



مدل سازی انتشار موج تنش در میله یک بعدی میکروپولار با استفاده از روش توسعه یافته المان محدود موج

محسن میرزاجانی¹، ناصر خاجی^{2*}

1- دانشجوی دکترا، مهندسی زلزله، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استاد، مهندسی زلزله، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

* تهران، صندوق پستی 14115-397، nkhaji@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 27 اسفند 1395

پذیرش: 28 فروردین 1396

ارائه در سایت: 24 اردیبهشت 1396

کلید واژگان:

نظریه الاستیسیته میکروپولار

روش المان محدود موج

انتشار امواج

میله میکروپولار

ضربه

چکیده

در این مطالعه روش المان محدود موج جهت مدل سازی انتشار موج تنش در میله ناهمگن، خطی، ناهمسانگرد میکروپولار با سطح مقطع متغیر توسعه داده شده است. برای این منظور معادلات روش المان محدود موج بر پایه نظریه الاستیسیته میکروپولار توسعه داده شده و برای میله میکروپولار دو نوع موج با سرعت های سریع و کند شناسایی شده است. در نظریه میکروپولار یک درجه آزادی دورانی علاوه بر درجات آزادی نظریه کلاسیک الاستیسیته در نظر گرفته شده است. روش پیشنهادی در این مقاله برای حل مسائل انتشار امواج و همچنین ضربه در میله میکروپولار با لایه های مختلف به کار برده شده اند. نتایج به دست آمده با استفاده از این روش با نتایج تحلیلی و / یا عددی موجود مقایسه شده اند که تطابق بسیار خوبی بین این نتایج به دست آمده است.

Stress wave propagation modelling in one-dimensional micropolar rods using a new Wave Finite Element Method

Mohsen Mirzajani, Naser Khaji*

Faculty of Civil and Environmental Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

* P.O.B. 14115-397, Tehran, Iran, nkhaji@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 17 March 2017
Accepted 17 April 2017
Available Online 14 May 2017

Keywords:

Micropolar Elasticity
Wave Finite Element Method
Wave propagation
Micropolar rod
Impact

ABSTRACT

In this paper, the Wave Finite Element Method (WFEM) is developed for modelling of stress wave propagation in one-dimensional problem of nonhomogeneous linear, anisotropic micropolar rod of variable cross section. For this purpose, the WFEM equations are developed based on the micropolar theory of elasticity. Two kinds of waves with fast and slow velocities are detected. For micropolar medium, an additional rotational Degree of Freedom (DOF) is considered besides the classical elasticity's DOF. The method proposed in this paper is implemented to solve the wave propagation and impact problems in micropolar rods with different layers. The results of the proposed method are compared with some numerical and/or analytical solutions available in the literature, which indicate excellent agreement between the results.

1- مقدمه

مطالعه انتشار امواج در مصالح دارای میکروساختار¹ مانند کامپوزیت ها، فوم ها، سرامیک ها و مصالح دانه ای [1, 2] یکی از موضوع های با اهمیت در علم و فناوری به حساب می آید. نظریه الاستیسیته کلاسیک برای این نوع از مصالح قادر به مدل کردن کامل پدیده انتشار موج نیست. برای این منظور نظریه های تعمیم یافته یا مرتبه بالا پیشنهاد شده اند. نظریه برادران کوزرات که با نام نظریه میکروپولار² نیز شناخته می شود، یکی از نظریه های مرتبه بالای

برجسته به شمار می آید که برای نخستین بار توسط برادران کوزرات توسعه داده شده است [3]. نظریه های الاستیسیته مرتبه بالا در مراجع دیگر [4, 5] نیز مورد مطالعه قرار گرفته اند. تنش های مزدوج³ علاوه بر تنش های نیرویی در نظریه میکروپولار معرفی شده اند [6-9]. نظریه خطی الاستیسیته گرادیان⁴ برای حل مسئله میله تحت اثر کشش های یک محوری استاتیکی و دینامیکی در مرجع [10]، در مرجع [11] نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش برای مطالعه ارتعاش آزاد طولی

³ couple stresses

⁴ theory of gradient elasticity

¹ microstructure

² micropolar

Please cite this article using:

M. Mirzajani, N. Khaji, Stress wave propagation modelling in one-dimensional micropolar rods using a new Wave Finite Element Method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 5, pp. 405-412, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

2- محیط کوزرات (میکروپولار)

در این بخش روابط مربوط به مسائل مقدار اولیه مرزی مختلط⁶ در محیط میکروپولار خطی ارائه شده است. برای این منظور روابط پایه این مسائل برای محیط میکروپولار ناهمسانگرد بیان شده‌اند. تفاوت اصلی بین الاستیسیته کلاسیک و نظریه‌های پولار⁷ براساس این فرض است که نقاط مصالح جهت‌گیری خاصی را داراست. در نظریه میکرومورفیک⁸ علاوه بر درجات آزادی نظریه کلاسیک، n درجه آزادی اضافی همراه با سه دایرکتور انعطاف‌پذیر معرفی شده است. در نظریه میکرواسترچ⁹ این درجات آزادی به چهار کاهش می‌یابند. در نظریه میکروپولار درجات آزادی برابر سه همراه با دایرکتورهای صلب هستند [9].

در الاستیسیته میکروپولار جابه‌جایی u_l ، تانسور تنش نیرویی σ_{kl} ، و میکروجابه‌جایی ψ_l مستقل از سایر درجات آزادی و همچنین تانسور تنش مزدوج¹¹ μ_{kl} در نظر گرفته می‌شود. تانسورهای کرنش خطی به صورت روابط (2,1) تعریف می‌شود.

$$\varepsilon_{kl} = u_{l,k} + e_{lkm}\psi_m \quad (1)$$

$$\gamma_{kl} = \psi_{k,l} \quad (2)$$

e_{lkm} تانسور لوی-چیویتا¹² است. معادله‌های ساختاری¹³ میکروپولار برای مصالح ناهمسانگرد که تانسورهای تنش نیرویی و مزدوج را به تانسورهای کرنش خطی مرتبط می‌کنند به صورت روابط (4,3) بیان می‌شوند [34,9].

$$\sigma_{kl} = A_{klmn}\varepsilon_{mn} + C_{klmn}\gamma_{mn} \quad (3)$$

$$\mu_{kl} = C_{klmn}\varepsilon_{mn} + B_{klmn}\gamma_{mn} \quad (4)$$

A_{klmn} ، B_{klmn} و C_{klmn} مدول مصالح هستند. چگالی انرژی کرنشی و انرژی جنبشی برای این نوع مصالح به صورت روابط (6,5) تعریف می‌شوند.

$$P = \frac{1}{2}(A_{klmn}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn} + 2C_{klmn}\varepsilon_{kl}\gamma_{mn} + B_{klmn}\gamma_{kl}\gamma_{mn}) \quad (5)$$

$$K = \frac{1}{2}(\rho v_k^2 + \rho j_{kl}\omega_k^2) \quad (6)$$

ρ چگالی جرمی، v_k بردار سرعت و ω_k سرعت زاویه‌ای است. علاوه بر آن میکرواینرسی¹⁴ j_{kl} برای مصالح همسانگرد اسپین¹⁵ به صورت $j_{kl} = j\delta_{kl}$ تعریف می‌شود.

3- معادلات روش المان محدود موج بر پایه الاستیسیته میکروپولار

3-1- فرض‌های اساسی روش المان محدود موج

در این قسمت فرض‌های اساسی روش المان محدود موج با در نظر گرفتن یک میله الاستیک یکنواخت توضیح داده می‌شود (شکل 1). در این قسمت از بیان معادلات مربوط به روش المان محدود موج اجتناب شده و فقط به صورت توصیفی نحوه مدل‌سازی مسائل یک بعدی توضیح داده شده است. در قسمت بعدی این مقاله معادلات جدید پیشنهادی برای حل مسئله میله میکروپولار ارائه خواهد شد.

این میله به طول L ، و سطح مقطع ثابت A ، سرعت اولیه میله در لحظه $t_0 = 0$ برابر $v_0(x)$ است، در حالی که نیروهای طولی T_0^- و T_0^+ در دو

میکرومیله‌های مدرج تابعی¹ مورد استفاده قرار گرفته است. نمونه‌هایی از مطالعه‌های تجربی در نظریه الاستیسیته میکروپولار برای تعیین خصوصیات مصالح میکروپولار در مراجع [12-16] مطالعه شده است.

ضربه سرعت پایین در کامپوزیت‌های لایه‌ای با تورق چندگانه با استفاده از روش المان محدود در مرجع [17] مورد مطالعه قرار گرفته است. معادلات موج از تعادل نیرویی برای جابه‌جایی و برای دوران سطح مقطع در مرجع [18] توسعه داده شده و برای انکسار موج در رینگ‌های دایره‌ای جدار نازک مورد استفاده قرار گرفته است. تست‌های فشار دینامیکی تجربی و مدل‌سازی المان محدود برای مطالعه رفتارهای ماکروسکوپی و محلی فوم‌های پرپیلن تحت بارهای دینامیکی در مرجع [19] ارائه شده است. وجود موج‌های رابلی متفرق‌کننده در مطالعه انتشار موج با استفاده از نظریه‌های مرتبه بالا در مراجع [20,21] و انتشار موج صفحه‌ای در سیال میکروپولار در مرجع [22] مطالعه شده است. برای مطالعه انتشار موج صفحه‌ای در میله بی‌نهایت با سطح مقطع مستطیلی، نظریه الاستیسیته میکروپولار ارینگن² در مرجع [23] به کار برده شده است. مدلی از نوع میندلین برای توصیف موج‌های تغییرشکلی طولی در جسم‌های دارای میکروساختار در مرجع [24] استفاده شده است.

انتشار موج در یک نیم‌فضای بی‌نهایت میکروپولار و انعکاس موج‌های جابه‌جایی طولی صفحه‌ای از یک سطح هموار گیردار نیم‌فضای الاستیک میکروپولار در مرجع [25] بررسی شده است. نظریه خطی الاستیسیته گرایان برای حل تحلیلی مسئله میله تحت اثر کشش تک محوری استاتیکی و دینامیکی در مرجع [26] مورد استفاده قرار گرفته است. انتشار موج در موجبر استوانه‌ای با میکروساختار به صورت تئوری در مرجع [27] توسعه داده شده است.

روش المان محدود برای شبیه‌سازی مسائل انتشار امواج از قدرتمندترین روش‌ها محسوب می‌شود. این روش برای مدل‌سازی خصوصیات موج در فرایندهای ناپایا³ دارای نقص‌های ذاتی است. در سال‌های اخیر اصلاحاتی برای افزایش دقت این روش برای مسائل انتشار امواج پیشنهاد شده‌اند [28,29]. روش دیگری که با نام روش المان محدود موج⁴ شناخته می‌شود و در سال‌های اخیر پیشنهاد شده است [30-33]. قابلیت این روش در مدل‌سازی گسستگی‌ها شدید در سرعت‌ها، تنش‌ها و کرنش‌ها با سرعت موج محدود مزیت روش المان محدود موج است. روش المان محدود کلاسیک در این گونه از مسائل دچار ضعف ذاتی است. در این روش نیازی به فرمول‌بندی معادلات دیفرانسیل حرکت نیست و در نتیجه حل‌های تقریبی مورد نیاز نیست.

در این مقاله معادلات روش المان محدود موج برای حل مسائل انتشار موج و مسائل ضربه با در نظر گرفتن نظریه میکروپولار در میله‌های ناهمگن⁵ الاستیک با سطح مقطع مختلف برای نخستین بار توسعه داده شده است. هدف مقاله حاضر ارائه راه‌حل و معادلات جدید توسعه داده شده برای حل مسائل انتشار موج و ضربه در میله میکروپولار یک بعدی و بررسی توانایی روش المان محدود موج در حل این گونه مسائل است. مثال‌های عددی با استفاده از معادلات پیشنهادی جدید برای ارزیابی صحت و دقت معادلات پیشنهادی حل شده‌اند.

⁶ mixed boundary initial value problem

⁷ polar theories

⁸ micromorphic continuum theory

⁹ microstretch continuum theory

¹⁰ microdisplacement field

¹¹ couple stress tensor

¹² Levi-Civita tensor

¹³ constitutive equations

¹⁴ microinertia

¹⁵ spin-isotropic material

¹ functionally graded microbars

² Eringen's micropolar theory of elasticity

³ nonstationary

⁴ the Wave Finite Element Method (WFEM)

⁵ nonhomogeneous

می شود. تنها المان های مجاور انتشار جبهه موج در یک المان را تحت اثر قرار می دهند؛ در حالی که بارهای اعمالی در گره های با فاصله زیاد، و از حالتها^۳ (یعنی سرعتها، تنشها و کرنشها) در المان های با فاصله زیاد به مرزهای المان موجود در این گام زمانی نخواهند رسید. محاسبه حالت جدید هر المان بدون در نظر گرفتن محاسبات مربوط به المان های دیگر و با استفاده از فرمول های جبری بنیادی صورت می گیرد. راه حل ارائه شده به صورت نامشروط پایدار است.

3-2- معادله های روش المان محدود موج برای میله یک بعدی میکروپولار

در این بخش معادلات روش المان محدود موج برای مدل سازی انتشار موج در میله مستقیم، خطی، یک بعدی، ناهمسانگرد^۴ میکروپولار با تغییر شکل های کوچک توسعه داده می شوند. در نظریه الاستیسیته میله میکروپولار، تغییر شکل جسم با استفاده از جابه جایی محوری $u(x, t)$ و میکرو جابه جایی زاویه ای $\psi(x, t)$ تعیین می شود.

برای مدل یک بعدی میله موقعیت طول میله با x تعیین می شود. سینماتیک میله میکروپولار در شکل 2 نشان داده شده است، که کرنش نرمال و کرنش میکروپولار به صورت رابطه (7) تعریف می شود.

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{11} = \gamma = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7)$$

رابطه تنش-کرنش برای میله یک بعدی، الاستیک، ناهمسانگرد میکروپولار با استفاده از روابط (8,9) توصیف می شود.

$$\sigma_{11} = \sigma = A_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1111}\gamma_{11} = \bar{C}_1\varepsilon + \bar{C}_3\gamma \quad (8)$$

$$\mu_{11} = \mu = C_{1111}\varepsilon_{11} + B_{1111}\gamma_{11} = \bar{C}_2\varepsilon + \bar{C}_3\gamma \quad (9)$$

که $\bar{C}_1 \stackrel{\text{def}}{=} A_{1111}$, $\bar{C}_2 \stackrel{\text{def}}{=} C_{1111}$ و $\bar{C}_3 \stackrel{\text{def}}{=} B_{1111}$ پارامترهای ساختاری^۵ هستند که رفتار الاستیک میله را توصیف می کنند [36,35]. علاوه بر آن اندرکنش بین تغییر شکل طولی و دوران با این ضرایب کنترل می شود. این پارامترها مشابه با ضرایب A , B و C که در مرجع [35] پیشنهاد شده است.

فرض شود المان ها در لحظه t_{i-1}^+ در یک حالت شبه استاتیکی قرار دارند. در این لحظه مقادیر سرعت های طولی $v_{j,0}$ و زاویه ای $\omega_{j,0}$ و جابه جایی های مرزی $u_{j,0}^{\pm}$ و دوران $\psi_{j,0}^{\pm}$ برای هر المان $j = 1, 2, \dots, n$ معلوم است. کرنش های نرمال و میکروپولار را می توان با استفاده از رابطه (10) محاسبه کرد.

$$\varepsilon_{j,0} = \frac{u_{j,0}^+ - u_{j,0}^-}{\Delta x_j}, \quad \gamma_{j,0} = \frac{\psi_{j,0}^+ - \psi_{j,0}^-}{\Delta x_j} \quad (10)$$

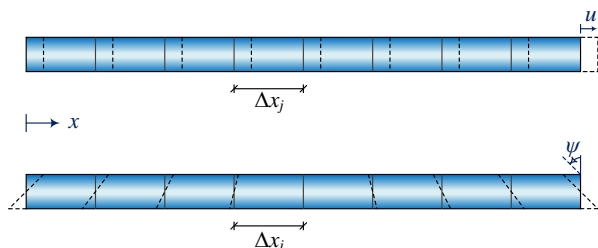


Fig. 2 Axial displacement and rotation of a micropolar rod from its initial to a deformed formation

شکل 2 جابه جایی محوری و دوران یک میله میکروپولار در دو حالت اولیه و تغییر شکل یافته

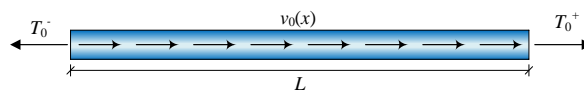


Fig. 1 A One-dimensional elastic rod

شکل 1 یک میله یک بعدی الاستیک

انتهای میله اعمال می شوند. برای این میله فرایند حل روش المان محدود موج به صورت زیر اعمال می شود:

- میله به n المان به طول $\Delta x = L/n$ تقسیم، و فرایند تغییر شکل در طول زمان به گام های زمانی کوچک $\Delta t = \Delta x/c$ تقسیم می شود، که Δx اندازه المان را نشان می دهد، و $c = \sqrt{E/\rho}$ سرعت انتشار موج طولی است (E مدول الاستیسیته است). بالانویس «+» به سمت راست المان اشاره دارد، در حالی که علامت «-» نشان دهنده سمت چپ المان است.

- المان ها به صورت $j = 1, 2, \dots, n$ و گره های بین المان ها به صورت $j = 1, 2, \dots, n+1$ شماره گذاری می شوند. فرض می شود که در لحظه های زمانی گسسته t^- (یعنی در انتهای گام زمانی پیشین)، تنشها و سرعت های یکنواخت در کل المان j (شامل مرزهای این المان نیز می شود) و برای هر کدام از المان ها مشخص شده باشند. نتیجه این فرض گسستگی های شدید تنش و سرعت در مرزهای المان های مجاور خواهد بود. این گسستگی ها برای یک جسم پیوسته فقط در یک لحظه زمانی بسیار کوچک می توانند وجود داشته باشند، و باید در لحظه زمانی t^+ تنشها و سرعت های جدید گرهی کاهش پیدا کنند.

- نتیجه این گسستگی ها انتشار جبهه های موج تنش، کرنش و سرعت از هر گره به المان های مجاور با سرعت ثابت c خواهد بود. با معلوم بودن معادله های ساختاری مصالح و این که سرعتها و بارهای گرهی در طول گام زمانی Δt تغییر نمی کنند، می توان فرایند انتشار جبهه موج به سمت یکدیگر، رسیدن این جبهه های موج به یکدیگر در وسط المان و انکسار این موج ها به سمت مرزهای المان را محاسبه کرد. برای آنالیز عددی تغییر تنش و سرعت در طول گام های زمانی، قوانین بقای جرم و ضربه^۱ باید به طور صحیح برای هر المان محدود و همچنین برای کل مدل برآورده شوند. جابه جایی ها در گره های مشترک المان های مجاور در کل فرایند انتشار موج پیوسته هستند و در هر گام زمانی به صورت $\Delta u_j = v_j^+ \Delta t$ تغییر می کنند.

- پس از گام زمانی Δt ، یک حالت شبه استاتیکی^۲ جدید در هر المان برقرار می شود که اجازه تکرار فرایند محاسبات را می دهد.

- نیروهای خارجی در طول المان فقط به گره های المان ها اختصاص داده می شوند. همچنین نیروها فقط در آغاز گام زمانی می توانند تغییر کنند و پس از آن در طول این گام زمانی ثابت خواهند بود. فرض مشابهی برای سرعت های گره ها در نظر گرفته می شود.

- در لحظه زمانی خیلی نزدیک t^+ ، حالت مکانیکی هر المان ثابت باقی خواهد ماند (یعنی شبه استاتیکی)، اما سرعت و جابه جایی در گره ها، مقدارهای جدیدی به خود می گیرند.

- وضعیت جدید هر المان j در لحظه زمانی t^+ با استفاده از حالت های معلوم خود المان و المان های مجاور ± 1 j در گام زمانی پیشین و نیروهای اثرکننده به گره های آن در طول گام زمانی مشخص تعریف

³ states

⁴ anisotropic

⁵ constitutive parameters

¹ laws of mass and impulse conservations

² quasi-static state

دوباره با اعمال قانون های مومنوم خطی و زاویه ای به کل المان z در طول گام زمانی Δt_i ، سرعت های جدید خطی v_j و زاویه ای ω_j در لحظه

$$v_j = v_{j,0} + \frac{(T_j^+ + T_j^-)\Delta t_i}{\rho_j A_j \Delta x_j} \quad (23)$$

$$\omega_j = \omega_{j,0} + \frac{(H_j^+ + H_j^-)\Delta t_i}{\rho_j C_{4j} \Delta x_j} \quad (24)$$

با استفاده از روابط (24,23, 21-18) می توان روابط (26,25) را نوشت.

$$v_j = v_j^+ + v_j^- - v_{j,0} \quad (25)$$

$$\omega_j = \omega_j^+ + \omega_j^- - \omega_{j,0} \quad (26)$$

جابه جایی و دوران جدید گرهی را می توان با استفاده از روابط (28,27)

به دست آورد:

$$u_j^\pm = u_{j,0}^\pm + v_j^\pm \Delta t_i \quad (27)$$

$$\psi_j^\pm = \psi_{j,0}^\pm + \omega_j^\pm \Delta t_i \quad (28)$$

شرط سازگاری و شرط تعادل در مرز مشترک بین المان ها با استفاده از

روابط (31-29) ارائه می شود.

$$v_{j-1}^+ = v_j^-, \quad \omega_{j-1}^+ = \omega_j^- \quad (29)$$

$$T_j^* - T_{j-1}^+ - T_j^- - 0.5\eta_v v_j (\Delta x_j + \Delta x_{j-1}) = 0 \quad (30)$$

$$H_j^* - H_{j-1}^+ - H_j^- - 0.5\eta_\omega \omega_j (\Delta x_j + \Delta x_{j-1}) = 0 \quad (31)$$

به منظور بیان تمامی پارامترها در لحظه t_i^- در ترم های گام زمانی Δt_i

روابط (21-18) را در روابط (31-29) جایگذاری می کنیم که منجر به روابط

زیر می شود:

$$v_j^- = \frac{\rho_j A_j \Delta x_j v_{j,0} + \rho_{j-1} A_{j-1} \Delta x_{j-1} v_{j-1,0}}{\rho_j A_j \Delta x_j + \rho_{j-1} A_{j-1} \Delta x_{j-1} + 0.5\eta_v v_j (\Delta x_j + \Delta x_{j-1}) \Delta t_i} + \frac{(T_j^* + T_{j,0} - T_{j-1,0}) \Delta t_i}{\rho_j A_j \Delta x_j + \rho_{j-1} A_{j-1} \Delta x_{j-1} + 0.5\eta_v v_j (\Delta x_j + \Delta x_{j-1}) \Delta t_i} \quad (32)$$

$$\omega_j^- = \frac{\rho_j C_{4j} \Delta x_j \omega_{j,0} + \rho_{j-1} C_{4j-1} \Delta x_{j-1} \omega_{j-1,0}}{\rho_j C_{4j} \Delta x_j + \rho_{j-1} C_{4j-1} \Delta x_{j-1} + 0.5\eta_\omega \omega_j (\Delta x_j + \Delta x_{j-1}) \Delta t_i} + \frac{(H_j^* + H_{j,0} - H_{j-1,0}) \Delta t_i}{\rho_j C_{4j} \Delta x_j + \rho_{j-1} C_{4j-1} \Delta x_{j-1} + 0.5\eta_\omega \omega_j (\Delta x_j + \Delta x_{j-1}) \Delta t_i} \quad (33)$$

جهت محاسبه تنش های نیرویی و مزدوج با استفاده از نیروها و

ممان های روابط (21-18)، می توان از روابط (37-34) استفاده کرد.

$$\varepsilon_j = \frac{C_{3j} H_j - C_{2j} T_j}{C_{3j}^2 - C_{1j} C_{2j}} \quad (34)$$

$$\gamma_j = \frac{C_{3j} T_j - C_{1j} H_j}{C_{3j}^2 - C_{1j} C_{2j}} \quad (35)$$

$$\sigma_j = C_{1j} \varepsilon_j + C_{3j} \gamma_j \quad (36)$$

$$\mu_j = C_{3j} \varepsilon_j + C_{2j} \gamma_j \quad (37)$$

برای محاسبه مقدار گام زمانی Δt_i که برای کل سیستم مشترک است

باید از تعادل انرژی کل جسم استفاده شود. قانون تعادل انرژی برای کل

جسم به صورت رابطه (38) نوشته می شود.

$$\sum_{j=1}^n (\Delta K_j + \Delta P_j - \Delta W_j) = 0 \quad (38)$$

که در آن $\Delta K_j = K_j - K_{j,0}$ و $\Delta P_j = P_j - P_{j,0}$ به صورت رابطه

رابطه تنش- کرنش در میله میکروپولار برای هر المان به صورت رابطه (11) ارائه می شود.

$$\sigma_{j,0} = C_1 \varepsilon_{j,0} + C_3 \gamma_{j,0}, \quad \mu_{j,0} = C_3 \varepsilon_{j,0} + C_2 \gamma_{j,0} \quad (11)$$

با داشتن این روابط می توان خصوصیات مکانیکی المان z را در لحظه

t_{i-1}^- به دست آورد. برای این منظور انرژی جنبشی با استفاده از رابطه (12)

محاسبه می شود.

$$K_{j,0} = \frac{1}{2} \rho (A v_{j,0}^2 + C_4 \omega_{j,0}^2) \quad (12)$$

A سطح مقطع و C_4 اینرسی- اسپین مصالح را بیان می کند که در

کرنش های کوچک ثابت فرض می شود. با استفاده از اصل هامیلتون¹ چگالی

انرژی کرنشی توسط رابطه (13) ارائه می شود.

$$P_{j,0} = \frac{1}{2\Delta x_j} \rho \left(C_1 (u_{j,0}^+ - u_{j,0}^-)^2 + 2C_3 (u_{j,0}^+ - u_{j,0}^-) \times (\psi_{j,0}^+ - \psi_{j,0}^-) + C_2 (\psi_{j,0}^+ - \psi_{j,0}^-)^2 \right) \quad (13)$$

نیروهای $T_{j,0}^+$ و ممان های $H_{j,0}^+$ اثرکننده به المان در گره های آن را

می توان به صورت روابط (15,14) نوشت.

$$T_{j,0}^+ = \frac{\partial P_{j,0}}{\partial u_{j,0}^+} = \frac{\rho}{\Delta x_j} (C_1 (u_{j,0}^+ - u_{j,0}^-) + C_3 (\psi_{j,0}^+ - \psi_{j,0}^-)) \quad (14)$$

$$H_{j,0}^+ = \frac{\partial P_{j,0}}{\partial \psi_{j,0}^+} = \frac{\rho}{\Delta x_j} (C_3 (u_{j,0}^+ - u_{j,0}^-) + C_2 (\psi_{j,0}^+ - \psi_{j,0}^-)) \quad (15)$$

که در آن رابطه (16) را به صورت زیر داریم.

$$T_{j,0}^- = -T_{j,0}^+, \quad H_{j,0}^- = -H_{j,0}^+ \quad (16)$$

نیروی $T_{j,0}$ و ممان $H_{j,0}$ داخلی برای المان z در هر سطح مقطع با

استفاده از رابطه (17) ارائه می شود.

$$T_{j,0} = T_{j,0}^+, \quad H_{j,0} = H_{j,0}^+ \quad (17)$$

قوانین مومنوم خطی و مومنوم زاویه ای در طول گام زمانی برای آنالیز

انتشار نیرو و ممان با سرعت های موج طولی و زاویه ای به صورت روابط

(21-18) تعیین می شوند.

$$T_{j-1}^+ = T_{j-1,0} + \frac{(v_{j-1}^+ - v_{j-1,0}) \rho_{j-1} A_{j-1} \Delta x_{j-1}}{\Delta t_i} \quad (18)$$

$$T_{j-1}^- = -T_{j,0} + \frac{(v_j^- - v_{j,0}) \rho_j A_j \Delta x_j}{\Delta t_i} \quad (19)$$

و

$$H_{j-1}^+ = H_{j-1,0} + \frac{(\omega_{j-1}^+ - \omega_{j-1,0}) \rho_{j-1} C_{4j-1} \Delta x_{j-1}}{\Delta t_i} \quad (20)$$

$$H_{j-1}^- = -H_{j,0} + \frac{(\omega_j^- - \omega_{j,0}) \rho_j C_{4j} \Delta x_j}{\Delta t_i} \quad (21)$$

اگر نیروی اصطکاک ویسکوز خارجی² $T_j^{fr} = -\eta_v v_j$ و ممان اصطکاک

ویسکوز خارجی $H_j^{fr} = -\eta_\omega \omega_j$ به گره داخلی ز اعمال شود، کار انجام

یافته توسط این نیروها برابر رابطه (22) می شود.

$$\Delta W_j = (T_j^{fr} v_j + H_j^{fr} \omega_j) \Delta t_i = -(\eta_v v_j^2 + \eta_\omega \omega_j^2) \Delta t_i \quad (22)$$

در این رابطه η_v و η_ω ضرایب ویسکوز را نشان می دهند، و H_j^{fr} و T_j^{fr}

نشان دهنده نیرو و ممان اصطکاک خارجی ویسکوز خطی است. با استفاده از

فرض های روش المان محدود موج این نیروهای اصطکاک خارجی با نیروهای

گرهی معادل جایگزین می شوند که با نیروهای T_j^* و ممان های H_j^* خارجی

جمع می شوند.

¹ Hamilton's principle

² external viscous friction force

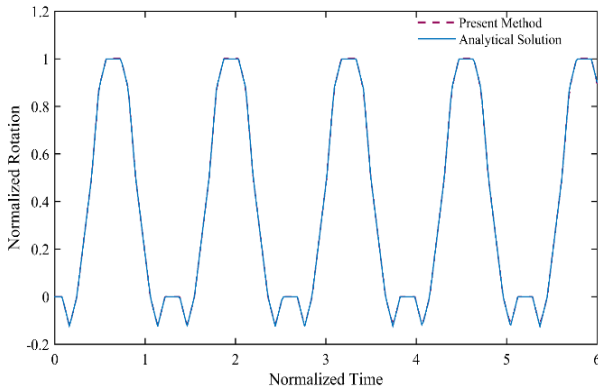


Fig. 5 Normalized rotation at the midpoint of the micropolar rod for the first example

شکل 5 دوران نرمال در وسط میله میکروپولار مثال اول

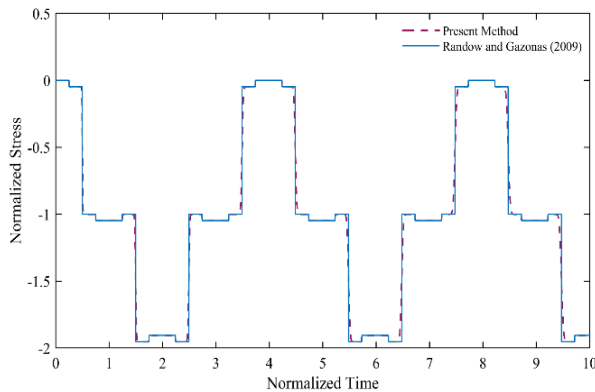


Fig. 6 Normalized stress at the midpoint of the micropolar rod for the first example

شکل 6 تنش نرمال در وسط میله میکروپولار مثال اول

غیر میکروپولار، در حالی که لایه دوم $(0 \leq x \leq 1/2)$ میکروپولار در نظر گرفته شده است. پارامترهای ساختاری برای این دو لایه به صورت روابط (44,43) است.

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ C_1 = 10.8, \quad C_2 = 10^6, \\ C_3 = 10^{-6}, \quad C_4 = 0.02743 \times 10^6 \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ C_1 = 10.8, \quad C_2 = 10^2 \\ C_3 = 27.57, \quad C_4 = 0.02743 \times 10^2 \end{aligned} \quad (44)$$

نتایج مربوط به روش کنونی در $x = 0.6$ و $x = 0.4$ با نتایج ارائه شده در مرجع [35] مقایسه شده و در شکل های 8 و 9 نشان داده شده اند. همان طور که مشخص است روش المان محدود موج با موفقیت برای حل مسائل میله میکروپولار به کار برده شده است.

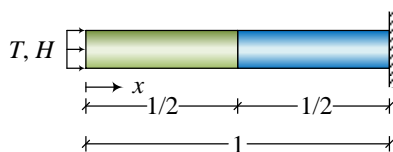


Fig. 7 A two-layer 1D micropolar cantilever rod subjected to a constant force and moment

شکل 7 یک میله کانتیلور یک بعدی میکروپولار دو لایه تحت اثر نیرو و ممان ثابت

(39) است.

$$\sum_{j=1}^n (K_j + P_j) - \sum_{i=1}^{n_t} \sum_{j=1}^n W_{ij} = 0 \quad (39)$$

این روش یک حل پایدار نامشروط را ارائه می دهد. برای میله همگن گام زمانی Δt برای کل المان ها یکسان است و تعادل انرژی برای هر المان درست خواهد بود.

4- مثال های عددی

در این بخش پنج مثال برای سنجش صحت و دقت معادله های پیشنهادی، همچنین قابلیت روش المان محدود موج برای حل مسائل میله میکروپولار حل شده اند که نتایج آن ها در حالت بی بعد نمایش داده شده اند.

4-1- میله کانتیلور میکروپولار یک بعدی

مثال نخست یک میله کانتیلور میکروپولار یک بعدی تحت اثر نیروی فشاری ثابت $0.1N$ است، که به طور ناگهانی در زمان $t = 0$ اعمال می شود (شکل 3). پارامترهای ساختاری به صورت رابطه (40) انتخاب شده است.

$$C_1 = 10.8, \quad C_2 = 1, \quad C_3 = -1, \quad C_4 = 0.02743 \quad (40)$$

شرایط اولیه به صورت رابطه (41) و شرایط مرزی به صورت رابطه (42) است.

$$\begin{aligned} v_{j,in} = 0, \quad \omega_{j,in} = 0 \\ u_{j,in}^{\pm} = 0, \quad \psi_{j,in}^{\pm} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (41)$$

$$T_1^- = T_0, \quad H_1^- = H_0, \quad v_n^+ = 0, \quad \omega_n^+ = 0 \quad (42)$$

نتایج مربوط به پیشینه زمانی جابه جایی، دوران و تنش در وسط میله در شکل های 4-6 نشان داده شده و دقت نتایج نیز بسیار خوب است.

4-2- میله کانتیلور میکروپولار یک بعدی دو لایه

در این مثال انعکاس و انکسار امواج تنش به دلیل تفاوت امپدانس در لایه مشترک یک میله دو لایه مورد مطالعه قرار گرفته است. یک میله کانتیلور تحت اثر بار فشاری در شکل 7 نشان داده شده است. لایه اول این میله

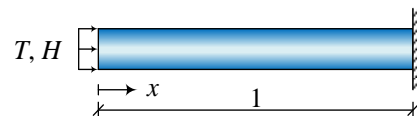


Fig. 3 A 1D micropolar cantilever rod subjected to a constant force and moment

شکل 3 میله کانتیلور میکروپولار تحت اثر نیرو و ممان ثابت

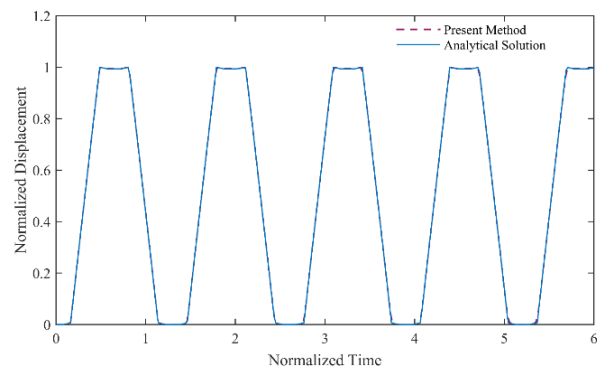


Fig. 4 Normalized displacement at the midpoint of the micropolar rod for the first example

شکل 4 جابه جایی نرمال در وسط میله میکروپولار مثال اول

یکدیگر در نظر گرفته شده است (مشابه شکل 10). پارامترهای ساختاری این

3-4- برخورد دو میله میکروپولار

برخورد دو میله میکروپولار در این قسمت شبیه سازی شده، میله اول به طول $1/3$ و میله دوم به طول $2/3$ است (هندسه این مثال در شکل 10 نشان داده شده است). پارامترهای ساختاری مشابه مثال دوم است. این مثال با استفاده از معادلات توسعه داده شده روش المان محدود موج حل شده است. شکل 11 پیشینه زمانی سرعت نرمال شده در $x = 1$ ، شکل 12 انتقال موج های تنش به وجود آمده ناشی از برخورد دو میله میکروپولار را در چهار زمان مختلف نشان می دهد. نتایج به دست آمده با استفاده از روش المان محدود موج تطابق خوبی با نتایج ارائه شده در مرجع [35] دارند.

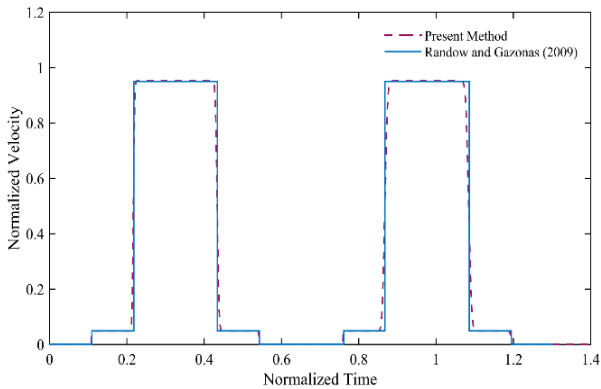


Fig. 11 Normalized velocity at $x = 1$ for the third example

شکل 11 سرعت نرمال در $x = 1$ برای مثال سوم

4-4- برخورد دو میله میکروپولار با مصالح مختلف

این مثال جهت مدل سازی برخورد دو میله میکروپولار با مصالح مختلف به

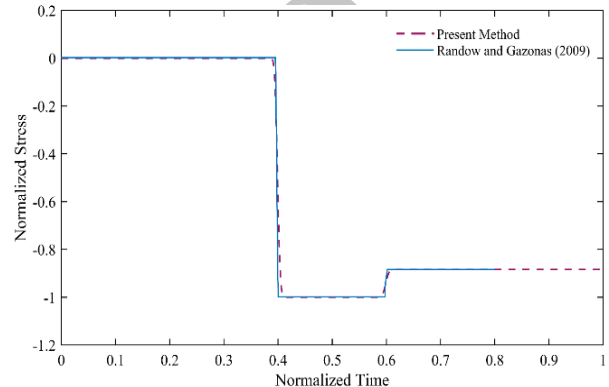
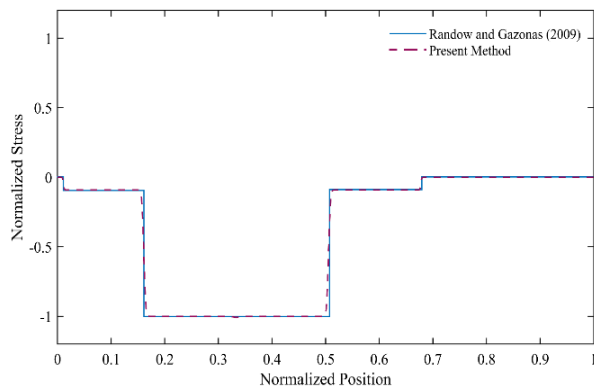


Fig. 8 Normalized stress at $x = 0.4$ of the micropolar rod for the second example

شکل 8 تنش نرمال در $x = 0.4$ میله میکروپولار مثال دوم

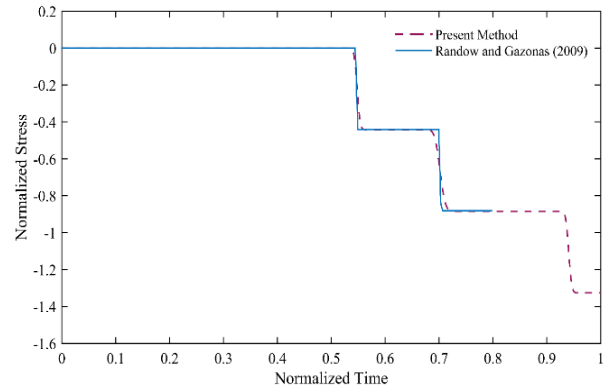
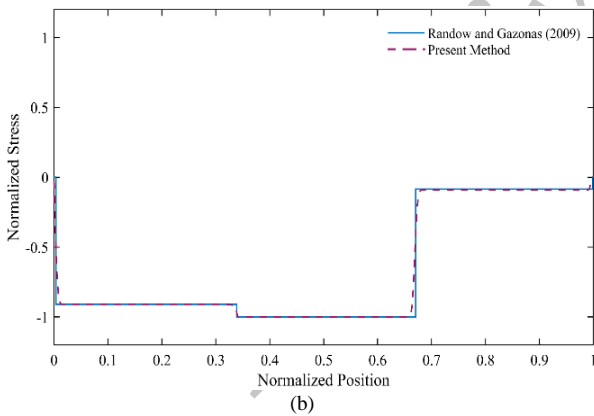


Fig. 9 Normalized stress at $x = 0.6$ of the micropolar rod for the second example

شکل 9 تنش نرمال در $x = 0.6$ میله میکروپولار مثال دوم

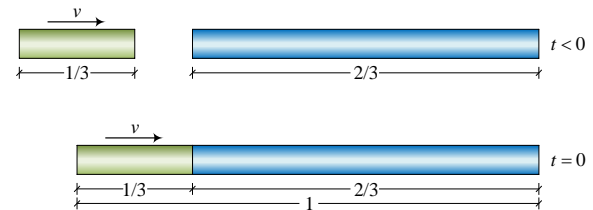
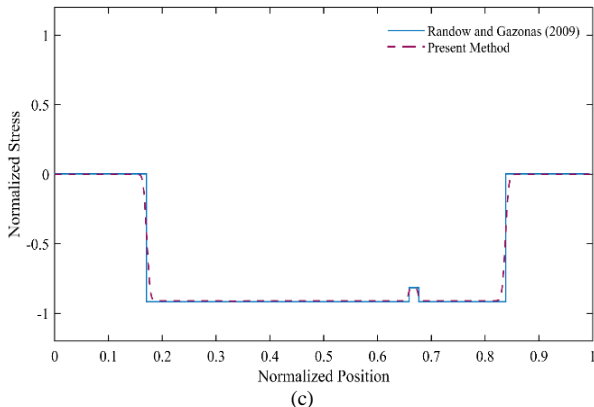
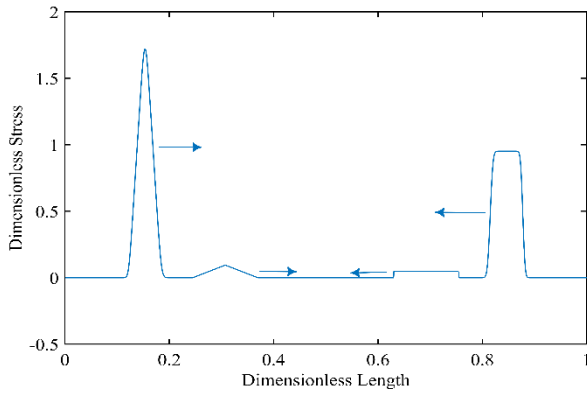
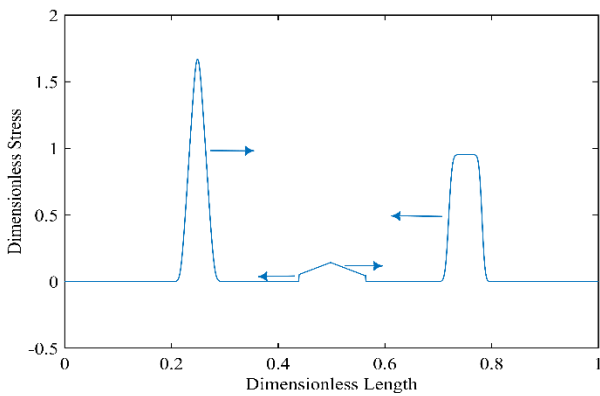


Fig. 10 Impact of two micropolar and non-micropolar rods of the third example

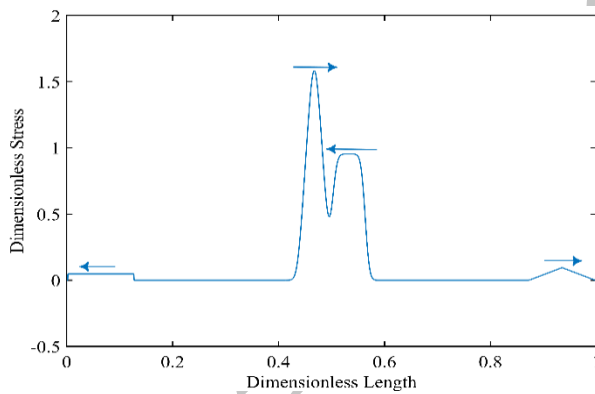
شکل 10 برخورد دو میله میکروپولار و غیر میکروپولار در مثال سوم



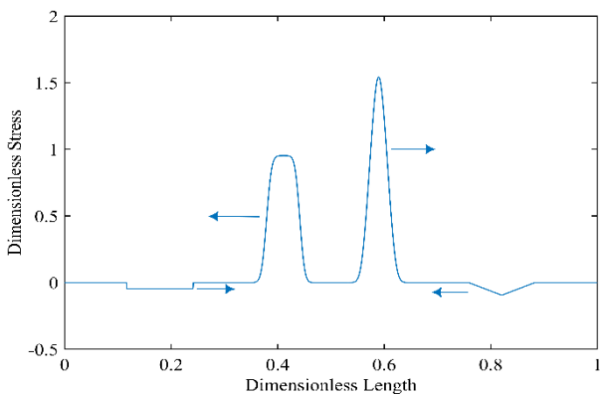
(b)



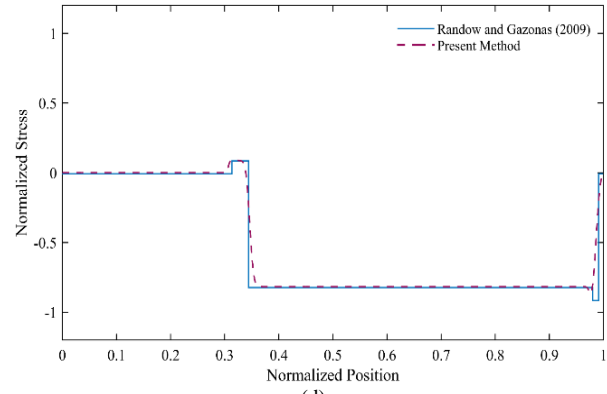
(c)



(d)



(e)



(d)

Fig. 12 Transformation of the normalized stress along the rod at four various times, for the third example

شکل 12 انتقال تنش نرمال در طول میله در چهار زمان مختلف برای مثال سوم

مثال مشابه مثال دوم انتخاب شده است. نتایج مربوط به روش حاضر با نتایج ارائه شده در مرجع [35] برای سرعت نرمال در $x = 1$ مقایسه شده اند. این نتایج در شکل 13 با هم مقایسه شده اند که تطابق خوبی به دست آمده است.

4-5- اندرکنش دو موج در یک میله میکروپولار دوسر آزاد

به عنوان مثال آخر یک میله میکروپولار دوسر آزاد که دو نیروی کششی با دو فرم مختلف در دو انتهای آن وارد می شوند در نظر گرفته شده است. ضربه سمت راست مستطیلی شکل و ضربه سمت چپ مثلثی شکل است. انتقال امواج تنش به وجود آمده از این نیروها در شکل 14 برای شش لحظه زمانی مختلف نشان داده شده است که می توان دو موج سریع و کند را در این شکل ها مشاهده کرد.

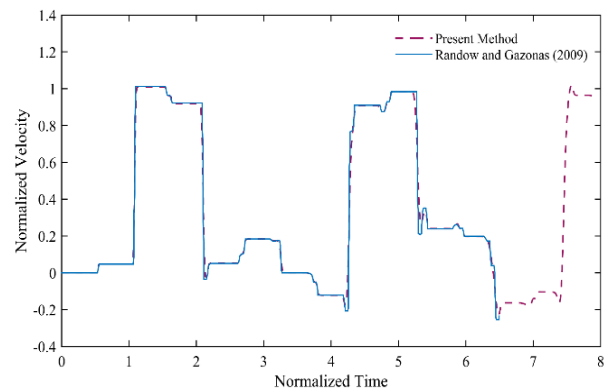
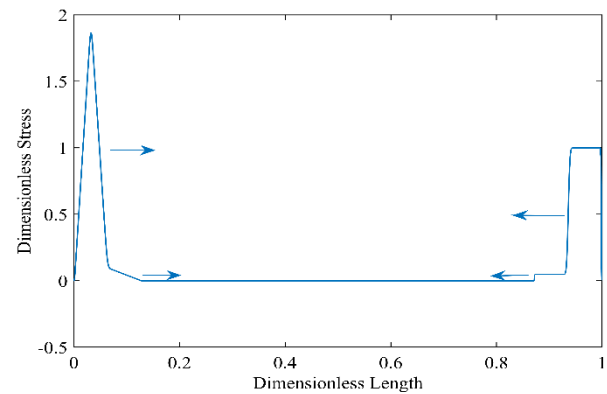


Fig. 13 Normalized velocity at $x = 1$ for the fourth example

شکل 13 سرعت نرمال در $x = 1$ مثال چهارم



(a)

- 1998.
- [9] A. C. Eringen, *Microcontinuum field theories: I. Foundations and solids*, pp. 101-248, New York: Springer, 1999.
- [10] K. G. Tsepoura, S. Papargyri-Beskou, D. Polyzos, D. E. Beskos, Static and dynamic analysis of a gradient-elastic bar in tension, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 72, No. 6-7, pp. 483-497, 2002.
- [11] B. Akgöz, Ö. Civalek, Longitudinal vibration analysis of strain gradient bars made of functionally graded materials (FGM), *Composites Part B: Engineering*, Vol. 55, No. 1, pp. 263-268, 2013.
- [12] R. D. Gauthier, W. E. Jahsmann, A quest for micropolar elastic constants, *Applied Mechanics*, Vol. 42, No. 2, pp. 369-374, 1975.
- [13] J. F. C. Yang, R. S. Lakes, Experimental study of micropolar and couple stress elasticity in compact bone in bending, *Biomechanics*, Vol. 15, No. 2, pp. 91-98, 1982.
- [14] R. S. Lakes, Size effects and micromechanics of a porous solid, *Materials Science*, Vol. 18, No. 9, pp. 2572-2580, 1983.
- [15] R. S. Lakes, Experimental microelasticity of two porous solids, *Solids and Structures*, Vol. 22, No. 1, pp. 55-63, 1986.
- [16] W. B. Anderson, R. S. Lakes, Size effects due to Cosserat elasticity and surface damage in closed-cell polymethacrylimide foam, *Materials Science*, Vol. 29, No. 24, pp. 6413-6419, 1994.
- [17] N. Hu, H. Sekine, H. Fukunaga, Z. H. Yao, Impact analysis of composite laminates with multiple delaminations, *Impact Engineering*, Vol. 22, No. 6, pp. 633-648, 1999.
- [18] V. P. W. Shim, Y. B. Guo, R. Lan, Elastic stress transmission in cellular systems-Analysis of wave propagation, *Impact Engineering*, Vol. 35, No. 8, pp. 845-869, 2008.
- [19] L. Maheo, P. Viot, Impact on multi-layered polypropylene foams, *Impact Engineering*, Vol. 53, No. 1, pp. 84-93, 2013.
- [20] H. G. Georgiadis, E. G. Velgaki, High-frequency Rayleigh waves in materials with micro-structure and couple-stress effects, *Solids and Structures*, Vol. 40, No.10, pp. 2501-2520, 2003.
- [21] H. G. Georgiadis, I. Vardoulakis, E. G. Velgaki, Dispersive Rayleigh-wave propagation in microstructured solids characterized by dipolar gradient elasticity, *Elasticity*, Vol. 74, No. 1, pp. 17-45, 2004.
- [22] D. Singh, S. K. Tomar, Longitudinal waves at a micropolar fluid/solid interface, *Solids and Structures*, Vol. 45, No. 1, pp. 225-244, 2008.
- [23] R. Y. Vasudeva, R. K. Bhaskara, Wave motion in micropolar elastic bars with rectangular cross section, *Engineering Science*, Vol. 17, No. 8, pp. 965-971, 1979.
- [24] M. Randrüüt, M. Braun, On one-dimensional solitary waves in microstructured solids, *Wave Motion*, Vol. 47, No. 4, pp. 217-230, 2010.
- [25] T. Ariman, Wave propagation in a micropolar elastic half-space, *Acta mechanica*, Vol. 13, No. 1, pp. 11-20, 1972.
- [26] K. G. Tsepoura, S. Papargyri-Beskou, D. Polyzos, D. E. Beskos, Static and dynamic analysis of a gradient-elastic bar in tension, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 72, No. 6, pp. 483-497, 2002.
- [27] A. Charalambopoulos, L. N. Gergidis, G. Kartalos, On the gradient elastic wave propagation in cylindrical waveguides with microstructure, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, No. 6, pp. 2613-2627, 2012.
- [28] S. Ham, K. J. Bathe, A finite element method enriched for wave propagation problems, *Computers & Structures*, Vol. 94, No. 1, pp. 1-12, 2012.
- [29] G. Noh, S. Ham, K. J. Bathe, Performance of an implicit time integration scheme in the analysis of wave propagations, *Computers & Structures*, Vol. 123, No. 1, pp. 93-105, 2013.
- [30] B. F. Shorr, Mathematical modelling of wave propagation in a rod of time-dependent material, *Mechanics of Time-Dependent Materials*, Vol. 1, No. 4, pp. 397-416, 1997.
- [31] B. F. Shorr, Analysis of wave propagation in elastic-plastic rods of a variable cross section using direct mathematical modelling, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 65, No. 8, pp. 537-547, 1995.
- [32] B. F. Shorr, A wave approach to finite element analysis of solids, *Mechanics Research Communications*, Vol. 26, No. 2, pp. 191-196, 1999.
- [33] B. F. Shorr, *The wave finite element method*, pp. 1-158, Berlin Heidelberg, New York: Springer, 2004.
- [34] W. Nowacki, *Theory of Asymmetric Elasticity (Translated By H. Zorski)*, pp. 1-49, Poland and Oxford, United Kingdom: Polish Scientific Publishers (PWN) and Pergamon Press, Warsaw (Warszawa), 1986.
- [35] C. L. Randow, G. A. Gazonas, Transient stress wave propagation in one-dimensional micropolar bodies, *Solids and Structures*, Vol. 46, No. 5, pp. 1218-1228, 2009.
- [36] H. Shahsavari, M. Ostoja-Starzewski, On elastic and viscoelastic helices, *Philosophical Magazine*, Vol. 85, No. 33-35, pp. 4213-4230, 2005.

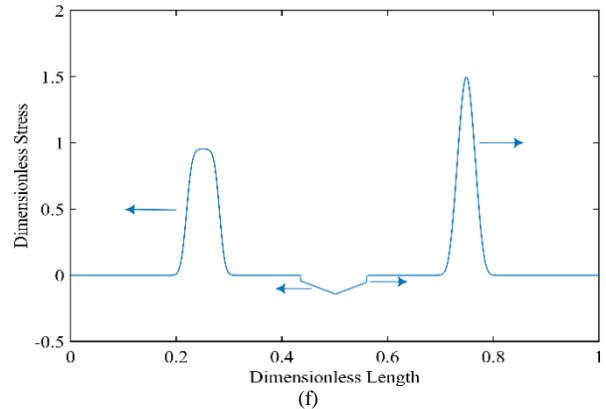


Fig. 14 Transformation of different counter-waves in a free-free micropolar rod

شکل 14 انتقال امواج با شکل‌های مختلف در یک میله دو سر آزاد میکروپولار

5- نتیجه گیری

در این مقاله معادلات روش المان محدود موج برای حل مسائل میله ناهمگن، ناهمسانگرد یک بعدی میکروپولار با سطح مقطع متفاوت توسعه داده شدند. دو نوع موج با دو سرعت مختلف شبیه‌سازی شدند. همان‌گونه که در فرایند حل روش المان محدود موج اشاره شد، شبیه‌سازی انتشار موج بدون فرمول‌بندی معادلات دیفرانسیل با حل‌های تقریبی انجام پذیرفت. جهت توصیف قابلیت و صحت این روش برای مسائل انتشار امواج و همچنین مسائل ضربه مثال‌های پایه میله میکروپولار مدل‌سازی شدند. تطابق بسیار خوبی بین نتایج روش پیشنهادی و حل‌های عددی و/یا تحلیلی موجود به دست آمد که حاکی از قابلیت مناسب روش پیشنهادی است. در این مقاله نشان داده شد که روش المان محدود موج یک روش قدرتمند برای حل مسائل انتشار موج و ضربه در میله میکروپولار که روش المان محدود کلاسیک دارای ضعف ذاتی در حل این‌گونه از مسائل است.

6- مراجع

- [1] S. Diebels, H. Steeb, Stress and couple stress in foams, *Computational Materials Science*, Vol. 28, No. 3, pp. 714-722, 2003.
- [2] A. C. Eringen, G. A. Maugin, *Electrodynamics of Continua I: Foundations and Solid Media*, pp. 128-179, New York: Springer, 1990.
- [3] E. Cosserat, F. Cosserat, *Théorie des corps déformables*, pp. 1-6, Paris: Hermann et fils, 1909.
- [4] R. Lakes, Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua, in: H. B. Muhlhaus (Editor), *Continuum Models for Materials with Microstructure*, pp. 1-25, Chichester, UK: Wiley, 1995.
- [5] G. E. Exadaktylos, I. Vardoulakis, Microstructure in linear elasticity and scale effects: A reconsideration of basic rock mechanics and rock fracture mechanics, *Tectonophysics*, Vol. 335, No. 1, pp. 81-109, 2001.
- [6] W. T. Koiter, Couple stresses in the theory of elasticity, *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, Amsterdam: North-Holland Publishing Co., Vol. 67, No. 1, pp. 17-44, 1964.
- [7] W. Nowacki, *Theory of asymmetric elasticity*, pp. 1-138, Pergamon-Press, Oxford, 1986.
- [8] G. A. Maugin, On the structure of the theory of polar elasticity, *Philosophical transactions. Series A, Mathematical, physical, and engineering sciences Royal Society*, Vol. 356, No. 1741, pp. 1367-1395,