distance on transverse deformation

شکل 6 تأثیر فاصله خروج از مرکزی بر تغییرشکل عرضی

همان‌طور که از "شکل 5" مشخص است با افزایش نقص هندسی اولیه تغییرشکل عرضی تیر افزایش می‌یابد.

با توجه به "شکل 6" مشاهده می‌شود با افزایش فاصله خروج از مرکزی تغییرشکل عرضی تیر نیز افزایش می‌یابد.

برای بررسی اثر سرعت ضربه‌زننده بر تیر، بیشینه تغییرشکل تیر در حالتی که جرم ضربه‌زننده ثابت است و با سرعت‌های مختلف به تیر برخورد می‌کند در "شکل 7" ترسیم شده است. همچنین اثر جرم ضربه‌زننده بر بیشینه تغییر شکل تیر در "شکل 8" نشان داده شده است.

با توجه به "شکل‌های 7 و 8" مشخص است، جرم ضربه‌زننده بر زمان تماس و همچنین بیشینه تغییرشکل عرضی مؤثر است. با افزایش جرم ضربه‌زننده بر زمان تماس تأثیر چندانی ندارد اما بر مقدار تغییرشکل عرضی تیر به‌طور قابل‌توجهی تأثیر می‌گذارد.

در "شکل 9" تأثیر لایه چینی‌های مختلف بر تغییرشکل تیر بررسی شده است. در این شکل سه لایه چینی متقارن، پادمقارن و نامتقارن با زاویه‌های مختلف و همچنین تیر با لایه‌های صفر درجه ترسیم شده است.

با توجه به شکل، بیشینه تغییرشکل در حالتی که لایه چینی فقط با زاویه صفر باشد، دارای کمترین مقدار و در حالتی که چیدمان لایه‌ها پادمقارن باشد، دارای بیشترین مقدار است. بنابراین در چیدمان لایه‌ها در مواد مرکب برای کمترین تغییرشکل بهتر است از لایه با زاویه‌های صفر استفاده نمود.

5- نتیجه‌گیری

در این پژوهش از تئوری مرتبه سوم برشی برای مدل کردن تغییرشکل یک

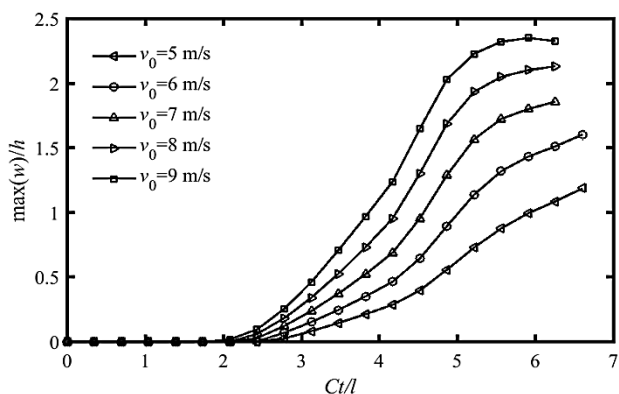


Fig. 7 Effect of impact velocity on maximum transverse deformation

شکل 7 تأثیر سرعت ضربه‌زننده بر بیشینه تغییرشکل عرضی

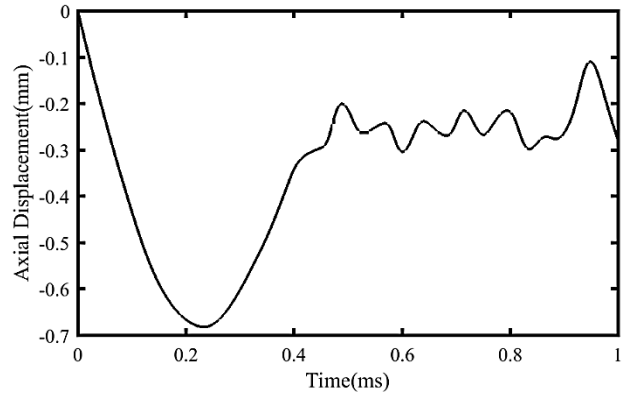


Fig. 3 Axial displacement of the beam

شکل 3 جابجایی محوری تیر

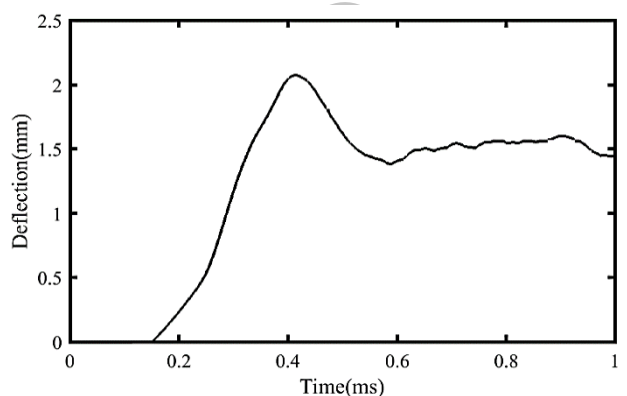


Fig. 4 Deflection of the beam

شکل 4 تغییرشکل تیر

ضربه‌زننده و تیر فشاری باشد، تیر و ضربه‌زننده در تماس می‌باشند، قابل محاسبه است.

برای بررسی زمان بی‌بعد سرعت انتشار موج با توجه به معادله (24) به دست می‌آید.

$$C = \sqrt{\frac{A_{11}}{I_0}} \quad (24)$$

که I_0 و A_{11} به ترتیب در معادلات (6) و (14) تعریف شده‌اند. تأثیر نقص هندسی اولیه و همچنین تأثیر فاصله خروج از مرکزی به ترتیب در "شکل‌های 5 و 6" نمایش داده شده است.

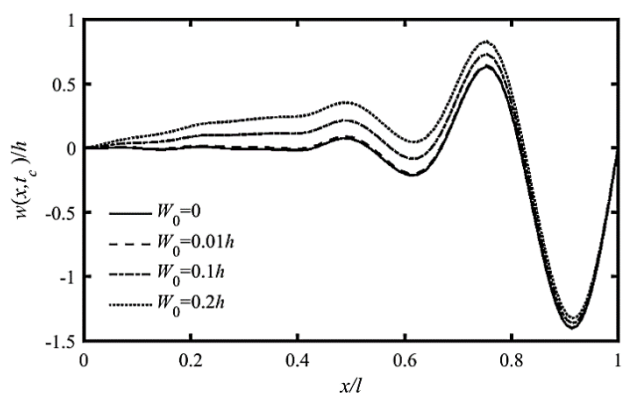


Fig. 5 Effect of initial geometric imperfections on transverse deformation

شکل 5 تأثیر نقص هندسی اولیه بر تغییرشکل عرضی

مدول برشی (GPa)	G_{12}
ارتفاع ستون (m)	h
طول ستون (m)	l
جرم ضربه‌زننده (kg)	M
تعداد گره‌ها در روش تریب دیفرانسیلی	N
ضرایب سختی تبدیل ماده	\bar{Q}_{ij}
زمان (s)	t
جابجایی طولی مقطع میانی ستون	u_0
جابجایی عرضی مقطع میانی ستون	w_0
نقص هندسی اولیه	\bar{w}_0
مقدار بیشینه نقص هندسی اولیه (m)	W_0
محورهای مختصات در سه بعد	x, y, z

علائم یونانی

ضریب پواسون	ν_{12}
چگالی (kgm^{-3})	ρ
چرخش سطح نسبت به محور عمودی	ϕ
مختصات گره‌ها در روش تریب دیفرانسیلی	i, j

7- مراجع

- [1] H. Yung, F. Chang, Transient dynamic analysis of laminated composite plate subjected to transverse impact, *Composite Structures*, Vol. 31, No. 3, pp. 453-466, 1989.
- [2] H. Abramovich, A. Grunwald, Stability of axially impacted composite plates, *Composite Structures*, Vol. 31, No. 1, pp. 151-158, 1995.
- [3] J. Ari-Gur, T. Weller, J. Sing, Experimental and theoretical studies of columns under axial impact, *solids and structures*, Vol. 18, No. 7, pp. 619-641, 1982.
- [4] W. Ji, A. M. Waas, Dynamic bifurcation buckling of an impacted column, *Engineering Science*, Vol. 46, No. 9, pp. 958-967, 2008.
- [5] T. Kubiak, Estimation of dynamic buckling for composite columns with open cross-section, *Computers and Structures*, Vol. 89, No. 21, pp. 2001-2009, 2011.
- [6] A. Teter, Z. Kolakowski, Coupled dynamic buckling of thin-walled composite columns with open cross-sections, *Composite Structures*, Vol. 95, No. 1, pp. 28-34, 2013.
- [7] W. Ji, A. M. Waas, The temporal evolution of buckling in a dynamically impacted column, *Applied Mechanics*, Vol. 80, No. 1, pp. 011026-1/7, 2013.
- [8] M. Rezvani, A. M. Baghestani, M. Danesh Pazhooh, S. J. Fariborz, Off-center impact of an elastic column by a rigid mass, *Mechanics Research Communications*, Vol. 63, No. 1, pp. 21-25, 2015.
- [9] Z. Zhang, F. Taheri, Numerical studies on dynamic pulse buckling of a FRP composite laminated beams subject to an axial impact, *Composite Structures*, Vol. 56, No. 3, pp. 269-277, 2002.
- [10] Z. Zhang, F. Taheri, Dynamic pulsebuckling and postbuckling of composite laminated beam using higher order shear deformation theory, *Composite part B*, Vol. 34, No. 4, pp. 391-398, 2003.
- [11] S. Dariushi, M. Sadighi, A nonlinear high order theory for analysis of sandwich beam with flexible core under low velocity impact, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 9, pp. 381-388, 2015. (in Persian فارسی)
- [12] R. Paknejad, F. Ashenai Ghasemi, K. Malekzadeh Fard, Response of fully-clamped composite laminated plate subjected to low-velocity impact using Galerkin method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 1, pp. 45-50, 2014. (in Persian فارسی)
- [13] S. Seifoori, G. H. Liaghat, M. Foladi, Low velocity impact on Timoshenko nanobeam using a nonlocal elasticity theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 8, pp. 151-160, 2013. (in Persian فارسی)
- [14] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, Second Edition, pp. 100-101, Boca Raton: CRC Press, 2004.
- [15] J. N. Reddy, *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, pp. 292-297, New York: Oxford University Press, 2004.

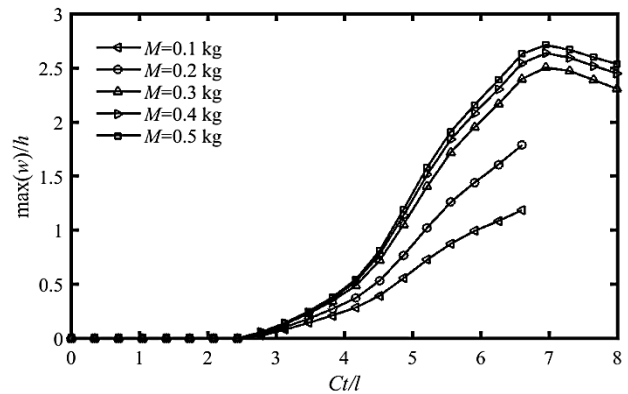


Fig. 8 Effect of impact mass on maximum transverse deformation

شکل 8 تأثیر جرم ضربه‌زننده بر بیشینه تغییر شکل عرضی

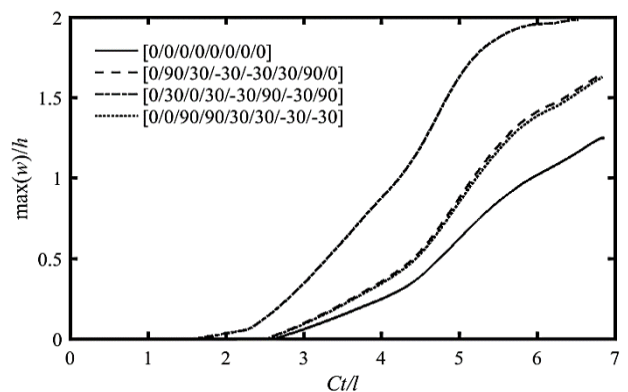


Fig. 9 Effect of angles of orientation of layers on maximum transverse deformation

شکل 9 تأثیر زاویه لایه‌ها بر بیشینه تغییر شکل عرضی

تیر با نقص هندسی اولیه تحت اثر ضربه غیرمحوری توسط یک جسم صلب استفاده شده است. معادلات با استفاده از اصل همپلتون به صورت مجموعه‌ای از معادلات غیرخطی و دینامیکی استخراج شدند. از روش نیومارک و تریب دیفرانسیلی تعمیم‌یافته برای گسسته‌سازی معادلات در حوزه زمان و مکان استفاده شد و سپس با استفاده از روش تکرار نیوتن-رافسون مجموعه معادلات جبری به دست آمده، حل شد. تأثیر سرعت و جرم ضربه‌زننده بر تغییر شکل تیر بررسی شد و نتایج نشان داد که جرم ضربه‌زننده بر زمان تماس و همچنین ماکزیمم تغییر شکل عرضی مؤثر است. سرعت ضربه‌زننده بر زمان تماس اثر چندانی نداشته اما بر مقدار تغییر شکل عرضی تیر به طور قابل توجهی تأثیر می‌گذارد. تأثیر نقص هندسی اولیه و فاصله خروج از مرکز بر تغییر شکل عرضی تیر بررسی شد، نتایج نشان داد با افزایش نقص هندسی اولیه و فاصله خروج از مرکز تغییر شکل عرضی تیر نیز افزایش می‌یابد. همچنین تأثیر لایه چینی‌های مختلف (متقارن، نامتقارن و پادمتقارن) بر تغییر شکل تیر بررسی شده است. در نهایت نتایج حاصل از این پژوهش با مطالعات پیشین مقایسه و صحت پژوهش در انجام این تحلیل بررسی شد.

6- فهرست علائم

ضرایب وزنی روش تریب دیفرانسیلی	a_{ij}
عرض ستون (m)	b
سرعت انتشار موج (ms^{-1})	C
مدول یانگ (GPa)	E_1, E_2

- [18] S. P. Timoshenko, J. M. Gere, *Theory of elastic stability*, Second Edition, pp. 31-32, New York: McGraw-Hill, 1961.
- [19] R. L. Burden, J. D. Faires, *Numerical Analysis*, Ninth Edition, pp. 638-643, Boston: Cengage Learning, 2010.
- [16] C. Shu, *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*, pp. 29-36, London: Springer, 2000.
- [17] H. Afshari, M. Irani, K. Torabi, Free whirling analysis of multi-step Timoshenko rotor with multiple bearing using DQEM, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 10, pp. 109-120, 2014. (in Persian فارسی)

Archive of SID