



بررسی ارتعاشات غیرخطی میکرو تیر تحت تحریک نیروی الکترواستاتیک با رفتار تنش - کرنش انالاستیک

امیر ویسی گرگ آباد¹، قادر رضا زاده^{2*}، رسول شهابانی²

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه

2- استاده، مهندسی مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه

* ارومیه، صندوق پستی 57169-33111 Urmia.ac.ir, rezazadeh.g@

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 06 اردیبهشت 1396
پذیرش: 12 خرداد 1396
ارائه در سایت: 22 تیر 1396

کلید واژگان:

انالاستیسیته

ویسکوالاستیسیته

تحلیل غیرخطی

تحریک الکترواستاتیک

میکروتیر

چکیده

در این مقاله ارتعاشات غیرخطی میکرو تیرهای با رفتار ویسکو-انالاستیک تحت تحریک نیروی الکترواستاتیک و با در نظر گرفتن اثرات اندازه بررسی می‌شود. فرض می‌شود که میکرو تیر در ابتدا با ولتاژ مستقیم تحریک شده و سپس حول خیز استاتیکی به وجود آمده ناشی از این ولتاژ، با ولتاژ متناوب مرتعش می‌شود. با استفاده از رفتار تنش-کرنش وابسته به زمان مواد انالاستیک، معادله ساختاری تیر براساس تئوری تنش کوپل بهبود یافته استخراج شده است. همچنین با در نظر گرفتن نیروی الکترواستاتیک و نیروی کشیدگی لایه میانی معادله حرکت استخراج و با استفاده از روش گالرکین، معادله حرکت به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شده است. سپس با استفاده از روش اغتشاشات به حل معادله پرداخته شده و منحنی پاسخ فرکانسی به دست می‌آید. اثر رفتارهای مختلف مواد شامل الاستیک، ویسکوالاستیک و انالاستیک بعنوان مدل‌های تغییر شکل ماده و اثر پارامترهای شدت انالاستیک و زمان آزادسازی بر ارتعاشات غیرخطی میکرو تیرها مطالعه شده است. نتایج نشان می‌دهد که شناسایی رفتار تنش کرنش مواد استفاده شده در میکرو سازه‌ها به منظور شناسایی مدل تغییر شکل ماده بسیار مهم بوده و منحنی‌های پاسخ فرکانسی به شدت متأثر از رفتارهای تغییر شکل ماده می‌باشند. مقاله حاضر نشان می‌دهد که نتایج به دست آمده از مدل‌های ویسکو الاستیک و انالاستیک با هم متفاوت بوده ولی شرایطی وجود دارد که دو مدل انالاستیک و الاستیک نتایج مشابهی را پیش‌بینی می‌کنند. همچنین دیده می‌شود که شدت انالاستیک و زمان آزادسازی انالاستیک به‌طور چشمگیری بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی اثر می‌گذارند.

A Study on the Nonlinear Vibrations of Electrostatically Actuated Micro Beams with Anelastic Stress-Strain Behavior

Amir Veysi Gorgabad, Ghader Rezazadeh*, Rasoul Shabani

Department of Mechanical Engineering, University of Urmia, Urmia, Iran

* P.O.B. 57169-33111 Urmia, Iran, rezazadeh.g@urmia.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 26 April 2017
Accepted 02 June 2017
Available Online 13 July 2017

Keywords:
Anelasticity
Viscoelasticity
Nonlinear analysis
Electrostatic actuation
Microbeam

ABSTRACT

In this paper the nonlinear dynamic of an electrostatically actuated microbeam with viscoelastic-anelastic behavior considering size effect is studied. The micro-beam is deflected using a bias DC voltage and then driven to vibrate around its deflected position by a harmonic AC load. Regarding the stress-strain behavior of anelastic materials, the constitutive equation of microbeams is derived based on the modified couple stress theory (MCST). Assuming electrostatic and mid-plane stretching forces as the main sources of the nonlinearity and taking advantage of the Galerkin projection method, the partial differential equation is transformed to a set of nonlinear ordinary differential equations (ODEs). Multiple scales method is used to obtain an approximate analytical solution for nonlinear resonant curves. The effect of different mechanical behaviors of materials including elasticity, viscoelasticity and anelasticity, length scale parameter, anelastic relaxation time and relaxation intensity on the nonlinear vibration analysis are studied. The results demonstrate that there is very large dependence of resonance curves on the different mechanical behavior of materials. It is seen that there are special conditions in which the elastic and anelastic models predict similar results while the predicted results from anelastic and viscoelastic models are different from each other. It is found that the relaxation intensity and anelastic relaxation time can change the resonant curves significantly.

1- مقدمه

تنش و کرنش خطی بوده و برای هر مقدار تنش، یک مقدار تعادل منحصر بفرد برای کرنش و برعکس موجود می‌باشد. این ویژگی انالاستیسیته توسط موادی که در دسته جامدهای ترمودینامیکی قرار می‌گیرند، ارضا می‌شود. برخلاف رفتار الاستیک، تغییر شکل انالاستیک وابسته به زمان می‌باشد، به

مواد انالاستیک¹ در فرایند باربرداری، تغییر شکل وابسته به زمان و کاملاً برگشت‌پذیری دارند [1]. مشابه با مواد الاستیک در مواد انالاستیک نیز رفتار

¹ Anelastic

Please cite this article using:

A. Veysi Gorgabad, Gh. Rezazadeh, R. Shabani, A Study on the Nonlinear Vibrations of Electrostatically Actuated Micro Beams with Anelastic Stress-Strain Behavior, Modares Mechanical Engineering, Vol. 17, No. 6, pp. 197-206, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله ذیل استفاده نمایید:

www.SJIR.ir

نمودارهای پاسخ فرکانسی می‌شود.

همچنین دیده می‌شود که بعضی از محققان به مطالعه سازه‌های مهندسی با رفتار ویسکو الاستیک و با در نظر گرفتن تئوری غیرموضعی پرداخته‌اند. لی و همکاران [11] به مطالعه رفتار دینامیک خطی تیر ویسکو الاستیک اویلر-برنولی با تئوری غیر موضعی پرداخته‌اند. در کار آن‌ها از مدل کلون-وییت⁴ به منظور مدل کردن رفتار ویسکو الاستیک استفاده شده بود و با استفاده از مدل‌های ویسکو الاستیک استاندارد سه پارامتری و تئوری غیرموضعی تیر اویلر-برنولی، معادلات حاکم بر حرکت نانوتیرها استخراج شده بود. همچنین آن‌ها تحلیل مشابهی را برای تیرهای تیموشنکو انجام دادند [12]. تنگ و هو [13] با استفاده از مدل راس کروین آنگار⁵ به مطالعه اثرات فرکانس طبیعی بر روی مشخصه‌ای دمپینگ تیرهای ویسکو الاستیک چند لایه پرداختند. فریسول [14] و همکاران با استفاده از مدل المان محدود، تیرهای ویسکو الاستیک را با تئوری غیر موضعی و با شرایط مرزی مختلف تحلیل کردند.

عموشاهی و ازهری [15] با استفاده از فرمول بندی المان محدود، تغییر شکل و کمانش ورق‌های ویسکو الاستیک با شرایط مرزی مختلف را مطالعه کردند. آنالیز ارتعاشات آزاد ورق‌های دایره‌ای ویسکو الاستیک قرار گرفته بر روی یک بستر الاستیک در مرزهای ورق، توسط شرعیات و همکاران [16] مطالعه شد. در کار آن‌ها خواص ماده ویسکو الاستیک در راستای ضخامت و شعاع ورق به طور مشابه تغییر می‌کند. صالحی و انصاری [17] در یک مطالعه جامع به بررسی کمانش تیرهای ویسکو الاستیک اویلر-برنولی و تیموشنکو پرداختند. در کار آن‌ها برای تیر تیموشنکو بار وابسته به زمان در راستای محوری و برای تیر اویلر-برنولی ترکیب بارهای محوری و عرضی وابسته به زمان در نظر گرفته شده بود. مانوویچ و کولاکسکی [18] تحریک آزاد و اجباری تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو را با رفتار ویسکو الاستیک که از قانون ووبت پیروی می‌کند، مطالعه کردند. آن‌ها تاثیر انعطاف پذیری برشی و ضریب ویسکوزیته را بر روی فرکانس‌های طبیعی و فاکتور تقویت دینامیکی را بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که انعطاف پذیری برشی به طور موثری فرکانس‌های طبیعی را تحت تاثیر قرار می‌دهد و منحنی‌های فرکانسی را کاهش داده و پیک رزونانس را شیفت می‌دهد.

همچنان که از تحقیقات انجام شده قبلی دیده می‌شود تعداد بسیار کمی از محققین به مطالعه دینامیک غیرخطی مواد ویسکو الاستیک پرداخته‌اند. چنگ و ژنگ [19] آنالیز دینامیکی غیر خطی ورق مستطیلی با ماده ویسکو الاستیک تحت بار پریودیک را مطالعه کردند. لیبرسکو و چاندرامانی [20] پایداری دینامیکی ورق‌های ایزوتروپیک با رفتار ویسکو الاستیک را مطالعه کردند. سان و ژنگ [21] به مطالعه رفتارهای آشوب ورق‌های ویسکو الاستیک تحت بار پریودیک درون صفحه‌ای پرداختند. آن‌ها دریافتند که پایداری سازه با تنظیم پارامترهای ماده می‌تواند افزایش پیدا کند. فو و لو [22]، براساس روابط الاستیسیته سه بعدی به آنالیز دینامیک غیرخطی ورق‌های چند لایه متقارن ویسکو الاستیک با وجود ترک عرضی در فاز زمینه پرداختند. آنالیز دینامیکی غیرخطی و کمانش ورق‌های ترمومکانیکی کامپوزیتی ویسکو الاستیک و ساندویچ پنل‌ها توسط شرعیات [23] انجام شد. با استفاده از اصل کار مجازی، پیتی و ردی [24] به مطالعه مدل‌های المان محدود برای تغییر شکل‌های شبه استاتیک تیرهای ویسکو الاستیک اویلر-برنولی و تیموشنکو پرداختند. یزدی و جلیلی [25] تحلیل استاتیکی و

عبارتی برای تعادل مواد انالاستیک نیاز به زمان می‌باشد [2]. این ویژگی مواد انالاستیک منجر به اتلاف انرژی مکانیکی داخلی شده و در نتیجه کاربردهای دمپینگ مکانیکی در این مواد می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد. تغییر شکل انالاستیک در ابعاد ماکرو به طور مثال در مواد تک کریستاله قابل اغماض بوده، با آنکه نانوسیم‌های تک کریستاله اکسید زینک و سیلیکون دوپانتس¹ به طور چشمگیری به صورت انالاستیک رفتار می‌کنند. تست‌های میکروسکوپی نانو سیم‌ها نشان می‌دهد که در فرایند باربرداری بعد از برگشت پذیری کرنش الاستیک، بخش عمده‌ای از کرنش بطور انالاستیک برگشت پذیر می‌باشد.

مواد استفاده شده در تجهیزات الکترونیکی و سیستم‌های الکترومکانیکی اغلب به صورت فیلم‌های فلزی² نازک بوده که بر روی لایه صلب قرار می‌گیرند. بنابراین اثر دمپینگ و اصطکاک داخلی در این مواد تحت بارهای دینامیکی مهم می‌باشد. به منظور مطالعه خواص مکانیکی مواد فیلم نازک تعدادی تست‌ها شامل فرورفتگی نانو، انحنای ویفری³ و خمش میکرو تیرها انجام شده است [3]. اگر چه این روش‌های تست بسیار قابل فهم بوده، ولی این روش‌ها فقط خواص شبه استاتیک مواد را می‌توانند تعیین کنند. بنابراین پاسخ دینامیکی مواد فیلم نازک با این روش‌ها قابل مطالعه نمی‌باشد و نیاز به گسترش سیستم‌های جدیدی به منظور اندازه گیری خواص دینامیکی این مواد، خصوصاً آنالاستیسیته، می‌باشد. چوی و همکاران [4] به منظور بررسی دمپینگ در فیلم‌های فلزی نازک، سیستم اندازه گیری دینامیکی جدیدی را گسترش دادند. آن‌ها با استفاده از مدل جامد خطی استاندارد و مدل خزش، اثر دمپینگ در فیلم‌های آلومینیومی نازک را بررسی کردند. بیرگیر و همکاران [5] به منظور اندازه گیری تغییر شکل وابسته به زمان در میکرو سیستم‌های الکترومکانیکی فلزی، یک روش آزمایشگاهی را ارائه دادند. آن‌ها نشان دادند که در طول فرایند بار برداری 95 درصد کرنش بلافاصله و به طور آنی بصورت الاستیک برگشت پذیر بوده و در مدت زمان 6 ساعت تغییر شکل باقیمانده 25 نانومتر به طور کاملاً برگشت پذیر به حالت اولیه رسیده و هیچ تغییر شکل ماندگاری در سیستم مشاهده نشد. بکر و همکاران [6] رفتار الاستیک و انالاستیک مواد در ابعاد کوچک را مطالعه کردند. آن‌ها نتیجه گرفتند که در ابعاد نزدیک اندازه اتم‌ها، تغییر شکل الاستیک در سازه غیرحساس بوده ولی رفتار انالاستیک کاملاً چشمگیر می‌باشد. بسیاری از مواد پلیمری، سرامیکی و فلزی دارای اثر حافظه داری هستند و استفاده از این مواد به شدت بستگی به ویژگی‌های برگشت پذیری آن‌ها دارد. گال و همکاران [7] استفاده از فیلم‌های نازک پلیمری حافظه دار در سیستم‌های الکترومکانیکی را بررسی کردند. در کار آن‌ها برگشت پذیری کامل وابسته به زمان در فیلم‌های پلیمری حافظه دار برای همه دماها و بارگذاری‌ها مشاهده شد.

اثر شدید وابستگی به اندازه بر رفتار استاتیکی و دینامیکی میکرو تیرهای با رفتار الکترواستاتیکی توسط صادقی و همکاران [8] مطالعه شد. آن‌ها از تئوری کوپل تنش بهبود یافته به منظور مطالعه اثر اندازه استفاده کردند. راحلی و همکاران [9] ناپایداری دینامیکی و ارتعاشات غیر خطی میکرو تیر تحت تحریک الکترواستاتیک با لایه های پیزوالکتریک را بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که افزایش غیر خطی منجر به کاهش دامنه پاسخ زمانی می‌شود. تاثیر رفتار وابسته به اندازه میکرو تیر غوطه ور در سیال تراکم ناپذیر تحت تحریک الکترواستاتیک توسط اعتمادی و همکاران [10] مطالعه شد. آن‌ها نشان دادند که اعمال تئوری کوپل تنش و افزایش اندازه پارامتر مشخصه طولی باعث سفتتر شدن سیستم و متعاقب آن کاهش دامنه ارتعاشی و شیفت

¹ p-doped si

² Thin Film

³ Wafer Curvature

⁴ Kelvin-Voigt

⁵ RosseKerwineUngar

برگشت پذیر باشد، به آن رفتار انالاستیک [32] و در صورتی که مقداری تغییر شکل در سیستم باقی بماند به آن رفتار ویسکو الاستیک گفته می شود. در حالت کلی کرنش متناسب با تنش اعمال شده از چندین مولفه کرنش که توسط پاسخ آن ها در اثر باربرداری تنش می باشد، تشکیل شده است و هر بخش به طور متفاوت وابسته به زمان می باشد. به عنوان مثال سیستم های آلیاژی شیشه-فلز حداقل چهار مولفه کرنش دارند:

1- الاستیسته ایده آل: قابل برگشت، آنی، روابط تنش و کرنش خطی [33]

2- انالاستیسته: قابل برگشت، وابسته به زمان، روابط تنش و کرنش خطی [34, 35]

3- ویسکو الاستیک: ماندگار، وابسته به زمان، روابط تنش و کرنش خطی [35]

4- پلاستیک: ماندگار، آنی، روابط تنش و کرنش غیرخطی [36] در "شکل 1" نواحی تابع پاسخ و پسا اثر الاستیک برای رفتارهای الاستیک، ویسکو الاستیک و انالاستیک نشان داده شده است [28].

مقایسه بین رفتار ویسکو الاستیک و انالاستیک نشان می دهد که برای رفتار ویسکو الاستیک در طول فرایند گذرا در ناحیه تابع پاسخ، کرنش به طور خطی با زمان افزایش پیدا کرده که نشان دهنده تابع پاسخ ویسکوز پایدار می باشد با آن که برای رفتار انالاستیک با گذشت زمان کرنش به حالت تعادلی جدید می رسد. همچنین مقایسه بین رفتارهای الاستیک، ویسکو الاستیک و انالاستیک در ناحیه پسا اثر الاستیک نشان می دهد که برای رفتار کرنش به وجود آمده به طور آنی به صفر برمی گردد با آن که برای رفتار انالاستیک کرنش به صورت تابعی از زمان به صفر برگشته و کاملاً برگشت پذیر می باشد و برای رفتار ویسکو الاستیک بخشی از کرنش به صورت تابعی از زمان برگشت پذیر بوده و بخشی دیگر نیز به صورت ماندگار در سیستم باقی می ماند. همچنان که "شکل 1" نشان می دهد در مواد انالاستیک سه ناحیه وجود دارد: ناحیه تابع پاسخ، ناحیه پسا اثر الاستیک و آزادسازی تنش. انالاستیسته فرایندی برگشت پذیر و خطی می باشد که در آن تابع پاسخ به صورت زیر معرفی می شود [32].

$$J(t) = \varepsilon(t)/\sigma_0 \quad (1)$$

در رابطه (1)، $\varepsilon(t)/\sigma_0$ غیروابسته از σ_0 می باشد. در این رابطه σ_0 تنش ثابت اعمال شده به ماده مطابق "شکل 1" بوده $\varepsilon(t)$ کرنش به وجود آمده می باشد. واضح است که برای ماده الاستیک، $J(t)$ به صورت J به دست می آید. مقدار اولیه J در زمان $t = 0$ تابع کمپلیانس⁴ آزاد نشده J_u نامیده می شود

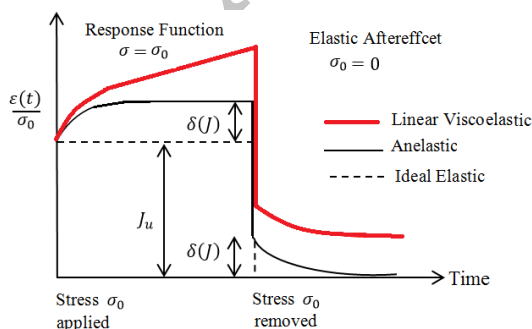


Fig. 1 Response function and elastic aftereffect for ideal elastic, anelastic and linear viscoelastic behaviors [32]

شکل 1 تابع پاسخ و پسا اثر الاستیک برای رفتارهای الاستیک، ویسکو الاستیک و انالاستیک [32]

⁴ compliance

دینامیکی میگو و نانوتیرهای کامپوزیت ویسکو الاستیک تحت تحریک پیزوالکتریک و الکترواستاتیک انجام دادند. حسینی و همکاران [26] با استفاده از روش اغتشاشات¹ به تحلیل ارتعاشات اجباری غیرخطی تیرهای یکسر گیردار ویسکو الاستیک با یک لایه تحریک کننده پیزوالکتریک پرداختند. ژانگ و فو [27] با استفاده از تئوری تنش کوپل بهبود یافته، یک مدل جدید را برای میکرو تیرهای ویسکو الاستیک گسترش دادند. با در نظر گرفتن نیروی توزیع شده ویسکوز در میکرو تیرها و با اعمال تئوری تیر ویسکو الاستیک، تحلیل استاتیکی و دینامیکی میکروتیرهای ویسکو الاستیک توسط فو و ژانگ [28] و فو و همکاران [29] مطالعه شد. شوشتری و همکاران [30] تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی میکروتیرهای یکسر گیردار ویسکو الاستیک پوشش داده شده با یک لایه پیزوالکتریک را مطالعه کردند.

ارتعاشات غیر خطی ورقه کامپوزیت پلیمری تقویت شده با نانولوله کربنی توسط کرانیان و همکاران [31] بررسی شد. آن ها با استفاده از تئوری کلونین- وویت و غیرخطی های ون-کارمان معادلات حرکت را استخراج کردند.

همچنان که از تحقیقات انجام شده قبلی دیده می شود بسیاری از محققان به تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیرهای الاستیک تحت تحریک الکترواستاتیک پرداخته اند. همچنین در بسیاری از آن ها با در نظر گرفتن تئوری های وابسته به اندازه مثل تئوری غیرموضعی و تئوری کوپل تنش بهبود یافته سعی در واقعی مدل کردن سازه های میکرو داشته اند. همان طور که از این تحقیقات دیده می شود حتی برای تیر ویسکو الاستیک نیز اثر این پارامترها به صورت کامل مطالعه نشده است. علی رغم این که شماری از مواد استفاده شده در میکروسازه ها ممکن است رفتار انالاستیک را داشته باشند ولی با مطالعات انجام شده توسط نویسندگان مقاله، هیچ پژوهشی در مورد ارتعاشات غیرخطی میکروتیرهای انالاستیک حتی بدون تحریک نیروی الکترواستاتیک و تئوری های وابسته به اندازه انجام نشده است.

این مقاله با استفاده از تئوری کوپل تنش بهبود یافته به مطالعه ارتعاشات غیرخطی میکروتیرها با رفتار تنش-کرنش وابسته به زمان می پردازد. معادله حاکم بر حرکت در فرم کلی و بی بعد که توانایی مدل سازی انواع تیرها با رفتارهای مختلف تغییر شکل ماده و با خواص هندسی و مکانیکی مختلف را دارد، استخراج می شود. معادلات غیرخطی بر مبنای روش اغتشاشات حل شده و به منظور صحت گذاری نتایج از روش عددی رانگ-کاتا² استفاده می شود. توافق بسیار خوبی بین نتایج دو روش فوق وجود دارد. در ادامه به مطالعه اثر انواع رفتارهای تغییر شکل ماده شامل الاستیک، ویسکو الاستیک و انالاستیک و همچنین اثر پارامترهای اثر اندازه، شدت انالاستیک و زمان آزادسازی انالاستیک بر ولتاژ پولین³ و منحنی های پاسخ فرکانسی پرداخته می شود و نتایج به دست آمده به طور کامل تفسیر می شوند.

2- مدل سازی رفتار انالاستیک

1-1- پدیده شناسی رفتار انالاستیک

وقتی یک ماده تحت تنش خارجی قرار می گیرد باعث به وجود آمدن تغییر شکل در آن می شود. برای تنش های کوچک، تغییر شکل متناظر با آن آنی بوده و با برداشتن تنش مقدار کرنش از بین می رود که به این پدیده رفتار الاستیک گفته می شود. در بعضی از مواد تحت تنش، تغییر شکل به وجود آمده تابعی از زمان بوده و حتی در فرایند باربرداری نیز تابعی از زمان می باشد. در صورتی که تغییر شکل به وجود آمده در فرایند باربرداری کاملاً

¹ multiple scale

² Runge-Kutta

³ Pull-In

با مشتقگیری نسبت به زمان از رابطه (7)، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\tau \dot{\varepsilon} = \tau J_u \dot{\sigma} + \varepsilon_A e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8)$$

با جمع کردن روابط (7) و (8)، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\tau \dot{\varepsilon} + \varepsilon = \tau J_u \dot{\sigma} + J_u \sigma + \varepsilon_A \quad (9)$$

نهایتاً با به دست آوردن ε_A از رابطه (5) و (3) و جایگذاری آن در رابطه (9)، معادله ساختاری برای یک جامد ایده‌آل خطی که فرایند نشان داده شده در "شکل 2" را بیان می‌کند، به فرم زیر به دست می‌آید [32]:

$$\varepsilon + \tau \dot{\varepsilon} = J_r \sigma + J_u \tau \dot{\sigma} \quad (10)$$

با استفاده از رابطه (5)، رابطه (10) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$((1 + \Delta)\sigma + \tau \dot{\sigma})J_u = \varepsilon + \tau \dot{\varepsilon} \quad (11)$$

در فرم کلی معادله ساختاری برای مواد الاستیک، ویسکوالاستیک و

انالاستیک به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$((1 + \Delta)\sigma + \tau_1 \dot{\sigma})J_u = \varepsilon + \tau_2 \dot{\varepsilon} \quad (12)$$

معادله (12)، وقتی $\tau_1 = \tau_2$ ، بیانگر رفتار انالاستیک [32]، وقتی $\tau_1 = 0, \Delta = 0$ ، بیانگر رفتار ویسکوالاستیک کلین-وویت [37] و وقتی $\tau_1 = \tau_2 = 0, \Delta = 0$ باشد بیانگر رفتار الاستیک می‌باشد.

3- معادله حاکم بر حرکت

مدل تیر مورد مطالعه در این مقاله، تیر اوپلر-برنولی دو سر گیردار با طول L ، عرض b ، ضخامت h و فاصله هوایی اولیه g_0 از صفحه ساکن بوده که تحت تحریک نیروی الکترواستاتیک می‌باشد (شکل 3). در این شکل، x و z نیز به ترتیب جهات طولی و خیز تیر را نشان می‌دهند. در این تحقیق ولتاژ تحریک به صورت ترکیبی از ولتاژ جریان DC و AC می‌باشد. همچنین فرض شود که تیر ابتدا تحت تحریک الکترواستاتیک با ولتاژ DC (جریان مستقیم) قرار گرفته و دچار خمش استاتیک می‌شود و پس از انحراف از حالت اولیه، جریان متناوب شده و تیر تحت تحریک با ولتاژ AC قرار گرفته و شروع به ارتعاش می‌نماید. در نهایت تغییر مکان عرضی کلی تیر به صورت ترکیب تغییر شکل استاتیک و دینامیک خواهد بود.

بر اساس تئوری کوپل تنش بهبود یافته [38]، چگالی انرژی کرنشی تابعی از هر دوی کرنش (مرتبط با تنش‌ها) و انحنا (مرتبط با تانسور کوپل تنش‌ها) می‌باشد. با استفاده از رابطه (12)، روابط ساختاری برای میکروتیر ویسکوآنالاستیک اوپلر-برنولی با استفاده از تئوری کوپل تنش بهبود یافته به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \left(1 + \Delta + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma_t &= E \left(1 + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \varepsilon \\ (1 + \Delta + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}) \sigma_m &= 2\mu l^2 \left(1 + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \varphi \end{aligned} \quad (13)$$

معادلات (13) برای رفتار ویسکوآنالاستیک ($\Delta, \tau_1 = 0$) در مرجع [24]

موجود می‌باشد. در رابطه‌ی فوق، $\varphi, \sigma_m, \varepsilon, \sigma_t$ به ترتیب از راست به چپ تانسور تنش، تانسور کرنش، بخش غیرهمگن تانسور کوپل تنش و بخش متقارن تانسور انحنا می‌باشند. E و μ به ترتیب مدول‌های یانگ و برشی بوده

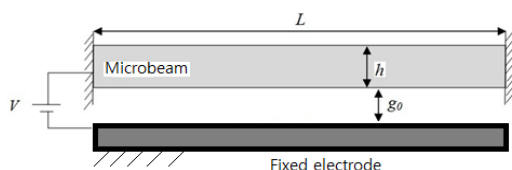


Fig. 3 Schematic representation of the micro-beam subjected to transverse electrostatic loading

شکل 3 شماتیک میکرو تیر تحت تحریک نیروی الکترواستاتیک

$J(\infty) = J_r$ مقدار تعادلی $J(t)$ در $t = \infty$ کمپلینس آزاد شده J_r نامیده می‌شود ($J(\infty) = J_r$). آزاد سازی کمپلینس طبق رابطه (2) معرفی می‌شود [32]:

$$\delta(J) = J_r - J_u \quad (2)$$

از دیدگاه میکروسکوپی، حرکات عیوب ساختار کریستالی که از یک حالت تعادلی در زمان $t = 0$ به حالت تعادلی دیگر در زمان $t = \infty$ می‌رود، معرف تغییر شکل انالاستیک می‌باشد. شدت آزادسازی Δ ، متناسب با تمرکز عیوب و زمان آزادسازی τ ، بیانگر یک اندازه از تحرکشان می‌باشد [37]. بنابراین پدیده انالاستیک با دو پارامتر (τ, Δ) توصیف می‌شود.

2-2- روابط ریاضی حاکم بر رفتار انالاستیک

انالاستیک یک تغییر شکل خطی و قابل بازایی است. انالاستیک در جامدات می‌تواند با آزمایش نشان داده شده در "شکل 2-الف" بیان شود. در ابتدا تنش σ از یک مقدار کم در زمان $t = 0$ به جسم نمونه اعمال می‌شود و ثابت می‌ماند تا کرنش ε ثبت شود. به عبارتی جسم دستخوش کرنش آنی الاستیک ε_e و کرنش انالاستیک ε_a می‌شود که با گذشت زمان از صفر به مقدار ε_a می‌رسد. حال اگر بار به‌طور ناگهانی برداشته شود، کرنش بلافاصله به اندازه ε_e کاهش پیدا می‌کند و به‌طور آرام (وابسته به زمان) به مقدار کرنش صفر کاهش پیدا می‌کند. طبق "شکل 2" در مواد الاستیک رابطه بین تنش و کرنش بر طبق قانون هوک به فرم زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon = J_u \sigma \quad (3)$$

همچنین در مواد انالاستیک کرنش کلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_a = J_r \sigma \quad (4)$$

که ε_e و ε_a به ترتیب معرف کرنش الاستیک و انالاستیک می‌باشد.

ماده خطی ایده‌آل که دارای رفتار انالاستیک باشد با استفاده از سیستم فنر و دشپات مطابق "شکل 2-ب"، قابل مدل‌سازی می‌باشد. در این شکل $\eta = \tau / (J_r - J_u)$ می‌باشد. همچنان که قبلاً نیز گفته شد پدیده انالاستیک توسط دو پارامتر شدت آزادسازی Δ و زمان آزادسازی τ بیان می‌شود. شدت آزادسازی به صورت زیر قابل بیان است:

$$\Delta = \frac{\varepsilon_A}{\varepsilon_e} = \frac{(J_r - J_u)}{J_u} \quad (5)$$

در این رابطه ε_A بزرگی مقدار کرنش انالاستیک می‌باشد. با استفاده از "شکل 2"، کرنش انالاستیک ε_a به صورت رابطه‌ی نمایی زیر قابل توصیف است:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_A \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (6)$$

با جایگذاری روابط (3) و (6) در رابطه (4)، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon = J_u \sigma + \varepsilon_A \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (7)$$

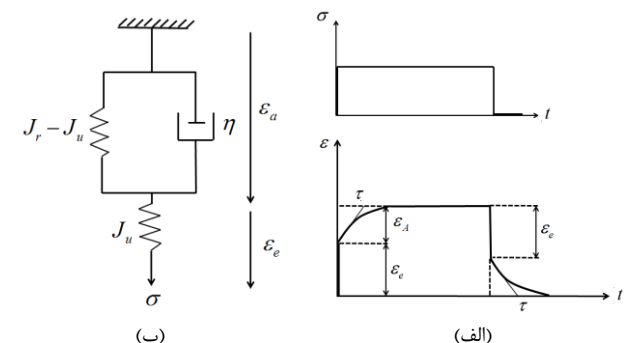


Fig. 2 Modeling of anelastic behavior of materials

شکل 2 مدل سازی رفتار انالاستیک

و l پارامتر مربوط به اثر اندازه ماده می باشد. تانسور کرنش و قسمت متقارن تانسور کوپل تنش به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2}(\Delta u + (\Delta u)^T) \\ \varphi &= \frac{1}{2}(\Delta \theta + (\Delta \theta)^T) \end{aligned} \quad (14)$$

در این رابطه u بردار جابجایی و θ بردار چرخش می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\theta = \frac{1}{2} \text{curl} u \quad (15)$$

معادله حرکت برای تیر تحت تحریک نیروی وابسته به موقعیت و با در نظر گرفتن نیروی کشیدگی لایه میانی به صورت زیر می باشد:

$$\rho \Gamma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - F_{el} - F_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_{xy}}{\partial x^2} \quad (16)$$

در رابطه ی فوق نیروی کشیدگی لایه میانی (F_s) به صورت زیر تعریف می شود [39]:

$$F_s = \frac{E\Gamma}{2L} \left(\int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right) \quad (17)$$

به علاوه در معادله (16)، ρ چگالی جرمی میکروتیر، Γ سطح مقطع تیر و q نیروی الکترواستاتیک (به دلیل ولتاژ اعمال شده) می باشد. همچنین در این معادله گشتاور معادل M_x و گشتاور کوپل Y_{xy} به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} M_x &= \int z \sigma_t d\Gamma \\ Y_{xy} &= \int \sigma_m d\Gamma \end{aligned} \quad (18)$$

همچنین کرنش ها برای تیر اویلر-برنولی به صورت زیر می باشند:

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \varepsilon_{xz} = 0 \quad (19)$$

با ضرب کردن معادله اول رابطه (13) در z و سپس انتگرال گیری از هر دوی معادلات رابطه (13) و استفاده از روابط (14) تا (19)، نهایتاً معادله حاکم بر حرکت میکرو تیر ویسکو-انالاستیک در فرم کلی به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} (EI + \mu \Gamma l^2) \left(1 + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho \Gamma \left(1 + \Delta + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ - \left(1 + \Delta + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{E\Gamma}{2L} \left(\int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \\ \left(1 + \Delta + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) F_{el} \end{aligned} \quad (20)$$

به منظور عمومیت بخشیدن به معادلات حرکت و ساده سازی آن ها، در این جا از بی بعدسازی پارامترها به صورت زیر استفاده می شود:

$$\hat{x} = \frac{x}{L}, \hat{w} = \frac{w}{g_0}, \hat{t}_1 = \frac{\tau_1}{c}, \hat{t}_2 = \frac{\tau_2}{c}, \hat{t}_1 = \frac{t}{c}, \lambda = \frac{g_0}{h} \quad (21)$$

در این رابطه c سرعت صوت در میکروتیر بوده و به فرم زیر تعریف می شود:

$$c = L^2 \sqrt{\frac{\rho \Gamma}{EI}} \quad (22)$$

نهایتاً با استفاده از روابط بی بعد ارائه شده، معادله حاکم بر حرکت (معادله (20)) در فرم بی بعد به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} (1 + \alpha) \left(1 + \hat{t}_2 \frac{\partial}{\partial \hat{t}_1} \right) \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \hat{x}^4} + \left(1 + \Delta + \hat{t}_1 \frac{\partial}{\partial \hat{t}_1} \right) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}_1^2} \\ - 6\lambda^2 \left(1 + \Delta + \hat{t}_1 \frac{\partial}{\partial \hat{t}_1} \right) \left(\int_0^L \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} = \\ \left(1 + \Delta + \hat{t}_1 \frac{\partial}{\partial \hat{t}_1} \right) \hat{F}_{el} \end{aligned} \quad (23)$$

در این رابطه $\alpha = 12(\mu/E)(l/h)^2$ می باشد:

نیروی الکترواستاتیک وارده بر میکروتیر \hat{F}_{el} ، در فرم بی بعد به صورت زیر تعریف می شود:

$$\hat{F}_{el} = KV^2 \frac{1}{(1 - \hat{w})^2}, K = \frac{\epsilon_0 b L^4}{2E l g_0^2} \quad (24)$$

در این رابطه V ولتاژ اعمالی به تیر بوده و شامل دو ترم ولتاژ مستقیم V_{DC} و ولتاژ متناوب V_{AC} می باشد که به صورت زیر معرفی می شوند:

$$V = V_{AC} + V_{DC}, V_{DC} = V_{dc}, V_{AC} = V_{ac} \sin(\hat{\Omega} \hat{t}) \quad (25)$$

در این رابطه V_{ac} و V_{dc} به ترتیب بزرگی ولتاژهای مستقیم و متناوب می باشند و $\hat{\Omega}$ نیز فرکانس تحریک بی بعد است. فرض می شود که میکروتیر تحت ولتاژ مستقیم DC تحریک شده و دستخوش جابجایی می شود و سپس حول خیز استاتیکی به وجود آمده \hat{w}_s با اعمال ولتاژ متناوب AC مرتعش شده و دستخوش خیز دینامیکی $(\hat{w}_d(\hat{x}, \hat{t}))$ می شود. نهایتاً خیز کلی تیر مجموع خیز استاتیکی و دینامیکی تیر به صورت زیر می باشد:

$$\hat{w}(\hat{x}, \hat{t}) = \hat{w}_s(\hat{x}) + \hat{w}_d(\hat{x}, \hat{t}) \quad (26)$$

با جای گذاری رابطه (26) در معادله (23)، معادله های غیرخطی استاتیکی و دینامیکی میکروتیر به فرم زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} (1 + \alpha) \frac{\partial^4 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^4} - 6\lambda^2 (1 + \Delta) \left(\int_0^L \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^2} \\ = KV_{dc}^2 \frac{(1 + \Delta)}{(1 - \hat{w}_s)^2} \\ (1 + \alpha) \left(1 + \hat{t}_2 \frac{\partial}{\partial \hat{t}_1} \right) \frac{\partial^4 \hat{w}_d}{\partial \hat{x}^4} + \left(1 + \Delta + \hat{t}_1 \frac{\partial}{\partial \hat{t}_1} \right) \frac{\partial^2 \hat{w}_d}{\partial \hat{t}_1^2} \\ - 6\lambda^2 \left(1 + \Delta + \hat{t}_1 \frac{\partial}{\partial \hat{t}_1} \right) \left(\int_0^L \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 \hat{w}_d}{\partial \hat{x}^2} - \\ - 12\lambda^2 \left(1 + \Delta + \hat{t}_1 \frac{\partial}{\partial \hat{t}_1} \right) \left(\int_0^L \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \right) \left(\frac{\partial \hat{w}_d}{\partial \hat{x}} \right) dx \right. \\ \left. + \left(\int_0^L \left(\frac{\partial \hat{w}_d}{\partial \hat{x}} \right)^2 dx \right) \right) \left(\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}_d}{\partial \hat{x}^2} \right) = (1 + \Delta + \\ \hat{t}_1 \frac{\partial}{\partial \hat{t}_1}) \hat{F}_{el-d} \end{aligned} \quad (27)$$

نیروی دینامیکی الکترواستاتیک \hat{F}_{el-d} و مشتق مرتبه اول آن نسبت به زمان در معادله فوق حول خیز استاتیکی به صورت زیر قابل بسط دادن می باشد:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{el-d} &= K \left(\frac{2V_{dc}^2 \hat{w}_d}{(1 - \hat{w}_s)^3} + \frac{2V_{dc} V_{ac}}{(1 - \hat{w}_s)^2} + \frac{4V_{dc} V_{ac} \hat{w}_d}{(1 - \hat{w}_s)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3V_{dc}^2 \hat{w}_d^2}{(1 - \hat{w}_s)^4} + \frac{4V_{dc}^2 \hat{w}_d^3}{(1 - \hat{w}_s)^5} \right) \\ \frac{\partial \hat{F}_{el-d}}{\partial \hat{t}} &= K \left(\frac{2V_{dc}^2}{(1 - \hat{w}_s)^3} \frac{\partial \hat{w}_d}{\partial \hat{t}} + \frac{2V_{dc}}{(1 - \hat{w}_s)^2} \frac{\partial V_{AC}}{\partial \hat{t}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4V_{dc} V_{ac}}{(1 - \hat{w}_s)^3} \frac{\partial \hat{w}_d}{\partial \hat{t}} + \frac{4V_{dc} \hat{w}_d}{(1 - \hat{w}_s)^3} \frac{\partial V_{AC}}{\partial \hat{t}} + \frac{6V_{dc}^2}{(1 - \hat{w}_s)^4} \right. \\ &\quad \left. \hat{w}_d \frac{\partial \hat{w}_d}{\partial \hat{t}} + \frac{12V_{dc}^2 \hat{w}_d^2}{(1 - \hat{w}_s)^5} \frac{\partial \hat{w}_d}{\partial \hat{t}} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

4- حل معادلات

به منظور حل معادلات حاکم بر حرکت، روش گلرکین با تعداد درجات آزادی محدود به کار گرفته می شود. بنابراین حل تقریبی به صورت زیر برای خیز دینامیکی در نظر گرفته می شود:

$$\hat{w}(\hat{x}, \hat{t}) = \sum_{k=1}^N \hat{q}_k(\hat{t}) \psi_k(\hat{x}) \quad (29)$$

$$B_{5kmf} = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial \hat{w}_s \psi'_m}{\partial \hat{x}} d\hat{x} \right) \psi'_k \psi_f d\hat{x} + \int_0^1 \left(\int_0^1 2\psi'_k \psi'_m d\hat{x} \right) \times \frac{\partial^2 \hat{w}_s \psi_f}{\partial \hat{x}^2} d\hat{x} + \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial \hat{w}_s \psi'_k}{\partial \hat{x}} d\hat{x} \right) \psi''_m \psi_f d\hat{x}$$

$$B_{6kmnf} = 2 \int_0^1 \left(\int_0^1 \psi'_k \psi'_n d\hat{x} \right) \psi''_m \psi_f d\hat{x} + \int_0^1 \left(\int_0^1 \psi'_k \psi'_m d\hat{x} \right) \times \psi''_n \psi_f d\hat{x} \quad (31)$$

معادلات حاکم بر حرکت تیر به صورت عددی با استفاده از روش رانگ-کاتا قابل حل می باشد. به علاوه روش اغتشاشات مقیاس های چند گانه نیز به صورت عددی به منظور حل این معادلات می تواند به کار گرفته شود. در این تحقیق از روش حل عددی رانگ-کاتا به منظور صحت گذاری نتایج استفاده می شود و بعداً با استفاده از روش رانگ-کاتا در بخش نتایج نشان داده می شود که شکل مدهای بالا ($N = 1, 2, 3, \dots$) اثر چشمگیری بر نتایج نداشته و مود اول ($N=1$) می تواند به عنوان مود غالب در نظر گرفته شود. بنابراین در روش اغتشاشات فقط مود اول در نظر گرفته می شود. نهایتاً با اعمال $N = 1$ ، $\psi_1(\hat{x}) = \psi(\hat{x})$ و $\hat{q}_1(\hat{t}) = \hat{q}(\hat{t})$ در معادله (27)، معادله مفروض به فرم زیر به دست می آید:

$$A_1 \left(K(1 + \Delta)V_{AC} + K\hat{t}_1 \frac{\partial V_{AC}}{\partial \hat{t}} \right) + (K(1 + \Delta)A_2 + KA_3((1 + \Delta)V_{AC} + \hat{t}_1 \frac{\partial V_{AC}}{\partial \hat{t}}) - (1 + \alpha)A_2 - 6\lambda^2 B_1) \hat{q}$$

$$+ (K\hat{t}_1(A_2 + V_{AC}A_3) - (1 + \alpha)\hat{t}_1 A_4 - 6\lambda^2 B_2) \hat{q}^2 - (1 + \Delta)A_2 \hat{q} + \hat{t}_1 A_5 \hat{q} + (K(1 + \Delta)A_6 - 6\lambda^2 B_3) \hat{q} \hat{q}^2 + (K(1 + \Delta)A_7 - 6\lambda^2 B_4) \hat{q}^3 + 2(K\hat{t}_1 A_6 - 6\lambda^2 B_5) \hat{q} \hat{q} + 3(K\hat{t}_1 A_7 + 6\lambda^2 B_6) \hat{q}^2 \hat{q} = 0 \quad (32)$$

بر مبنای تکنیک اغتشاشات، پاسخ زمانی سیستم را می توان حول ε به صورت رابطه زیر بسط داد.

$$\hat{q}_k(\hat{t}; \varepsilon) = \sum_{k=1}^N \varepsilon^n q_j(T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^2) \quad (33)$$

در این رابطه $T_2 = \varepsilon^2 \hat{t}$ ، $T_1 = \varepsilon \hat{t}$ و $T_0 = \hat{t}$ چندگانه بوده و ε پارامتر بدون بعد اغتشاش است و دارای مقیاسی در اندازه دامنه جواب می باشد. مشتقات نسبت به هر یک از این مقیاس های زمانی، به صورت زیر دست می آیند.

$$\frac{d}{d\hat{t}} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2$$

$$\frac{d^2}{d\hat{t}^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2\varepsilon D_0 D_2) + 2\varepsilon^2 D_0 D_2$$

$$\frac{d^3}{d\hat{t}^3} = D_0^3 + 3\varepsilon D_0^2 D_1 + 3\varepsilon^2 D_0^2 D_2 + 3\varepsilon^2 D_1^2 D_0 + 6\varepsilon^3 D_0 D_1 D_2 + \varepsilon^3 D_1^3 + \dots \quad (34)$$

در این رابطه $D_n = \partial/\partial T_n$ برای بررسی تحریک اولیه، فرض می شود که فرکانس تحریک ($\hat{\Omega}$) بسیار نزدیک به فرکانس طبیعی خطی سیستم (ω) باشد، یعنی:

$$\hat{\Omega} = \omega + \varepsilon^2 \sigma \quad (35)$$

در این رابطه σ پارامتر انحراف از تشدید نامیده می شود و مقدار اختلاف بین فرکانس تحریک و فرکانس طبیعی خطی سیستم مربوطه را نشان می دهد. به منظور ساده سازی معادلات در محاسبات و نوشتن، علامت h در معادلات و روابط حذف می شود. با جایگذاری معادلات (33) تا (35) در معادله (30) و سپس با برابر قرار دادن ضرایب توان های مشابه ε در طرفین، روابط (36) تا (38) حاصل می شوند:

در این رابطه $\hat{q}_k(\hat{t})$ ضرایب زمانی مجهول تیر است و $\psi_k(\hat{x})$ شکل مود طبیعی تیر می باشد. با جایگذاری روابط (28) و (29) در معادله (27) و سپس با ضرب کردن $\psi_k(\hat{x})$ در معادله حاصله و نهایتاً انتگرال گیری روابط در راستای طولی تیر، معادله حاکم بر حرکت تیر به فرم زیر به دست می آید:

$$A_{1f} \left(K(1 + \Delta)V_{AC} + K\hat{t}_1 \frac{\partial V_{AC}}{\partial \hat{t}} \right) + \sum_{k=1}^N (K(1 + \Delta)A_{2kf} + KA_{3kf} \left((1 + \Delta)V_{AC} + \hat{t}_1 \frac{\partial V_{AC}}{\partial \hat{t}} \right) - (1 + \alpha)A_{4kf} - 6\lambda^2 B_{1kf}) \hat{q}_k + \sum_{k=1}^N (K\hat{t}_1 (A_{2kf} + V_{AC}A_{3kf}) - (1 + \alpha)\hat{t}_1 A_{4kf} - 6\lambda^2 B_{2kf}) \hat{q}_k - \sum_{k=1}^N (1 + \Delta)A_{5kf} \hat{q}_k^2 + \sum_{k=1}^N \hat{t}_1 A_{5kf} \hat{q}_k^2 + \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N (K(1 + \Delta)A_{6kmf} - 6\lambda^2 B_{3kmf}) \hat{q}_k \hat{q}_m + \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (K(1 + \Delta)A_{7kmnf} - 6\lambda^2 B_{4kmnf}) \hat{q}_k \hat{q}_m \hat{q}_n + 2 \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N (K\hat{t}_1 A_{6kmf} - 6\lambda^2 B_{5kmf}) \hat{q}_k \hat{q}_m + 3 \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (K\hat{t}_1 A_{7kmnf} - 6\lambda^2 B_{6kmnf}) \hat{q}_k \hat{q}_m \hat{q}_n = 0; f = 1, 2, 3, \dots, N \quad (30)$$

در این معادله مولفه های [A] و [B] به صورت زیر به دست می آیند.

$$A_{1f} = \int_0^1 \frac{2V_{dc}}{(1 - \hat{w}_s)^2} \psi_f d\hat{x}, A_{2kf} = \int_0^1 \frac{2V_{dc}^2 \psi_k \psi_f}{(1 - \hat{w}_s)^3} d\hat{x}$$

$$A_{3kf} = \int_0^1 \frac{4V_{dc}}{(1 - \hat{w}_s)^3} \psi_k \psi_f d\hat{x}, A_{4kf} = \int_0^1 \psi_k^{(4)} \psi_f d\hat{x}$$

$$A_{5kf} = \int_0^1 \psi_k \psi_f d\hat{x}, A_{6kmf} = \int_0^1 \frac{3V_{dc}^2 \psi_k \psi_m \psi_f}{(1 - \hat{w}_s)^4} d\hat{x}$$

$$A_{7kmnf} = \int_0^1 \frac{4V_{dc}^2 \psi_k \psi_m \psi_n \psi_f}{(1 - \hat{w}_s)^5} d\hat{x}, B_{1kf} = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{2\partial \hat{w}_s \psi'_k}{\partial \hat{x}} d\hat{x} \right) \frac{\partial^2 \hat{w}_s \psi_f}{\partial \hat{x}^2} d\hat{x} + \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \right)^2 d\hat{x} \right) \times \psi'_k \psi_f d\hat{x}, B_{2kf} = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \right)^2 d\hat{x} \right) \psi'_k \psi_f d\hat{x} + \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{2\partial \hat{w}_s \psi'_k}{\partial \hat{x}} d\hat{x} \right) \frac{\partial^2 \hat{w}_s \psi_f}{\partial \hat{x}^2} d\hat{x}, B_{3kmf} = \int_0^1 \left(\int_0^1 \psi'_k \psi'_m d\hat{x} \right) \frac{\partial^2 \hat{w}_s \psi_f}{\partial \hat{x}^2} d\hat{x} + \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{2\partial \hat{w}_s \psi'_k}{\partial \hat{x}} d\hat{x} \right) \times \psi''_m \psi_f d\hat{x}, B_{4kmnf} = \int_0^1 \left(\int_0^1 \psi'_k \psi'_m d\hat{x} \right) \psi''_n \psi_f d\hat{x}$$

با فرض $a' = \gamma' = 0$ برای وجود ارتعاشات پایدار و حذف γ از روابط فوق و بعضی ساده‌سازی‌ها، نهایتاً معادله پاسخ فرکانسی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{1}{\omega a} \left\{ \left(\frac{9C_3\omega^2 - 10C_1^2}{24\omega^2} \right) a^3 \pm \frac{1}{2} \{ C_5^2 ((1 + \Delta)^2 + (\tau_1\omega)^2) - (C_2\omega a + aC_4\omega^3)^2 \}^{0.5} \right\} \quad (47)$$

5- استخراج نتایج و بحث بر روی آن‌ها

در این بخش، اثرات رفتارهای الاستیک، ویسکوالاستیک و انالاستیک بر ارتعاشات غیرخطی میکروتیرها بررسی می‌شود. در ابتدا نتایج به دست آمده از فرمول بندی ارائه شده با استفاده از حل عددی رنگ-کاتا صحنه‌گذاری گردیده و در ادامه اثر رفتارهای مختلف مواد و بعضی از پارامترهای موثر بر رفتار دینامیکی میکروتیرها مورد مطالعه قرار می‌گیرد. تیر مورد مطالعه ساخته شده از آلیاژ آلومینیوم (1 درصد وزنی) مس بوده و دارای مدول ینگ 66.8 مگاپاسکال می‌باشد (جدول 1). این ماده قبلاً توسط مرجع [5] مورد مطالعه قرار گرفته و رفتار انالاستیک برای این ماده دیده شده است.

همچنان که قبلاً نیز گفته شد به منظور صحنه‌گذاری نتایج از روش عددی رنگ-کاتا استفاده می‌شود و با استفاده از این روش، تاثیر شماره مدهای بالا بر رفتار دینامیکی میکروتیرها مطالعه می‌شود. پاسخ دینامیکی تیر انالاستیک برای مدهای $N = 1, N = 1, 2, N = 1, 2, 3$ در "شکل 4" مطالعه شده است.

همچنان که "شکل 4" می‌دهد، مدهای بالا تاثیر ناچیزی بر پاسخ دینامیکی گذاشته و مود اول به تنهایی می‌تواند در استخراج نتایج استفاده شود. تغییرات دامنه ارتعاشات میکروتیر برحسب فرکانس تحریک در "شکل

Table 1 Geometrical properties of micro beam

مقدار	پارامتر
250	طول (میکرومتر)
20	عرض (میکرومتر)
2	شخامت (میکرومتر)
1	فاصله هوایی (میکرومتر)
8.8541	ثابت گذر دهی خلاء (پیکوفاراد بر متر)

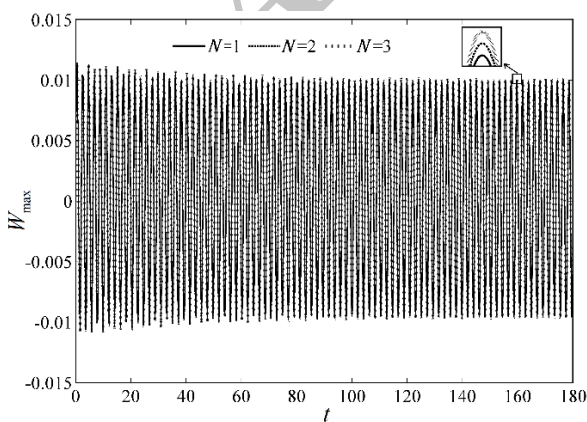


Fig. 4 Effects of higher modes on the dynamic response of a anelastic micro beam $\tau_{1,2} = 0.3, \Delta = 0.01, \Omega = 3$

شکل 4 اثر مدهای مرتبه بالا بر پاسخ دینامیکی میکروتیر انالاستیک $\tau_{1,2} = 0.3, \Delta = 0.01, \Omega = 3$

$$\varepsilon^1: D_0^2 q_1 + \omega^2 q_1 = 0 \quad (36)$$

$$\varepsilon^2: D_0^2 q_2 + \omega^2 q_2 = -2D_0 D_1 q_1 + C_1 q_1^2 \quad (37)$$

$$\varepsilon^3: D_0^2 q_3 + \omega^2 q_3 = -2D_0 D_1 q_2 + D_1^2 q_1 + 2D_0 D_2 q_1 + C_2 D_0 q_1 + C_4 D_0^3 q_1 - 2C_1 q_1 q_2 + C_3 q_1^3 + C_5 ((1 + \Delta) V_{ac} \cos(\Omega t) + \tau_1 V_{ac} D_0 \cos(\Omega t)) \quad (38)$$

در این معادلات داریم:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{(1 + \alpha)A_4 - 6\lambda^2 B_1 - K(1 + \Delta)A_2}{(1 + \Delta)A_5} \\ C_1 &= \frac{-6\lambda^2 B_3 + K(1 + \Delta)A_6}{(1 + \Delta)A_5} \\ C_2 &= \frac{(1 + \alpha)\tau_2 A_4 - 6\lambda^2 B_2 - K\tau_1 A_2}{(1 + \Delta)A_5} \\ C_3 &= \frac{-6\lambda^2 B_4 + K(1 + \Delta)A_7}{(1 + \Delta)A_5}, C_4 = \frac{-\tau_1}{(1 + \Delta)} \\ C_5 &= \frac{-KA_1}{(1 + \Delta)A_5} V_{ac} \end{aligned} \quad (39)$$

حل عمومی معادله (36) بصورت زیر می‌باشد:

$$q_1(T_0, T_1, T_2) = A(T_1, T_2)e^{i\omega T_0} + \bar{A}(T_1, T_2)e^{-i\omega T_0} \quad (40)$$

در رابطه (40)، A یک تابع مختلط و \bar{A} بیانگر مزدوج آن است.

جایگذاری رابطه (40) در معادله (37) منجر خواهد شد به:

$$D_0^2 q_2 + \omega^2 q_2 = -2i\omega D_1 A e^{i\omega T_0} + C_1 A^2 e^{2i\omega T_0} + 2C_1 A \bar{A} \quad (41)$$

شرط جمله‌پذیری معادله بالا ممانعت از شکل‌گیری جملات بسیار بزرگ در پاسخ زمانی می‌باشد برای حذف ضریب جمله $e^{i\omega T_0}$ باید رابطه $D_1 A = 0$ برقرار باشد. با اعمال این رابطه در معادله (41)، q_2 بصورت زیر به دست می‌آید

$$q_2 = \frac{C_1 A^2}{3\omega^2} e^{2i\omega T_0} + \frac{2C_1 A \bar{A}}{\omega^2} + cc \quad (42)$$

نهایتاً جایگذاری روابط (40) و (42) در معادله (38) منجر می‌شود به:

$$\begin{aligned} D_0^2 q_3 + \omega^2 q_3 &= \\ &(-2D_0 D_2 A + \frac{10C_1^2 A^2 \bar{A}}{3\omega^2} - C_2 D_0 A - 3C_3 A^2 \bar{A} + \\ &C_4 D_0^3 A + 0.5C_5 A(i(1 + \Delta) - \tau_1 \omega)e^{i\sigma T_2})e^{i\omega T_0} \\ &+ (C_3 A^3 - \frac{2C_1^2 A^3}{3\omega^2})e^{3i\omega T_0} + 0.5C_5 A(i(1 + \Delta) - \tau_1 \omega) \\ &\times e^{-(i\sigma T_0 + i\omega T_0)} + cc \end{aligned} \quad (43)$$

شرط جمله‌پذیری معادله بالا ممانعت از شکل‌گیری جملات بسیار بزرگ در پاسخ زمانی می‌باشد برای حذف ضریب جمله $e^{i\omega T_0}$ در معادله (43) باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$-2D_0 D_2 A + \frac{10C_1^2 A^2 \bar{A}}{3\omega^2} - C_2 D_0 A - 3C_3 A^2 \bar{A} + C_4 D_0^3 A + 0.5C_5 A(i(1 + \Delta) - \tau_1 \omega)e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (44)$$

معادله (44) یک معادله مختلط بوده و به منظور پیدا کردن جواب پایدار برای ارتعاشات عرضی میکروتیر تابع A به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \quad (45)$$

در این رابطه a و β به ترتیب بزرگی دامنه و زاویه فاز بوده و توابع حقیقی از T_2 می‌باشند. با جایگذاری رابطه (45) در معادله (44) و جداسازی ترم‌های مختلط و حقیقی و با تعریف یک متغیر جدید به شکل $\gamma = \sigma T_2 - \beta$ ، رابطه (46) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \gamma' &= \sigma + \left(\frac{10C_1^2 - 9C_3\omega^2}{24\omega^3} \right) a^2 - \frac{C_5}{2\omega a} ((1 + \Delta) \sin(\gamma) \\ &+ \tau_1 \omega \cos(\gamma)) \\ a' &= -\frac{aC_2}{2} - \frac{aC_4\omega^2}{2} + \frac{C_5}{2\omega} ((1 + \Delta) \cos(\gamma) \\ &- \tau_1 \omega \sin(\gamma)) \end{aligned} \quad (46)$$

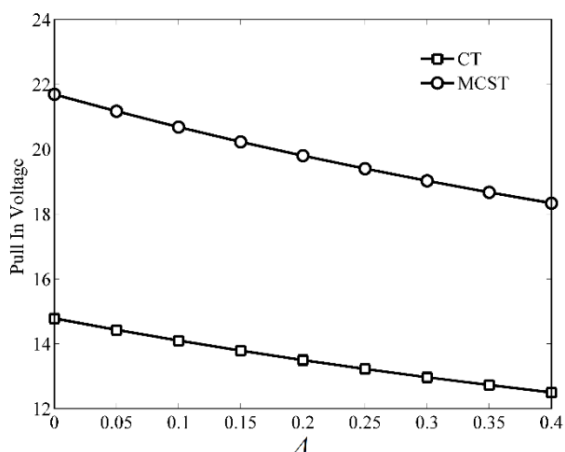


Fig. 7 Effects of anelastic relaxation intensity on the Pull-In voltage obtained by the CT and MCST

شکل 7 اثر شدت انالاستیک بر ولتاژ پولین براساس تئوری‌های کلاسیک و کوپل تنش بهبود یافته برای میکروتیر

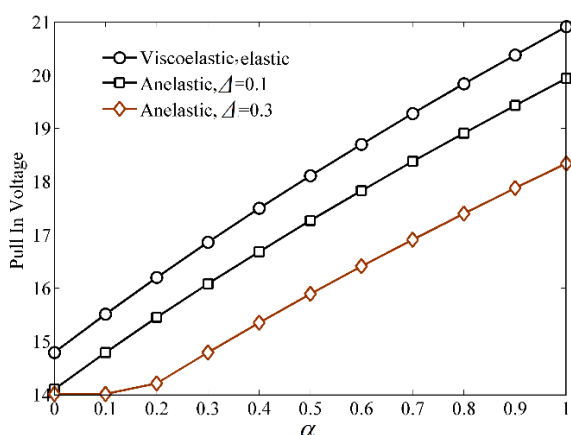


Fig. 8 variation of Pull-in voltage for different mechanical behaviours of materials for some length scales

شکل 8 تغییرات ولتاژ پولین برای مقادیر مختلف اثر اندازه برای رفتارهای مختلف مواد میکروتیر

می‌یابد. این شکل نشان می‌دهد که ولتاژ پولین در هر مقدار اثر اندازه برای تیر الاستیک و ویسکوالاتیک یکسان می‌باشد.

در ادامه به بررسی اثر رفتارهای مختلف مواد (الاستیک، ویسکوالاتیک و انالاستیک) و پارامترهای مختلف بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی پرداخته می‌شود. در "شکل 9" منحنی‌های پاسخ فرکانسی برای مدل‌های الاستیک، ویسکوالاتیک (کلوین-وویت) و انالاستیک برای مقادیر مختلف زمان آزاد سازی و شدت‌های انالاستیک آورده شده است. همچنان که این شکل‌ها نشان می‌دهند برای هر مقدار دلخواه شدت انالاستیک، دامنه پاسخ فرکانسی به دست آمده از مدل انالاستیک بیشتر از مدل ویسکوالاتیک می‌باشد. از طرفی با افزایش شدت انالاستیک، دامنه پاسخ فرکانسی افزایش پیدا کرده یا به عبارتی نرمی سیستم بیشتر می‌شود. مقایسه بین مدل‌های انالاستیک و الاستیک نشان می‌دهد که در زمان‌های آزادسازی پایین (0.01) و برای شدت انالاستیک 0.1، منحنی پاسخ فرکانسی برای هر دو تیر الاستیک و انالاستیک تقریباً مشابه می‌باشند ولی با افزایش شدت انالاستیک، اختلاف بین دو مدل بیشتر می‌شود. در زمان‌های آزادسازی بیشتر (0.1)، برای هر مقدار شدت انالاستیک، نتایج به دست آمده از مدل‌های انالاستیک و ویسکوالاتیک متفاوت می‌باشد. تغییرات منحنی پاسخ فرکانسی برای مقادیر مختلف پارامتر

"5 نشان داده شده است. در این شکل خطوط ممتد نشانگر ناحیه پایدار و خطوط بریده نشانگر ناحیه ناپایدار می‌باشد. به منظور صحت‌گذاری بیشتر نتایج به دست آمده به روش اغتشاشات، نتایج به دست آمده با استفاده از روش عددی رانگ-کاتا در نزدیکی نقطه P واقع بر ناحیه پایدار در "شکل 6" آورده شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که توافق بسیار خوبی بین روش اغتشاشات و رانگ-کاتا وجود دارد.

در "شکل 7" اثر شدت انالاستیک بر ولتاژ پولین براساس تئوری کلاسیک و کوپل تنش بهبود یافته آورده شده است. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش شدت انالاستیک، برای هر دو تئوری کلاسیک و کوپل تنش بهبود یافته، مقدار ولتاژ پولین کاهش می‌یابد. همچنین دیده می‌شود که برای هر مقدار دلخواه شدت انالاستیک، تئوری کوپل تنش بهبود یافته به دلیل بالابردن سفتی سازه باعث افزایش ولتاژ پولین می‌شود. در "شکل 8" تغییرات ولتاژ پولین با مقادیر مختلف اثر اندازه برای تیرهای الاستیک، ویسکوالاتیک و انالاستیک آورده شده است. همچنان که این شکل نشان می‌دهد با افزایش اثر اندازه به دلیل افزایش سفتی سازه مقدار ولتاژ پولین افزایش می‌یابد. همچنین برای هر مقدار اثر اندازه ولتاژ پولین برای تیر الاستیک و ویسکوالاتیک بیشتر از تیر انالاستیک می‌باشد. مشابه با "شکل 7"، با افزایش شدت انالاستیک، سفتی سازه کاهش پیدا کرده و ولتاژ پولین کاهش

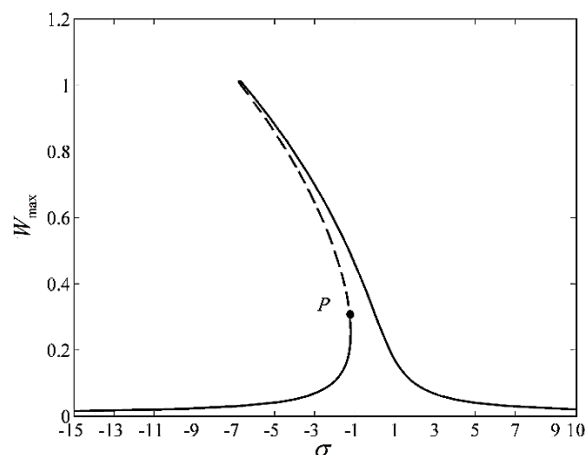


Fig. 5 Frequency response curve of micro anelastic beam $\tau_{1,2} = 0.1, \Delta = 0.01$

شکل 5 منحنی پاسخ فرکانسی برای میکروتیر انالاستیک $\tau_{1,2} = 0.1, \Delta = 0.01$

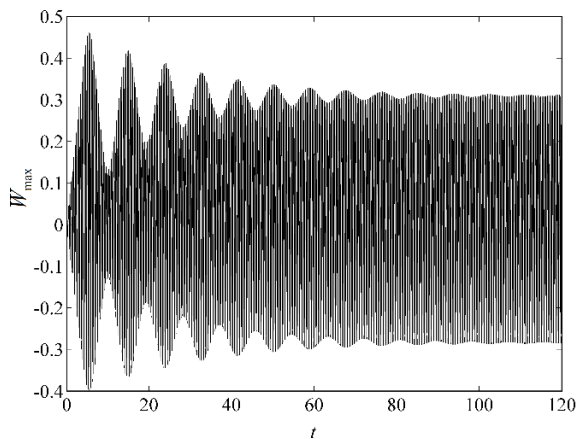


Fig. 6 Time history near points P

شکل 6 تاریخچه خیز نقطه P

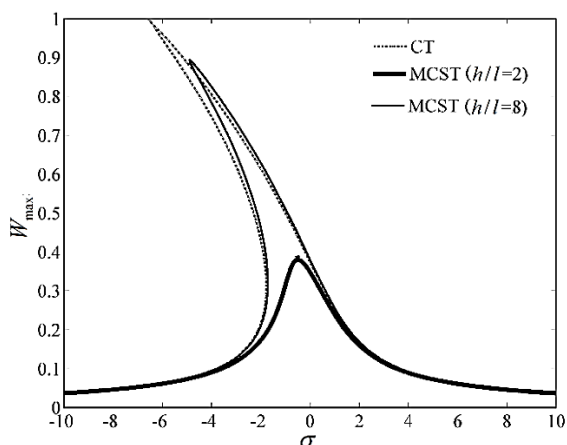


Fig. 10 Effect of modified couple stress theory on frequency-response curves $\tau_{1,2} = 0.2, \Delta = 0.01$

شکل 10 اثر تئوری کوپل تنش بهبود یافته بر منحنی پاسخ فرکانسی میکروتیر انالاستیک $\tau_{1,2} = 0.2, \Delta = 0.01$

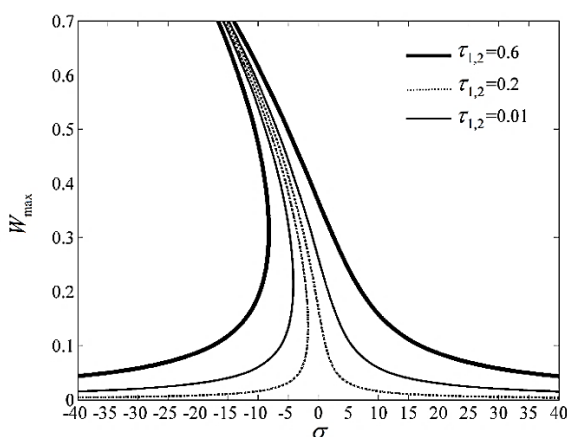


Fig. 11 Effect of anelastic relaxation time on frequency-response curves $\tau_{1,2} = 0.2, \Delta = 0.01$

شکل 11 اثر زمان آزادسازی انالاستیک بر منحنی پاسخ فرکانسی میکروتیر انالاستیک $\tau_{1,2} = 0.2, \Delta = 0.01$

سفتی کلی سازه افزایش پیدا کرده و منجر به کاهش دامنه پاسخ می‌شود. همچنین دیده می‌شود که با افزایش زمان آزادسازی رنج فرکانس عملیاتی نیز گسترش پیدا می‌کند.

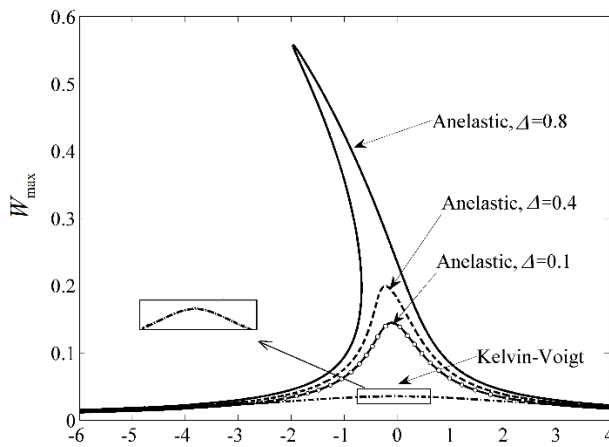
6- نتیجه گیری

در مقاله حاضر با به کارگیری رفتار تنش-کرنش وابسته به زمان برای ماده با تغییر شکل انالاستیک، ارتعاشات غیرخطی میکروتیر تحت تحریک نیروی الکترواستاتیک مطالعه شد. معادلات حاکم بر حرکت براساس تئوری کوپل تنش بهبود یافته و با در نظر گرفتن نیروی کشیدگی لایه میانی به دست آمدند. معادلات حاکم بر حرکت با استفاده از روش اغتشاشات حل شدند و با استفاده از روش رانگ-کاتا نتایج به دست آمده صحت‌گذاری گردید. حل عددی نشان داد که مودهای مرتبه بالا تاثیر بسیار کمی بر جوابها داشته و مود مرتبه اول می‌تواند به‌عنوان مود غالب در نظر گرفته شود. موارد زیر از نتایج این تحقیق می‌باشد:

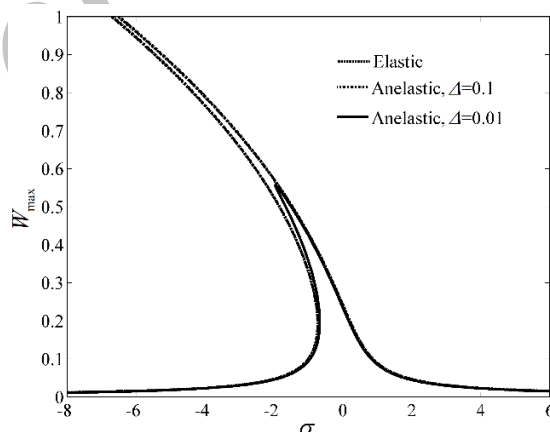
- 1- در میکروسازه‌ها، بررسی رفتار تنش-کرنش مواد در فرآیند بارگذاری و باربرداری به‌منظور شناسایی رفتار تغییر شکل ماده بسیار مهم می‌باشد.

اثر اندازه برای میکروتیر انالاستیک در "شکل 10" بررسی شده است. این شکل نشان می‌دهد که در نظر گرفتن پارامتر اثر اندازه سفتی تیر را افزایش داده و باعث کاهش دامنه پاسخ می‌شود. از این شکل دیده می‌شود که با افزایش پارامتر اثر اندازه از 0.1 به 0.3، مقدار بیشینه دامنه پاسخ 69.5 درصد کاهش می‌یابد.

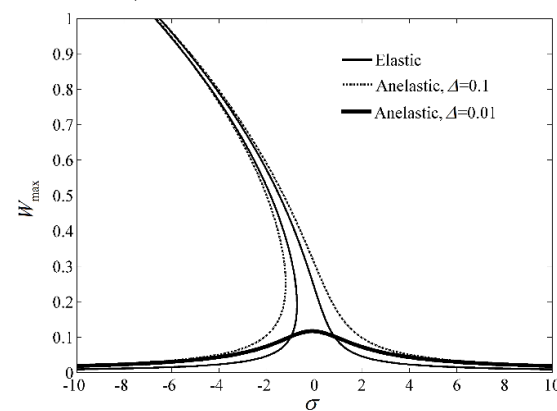
اثر زمان آزادسازی انالاستیک بر منحنی‌های فرکانسی در "شکل 11" مطالعه شده است. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش زمان آزادسازی



(الف) ویسکو الاستیک $\tau = 0.01$ ، انالاستیک $\tau_{1,2} = 0.01/\Delta$



(ب) الاستیک $\tau = 0$ ، انالاستیک $\tau_{1,2} = 0.01$



(ج) الاستیک $\tau = 0$ ، انالاستیک $\tau_{1,2} = 0.1$

Fig. 9 Effect of elastic, viscoelastic and anelastic deformation behaviours on frequency-response curves

شکل 9 اثر رفتارهای تغییر شکل الاستیک، ویسکو الاستیک و انالاستیک بر منحنی پاسخ فرکانسی

- 2- با افزایش شدت انالاستیک، سفتی کلی سازه کاهش پیدا کرده که باعث کاهش ولتاژ پولین و نهایتاً افزایش دامنه پاسخ فرکانسی می‌شود.
- 3- مشابه با تیرهای الاستیک و انالاستیک، با افزایش اثر اندازه سفتی کلی سازه افزایش پیدا کرده که باعث کاهش دامنه پاسخ و افزایش ولتاژ پولین می‌شود.
- 4- تیر ویسکو الاستیک نسبت به تیر انالاستیک سفت‌تر بوده و برای خواص مشابه هندسی و مکانیکی تیر، ولتاژ پولین متناظر با تیر ویسکو الاستیک بیشتر از تیر انالاستیک و متناظراً دامنه پاسخ فرکانسی آن کمتر از تیر انالاستیک می‌باشد.
- 5- افزایش زمان آزادسازی انالاستیک منجر به افزایش سفتی سازه و نهایتاً کاهش دامنه پاسخ فرکانسی و وسیع‌تر شدن رنج فرکانس عملیاتی می‌شود.
- 6- در رنج پایین زمان آزاد سازی انالاستیک ($\tau_{1,2} = 0.01$) برای شدت انالاستیک $\Delta = 0.1$ ، دو مدل الاستیک و انالاستیک نتایج مشابهی را پیش‌بینی می‌کنند ولی با افزایش شدت انالاستیک، اختلاف بین نتایج بیشتر می‌شود. در رنج‌های بالاتر زمان آزادسازی انالاستیک، برای هر مقدار دلخواه شدت انالاستیک، نتایج به دست آمده از مدل‌های الاستیک و انالاستیک متفاوت می‌باشند.
- 7- مراجع**
- [1] R. Lakes, *Viscoelastic Material*, pp. 58-88, Cambridge University Press, 2009.
- [2] A. S. Nowick, B. S. Berry, *Anelastic Relaxation in Crystalline Solids*, pp. 1-76, Academic Press, INC, New York, 1972.
- [3] W. D. Nix, Mechanical properties of thin films, *Metallurgical Transactions A*, Vol. 20, No. 11, pp. 2217-2245, 1989.
- [4] D. Choi, H. Kim, W. D. Nix, Anelasticity and damping of thin aluminum films on silicon substrates, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 13, No. 2, pp. 230-237, 2004.
- [5] L. I. J. C. Bergers, J. P. M. Hoefnagels, N. K. R. Delhey, M. G. D. Geers, Measuring time-dependent deformations in metallic MEMS, *Microelectronics Reliability*, Vol. 51, No. 6, pp. 1054-1059, 2011.
- [6] S. P. Baker, R. P. Vinci, T. Arias, Elastic and anelastic behavior of materials in small dimensions, *MRS Bulletin*, Vol. 27, No. 1, pp. 26-29, 2002.
- [7] K. Gall, P. Kreiner, D. Turner, M. Hulse, Shape-memory polymers for micro electromechanical systems, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 13, No. 3, pp. 472-483, 2004.
- [8] M. Sadeghi, M. Fathalilou, Gh. Rezazadeh, Study on the size dependent behavior of a micro-beam subjected to a nonlinear electrostatic pressure, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 137-144, 2015. (In Persian)
- [9] A. Raheli, S. Azizi, Sh. Faroughi, Dynamic analysis of a micro beam based on sub-harmonic parametric excitation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 5, pp. 372-382, 2017. (In Persian)
- [10] H. Etemadi, M. Fathalilou, R. Shabani, Gh. Rezazadeh, A study on the size-dependent behavior of electrostatic microbeams immersed in incompressible fluid, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 1, pp. 185-192, 2017. (In Persian)
- [11] Y. Lei, T. Murmu, S. Adhikari, M. I. Friswell, Dynamic characteristics of damped viscoelastic nonlocal Euler-Bernoulli beams, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, Vol. 42, No. 6, pp. 125-136, 2013.
- [12] Y. Lei, S. Adhikari, M. I. Friswell, Vibration of nonlocal Kelvin-Voigt viscoelastic damped Timoshenko beams, *Engineering Science*, Vol. 66-67, No. 6, pp. 1-13, 2013.
- [13] T. Teng, N. Hu, Analysis of damping characteristics for viscoelastic laminated beams, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, No. 29-30, pp. 3881- 3892, 2001.
- [14] M. I. Friswell, S. Adhikari, Y. Lei, Non-local finite element analysis of damped beams, *Solids and Structures*, Vol. 44, No. 22-23, pp. 7564-7576, 2007.
- [15] H. Amoushahi, M. Azhari, Static analysis and buckling of viscoelastic plates by a fully discretized nonlinear finite strip method using bubble functions, *Composite Structures*, Vol. 100, No. 3, pp. 205-217, 2013.
- [16] M. Shariyat, A. Jafari, M. Alipour, Investigation of the thickness variability and material heterogeneity effects on free vibration of the viscoelastic circular plates, *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 26, No. 1, pp. 88-98, 2013.
- [17] M. Salehi, F. Ansari, Viscoelastic buckling of euler-bernoulli and timoshenko beams under time variant general loading conditions, *Iranian Polymer Journal*, Vol. 15, No.3, pp. 183-193, 2006. (In Persian)
- [18] A. Manevich, Z. Kolakowski, Free and forced oscillations of Timoshenko beam made of viscoelastic material, *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 49, No.1, pp. 3-16, 2011.
- [19] C. J. Cheng, N. H. Zheng, Chaotic and hyperchaotic behaviors of the viscoelastic rectangular plates under transverse periodic load, *Acta Mech Sinica*, Vol. 30, No. 6, pp. 690-699, 1998.
- [20] L. Librescu, N. K. Chandiramani, Dynamic stability of transversely isotropic viscoelastic plates, *Sound Vibration*, Vol. 130, No.3, pp. 467-486, 1989.
- [21] Y. X. Sun, S. Y. Zheng, Chaotic dynamic analysis of viscoelastic plates, *Mechanical Science*, Vol. 43, No. 5, pp. 1208-1995, 2001.
- [22] Y. M. Fu, Y. H. Lu, Analysis of the nonlinear dynamic response of viscoelastic symmetric cross-ply laminated plates with transverse matrix crack, *Composite Structures*, Vol. 72, No. 4, pp. 469-476, 2006.
- [23] M. Shariyat, A nonlinear double-superposition global-local theory for dynamic buckling of imperfect viscoelastic composite/ sandwich plates: A hierarchical constitutive model, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 11, pp. 1890-1899, 2011.
- [24] G. S. Payette, H. N. Reddy, Nonlinear quasi-static finite element formulations for viscoelastic Euler-Bernoulli and Timoshenko beams, *Commun Numer Methods Engineering*, Vol. 26, No. 12, pp. 1736-1755, 2010.
- [25] F. Chitsaz-Yazdi, A. Jalali, Vibration behavior of a viscoelastic composite microbeam under simultaneous electrostatic and piezoelectric actuation, *Mechanics of Time-Dependent Materials*, Vol. 19, No. 3, pp. 277-304, 2015.
- [26] S. M. Hosseini, A. Shoostari, H. Kalhori, S. N. Mahmoodi, Nonlinear-forced vibrations of piezoelectrically actuated viscoelastic cantilevers, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 78, No. 1, pp. 571-583, 2014.
- [27] J. Zhang, Y. Fu, Pull-in analysis of electrically actuated viscoelastic microbeams based on a modified couple stress theory, *Meccanica*, Vol. 47, No. 7, pp. 1649-1658, 2012.
- [28] Y. Fu, J. Zhang, Nonlinear static and dynamic responses of an electrically actuated viscoelastic microbeam, *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 25, No. 2, pp. 211-218, 2009.
- [29] Y. Fu, J. Zhang, R. Bi, Analysis of the nonlinear dynamic stability for an electrically actuated viscoelastic micro-beam, *Microsystem Technology*, Vol. 15, No. 5, pp. 63-769, 2009.
- [30] A. Shoostari, S. M. Hoseini, S. N. Mahmoodi, H. Kalhori, Analytical solution for nonlinear free vibrations of viscoelastic microcantilevers covered with a piezoelectric layer, *Smart Materials and Structures*, Vol. 21, No. 7, pp. 1-10, 2012.
- [31] S. E. Koranian, S. Esmaeaelzadeh Khadem, M. Kokabi, Nonlinear free vibration analysis of the polymeric nanocomposite viscoelastic plates containing carbon nanotubes, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 11, pp. 429-438, 2016. (In Persian)
- [32] A. S. Nowick, B. S. Berry, *Anelastic Relaxation in Crystalline Solids*, pp. 1-76, Academic Press, New York, 1972.
- [33] A. Inoue, A. Takeuchi, Recent Progress in Bulk Glassy Alloys, *Materials Transactions*, Vol. 43, No. 8, pp. 1892-1906, 2002.
- [34] B. S. Berry, *Metallic Glasses*, American Society of Metals, Cleveland, Ohio, pp. 161, 1978.
- [35] A. I. Taub, F. Spaepen, Ideal, elastic, anelastic and viscoelastic deformation of a metallic glass, *Journal of Materials Science*, Vol. 16, No. 11, pp. 3087-3092, 1981.
- [36] L. A. Davis, *Metallic Glasses*, American Society of Metals, Cleveland, Ohio, pp. 190, 1978.
- [37] L. W. Teufel, Prediction of hydraulic fracture azimuth from anelastic strain recovery measurements of oriented core, Proc, *23rd US Symposium on Rock Mechanics Berkeley: CA, American Rock Mechanics Association*, pp. 238-245, 1982.
- [38] F. Yang, A. C. M. Chong, D. C. C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *Journal of Solid Structures*, Vol. 39, No. 10, pp. 2731-2743, 2002.
- [39] A. Saedi-Vahdat, G. Rezazadeh, Effects of axial and residual stresses on thermoelastic damping in capacitive micro-beam resonators, *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 348, No. 4, pp. 622-639, 2011.