



## استفاده از روش حل دیفرانسیل مربعات در تحلیل مخزن استوانه‌ای فلز کامپوزیت تحت بار دینامیکی

علی اصغر معصومی<sup>1</sup>، غلامحسین رحیمی<sup>2\*</sup>، غلامحسین لیاقت<sup>2</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استاده، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

\* تهران، صندوق پستی 143-14115، rahimi\_gh@modares.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 18 اسفند 1395

پذیرش: 01 خرداد 1396

ارائه در سایت: 02 تیر 1396

کلید واژگان:

دیفرانسیل مربعات

مخزن فلز کامپوزیت

برشی مرتبه اول

بار دینامیکی

المان محدود

### چکیده

در این مقاله حل تحلیلی و عددی مخزن استوانه‌ای فلز کامپوزیت تحت بار دینامیکی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش حل دیفرانسیل مربعات بررسی شده است. بدین منظور ابتدا معادلات تعادل پوسته بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج شده است. بار اعمالی به پوسته از نتایج آزمایش تجربی یک سوخت دو پایه بدست آمده و سپس بصورت یک بار دینامیکی به مدل مورد استفاده در تحلیل عددی و تئوری اعمال شده است. هدف از این مقاله بررسی رفتار مخزن استوانه‌ای فلز کامپوزیت تحت بار دینامیکی با روش تئوری برشی مرتبه اول و مقایسه نتایج آن با حل عددی می‌باشد. لذا پس از استخراج روابط تعادل پوسته بر اساس تئوری مورد نظر برای حل این روابط از روش دیفرانسیل مربعات استفاده شده است. پس از بدست آوردن روابط حاکم بر مسئله در یک پوسته فلز کامپوزیت این روابط به فرم معادلات ماتریسی مربوط به روش حل دیفرانسیل مربعات استخراج شده است. برای اعمال شرایط مرزی از دو حالت شرایط تکیه‌گاه ساده و تکیه‌گاه گیردار استفاده شده و نتایج حاصل از این دو حالت با یکدیگر مقایسه شده است. برای حل معادلات دیفرانسیلی بدست آمده، از کد برنامه‌نویسی متلب استفاده شده است. برای صحت‌گذاری نتایج حل تئوری، مدل‌سازی و تحلیل عددی مدل مورد نظر در نرم‌افزار المان محدود آباکوس صورت گرفته و نتایج بدست آمده از این نرم‌افزار با نتایج بدست آمده از برنامه‌نویسی با روش حل دیفرانسیل مربعات مورد مقایسه قرار گرفته است.

## The use of the differential quadrature method in the analysis of composite metal cylindrical vessel under dynamical load

Ali Asghar Masoumi, Gholam Hossein Rahimi\*, Gholam Hosain Liaghat

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

\* P.O.B. 14115143, Tehran, Iran, rahimi\_gh@modares.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 08 March 2017

Accepted 22 May 2017

Available Online 23 June 2017

### Keywords:

Differential quadrature

Composite metal vessel

First-order shear deformation

Dynamic load

Finite element

### ABSTRACT

In this paper, numerical and analytical solutions of composite metal cylindrical vessel are investigated under dynamic load using first-order shear deformation theory and differential quadrature method. For this purpose, the shell equilibrium equations are derived based on the first order shear deformation theory. The load applied to the shell is achieved from the experimental test of a double-base propellant, and then is applied to the model in numerical and theoretical analysis. The aim of this paper is to study and investigate the behavior of the composite metal cylindrical vessel under dynamic load with first-order shear deformation theory and compare its results with the numerical solution. Therefore, after extracting the shell equilibrium equations are used from differential quadrature method to solve the equations. Then, the governing equations are extracted in a composite metal cylindrical vessel to form the matrix equations to solve with differential quadrature method. To apply boundary conditions from simply supported and clamped are considered and the results of these two modes are compared together. The MATLAB programming code is used to solve differential quadrature equations. To validate theoretical results, modeling and numerical analysis are done by Abaqus finite element software and the results are compared with the analytical solution using the differential quadrature method.

### 1- مقدمه

نیروی حاصل از مواد منفجره در پروسه‌های مختلف صنعتی از جمله تغییر شکل دادن مواد مخصوصاً فلزات برای اهداف مختلف است. از انرژی حاصل از انفجار می‌توان برای اهداف مختلف کمک گرفت. یکی از مهمترین کاربردهای انرژی انفجاری در صنایع نظامی است. پوسته‌هایی که تحت اثر انفجارات داخلی ناشی از مواد شدیدانفجار گسیخته شده و به ترکش تبدیل می‌گردند،

یکی از مهمترین فرآیندهایی که در رابطه با رفتار مواد و بطور خاص فلزات اتفاق می‌افتد بارگذاری ماده تحت نیروهای شدید دینامیکی است. به‌عنوان مثال در برخورد بین دو قطعه که دارای سرعت‌های بسیار بالا می‌باشند، تنش‌های فوق‌العاده زیادی در ماده ایجاد می‌گردد. مثال دیگر استفاده از

Please cite this article using:

A. A. Masoumi, Gh. H. Rahimi, Gh. H. Liaghat, The use of the differential quadrature method in the analysis of composite metal cylindrical vessel under dynamical load, Modares Mechanical Engineering, Vol. 17, No. 6, pp. 319-330, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

نمودند. قناد و همکاران [19,18] حل عمومی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری اف جی ام را بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی در شرایط تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و استوانه‌ی بسته ارائه نمودند. و بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری اف جی ام را استخراج کرده و سپس جابه‌جایی و تنش‌ها را برای استوانه با دو سر بسته‌ی مقید به صورت تحلیلی به‌دست آوردند. قناد و زمانی‌نژاد [20] با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم همگن و همسان‌گرد را برای استوانه با دو سر بسته‌ی مقید حل کردند و نتیجه را با تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و روش اجزای محدود مقایسه نمودند. عارفی و رحیمی [21] با در نظر گرفتن بار حرارتی و مکانیکی، تاثیر ناهمگنی‌های مختلف و مرزها را برای سیلندر دو سر گیر دار منتشر کردند. آنها نیز از روش انرژی و تئوری برشی برای تحلیل مسئله خود استفاده نمودند. اسدی و همکاران [22] تئوری برشی مرتبه اول را برای تحلیل پوسته استوانه‌ای به کار بستند. آنها با حل سه بعدی پوسته مورد نظر با استفاده از تحلیل المان محدود به مقایسه و اعتبار سنجی حل خود پرداختند. خوش گفتار و همکاران [23] حل دقیقی برای سیلندر ناهمگن تحت فشار غیر یکنواخت داخلی با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول ارائه نمودند. آنها با در نظر گرفتن فشار غیر یکنواخت و به کار بستن تئوری برشی مرتبه اول نشان دادند که تغییرات میدان جابجایی تنها در نزدیکی مرزها اهمیت نداشته بلکه در نقاط دور از مرز نیز حائز اهمیت می‌باشد. زوزولیا [24] نیز حالت‌های مختلف تئوری برشی را برای سیلندر ناهمگن مورد بررسی قرار داد و حل خود را با حل الاستیسیته مقایسه نمود. ایشان نشان داد علی‌رغم اینکه تئوری برشی مرتبه اول دقت قابل قبولی برای تحلیل مسئله می‌دهد اما با بالا بردن ترم‌های تئوری برشی می‌توان به نتایج با دقت بیشتری دست پیدا کرد. ابوالقاسمی و همکاران [25] به تحلیل کمانش ورق‌های مستطیلی تحت بار صفحه‌ای غیر یکنواخت بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداخته‌اند و برای ورق با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده از روش گالریکین برای حل معادلات پایداری استفاده کرده‌اند. معصومی و همکاران [26-28] بر روی مخازن استوانه‌ای فلزی و فلز کامپوزیت تحت بار دینامیکی با روش تجربی و عددی پرداخته‌اند آنها بار دینامیکی را از تست‌های تجربی بدست آورده و سپس با نرم‌افزار المان محدود آباکوس با اعمال بار واقعی به مدل تنش‌های وارده در مخزن مورد مطالعه خود را بررسی کرده و مقدار ضخامت و تعداد لایه‌های بهینه کامپوزیت را جهت مخزن پیشنهاد کرده‌اند. با توجه به مقالات بررسی شده ملاحظه می‌گردد که در هیچ یک از مقالات مورد بررسی استفاده از روش حل دیفرانسیل مربعات در تحلیل بار دینامیکی به کمک تئوری برشی مرتبه اول وجود ندارد، لذا در تحقیق حاضر تحلیل تئوری و عددی مخزن استوانه‌ای فلز کامپوزیت تحت بار دینامیکی بدست آمده از نتایج تجربی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش حل دیفرانسیل مربعات بررسی می‌شود. بدین منظور ابتدا معادلات تعادل پوسته بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج می‌شود و سپس با روش دیفرانسیل مربعات معادلات به فرم ماتریس‌های حل عددی مرتب شده و با کد برنامه‌نویسی متلب این معادلات حل می‌شود. برای صحت‌گذاری نتایج حل تئوری از روش تحلیل عددی المان محدود و با نرم‌افزار المان محدود آباکوس مورد مقایسه قرار گرفته است. با توجه به عدم مسئله مشابه این تحقیق در مراجع دیگر، شرایط مسئله یک الی دو مرجع با کد نوشته شده در این تحقیق حل شده و نتایج مورد بحث و بررسی قرار گرفته

دارای کاربرد بسیاری در سرجنگی و پرتابه‌های مختلف دارند. در آزمایشگاه‌های انفجار نیز از پوسته‌های خاص جهت انجام آزمایشات مواد منفجره و شبیه سازی‌های انفجار استفاده می‌گردد. به هنگام انفجار ماده منفجره اعم از گازی یا شدیدالانفجار در داخل پوسته، امواج انفجاری با سرعت بسیار بالایی به بدنه وارد می‌شود، بنابراین پوسته در معرض بار فشاری متحرک قرار می‌گیرد. در نتیجه این مسئله از ماهیت دینامیکی بالایی برخوردار است. لذا پیش‌بینی رفتار و تحلیل سازه تحت اثر این بارها به مراتب مشکل تر از بارگذاری فشار هیدرواستاتیک و حتی بارهای ضربه‌ای است. نتایج تحلیل پوسته‌ها تحت اثر بارهای انفجاری را می‌توان علاوه بر سرجنگی‌ها برای تحلیل مخزن‌ها و پوسته‌های استوانه‌ای در صنایع نظامی و صنعت بکار برد. پوسته‌ها یکی از سازه‌های پرکاربرد در صنایع مختلف می‌باشند. این سازه‌ها از نظر هندسی خمیده‌اند و ضخامت کمی نسبت به سایر ابعادشان دارند و در موارد مختلف از جمله ساخت مخازن و لوله‌ها به کار می‌روند. از طرفی با گسترش تکنولوژی، مواد مرکب به عنوان مواد مهندسی مناسب برای کاربردهای مختلف در صنعت مورد استفاده قرار گرفته است. سبکی مواد مرکب و کارایی بسیار مناسب، مقاومت به دانسیته و سختی به دانسیته این مواد باعث توسعه کاربرد این مواد در مقایسه با مواد دیگر شده است و در نتیجه جایگزین مناسبی برای فولاد و آلومینیوم در بسیاری از صنایع شده است. محققان زیادی پوسته‌های استوانه‌ای را مورد مطالعه و تحقیق قرار داده‌اند. بخش عمده مطالعات صورت گرفته در تحلیل پوسته‌ها بر پایه تئوری میندلین و رایزنر می‌باشد. این تئوری که به تئوری برشی مرتبه اول مشهور است توسط میندلین و رایزنر معرفی شد [1-3]. در این تئوری اثر تغییر شکل‌های برشی عرضی در نظر گرفته شده است و با احتساب اثر اینرسی دورانی در معادلات دینامیکی نتایج بهبود داده شده است. نقدی و کوپر [4] تئوری تغییر شکل برشی را بسط دادند. میرسکی و هرمان [5] با به‌کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول حل پوسته‌های استوانه‌ای از مواد همگن و همسان‌گرد را ارائه کردند. با استفاده از نظریه‌ی میرسکی-هرمان و روش عددی تفاضل محدود زیو و پرل [6] پاسخ ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای نیمه بلند را به‌دست آوردند. سوزوکی و تاکاهاشی [7,8] با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی و سری فروبینیوس پاسخ ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای با ضخامت متغییر و پوسته‌های مخروطی را به‌دست آوردند. ایپکچی و همکاران [9] معادلات استوانه‌های همگن و همسان‌گرد با جدار متغییر را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول استخراج و به کمک نظریه‌ی اغتشاشی حل کردند. ردی [10-14] از جمله محققانی می‌باشد که در بسط و گسترش روابط حاکم بر تئوری استوانه‌ها مطالعات و تحقیق زیادی انجام داده است. او حتی تئوری مرتبه سوم را خود مطرح و بسط داده است. تاریخچه ای از تئوری برشی تا به امروز در مقاله ردی و ارسینیگا [15] آورده شده است. آنها علاوه بر بحث در رابطه با تئوری‌های مختلف برشی برای ورق و پوسته، با ارائه مثال و نتایج عددی به بحث درباره قابلیت‌های این روش پرداختند. بهتوی و اسلامی [16] حالت ترموالاستیسیته پوسته استوانه‌ای تحت بار حرارتی را مورد بررسی قرار دادند. آنها نیز از تئوری برشی مرتبه اول استفاده نموده و خواص ماده را به صورت تابعی در نظر گرفتند. ایپکچی و همکاران [17] تحلیل الاستیک پوسته جدار ضخیم مخروطی را انجام دادند. آنها ضخامت پوسته را متغییر و فشار داخلی را نیز غیر یکنواخت در نظر گرفتند. با به کار بستن تئوری اغتشاشات توانستند حل نیمه تحلیلی برای پاسخ پوسته مورد نظر ارائه و با نتایج المان محدود مقایسه

شده است.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_2^1 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_6^1 = \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right) \\ \varepsilon_4^0 &= \left( \varphi_2 + \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right), \quad \varepsilon_5^0 = \left( \varphi_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$k_s$  ضریب تصحیح برشی بوده و مقدار آن برابر با  $5/6$  در نظر گرفته شده است [14].  $A$  ماتریس سفتی کششی،  $B$  ماتریس سفتی کوپل کششی-خمشی و  $D$  ماتریس سفتی خمشی معادل در یک چند لایه می‌باشد. با جاگذاری روابط (4) در روابط (3)، روابط (5) بدست خواهد آمد. اگر روابط (5) در روابط معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای (روابط 1) قرار داده شود پنج دسته معادلات بدست خواهد آمد که به صورت روابط (6) تا (10) نوشته خواهد شد.

$$\begin{aligned} N_1 &= A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + A_{12} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x_2} + \frac{w_0}{R} \right) + A_{16} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right) \\ &+ B_{11} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + B_{12} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + B_{16} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right) \\ N_2 &= A_{21} \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + A_{22} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x_2} + \frac{w_0}{R} \right) + A_{26} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right) \\ &+ B_{21} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + B_{22} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + B_{26} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right) \\ N_6 &= A_{61} \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + A_{62} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x_2} + \frac{w_0}{R} \right) + A_{66} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right) \\ &+ B_{61} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + B_{62} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + B_{66} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right) \\ Q_1 &= K_S A_{45} \left( \varphi_2 + \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right) + K_S A_{55} \left( \varphi_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right) \\ Q_2 &= K_S A_{44} \left( \varphi_2 + \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right) + K_S A_{45} \left( \varphi_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right) \\ M_1 &= B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + B_{12} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x_2} + \frac{w_0}{R} \right) + B_{16} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right) \\ &+ D_{11} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + D_{12} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + D_{16} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right) \\ M_2 &= B_{21} \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + B_{22} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x_2} + \frac{w_0}{R} \right) + B_{26} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right) \\ &+ D_{21} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + D_{22} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + D_{26} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

دسته اول معادلات بصورت رابطه (6) می‌باشد.

$$\begin{aligned} &\left( A_{11} \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \left( A_{16} + \frac{1}{R} A_{61} \right) \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{R} A_{66} \frac{\partial}{\partial x_2^2} \right) \{u_0\} \\ &+ \left( \left( A_{12} + \frac{1}{R} A_{66} \right) \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2} + A_{16} \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R} A_{62} \frac{\partial}{\partial x_2^2} \right) \{v_0\} \\ &+ \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{A_{12}}{R} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{A_{62}}{R^2} \right) \{w_0\} \\ &+ \left( B_{11} \frac{\partial}{\partial x_1^2} \left( B_{16} + \frac{1}{R} B_{61} \right) \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{R} B_{66} \frac{\partial}{\partial x_2^2} \right) \{\varphi_1\} \\ &+ \left( \left( B_{12} + \frac{1}{R} B_{66} \right) \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2} + B_{16} \frac{\partial}{\partial x_1^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R} B_{62} \frac{\partial}{\partial x_2^2} \right) \{\varphi_2\} = I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \dot{\varphi}_1 \end{aligned} \quad (6)$$

دسته دوم معادلات بصورت رابطه (7) می‌باشد.

$$\begin{aligned} &\left( A_{61} \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \left( \frac{1}{R} A_{21} + A_{66} \right) \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{R} A_{26} \frac{\partial}{\partial x_2^2} \right) \{u_0\} \\ &+ \left( A_{66} \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{R} A_{22} \frac{\partial}{\partial x_2^2} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{R} A_{26} + A_{62} \right) \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \{v_0\} \\ &+ \left( \frac{A_{62}}{R} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{A_{22}}{R} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \{w_0\} \end{aligned}$$

## 2- روابط تئوری حاکم بر مسئله

بیشتر تحقیقات انجام شده در پوسته‌ها بر مبنای تئوری کلاسیک<sup>1</sup> اختصاص دارد و از آنجایی که در این تئوری اثر تغییر شکل‌های برشی و اینرسی دورانی صرف‌نظر می‌شود بنابراین حوزه اعتباری این تئوری بیشتر برای پوسته‌های نازک بوده و با افزایش ضخامت پوسته بر مقدار این خطا افزوده می‌شود. به دلیل دقت بالاتر تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول در این تحقیق برای حل مسئله پوسته مورد نظر از این تئوری استفاده خواهد شد. لذا در ادامه به بررسی معادلات حاکم در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداخته خواهد شد. شکل 1 منته‌های تنش در المانی از پوسته استوانه‌ای را نشان می‌دهد اگر معادلات تعادل این بردارهای نیرو برای یک پوسته استوانه‌ای تحت فشار داخلی  $q$  و بار محوری  $\bar{N}$  نوشته شود با استفاده از اصل کار مجازی معادلات تعادل پوسته استوانه‌ای تحت فشار داخلی  $q$  و بار محوری  $\bar{N}$  به صورت روابط (1) خواهد شد [14].

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_6}{\partial x_2} &= I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \dot{\varphi}_1 \\ \frac{\partial N_6}{\partial x_1} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_2}{\partial x_2} + \frac{Q_2}{R} &= \left( I_0 + \frac{2I_1}{R} \right) \ddot{v}_0 + \left( I_1 + \frac{I_2}{R} \right) \dot{\varphi}_2 \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} - \frac{N_2}{R} + q - \bar{N} &= I_0 \ddot{w}_0 \\ \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_6}{\partial x_2} - Q_1 &= I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \dot{\varphi}_1 \\ \frac{\partial M_6}{\partial x_1} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_2 &= \left( I_1 + \frac{I_2}{R} \right) \ddot{v}_0 + I_2 \dot{\varphi}_2 \end{aligned} \quad (1)$$

در روابط (1)  $x_1$  جهت طولی و  $x_2$  جهت محیطی مخزن استوانه‌ای می‌-

باشد.  $u_0$ ،  $v_0$  و  $w$  تغییر مکان صفحه میانی،  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  چرخش حول محور  $x_1$  و  $x_2$ ،  $I_0$  و  $I_1$  ممان اول و دوم حول صفحه میانی،  $N$  و  $M$  منته‌های نیرو و ممان در جهات مختلف،  $Q$  منته‌های نیروی برشی در جهات مختلف و  $R$  شعاع استوانه می‌باشد. میدان جابجایی یک پوسته بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به صورت روابط (2) در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3, t) &= u_0(x_1, x_2, t) + x_3 \varphi_1(x_1, x_2, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) &= v_0(x_1, x_2, t) + x_3 \varphi_2(x_1, x_2, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) &= w_0(x_1, x_2, t) \end{aligned} \quad (2)$$

در روابط (2)  $x_1$  جهت طولی،  $x_2$  جهت محیطی،  $x_3$  جهت عمود بر محیط در یک مخزن استوانه،  $u_0$ ،  $v_0$  و  $w_0$  تغییر مکان صفحه میانی در جهت طولی، محیطی و شعاعی،  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  چرخش حول محور  $x_1$  و  $x_2$  می‌باشد. قانون هوک در یک چند لایه کامپوزیت به صورت روابط (3) نوشته خواهد شد [14].

$$\begin{aligned} N_1 &= A_{11} \varepsilon_1^0 + A_{12} \varepsilon_2^0 + A_{16} \varepsilon_6^0 + B_{11} \varepsilon_1^1 + B_{12} \varepsilon_2^1 + B_{16} \varepsilon_6^1 \\ N_2 &= A_{21} \varepsilon_1^0 + A_{22} \varepsilon_2^0 + A_{26} \varepsilon_6^0 + B_{21} \varepsilon_1^1 + B_{22} \varepsilon_2^1 + B_{26} \varepsilon_6^1 \\ N_6 &= A_{61} \varepsilon_1^0 + A_{62} \varepsilon_2^0 + A_{66} \varepsilon_6^0 + B_{61} \varepsilon_1^1 + B_{62} \varepsilon_2^1 + B_{66} \varepsilon_6^1 \\ Q_2 &= K_S A_{44} \varepsilon_4^0 + K_S A_{45} \varepsilon_5^0 \\ Q_1 &= K_S A_{45} \varepsilon_4^0 + K_S A_{55} \varepsilon_5^0 \\ M_1 &= B_{11} \varepsilon_1^0 + B_{12} \varepsilon_2^0 + B_{16} \varepsilon_6^0 + D_{11} \varepsilon_1^1 + D_{12} \varepsilon_2^1 + D_{16} \varepsilon_6^1 \\ M_2 &= B_{21} \varepsilon_1^0 + B_{22} \varepsilon_2^0 + B_{26} \varepsilon_6^0 + D_{21} \varepsilon_1^1 + D_{22} \varepsilon_2^1 + D_{26} \varepsilon_6^1 \\ M_6 &= B_{61} \varepsilon_1^0 + B_{62} \varepsilon_2^0 + B_{66} \varepsilon_6^0 + D_{61} \varepsilon_1^1 + D_{62} \varepsilon_2^1 + D_{66} \varepsilon_6^1 \end{aligned} \quad (3)$$

در روابط (3)  $\varepsilon^0$  کرنش در لایه میانی و  $\varepsilon^1$  کرنش خمشی در راستاهای

مختلف بوده و با روابط (4) تعریف خواهد شد.

$$\varepsilon_1^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_2^0 = \left( \frac{\partial v_0}{\partial x_2} + \frac{w_0}{R} \right), \quad \varepsilon_6^0 = \left( \frac{\partial v_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right)$$

1. Classic Shell Theory (CST)

معادلات استفاده می‌شود. در ادامه به بررسی روش حل نیومارک و دیفرانسیل مربعات پرداخته می‌شود.

### 3- روش حل نیومارک

روش‌های عددی مختلفی برای تقریب‌های زمانی معادله‌ی مرتبه دوم وجود دارد که به نام انتگرال‌گیری مستقیم معروف است. متداول‌ترین آنها عبارت است از: روش تفاضل مرکزی، روش نیومارک، روش ویلسون و روش هوبولت [14]. در این تحقیق از روش نیومارک جهت حل مشتقات زمانی در معادله حرکت حاکم بر پوسته استوانه‌ای استفاده می‌شود. روش نیومارک به نوعی بسط روش شتاب خطی است. در این روش، سرعت در لحظه‌ی  $t + \Delta t$  برابر است با رابطه (11) [14]:

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + \frac{1}{2}(\ddot{U}_t + \ddot{U}_{t+\Delta t})(\Delta t) \quad (11)$$

پس از انتگرال‌گیری بصورت رابطه (12) خواهد شد.

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \dot{U}_t(\Delta t) + \frac{1}{4}(\ddot{U}_t + \ddot{U}_{t+\Delta t})(\Delta t)^2 \quad (12)$$

حال اگر فرض شود شتاب مطابق شکل 2، بطور خطی در فاصله‌ی زمانی  $\Delta t$  تغییر کند، آنگاه رابطه‌ی (13) حاصل می‌گردد.

$$\ddot{U}_{t+\tau} = \ddot{U}_t + \frac{\ddot{U}_{t+\Delta t} - \ddot{U}_t}{\Delta t} \tau \quad (13)$$

نیومارک با معرفی پارامترهای  $\alpha$  و  $\delta$  روشی بین روش شتاب خطی و شتاب متوسط انتخاب کرد و معادلات خود را برای زمان  $\tau = \Delta t$  بصورت روابط (14) ارائه داد [14].

$$\begin{aligned} \dot{U}_{t+\Delta t} &= \dot{U}_t + [(1 - \delta)\dot{U}_t + \delta\dot{U}_{t+\Delta t}]\Delta t \\ U_{t+\Delta t} &= U_t + \dot{U}_t\Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{U}_t + \alpha\ddot{U}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \end{aligned} \quad (14)$$

که  $\alpha$  و  $\delta$  پارامترهایی هستند که دقت و پایداری حل را کنترل می‌کنند. در صورتیکه  $\delta = 1/2$  و  $\alpha = 1/6$  اختیار گردد، روش تقریب شتاب خطی حاصل می‌شود. نیومارک روش شتاب متوسط را پیشنهاد کرد که در این حالت  $\delta = 1/2$  و  $\alpha = 1/4$  اختیار می‌گردد. علاوه بر معادلات (12) و (13)، برای حل تغییر مکان، سرعت و شتاب در لحظه‌ی  $t + \Delta t$ ، بایستی سیستم معادلات حرکت (معادله‌ی 15) نیز برآورده گردد [14].

$$M\ddot{U}_{t+\Delta t} + KU_{t+\Delta t} = R_{t+\Delta t} \quad (15)$$

که در آن  $M$  ماتریس جرم،  $K$  ماتریس سختی و  $R$  نیرو می‌باشد. از حل معادله‌ی دوم رابطه‌ی (14) برای  $\ddot{U}_{t+\Delta t}$  برحسب  $U_{t+\Delta t}$  و جایگزینی آن در معادله‌ی اول از رابطه‌ی (14) روابطی برای  $\dot{U}_{t+\Delta t}$  و  $\ddot{U}_{t+\Delta t}$  برحسب مجهول  $U_{t+\Delta t}$  بدست می‌آید، و آنگاه با جایگزینی این مقادیر در معادله‌ی (15)

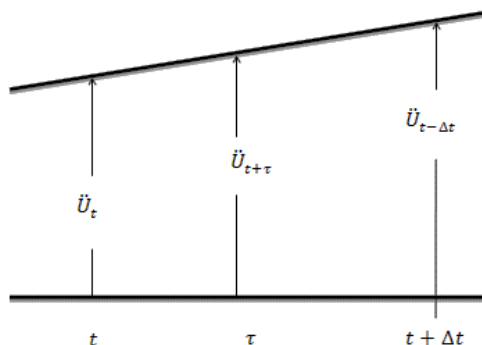


Fig. 2 Display of acceleration linear changes [14]

شکل 2 نمایش تغییرات خطی شتاب [14]

$$\begin{aligned} &+ \left( B_{61} \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \left( \frac{1}{R} B_{21} + B_{66} \right) \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2} + B_{26} \frac{\partial}{\partial x_2^2} \right) \{\varphi_1\} \\ &+ \left( B_{66} \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R} B_{22} \frac{\partial}{\partial x_2^2} + \left( B_{26} + \frac{1}{R} B_{62} \right) \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \{\varphi_2\} \\ &= \left( I_0 + \frac{2I_1}{R} \right) \ddot{v}_0 + \left( I_1 + \frac{I_2}{R} \right) \ddot{\varphi}_2 \end{aligned} \quad (7)$$

دسته سوم معادلات بصورت رابطه (8) می‌باشد.

$$\begin{aligned} &\left( -\frac{A_{21}}{R} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{A_{26}}{R} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \{u_0\} + \left( -\frac{A_{22}}{R} \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{A_{26}}{R} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \{v_0\} + \\ &\left( K_S A_{55} \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R} K_S A_{44} \frac{\partial}{\partial x_2^2} + (K_S A_{45}) \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2} + \right. \\ &\left. \frac{1}{R} (K_S A_{45}) \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{A_{22}}{R^2} \right) \{w_0\} + \left( \left( K_S A_{55} - \frac{B_{21}}{R} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \right. \\ &\left. \left( \frac{1}{R} K_S A_{45} - \frac{B_{26}}{R} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \{\varphi_1\} + \left( \left( K_S A_{45} - \frac{B_{26}}{R} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \right. \\ &\left. \left( \frac{1}{R} K_S A_{44} - \frac{B_{22}}{R} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \{\varphi_2\} + q = I_0 \ddot{w}_0 \end{aligned} \quad (8)$$

دسته چهارم معادلات بصورت رابطه (9) می‌باشد.

$$\begin{aligned} &\left( B_{11} \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \left( B_{16} + \frac{1}{R} B_{61} \right) \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2} + B_{66} \frac{\partial}{\partial x_2^2} \right) \{u_0\} + \\ &\left( B_{16} \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R} B_{62} \frac{\partial}{\partial x_2^2} + \left( \frac{1}{R} B_{66} + B_{12} \right) \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \{v_0\} + \\ &\left( \left( \frac{B_{12}}{R} - K_S A_{55} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \left( \frac{B_{62}}{R} - K_S A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \{w_0\} + \\ &\left( \left( K_S A_{45} - \frac{B_{26}}{R} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \left( \frac{1}{R} K_S A_{44} - \frac{B_{22}}{R} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \{\varphi_2\} + q = \\ &I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{\varphi}_1 \end{aligned} \quad (9)$$

دسته پنجم معادلات بصورت رابطه (10) می‌باشد.

$$\begin{aligned} &\left( B_{61} \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \left( \frac{1}{R} B_{21} + B_{66} \right) \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{R} B_{26} \frac{\partial}{\partial x_2^2} \right) \{u_0\} + \\ &\left( \left( B_{62} + \frac{1}{R} B_{26} \right) \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2} + B_{66} \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R} B_{22} \frac{\partial}{\partial x_2^2} \right) \{v_0\} + \\ &\left( \left( B_{62} - K_S A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \left( \frac{B_{22}}{R^2} - K_S A_{44} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \{w_0\} \\ &+ \left( -K_S A_{45} + D_{61} \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \left( \frac{1}{R} D_{21} + D_{66} \right) \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2} + \right. \\ &\left. \frac{1}{R} D_{26} \frac{\partial}{\partial x_2^2} \right) \{\varphi_1\} + \left( -K_S A_{44} + \left( D_{62} + \frac{1}{R} D_{26} \right) \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2} + \right. \\ &\left. D_{66} \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R} D_{22} \frac{\partial}{\partial x_2^2} \right) \{\varphi_2\} = \left( I_1 + \frac{I_2}{R} \right) \ddot{v}_0 + I_2 \ddot{\varphi}_2 \end{aligned} \quad (10)$$

در معادلات (5) تا (10) دو نوع مشتق وجود دارد مشتق زمانی و مشتق مکانی، در ادامه توضیح داده می‌شود که مشتقات زمانی به روش نیومارک حل شده و جهت حل مشتقات مکانی از روش دیفرانسیل مربعات برای حل

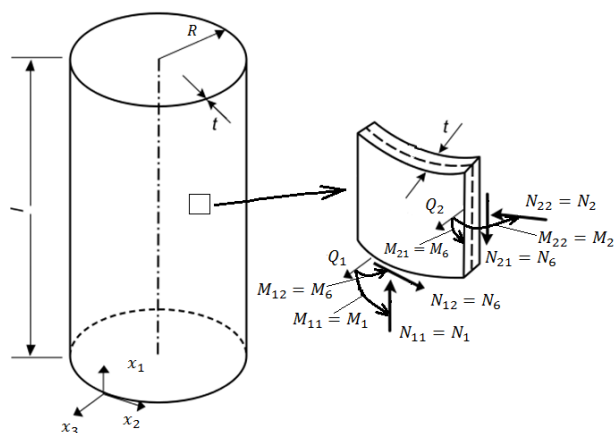


Fig. 1 Laminated shell geometry in cylindrical coordinate system and stress resultants on a shell element

شکل 1 هندسه پوسته لایه‌ای در دستگاه مختصات استوانه‌ای و منتجه‌های تنش در المانی از پوسته

$$\sum_{j=1}^N b_{ij} = 0 \text{ or } b_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N b_{ij} \quad (28)$$

جهت مشتقات بالاتر عناصر غیر قطری ماتریس وزنی از رابطه (29) و عناصر قطری ماتریس وزنی از رابطه (30) استفاده می‌شود.

$$c_{ij}^{(m)} = m \left( c_{ii}^{(m-1)} c_{ij}^{(m-1)} - \frac{c_{ij}^{(m-1)}}{x_i - x_j} \right) \quad (29)$$

$i \neq j \text{ and } m = 2, \dots, n-1 \quad i, j = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{j=1}^N c_{ij} = 0 \text{ or } c_{ij}^{(m)} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}^{(m)} \quad (30)$$

$i = 1, 2, \dots, N \text{ and } m = 1, 2, \dots, n-1$

با توجه به توضیحاتی که پیرامون استفاده از روش دیفرانسیل مربعات داده شد فرم مشتقات معادلات حرکت در روابط (6) تا (10) بر پایه روش عددی مذکور به صورت روابط (31) تا (35) می‌باشد.

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_1} = \sum_{k=1}^N a_{i,k} u_{0,k,j} = [a_{ij}][u_0] \quad (31)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_2} = \sum_{k=1}^M c_{j,k} u_{0,i,k} = \{[c_{ij}][\{u_0\}]^T\}^T \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} = \sum_{k=1}^N b_{i,k} u_{0,k,j} = [b_{ij}][u_0] \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} = \sum_{k=1}^M d_{j,k} u_{0,i,k} = \{[d_{ij}][\{u_0\}]^T\}^T \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1 \partial x_2} = \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^M a_{i,k_1} c_{j,k_2} u_{k_1,k_2} = [a_{ij}][\{c_{ij}][\{u_0\}]^T\}^T = [e_{ij}][c_{ij}][u_0] \quad (35)$$

روابط (31) تا (35) برای دیفرانسیل مربعات پارامتر  $u_0$  بوده و مانند این روابط برای متغیرهای  $w, v_0, \varphi_1, \varphi_2$  نیز وجود دارد که بدلیل تشابه معادلات از نوشتن آنها خودداری شده است. در روابط فوق ماتریس‌های  $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}], [d_{ij}], [e_{ij}]$  ماتریس ضرایب وزنی می‌باشند. پس از قرار دادن ماتریس ضرایب وزنی دیفرانسیل مربعات (روابط (31) تا (35)) در معادلات حاکم (روابط (6) تا (10)) فرم نهایی ماتریسی معادلات حاکم بر مساله به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_0\} \\ \{v_0\} \\ \{w_0\} \\ \{\varphi_1\} \\ \{\varphi_2\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [I_0] & 0 & 0 & [I_1] & 0 \\ 0 & [I_0 + \frac{2I_1}{R}] & 0 & 0 & [I_1 + \frac{I_2}{R}] \\ 0 & 0 & [I_0] & 0 & 0 \\ [I_1] & 0 & 0 & [I_2] & 0 \\ 0 & [I_1 + \frac{I_2}{R}] & 0 & 0 & [I_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_0\} \\ \{\ddot{v}_0\} \\ \{\ddot{w}_0\} \\ \{\dot{\varphi}_1\} \\ \{\dot{\varphi}_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ [q] \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (36)$$

در رابطه (36)  $K_{11}$  تا  $K_{55}$  المان‌های ماتریس سفتی،  $I_0$  تا  $I_2$  المان‌های ماتریس جرم و  $q$  فشار داخلی مخزن می‌باشد که بصورت روابط ارائه شده در پیوست الف می‌باشد. برای اضافه کردن شرایط مرزی با تکیه‌گاه ساده و تکیه‌گاه گیردار شرایط زیر در حل معادلات اعمال شده است [14].  
در شرایط مرزی در تکیه‌گاه ساده باید 5 معادله زیر برای دو سر ابتدا و انتهای استوانه بصورت روابط (37) برقرار باشند:

$$N_1 = A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + A_{12} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x_2} + \frac{1}{R_0} w_0 \right) + B_{11} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + B_{12} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = 0$$

$$M_1 = B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + B_{12} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x_2} + \frac{1}{R_0} w_0 \right) + D_{11} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + D_{12} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = 0$$

می‌توان  $U_{t+\Delta t}$  و سپس مشتق اول و دوم آن را از روابط (11) و (12) بصورت روابط (16) تا (18) محاسبه کرد.

$$u_{t+\Delta t} \left[ K + \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} M \right] = R_{t+\Delta t} + M \left[ \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} u_t + \frac{1}{\alpha(\Delta t)} \dot{u}_t + \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{u}_t \right] \quad (16)$$

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} (u_{t+\Delta t} - u_t) - \frac{1}{\alpha(\Delta t)} \dot{u}_t + \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{u}_t \quad (17)$$

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + (\Delta t)(1 - \delta)\ddot{u}_t + \delta(\Delta t)\ddot{u}_{t+\Delta t} \quad (18)$$

با توجه به توضیحات فوق، الگوریتم روش نیومارک به اختصار شامل مراحل زیر می‌باشد:

الف) محاسبات اولیه شامل: تشکیل ماتریس‌های جرم و سختی، تعیین مقادیر اولیه، انتخاب فاصله‌ی زمانی  $\Delta t$  و پارامترهای  $\alpha$  و  $\delta$  و محاسبه‌ی ثوابت انتگرال‌گیری بصورت روابط (19) و (20):

$$a_0 = \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2}; \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}; \quad a_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t}; \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1 \quad (19)$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1; \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right); \quad a_6 = \Delta t(1 - \delta); \quad a_7 = \delta\Delta t \quad (20)$$

ب) تشکیل ماتریس سختی موثر:  $\bar{R} = K + a_0 M$   
ج) محاسبه‌ی نیروهای موثر در لحظه‌ی  $t + \Delta t$  از رابطه (21):

$$\bar{R}_{t+\Delta t} = R_{t+\Delta t} + M(a_0 U_t + a_2 \dot{U}_t + a_3 \ddot{U}_t) \quad (21)$$

د) محاسبه‌ی سرعت‌ها و شتاب‌ها در لحظه‌ی  $t + \Delta t$  از رابطه (22) زیر برای استفاده در مرحله بعدی

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = a_0(U_{t+\Delta t} - U_t) - a_2 \dot{U}_t - a_3 \ddot{U}_t$$

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + a_6 \ddot{U}_t + a_7 \ddot{U}_t \quad (22)$$

به این ترتیب با حذف زمان از معادلات، معادلات دیفرانسیل به معادلات جبری تبدیل می‌شوند. به بیانی دیگر به جای حل یک مسئله‌ی دینامیکی در زمان  $T, n$  مسئله‌ی استاتیکی در زمان  $\Delta t$  حل می‌شود، به طوری که  $T = n * \Delta t$

#### 4- روش حل دیفرانسیل مربعات

متطابق مبانی نظری در تئوری دیفرانسیل مربعات مشتق مرتبه اول نسبت به یک متغیر از رابطه (23) بدست می‌آید [29]:

$$\frac{\partial f}{\partial x} |x_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (23)$$

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{k=1, k \neq i}^N (x_i - x_k) \quad (24)$$

$$a_{ij} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_k) \cdot M^{(1)}(x_j)}, \quad i \neq j \quad (25)$$

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = 0 \text{ or } a_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} \quad (26)$$

در رابطه (23)  $f(x_j)$  مشتق اول  $f(x)$  نسبت به  $x$  در نقطه  $x_i$  و  $N$  تعداد نقاط گره‌ای است.  $a_{ij}$  ضرایب وزنی برای مشتق اول می‌باشد. در روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته ضرایب وزنی بر اساس روش میانبایی لاگرانژ پایه ریزی می‌شوند و عناصر غیر قطری ماتریس وزنی از رابطه (25) و برای عناصر قطری از رابطه (26) بدست می‌آیند.

مشتق مرتبه دوم نسبت به یک متغیر از روابط (27) و (28) بدست می‌آید:

$$b_{ij} = 2a_{ij} \left( a_{ii} - \frac{1}{x_i - x_j} \right), \quad i \neq j \quad (27)$$



Fig. 4 A Sample of pressure sensor in test

شکل 4 یک نمونه از سنسور فشار در آزمایش



Fig. 5 Package of double-base propellant with end cap

شکل 5 پکیج سوخت دو پایه به همراه درپوش انتهایی

از شرط مرزی تقارن محوری در راستای محور مخزن استفاده شده است. جهت اعمال قیود مخزن برای دو حالت تکیه‌گاهی ساده و گیردار مورد تحلیل قرار گرفته و نتایج با هم مقایسه شده است که مراحل بحث و بررسی در بخش 7 بصورت تفصیلی ذکر شده است.



Fig. 6 A sample of low noise data Transmission cable

شکل 6 یک نمونه کابل انتقال داده نویز پایین



Fig. 7 Sample of device charging amplifier to boost signals

شکل 7 نمونه دستگاه شارژ آمپلی فایر جهت تقویت سیگنال‌های آزمایش

$$N_6 = A_{66} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right) + B_{66} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right) = 0$$

$$M_6 = B_{66} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right) + D_{66} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right) = 0$$

$$Q_1 = A_{45} \left( \varphi_2 + \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right) + A_{55} \left( \varphi_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (37)$$

در شرایط مرزی در تکیه‌گاه گیردار باید شرایط زیر برای دو سر ابتدا و انتهای استوانه بصورت رابطه (38) برقرار باشند:

$$u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \quad (38)$$

با استفاده از اعمال شرایط مرزی فوق، معادلات رابطه (36) با روش عددی دیفرانسیل مربعات در نرم‌افزار متلب حل شده و در قسمت نتایج مورد بحث و بررسی قرار گرفته شده است.

### 5- آزمایش تجربی

مشخصات نمونه مورد بررسی جهت آزمایش در جدول 1 ذکر شده است. این مدل که جهت کاربری خاصی مورد استفاده قرار می‌گیرد تحت بارگذاری دینامیکی بدست آمده از آزمایش تجربی قرار دارد شکل 3 نمونه آزمایش نصب شده بر روی پایه آزمایش را نشان می‌دهد.

برای اندازه‌گیری فشار در نقاطی از مدل سوراخ‌هایی تعبیه شده تا سنسورهای فشار پیزوالکتریک مدل 601H از شرکت کیستلر با محدوده فشار صفر تا هزار بار نصب شود. نمونه‌ای از نصب سنسور و همچنین سنسور فشار را می‌توان در شکل‌های 3 و 4 مشاهده کرد آزمایش با 800 گرم سوخت دو پایه بصورت بسته بندی شده مطابق شکل 5 پس از قرار دادن در داخل مخزن انجام شده است. داده‌های بدست آمده از آزمایش توسط کابل کواکسیال با نویز بسیار پایین (شکل 6) به شارژ آمپلی فایر (شکل 7) و از آن به دیتا لاگر جهت باز خوانی و تفسیر داده متصل شده است که نتایج بدست آمده بصورت نمودارهای فشار بر حسب زمان مطابق شکل 8 بدست می‌آید.

### 6- معرفی مدل

مدل جهت تحلیل‌های مورد نظر شامل یک مخزن استوانه‌ای با دو میلی‌متر لاینر آلومینیوم و چهار لایه کامپوزیت با زوایای (90، +75، -75، 90) درجه و ضخامت (1, 0.5, 0.5, 2.5) میلی‌متر در نظر گرفته شده است. ابعاد و شکل مدل اولیه در جدول 1 و شکل 3 نشان داده شده است که برای کاهش وزن آن به جای مخزن فولادی از آلومینیوم جهت لاینر مخزن و از کامپوزیت تی 700 برای خواص کامپوزیت و رشته پیچی استفاده شده که خواص مواد ذکر شده در جداول 2 و 3 آمده است. برای اعمال شرایط مرزی در تحلیل فشار به دلیل تقارن مدل تنها شرط مرزی در نقطه اتصال مخزن به بدنه می‌باشد به صورتی که از جا به جایی و چرخش محوری جلوگیری بکند. برای این منظور

جدول 1 ابعاد و اندازه مخزن مورد آزمایش

Table 1 The Vessel size used in test

شعاع داخلی (mm)	ضخامت (mm)	طول (mm)
65	5	1000

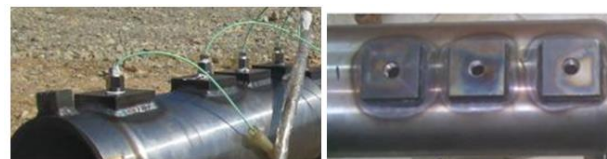


Fig. 3 test Sample and how to install pressure sensors

شکل 3 نمونه آزمایش و نحوه نصب سنسورهای فشار

جدول 3 خواص کامپوزیت تی 700 با درصد حجمی الیاف پنجاه درصد [31]

مقدار	کمیت
125	مدول یانگ $E_1$ (GPa)
8.85	مدول یانگ $E_2, E_3$ (GPa)
5.331	مدول برشی $G_{12}, G_{13}$ (GPa)
2.744	مدول برشی $G_{23}$ (GPa)
0.33	ضریب پواسون $\nu_{12}, \nu_{13}$
0.45	ضریب پواسون $\nu_{23}$
1600	جرم حجمی $\rho$ (kg m <sup>-3</sup> )
2300	مقاومت کششی طولی $X_t$ (MPa)
1080	مقاومت فشاری طولی $X_c$ (MPa)
30	مقاومت کششی عرضی $Y_t$ (MPa)
70	مقاومت فشاری عرضی $Y_c$ (MPa)
64.8	مقاومت برشی $S_{12}$ (MPa)

این دارد که کد نوشته شده با حل‌های انجام شده با مراجع دیگر اعتبارسنجی شود. اگرچه در قسمت بحث و بررسی نتایج حاصل از این تحقیق با نتایج حل المان محدود بررسی شده و صحت و سقم نتایج مورد بررسی قرار خواهد گرفت ولی در این قسمت با حل انجام شده در مراجع [32] و [33] نتایج حل تحلیلی مقایسه شده است. لازم بذکر است مطابق با شرایط حل مسئله مورد نظر در این تحقیق در هیچ مرجعی وجود ندارد و شرایط حل این تحقیق جهت تحلیل مسئله خاص کاربردی می‌باشد ولی شرایط حاکم بر مسئله موجود در مراجع مورد بررسی را به عنوان ورودی در این کد وارد شده و نتایج حل با هم مقایسه شده است. اعتبارسنجی اول در مرجع [32] بوده و شامل یک کامپوزیت دو لایه با زوایای 0 و 90 درجه تحت بار فشاری داخلی گذرا با مقدار 5000 پوند بر اینچ مربع می‌باشد شعاع داخلی 20 اینچ و ضخامت 1 اینچ از دو سر گیردار شده قرار دارد نمودار تغییر مکان شعاعی مخزن در زمان 100 میلی ثانیه در کد تحقیق حاضر و مرجع اشاره شده در شکل 10 رسم شده است مطابق شکل نتایج بدست آمده از کد تقریباً منطبق بر نتایج مرجع مورد نظر بوده و این نشان می‌دهد روند حل تحلیلی کد دارای دقت مناسبی می‌باشد.

اعتبارسنجی دوم مرجع [33] می‌باشد و شامل یک کامپوزیت دو لایه با زوایای 45 و 45- درجه تحت بار فشاری داخلی گذرا با مقدار 5000 پوند بر اینچ مربع می‌باشد. شعاع داخلی 20 اینچ و ضخامت 1 اینچ از دو سر گیردار شده قرار دارد نمودار تغییر مکان شعاعی مخزن در زمان 160 میلی ثانیه در کد تحقیق حاضر و مرجع اشاره شده در شکل 11 رسم شده است مطابق شکل نتایج بدست آمده از کد مانند اعتبارسنجی اول تقریباً منطبق بر نتایج مرجع مورد نظر می‌باشد.

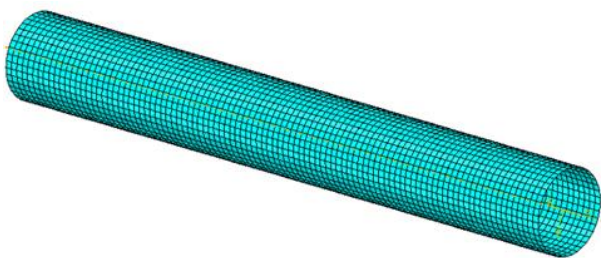


Fig. 9 Vessel meshed model

شکل 9 مدل مش بندی شده مخزن

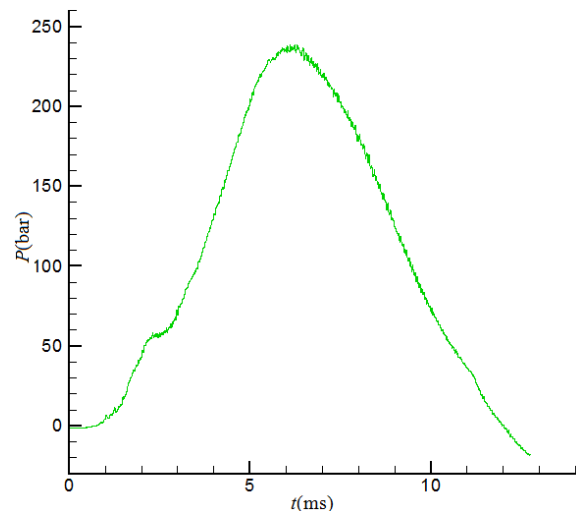


Fig. 8 Pressure-time diagram obtained from experimental test

شکل 8 نمودار فشار-زمان بدست آمده از آزمایش تجربی

جدول 2 خواص مکانیکی آلومینیوم [30]

مقدار	کمیت
70	مدول یانگ $E$ (GPa)
26	مدول برشی $G$ (GPa)
0.33	ضریب پواسون $\nu$
2700	جرم حجمی $\rho$ (kg m <sup>-3</sup> )

Table 2 Mechanical properties of Aluminum[30]

#### 7- مدل المان محدود

برای مقایسه نتایج تحلیل تئوری با نتایج عددی و بررسی درستی و یا نادرستی نتایج تحلیل تئوری مدلی از مخزن مورد مطالعه در نرم‌افزار آباکوس شبیه سازی شده است. برای المان بندی لاینر فلزی و همچنین پوشش کامپوزیتی از المان 4 گرهی شل<sup>1</sup> به تعداد 6563 المان استفاده شده است. نرم‌افزار آباکوس کاربر را برای انتخاب نوع المان، با یک مجموعه بزرگ از المان‌ها با قابلیت‌های مختلف روبرو نمی‌کند، بلکه تعداد محدودی و در برخی کاربردها تنها یک المان متناسب با زمینه انجام تحلیل در اختیار می‌گذارد و به‌طور خودکار، قابلیت‌های المان را با ویژگی‌هایی که کاربر در بخش‌های مختلف مدل‌سازی مانند تعریف خواص ماده، نوع بارگذاری و سایر موارد تعیین نموده است، منطبق می‌کند. نمایی از مدل مش بندی شده مخزن توسط المان‌های مذکور در شکل 9 دیده می‌شود. برای اعمال شرایط بار اعمالی به هر دو مدل المان محدود و تئوری مطابق نمودار شکل 8 بوده و با ضرب آن در مقدار 1.5 برابر مقدار ماکزیمم جهت ضریب اطمینان (با مقدار ماکزیمم 400 بار) به مدل اعمال شده است. جهت اعمال بار دینامیکی شکل 9 در نرم‌افزار المان محدود، این نمودار بصورت مقادیر جدول با دو ستون زمان و مقدار فشار مطابق با زمان به نرم‌افزار شناسانده شده است. شرایط مرزی مدل در نرم‌افزار المان محدود آباکوس مطابق دو حالت تکیه‌گاهی ساده و گیردار ذکر شده در بخش 4 در دو انتهای مخزن اعمال شده است.

#### 8- اعتبارسنجی

چون کار انجام شده انجام یک کار تحلیلی شامل بدست آوردن روابط حاکم بر پوسته استوانه‌ای تحت بار دینامیکی و حل این روابط با روش دیفرانسیل مربعات و نوشتن برنامه کامپیوتری توسط نرم‌افزار متلب می‌باشد، احتیاج به

<sup>1</sup> Shell (S4R)

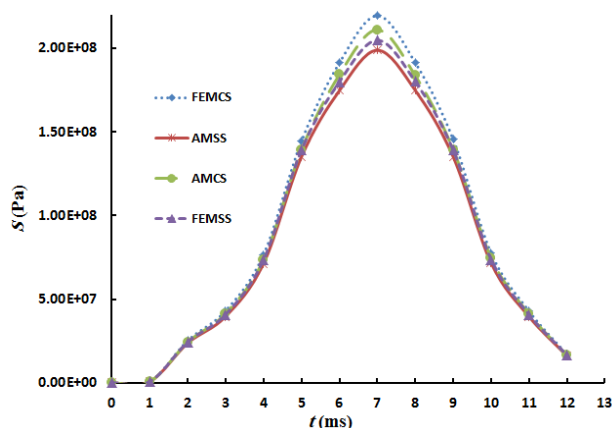


Fig. 12 Von Mises stress of liner in 250 mm length for two modes of anchor and comparison with finite element solution versus time

شکل 12 تنش ون میسز لاینر در طول 250 میلی‌متر برای دو حالت تکیه‌گاهی و مقایسه آن با حل المان محدود بر حسب زمان

در شرایط تکیه‌گاهی گیردار در حل تحلیلی و نتایج المان محدود می‌باشد. در شکل 13 نتایج تنش ون میسز برای لاینر را برای دو حالت تکیه‌گاهی برای نقاط ابتدایی و انتهایی مخزن رسم شده است. با توجه به شکل مقادیر حل تحلیلی و المان محدود در شرایط تکیه‌گاهی گیردار به هم نزدیک بوده ولی در شرایط تکیه‌گاهی ساده بدلیل دور شدن از نقطه تکیه‌گاهی و با توجه به شرایط تکیه‌گاهی تعریف شده در آن مقدار تنش به مقدار قابل توجهی کاهش داشته است. در شکل‌های 14 تا 17 تنش در راستای الیاف در لایه‌های اول تا چهارم کامپوزیت نشان داده شده است و نتایج حل در شرایط تکیه‌گاهی گیردار، ساده و المان محدود با هم مقایسه شده است. همان‌طور که در این شکل‌ها نشان داده شده است در لایه‌های اول و چهارم بدلیل پیچیدن زوایای الیاف در راستای 90 درجه تنش در این لایه‌ها از مقدار تنش در راستای 75 درجه بیشتر می‌باشد و این بدلیل تحمل بیشتر بار توسط لایه‌های 90 درجه اتفاق می‌افتد. نتایج بدست آمده در هر دو راستای 90 و 75 درجه برای هر دو حالت تکیه‌گاهی تقریباً به هم نزدیک بوده و تطابق خوبی با نتایج بدست آمده از حل المان محدود دارد. شکل‌های 18 و 19 نمودار تنش عمود بر راستای الیاف را برای دو حالت تکیه‌گاهی جهت حل تحلیلی نشان داده شده است. لازم به ذکر است به علت نزدیک بودن نتایج تنش در روش دیفرانسیل مربعات با نتایج المان محدود در نمودارهای بعدی به علت شلوغ شدن نمودارها و زیاد شدن تعداد شکل‌ها از ذکر نتایج المان محدود خودداری شده است. همان‌طور که در این دو شکل (شکل 18 و 19) نشان داده می‌شود تنش در لایه‌های اول با چهارم و دوم با سوم بر هم منطبق بوده و نتایج در هر دو حالت تکیه‌گاهی تقریباً مثل هم می‌باشد. مقدار تنش‌ها در این راستا (یعنی راستای عمود بر الیاف یا راستای ماتریس) دارای مقادیر بسیار کم و در حالت بیشینه خود به حدود 6 الی 7 مگا پاسکال می‌رسد و این بیانگر این می‌باشد که در راستای ماتریس مقدار باربرداری بسیار کم بوده و بیشتر بار توسط الیاف تحمل خواهد شد.

در شکل‌های 20 و 21 مقدار تنش‌های برشی برای دو حالت تکیه‌گاهی جهت حل دیفرانسیل مربعات در لایه‌های مختلف نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل‌ها نشان داده می‌شود تنش در لایه‌های اول با چهارم بر هم منطبق بوده و تقریباً مقدار برابر نزدیک به صفر را دارد و این بیانگر این مطلب بوده که لایه‌های با زاویه 90 بار برشی را تحمل نمی‌کند و تمام تنش برشی به لایه‌های با زوایای غیر 90 وارد خواهد شد. لایه‌های دوم و

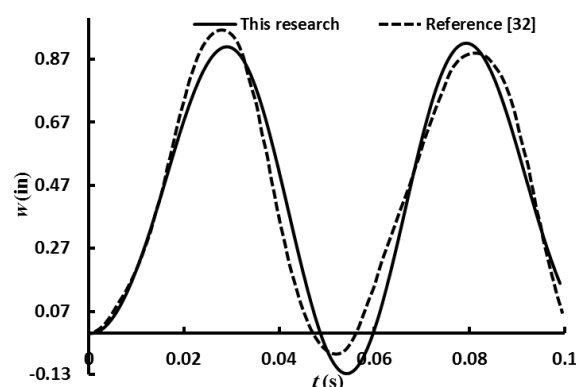


Fig. 10 Changes of radial displacement in composite vessel with fibers 0 and 90 degrees versus time

شکل 10 تغییرات جابجائی شعاعی در مخزن کامپوزیتی با الیاف 0 و 90 درجه بر حسب زمان

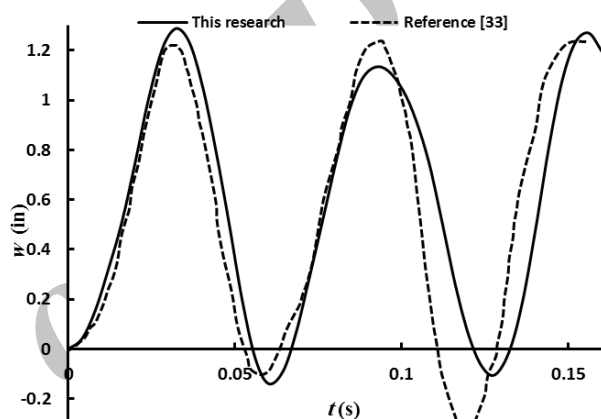


Fig. 11 Changes of radial displacement in composite vessel with fibers 45 and -45 degrees versus time

شکل 11 تغییرات جابجائی شعاعی در مخزن کامپوزیتی با الیاف 45 و -45 درجه بر حسب زمان

## 9- بحث و نتایج

مدل با مشخصات ذکر شده در بخش 6 برای دو حالت تکیه‌گاهی گیردار و ساده مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. لازم بذکر است که شرایط تکیه‌گاهی در دو انتهای مخزن اعمال شده و زوایا و ضخامت لایه‌ها در مخزن با توجه به تحلیل‌های صورت گرفته در مرجع [34] انتخاب شده است. در شکل 12 نتایج تنش ون میسز برای لاینر را برای دو حالت تکیه‌گاهی در طول 250 میلی‌متر نشان داده شده است. نمودارهای نشان داده شده برای چهار حالت روش تئوری با تکیه‌گاه ساده<sup>1</sup>، روش تئوری با تکیه‌گاه گیردار<sup>2</sup>، روش المان محدود با نرم‌افزار آباکوس با تکیه‌گاه گیردار<sup>3</sup> و روش المان محدود با نرم‌افزار آباکوس با تکیه‌گاه ساده<sup>4</sup> می‌باشد که در نمایش شکل‌ها بصورت روش اختصار آن در لژند نمایش داده می‌شود.

همان‌طور که در این شکل نشان داده شده است تنشها در هر دو شرایط تکیه‌گاهی کاملاً به هم نزدیک بوده و تقریباً بر هم منطبق می‌باشد و دارای اختلاف کمی با تحلیل المان محدود می‌باشد. ماکزیمم تنش در زمان 7 میلی ثانیه و برابر 199 مگا پاسکال در شرایط تکیه‌گاهی ساده و 211 مگا پاسکال

<sup>1</sup> Analytical method with simple support (AMSS)

<sup>2</sup> Analytical method with clamp support (AMCS)

<sup>3</sup> Finite element method with clamp support (FEMCS)

<sup>4</sup> Finite element method with simple support (FEMSS)



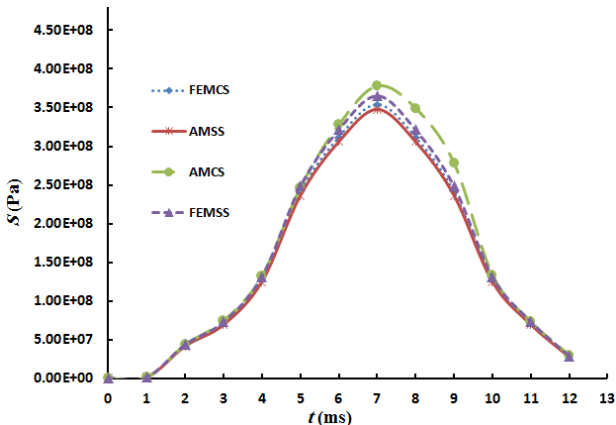


Fig. 16 Stress in the fibers for the third layer in 250 mm length for two modes of anchor and comparison with finite element solution versus time

شکل 16 تنش در راستای الیاف برای لایه سوم در طول 250 میلی‌متر برای دو حالت تکیه‌گاهی و مقایسه آن با حل المان محدود بر حسب زمان

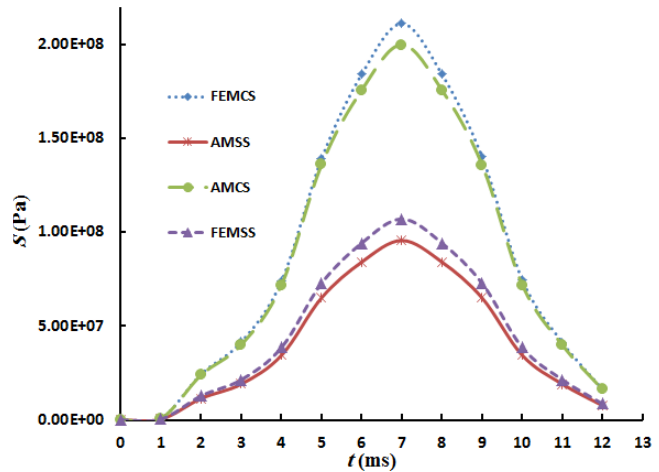


Fig. 13 Von Mises stress of liner in the beginning and the end of vessel for two modes of anchor and comparison with finite element solution versus time

شکل 13 تنش ون میسز لاینر در نقطه ابتدا و انتهای مخزن دو حالت تکیه‌گاهی و مقایسه آن با حل المان محدود بر حسب زمان

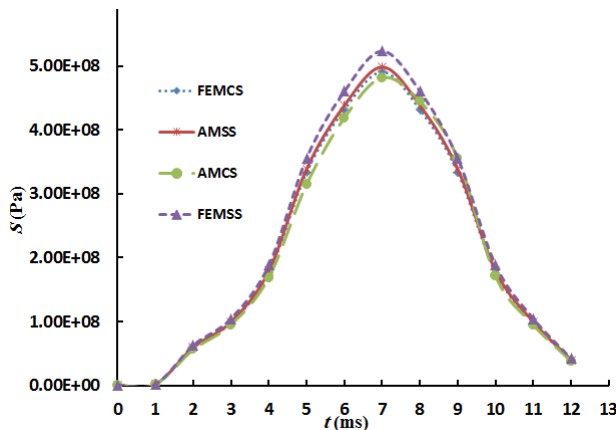


Fig. 17 Stress in the fibers for the fourth layer in 250 mm length for two modes of anchor and comparison with finite element solution versus time

شکل 17 تنش در راستای الیاف برای لایه چهارم در طول 250 میلی‌متر برای دو حالت تکیه‌گاهی و مقایسه آن با حل المان محدود بر حسب زمان

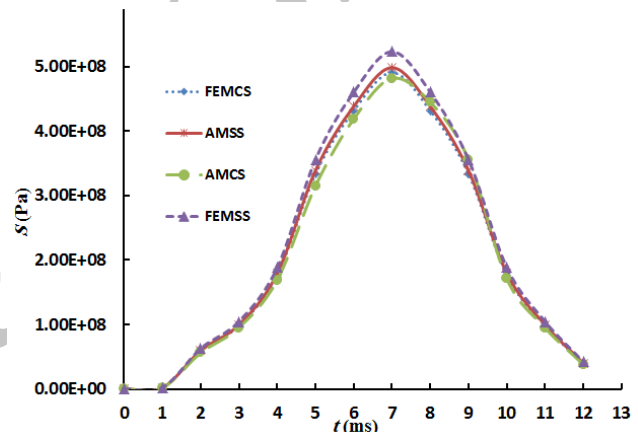


Fig. 14 Stress in the fibers for the first layer in 250 mm length for two modes of anchor and comparison with finite element solution versus time

شکل 14 تنش در راستای الیاف برای لایه اول در طول 250 میلی‌متر برای دو حالت تکیه‌گاهی و مقایسه آن با حل المان محدود بر حسب زمان

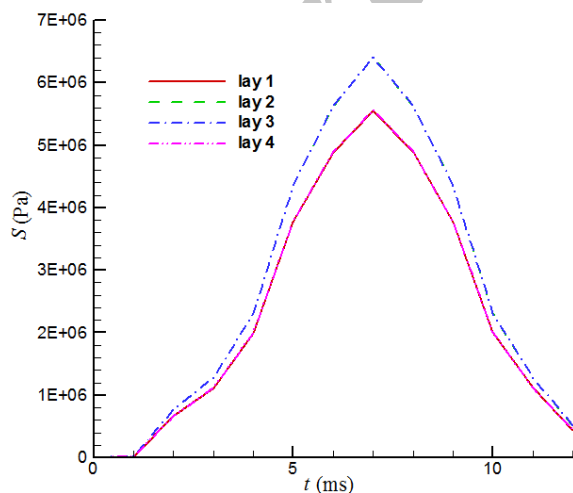


Fig. 18 Stress perpendicular to the fibers for the various layers in 250 mm length for the clamp support

شکل 18 تنش در راستای عمود بر الیاف برای لایه‌های مختلف در طول 250 میلی‌متر برای حالت تکیه‌گاهی گیردار

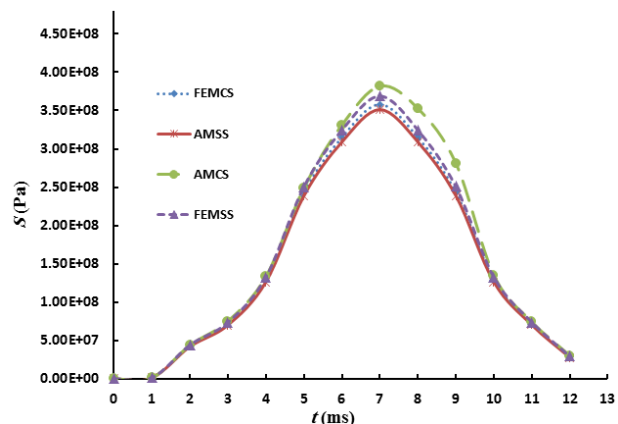


Fig. 15 Stress in the fibers for the second layer in 250 mm length for two modes of anchor and comparison with finite element solution versus time

شکل 15 تنش در راستای الیاف برای لایه دوم در طول 250 میلی‌متر برای دو حالت تکیه‌گاهی و مقایسه آن با حل المان محدود بر حسب زمان

سوم دارای مقدار تنش برشی قرینه نسبت به یکدیگر بوده و این بدلیل قرینه بودن زوایای پیچش نسبت به یکدیگر می‌باشد. در شکل 22 تغییرات جابجایی شعاعی لاینر در طول 250 میلی‌متر و برای هر دو حالت تکیه‌گاهی بر حسب زمان رسم شده است. همان‌طور که در این شکل نشان داده شده است. تغییرات جابجایی در حالت شرایط تکیه‌گاهی ساده دارای مقدار بیشتری نسبت به حالت تکیه‌گاهی گیردار می‌باشد. از طرفی این اختلاف کم بوده و نتایج تقریباً نزدیک به یکدیگر بوده و با نتایج بدست آمده از تحلیل المان محدود دارای تطابق خوبی است. از بحث و بررسی‌های انجام شده در نتایج فوق و مقایسه نتایج روش حل دیفرانسیل مربعات با المان محدود می‌توان نتیجه‌گیری نمود که روش حل دیفرانسیل مربعات در حل معادلات حاکم دارای دقت مناسب و قابل قبولی می‌باشد. هر روش دارای مزایا و معایب منحصر به فرد خود بوده و روش دیفرانسیل مربعات هم از این قاعده مستثنی نمی‌باشد. لذا در ادامه با استفاده از نتایج بدست آمده در این تحقیق به بحث و بررسی نقاط ضعف و قوت این روش پرداخته می‌شود. از نقاط قوت این روش حل صریح و مستقیم معادلات بوده و از تشکیل ماتریس اسمبل شده بسیار بزرگ که عمدتاً در حل معادلات با روش المان محدود رخ می‌دهد جلوگیری شده که در نتیجه زمان حل و خطای محاسباتی در آن بسیار کم خواهد شد و روش حل بسیار ساده و کاربردی با دقت نتایج مناسب و قابل قبول بدست خواهد آمد. از نقاط ضعف این روش می‌توان به عدم توانایی این روش در حل مسئله با هندسه‌های پیچیده و همچنین اعمال شرایط مرزی مشکل‌تر در سیستم معادلات اشاره کرد.

### 10- جمع بندی و نتیجه گیری

در تحقیق حاضر تحلیل تئوری و عددی مخزن استوانه‌ای فلز کامپوزیت تحت بار دینامیکی بدست آمده از نتایج تجربی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش حل دیفرانسیل مربعات مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور ابتدا معادلات تعادل پوسته بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج شد و سپس با روش دیفرانسیل مربعات معادلات به فرم ماتریس‌های حل عددی نوشته شد و آنگاه جهت حل این معادلات از کد برنامه نویسی متلب استفاده شد. جهت پی بردن به درستی کارکرد کد نوشته

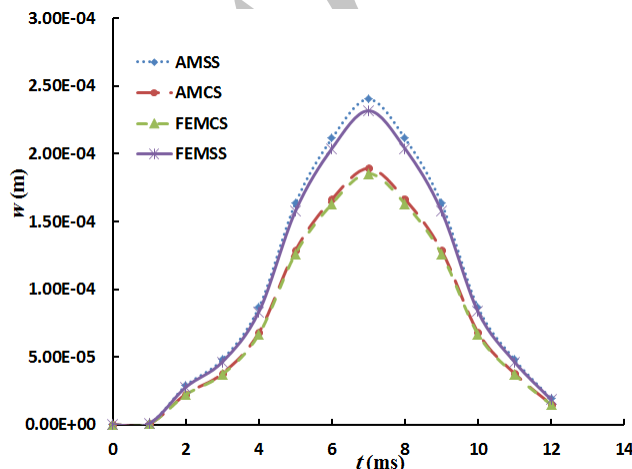


Fig. 22 Radial displacement changes of liner in 250 mm length for two modes of anchor and comparison with finite element solution versus time

شکل 22 تغییرات جابجایی شعاعی لاینر در طول 250 میلی‌متر برای دو حالت تکیه‌گاهی و مقایسه آن با حل المان محدود بر حسب زمان

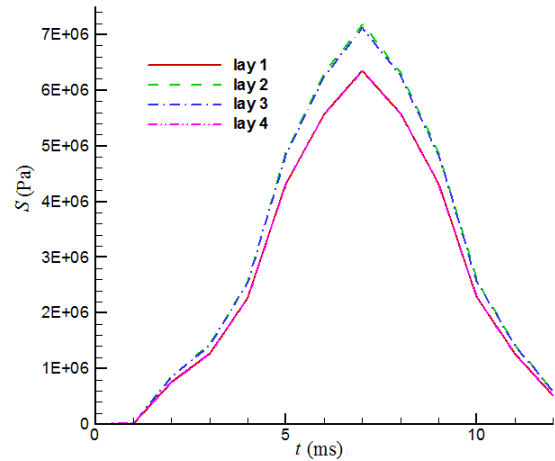


Fig. 19 Stress of perpendicular to the fibers for the various layers in 250 mm length for the simple support

شکل 19 تنش در راستای عمود بر الیاف برای لایه‌های مختلف در طول 250 میلی‌متر برای حالت تکیه‌گاهی ساده

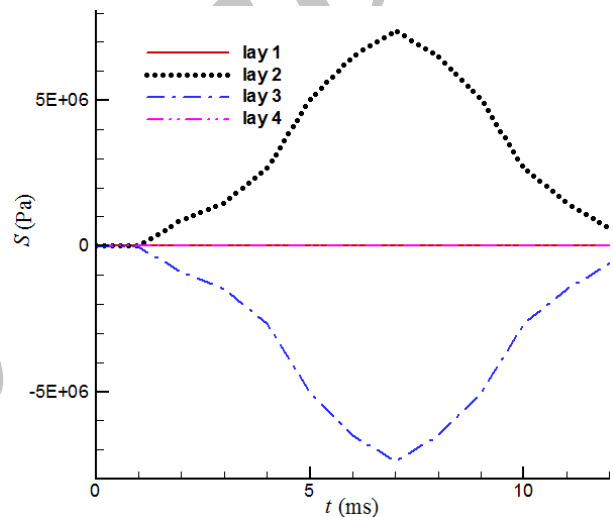


Fig. 20 Shear stress for the various layers in 250 mm length for the clamp support

شکل 20 تنش برشی برای لایه‌های مختلف در طول 250 میلی‌متر برای حالت تکیه‌گاهی گیردار

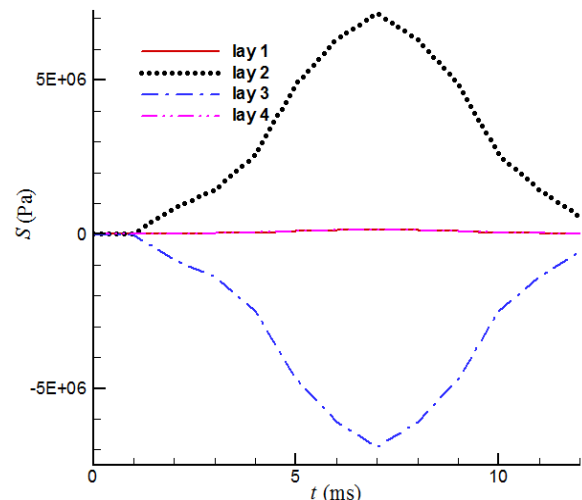


Fig. 21 Shear stress for the various layers in 250 mm length for the simple support

شکل 21 تنش برشی برای لایه‌های مختلف در طول 250 میلی‌متر برای حالت تکیه‌گاهی ساده

$$\begin{aligned}
K_{34} &= \left( \left( K_S A_{55} - \frac{B_{21}}{R} \right) [a_{ij}] + \left( K_S A_{45} - \frac{B_{26}}{R} \right) [c_{ij}] \right) \\
K_{35} &= \left( \left( K_S A_{45} - \frac{B_{26}}{R} \right) [a_{ij}] + \left( \frac{K_S A_{44}}{R} - \frac{B_{22}}{R} \right) [c_{ij}] \right) \\
K_{41} &= \left( B_{11} [b_{ij}] + \left( B_{16} + \frac{B_{61}}{R} \right) [e_{ij}] [c_{ij}] + B_{66} [d_{ij}] \right) \\
K_{42} &= \left( B_{16} [b_{ij}] + \frac{B_{62}}{R} [d_{ij}] + \left( \frac{B_{66}}{R} + B_{12} \right) [e_{ij}] [c_{ij}] \right) \\
K_{43} &= \left( \left( \frac{B_{12}}{R} - K_S A_{55} \right) [a_{ij}] + \left( \frac{B_{62}}{R} - K_S A_{45} \right) [c_{ij}] \right) \\
K_{44} &= \left( D_{11} [b_{ij}] - K_S A_{55} [\delta_{ij}] + \left( \frac{D_{61}}{R} + D_{16} \right) [e_{ij}] [c_{ij}] \right. \\
&\quad \left. + \frac{D_{66}}{R} [d_{ij}] \right) \\
K_{45} &= \left( D_{16} [b_{ij}] - K_S A_{45} [\delta_{ij}] + \frac{D_{62}}{R} [d_{ij}] \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{D_{66}}{R} + D_{12} \right) [e_{ij}] [c_{ij}] \right) \\
K_{51} &= \left( B_{61} [b_{ij}] + \left( \frac{B_{21}}{R} + B_{66} \right) [e_{ij}] [c_{ij}] + \frac{B_{26}}{R} [d_{ij}] \right) \\
K_{52} &= \left( \left( \frac{B_{62} + B_{26}}{R} \right) [e_{ij}] [c_{ij}] + B_{66} [b_{ij}] + \frac{B_{22}}{R} [d_{ij}] \right) \\
K_{53} &= \left( \left( \frac{B_{62}}{R} - K_S A_{45} \right) [a_{ij}] + \left( \frac{B_{22}}{R} - K_S A_{44} \right) [c_{ij}] \right) \\
K_{54} &= \left( -K_S A_{45} [\delta_{ij}] + D_{61} [b_{ij}] + \left( \frac{D_{21}}{R} + D_{66} \right) [e_{ij}] [c_{ij}] \right. \\
&\quad \left. + \frac{D_{26}}{R} [d_{ij}] \right) \\
K_{55} &= \left( -K_S A_{44} [\delta_{ij}] + \left( D_{62} + \frac{D_{26}}{R} \right) [e_{ij}] [c_{ij}] + D_{66} [b_{ij}] \right. \\
&\quad \left. + \frac{D_{22}}{R} [d_{ij}] \right)
\end{aligned}$$

$$I_i = \sum_{k=1}^N \int_r^{r_{k+1}} \rho^k r^i dr \quad (i = 0, 1, 2)$$

## 12- مراجع

- [1] E. Reissner, On the theory of bending of elastic plates, *Journal of Mathematics and Physics*, Vol. 23, No. 2, pp. 184-191, 1944.
- [2] R. D. Mindlin, Influence rotatory inertia and shear in flexural motion of isotropic elastic plates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, No. 2, pp. 31-38, 1951.
- [3] R. D. Mindlin, A. Schacknow, H. Deresiewicz, Flexural vibration of rectangular plates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 23, No. 2, pp. 430-436, 1956.
- [4] P. M. Naghdi, R. M. Cooper, Propagation of elastic waves in cylindrical shells including the effects of transverse shear and rotary inertia, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 28, No. 1, pp. 56-63, 1956.
- [5] I. Mirsky, G. Hermann, Axially symmetric motions of thick cylindrical shells, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 80, No. 4, pp. 97-102, 1958.
- [6] M. Ziv, M. Perl, Impulsive deformation of mirsky-hermann's thick cylindrical shells by a numerical method, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 40, No. 4, pp. 1009-1016, 1973.
- [7] K. Suzuki, M. Konnon, S. Takahashi, Axisymmetric vibration of a cylindrical shell with variable thickness, *Bulletin of the JSME*, Vol. 24, No. 198, pp. 2122-2132, 1981.
- [8] S. Takahashi, K. Suzuki, T. Kosawada, Vibrations of conical shells with variable thickness, *Bulletin of the JSME*, Vol. 29, No. 285, pp. 4306-4311, 1986.
- [9] H. R. Eipakchi, G. H. Rahimi, S. Esmailzadeh Khadem, Closed form solution for displacements of thick cylinders with varying thickness subjected to non-uniform internal pressure, *Structural Engineering & Mechanics*, Vol. 6, No. 16, pp. 731-748, 2003.
- [10] J. N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, No. 4, pp. 745-52, 1984.
- [11] J. N. Reddy, *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*, First ed., pp. 50-341, New York: John Wiley, 1984.
- [12] A. A. Khdeir, J. N. Reddy, D. Frederick, A study of bending, vibration and buckling of cross-ply circular cylindrical shells with various shell theories, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 27, No. 11, pp.1337-1351, 1989.
- [13] Nosier, J. N. Reddy, Vibration and stability analyses of cross-ply laminated circular cylindrical shells, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 157, No. 1,

شده از یک مخزن فلز کامپوزیت با چهار لایه کامپوزیت با ضخامت (1, 0.5, 0.5, 2.5) میلی‌متر و زوایای (90, +75, -75.90) درجه و یک لاینر آلومینیوم به ضخامت 2 میلی‌متر با بارگذاری دینامیکی ناشی از یک سوخت دو پایه و بدست آمده از آزمایش‌های تجربی استفاده شد. نتایج بدست آمده از کد برنامه نویسی با حل المان محدود مسئله مورد نظر با نرم‌افزار آباکوس مورد مقایسه و بررسی قرار گرفت. نتایج بدست آمده از کد نشان داد که تقریباً در بیشتر موارد این نتایج با نتایج بدست آمده از المان محدود نزدیک بوده و روند بررسی و حل مسئله در کد مورد نظر بدرستی انجام شده است. جهت مقایسه نتایج کد با مراجع دیگر شرایط مسئله ذکر شده در دو نمونه از مراجع در کد برنامه نویسی مورد تحقیق حل و نتایج بدست آمده از کد با نتایج این مراجع مورد مقایسه قرار گرفت که نتیجه بدست آمده نشان داد که این نتایج با نتایج ارائه شده در این مراجع بسیار به هم نزدیک می‌باشد. از جمله نتایج این تحقیق بررسی روش حل دیفرانسیل مربعات در حل معادلات حاکم و نقاط ضعف و قوت این روش بود. با مقایسه نتایج بدست آمده از حل معادلات حاکم بر مسئله با روش دیفرانسیل مربعات و حل عددی المان محدود به این نتیجه رسیده شد که این روش در حل معادلات با هندسه منظم، بسیار ساده، کاربردی و دارای دقت قابل قبولی می‌باشد. یکی از نقاط قوت این روش حل صریح و مستقیم معادلات بوده و از تشکیل ماتریس اسمبل شده بسیار بزرگ که عمدتاً در حل معادلات با روش المان محدود رخ می‌دهد جلوگیری شده و در نتیجه زمان حل و خطای محاسباتی در آن بسیار کم خواهد شد. از جمله نقاط ضعف این روش می‌توان به عدم توانایی این روش در حل مسئله با هندسه‌های پیچیده و همچنین اعمال شرایط مرزی مشکل‌تر در سیستم معادلات اشاره کرد.

## 11- پیوست

المان‌های ماتریس سفتی رابطه (36)

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \left( A_{11} [b_{ij}] + \left( A_{16} + \frac{A_{61}}{R} \right) [e_{ij}] [c_{ij}] + \frac{A_{66}}{R} [d_{ij}] \right) \\
K_{12} &= \left( \left( A_{12} + \frac{A_{66}}{R} \right) [e_{ij}] [c_{ij}] + A_{16} [b_{ij}] + \frac{A_{62}}{R} [d_{ij}] \right) \\
K_{13} &= \left( \frac{A_{12}}{R} [a_{ij}] + \frac{A_{62}}{R^2} [c_{ij}] \right) \\
K_{14} &= \left( B_{11} [b_{ij}] + \left( B_{16} + \frac{B_{61}}{R} \right) [e_{ij}] [c_{ij}] + \frac{B_{66}}{R} [d_{ij}] \right) \\
K_{15} &= \left( \left( B_{12} + \frac{B_{66}}{R} \right) [e_{ij}] [c_{ij}] + B_{16} [b_{ij}] + \frac{B_{62}}{R} [d_{ij}] \right) \\
K_{21} &= \left( A_{61} [b_{ij}] + \left( \frac{A_{21}}{R} + A_{66} \right) [e_{ij}] [c_{ij}] + \frac{A_{26}}{R} [d_{ij}] \right) \\
K_{22} &= \left( A_{66} [b_{ij}] + \frac{A_{22}}{R} [d_{ij}] + \left( \frac{A_{26}}{R} + A_{62} \right) [e_{ij}] [c_{ij}] \right) \\
K_{23} &= \left( \frac{A_{62}}{R} [a_{ij}] + \frac{A_{22}}{R} [c_{ij}] \right) \\
K_{24} &= \left( B_{61} [b_{ij}] + \left( \frac{B_{21}}{R} + B_{66} \right) [e_{ij}] [c_{ij}] + B_{26} [d_{ij}] \right) \\
K_{25} &= \left( B_{66} [b_{ij}] + \frac{B_{22}}{R} [d_{ij}] + \left( B_{26} + \frac{B_{62}}{R} \right) [e_{ij}] [c_{ij}] \right) \\
K_{31} &= \left( -\frac{A_{21}}{R} [a_{ij}] - \frac{A_{26}}{R} [c_{ij}] \right) \\
K_{32} &= \left( -\frac{A_{22}}{R} [c_{ij}] - \frac{A_{26}}{R} [a_{ij}] \right) \\
K_{33} &= \left( K_S A_{55} [b_{ij}] + \frac{K_S A_{44}}{R} [d_{ij}] \right. \\
&\quad \left. + \left( K_S A_{45} + \frac{K_S A_{45}}{R} \right) [e_{ij}] [c_{ij}] - \frac{A_{22}}{R^2} [\delta_{ij}] \right. \\
&\quad \left. - \tilde{N} [b_{ij}] \right)
\end{aligned}$$

- symmetric cylindrical shells, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 83, No. 3, pp. 331-343, 2013.
- [25] S. Abolghasemi, H. R. Eipakchi, M. Shariati, Analytical solution for buckling of rectangular plates subjected to non-uniform in-plane loading based on first order shear deformation theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 13, pp. 37-46, 2015. (in Persian فارسی)
- [26] A. A. Masoumi, G. H. Rahimi, Investigation composite metal vessels under dynamic loading, *Proceedings of The 1th International Conference on Composite Pipes ,Vessels & Tanks*, Tehran, Iran, June 27-28, 2015. (in Persian فارسی)
- [27] A. Masoumi, G. H. Rahimi, G. H. Liaghat, Numerical analysis of metal multi-section under dynamic loading, *Proceedings of The 24th International Conference Mechanical Engineering*, Yazd, Iran, May 1-2, 2016. (in Persian فارسی)
- [28] A. Masoumi, G. H. Rahimi, G. H. Liaghat, Experimental measurement of pressure in cylindrical vessel under shock loading, *Proceedings of The 24th International Conference Mechanical Engineering*, Yazd, Iran, May 1-2, 2016. (in Persian فارسی)
- [29] Shu, *Differential Quadrature and Its Application In Engineering*, First Edition, pp. 10-150, London: Springer-Verlag, , 2000.
- [30] *AISI Alloy*, Accessed on 20 March 2016; <http://www.azom.com/article.aspx>.
- [31] *All the Materials You Need for Scientific and Industrial Research and Manufacturing*, Accessed on 20 March 2016; <http://www.goodfellow.com/E/Carbon-EpoxyComposite-Tube.html>.
- [32] T. Kant, J. R Kommineni, Geometrically non-linear transient analysis of laminated composite and sandwich shells with a refined theory and  $C^0$  finite elementse, *Computer & Structures*, Vol. 52, No. 6, pp. 1243-1259, 1994.
- [33] J. N. Reddy, K. Chandrashekhara, Geometrically non-linear transient analysis of laminated doubly curved shells, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 20, No. 2, pp. 79-90, 1985
- [34] A. A. Masoumi, G. H. Rahimi, G. H. Liaghat, Experimental and numeral analysis of composite metal vessel under dynamic loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 5, pp. 51-62, 2016. (in Persian فارسی)
- pp. 139-159, 1992.
- [14] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis*, Second ed., pp. 407-658, New York: CRC PRESS, 2003.
- [15] J. N. Reddy, R. A. Arciniega, Shear deformation plate and shell theories from stavsky to present, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 11, No. 6, pp. 535-582, 2004.
- [16] A. Bahtui, M. R. Eslami, Coupled thermoelasticity of functionally graded cylindrical shells, *Mechanics Research Communications*, Vol. 34, No. 1, pp. 1-18, 2007.
- [17] S. Eipakchi Khadem, G. H. Rahimi, Axisymmetric stress analysis of a thick conical shell with varying thickness under nonuniform internal pressure, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 134, No. 8, pp. 601-610, 2008.
- [18] G. H. Rahimi, M. Ghannad, S. Eipakchi Khadem, General solution of plane elasticity of axisymmetric functionally graded thick cylindrical shells, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 10, No. 3, pp. 31-43, 2010. (in Persian فارسی)
- [19] G. H. Rahimi, M. Ghannad, S. Eipakchi Khadem, General solution of shear deformation of axisymmetric functionally graded thick cylindrical shells, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 10, No. 4, pp. 13-25, 2010. (in Persian فارسی)
- [20] M. Ghannad, M. Zamani Nejad, Elastic analysis of pressurized thick hollow cylindrical shells with clamped-clamped ends, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 85, No. 5, pp. 1392-1207, 2010.
- [21] M. Arefi, G. H. Rahimi, The effect of nonhomogeneity and end supports on the thermo elastic behavior of a clamped-clamped FGM cylinder under mechanical and thermal loads, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 96, No. 1, pp. 30-37, 2012.
- [22] E. Asadi, W. Wang, M. S. Qatu, Static and vibration analyses of thick deep laminated cylindrical shells using 3d and various shear deformation theories, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 2, pp. 494-500, 2012.
- [23] M. J. Khoshgoftar, G. H. Rahimi, M. Arefi, Exact solution of functionally graded thick cylinder with finite length under longitudinally non-uniform pressure, *Mechanics Research Communications*, Vol. 51, No. 1, pp. 61-66, 2013.
- [24] V. V. Zozulya, A high-order theory for functionally graded axially