مجله مهندسی مکانیک مدرس، مهر 1396، دوره 17، شماره 7، ص ص 217-224

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

آنالیز قابلیت اعتماد سیستم‌های مکانیکی با استفاده از شبیه‌سازی جهتی و یک تکنیک کارآمد نمونه‌گیری مهم

محمدرضا معرف‌زاده

استادیار، مهندسی سازه، دانشگاه امام حسین (ع)، تهران

* تهران، صندوق پستی 187-16535، moarefzadeh@ihu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 23 فروردین 1396

پذیرش: 11 خرداد 1396

ارائه در سایت: 29 تیر 1396

کلید واژگان:

قابلیت اعتماد

توربین هیدروکنیتیکی

شبیه‌سازی جهتی

نمونه‌گیری مهم

شاخص ایمنی

احتمال خرابی

چکیده

آنالیز قابلیت اعتماد سیستم‌های مکانیکی در شرایط ویژه‌ای با مشکلاتی مواجه می‌شود که لزوما تمهیدات خاص خود را می‌طلبد. از جمله این شرایط، آنالیز در فضاهای متغیرهای تصادفی بسیار همبسته و یا متغیرهای تصادفی با واریانس‌های بسیار متفاوت است. اگر در این فضاها، که اصطلاحا "فضاهای بسیار نامتناسب" خوانده می‌شوند، تابع حالت حدی مسئله نیز بسیار غیرخطی باشد، عموما روش‌های شبیه‌سازی، روش‌های برتر برای آنالیز قابلیت اعتماد شناخته می‌شوند. شبیه‌سازی جهتی از این‌گونه روش‌هاست که می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. این روش، با این حال، در شکل ساده خود کارایی کمتری را در فضاهای توصیف شده داشته و برای نیل به جواب‌های معقول، شبیه‌سازی‌های فراوانی را لازم می‌دارد. در این مقاله آنالیز قابلیت اعتماد تیغه یک توربین هیدروکنیتیکی به‌عنوان یک نمونه مهم از یک سیستم مکانیکی مورد بررسی قرار می‌گیرد که متغیرهای تصادفی مطرح در آن دارای واریانس های به‌شدت متفاوتی هستند و بدین ترتیب فضای بسیار نامتناسب و بیماری را برای شبیه‌سازی جهتی می‌سازند. به‌منظور ارتقاء کارایی آنالیز در این چنین فضای کاری، استفاده از نمونه‌گیری مهم در این مقاله پیشنهاد می‌شود و برای کاربرد آن روابط جدیدی برای محاسبات موثرتر ارائه می‌گردد. این روابط سبب می‌گردند که نه تنها آنالیز، که در حالت ساده آن تقریبا برای توربین یاد شده ناممکن است، ممکن شود، بلکه با سرعت بسیار بیشتری نسبت به نوع محاسبات معمول که با استفاده از نمونه‌گیری مهم سنتی انجام می‌گردند، فرآیند محاسباتی انجام شود.

Reliability analysis of mechanical systems using directional simulation and an efficient importance sampling technique

Mohammad Reza Moarefzadeh

Department of Structural Engineering, University of Imam Hossein, Tehran, Iran
* P.O.B. 16535-187, Tehran, Iran, moarefzadeh@ihu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 12 April 2017
Accepted 01 June 2017
Available Online 20 July 2017

Keywords:
Reliability
hydrokinetic turbine
directional simulation
Importance Sampling
safety index
Probability of failure

ABSTRACT

Reliability analysis of mechanical systems, in some special circumstances, may suffer technical difficulties which need desirable solutions. One such case may exist when working in a space of highly correlated random variables and/or the space of random variables with extremely different variances. If in these spaces, which are so-called "extremely non-proportional spaces", the relevant limit state function is also highly nonlinear, simulation methods are normally preferred for reliability analysis. Directional simulation is one of these methods which is fully well-known. This method, however, may be not efficient if it is crudely applied in these spaces. In such conditions, directional simulation often needs a massive computational effort in order to achieve good and reasonable results. In this paper reliability analysis of a blade of a hydro-kinetic turbine (as an important mechanical system) is performed in which variances of random variables are extremely different and thus create a non-proportional space for directional simulation. To make the analysis more efficient, use of an importance sampling technique with a set of novel relationships is proposed in this paper. These relationships make the required calculations not only possible, but they facilitate the computations to be very fast and efficient compared to those normally used in conjunction with traditional importance sampling methods.

1- مقدمه

آنالیز قابلیت اعتماد سیستم‌ها و سازه‌های بزرگ و گران قیمت مکانیکی برای حصول اطمینان از عملکرد مناسب آنان در طول عمر مفید خود از اهمیت بالایی برخوردار است. همچنین این آنالیز، امروزه، ابزاری کلیدی برای برآورد هزینه‌های این سیستم‌ها در عمر طراحی شده برای آنان و نیز برنامه‌ریزی‌های علمی برای بازرسی و تعمیر و نگهداری آنان محسوب می‌گردد. از جمله تجهیزاتی که انجام آنالیز یاد شده در خصوص آن بسیار مهم است توربین‌های هیدروکنیتیکی هستند که در فن‌آوری‌های امروز، برای تولید انرژی به‌خصوص از جریان رودخانه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. مطالعه المان‌های نامطمئن در این توربین‌ها و به‌خصوص تیغه‌های آن نشان داده است که آنالیز قابلیت اعتماد با شرایط ویژه‌ای که هماتا تفاوت فاحش در واریانس‌های متغیرهای تصادفی دخیل در مسئله می‌باشد روبرو است [1-3] و بنابراین تمهیدات

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. R. Moarefzadeh, Reliability analysis of mechanical systems using directional simulation and an efficient importance sampling technique, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 7, pp. 217-224, 2017 (in Persian)

مربوط به خود را طلب می‌کند. از طرف دیگر یکی از مودهای خرابی غالب در این توربین‌ها شکست ناشی از ایجاد لنگر فراتر از تحمل تیغه در محل اتصال آن به محور خود می‌باشد. تابع حالت حدی مربوط به این مود خرابی، تابعی بسیار غیرخطی بوده که این خود نیز پیچیدگی بیشتری برای مسئله ایجاد کرده و بدین ترتیب پیش‌بینی روش‌های متناسب را در آنالیز می‌طلبد.

به‌منظور انجام آنالیز قابلیت اعتماد سیستم‌های توصیف شده در بالا، روش شبیه‌سازی جهتی[1] می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. این روش که در حقیقت در یک سیستم مختصات قطبی در فضای n بعدی فرمول‌بندی می‌گردد، ابتدا برای کاربرد در فضای (متغیرهای تصادفی) نرمال استاندارد پیشنهاد گردید [5,4]. این روش معذالک بعدها برای استفاده در فضاهای کلی‌تر تعمیم داده شد [6-9]. مهمترین مزیت استفاده از روش شبیه‌سازی جهتی در فضای نرمال استاندارد، وجود یک راه‌حل بسته برای انتگرال‌گیری‌های لازم در راستای جهت‌های شبیه‌سازی شده می‌باشد. این مزیت در صورتی که شبیه‌سازی در فضای اولیه (غیرنرمال استاندارد) انجام گیرد طبیعتا از دست می‌رود اما سهولت عدم نیاز به انتقال به فضای نرمال استاندارد را به‌دنبال خواهد داشت. در این گونه فضاها، بدین ترتیب، در یک حالت کلی نیاز به انتگرال‌گیری‌های (عددی) در راستای جهت‌های تولید شده می‌باشد.

در روش شبیه‌سازی جهتی، نظیر هر روش شبیه‌سازی دیگر، کاستی عمده نیاز به حجم محاسبات بالا برای نیل به جواب‌های معقول می‌باشد. این کاستی در شبیه‌سازی، زمانی اهمیت بالاتری می‌یابد که کمیت احتمال خرابی هدف، عددی بسیار کوچک بوده و فضای کاری که متغیرهای تصادفی درگیر در مسئله ساخته‌اند فضایی بسیار نامتناسب و بیمار باشد. این چنین فضایی، زمانی ایجاد می‌گردد که متغیرهای تصادفی مسئله دارای همبستگی بسیار زیادی به یکدیگر باشند (ضریب همبستگی خیلی نزدیک به واحد باشد) و یا واریانس متغیرهای تصادفی یاد شده اختلاف فاحشی با یکدیگر داشته باشند (برای مثال یکی ده‌ها برابر دیگری باشد) و یا ترکیبی از هر دو. در چنین فضایی، متاسفانه روش شبیه‌سازی جهتی کارایی خود را تا حدود زیادی از دست داده و استفاده از آن عملا کم فایده می‌گردد زیرا نیازمندی روش به تعداد زیاد شبیه‌سازی به شکل عمده‌ای افزایش می‌یابد [8].

روش نمونه‌گیری مهم[2] در چنین فضاهای کاری می‌تواند بسیار موثر واقع گردد. مطابق این روش، تمرکز اصلی روی نمونه‌گیری از منطقه ای از فضای تعریف شده می‌باشد که مشارکت آن در مقدار احتمال خرابی بیشتر از محل‌های دیگر باشد. این منطقه بدین ترتیب بایستی ابتدا شناسایی شده و با جاگذاری تابع نمونه‌گیری مهم در آن، عمده نمونه‌ها از آن محل اخذ گردند [10,8]. این عملیات شناسایی و نیز اتخاذ استراتژی جدید نمونه‌گیری به‌طور طبیعی باعث تحمیل حجم محاسبات اضافه‌ای بر فرایند آنالیز می‌گردد که لازم است حجم آن به‌گونه‌ای کنترل گردد که جذابیت استفاده از روش نمونه‌گیری مهم تحت الشعاع قرار نگیرد.

همان‌طور که از مطالب بالا ملاحظه می‌گردد در یک آنالیز قابلیت اعتماد با استفاده از نمونه‌گیری مهم، ضرورت دارد که برای سه موضوع کاملا متمایز، راه حل‌های مناسب ارائه کرد:

الف) چگونه مناطق با اهمیت بالا به‌عنوان مناطق مناسب برای جاگذاری تابع نمونه گیری مهم شناسایی گردند؟

ب) چگونه تابع نمونه‌گیری مهم با توجه به نقش تعیین کننده آن در کیفیت نمونه ها انتخاب گردد؟

ج) چگونه پس از شناسایی منطقه با بیشترین اهمیت و نیز معلوم شدن تابع نمونه‌گیری مهم، محاسبات اضافی تحمیلی به عملیات شبیه‌سازی ناشی از کاربرد تکنیک نمونه‌گیری مهم انجام شوند تا حداکثر بهره ناشی از این کاربرد به‌دست آید؟

در سوابق تحقیقاتی در خصوص شناسایی منطقه‌ای با حداکثر اهمیت در عملیات شبیه‌سازی پژوهش‌های مفصلی انجام گرفته است. در این خصوص عموما دو استراتژی پیشنهاد می‌شود. استفاده از نقطه با بیشترین احتمال وقوع[3] متداول‌ترین راه‌حلی است که برای جاگذاری تابع نمونه‌گیری مهم پیشنهاد شده است. این نقطه در آنالیز قابلیت اعتماد سازه‌ها شناخته شده بوده ودر روش‌های قابلیت اعتماد مرتبه اول[4] نقش اصلی را در تخمین قابلیت اعتماد سازه‌ها بازی می‌کنند. [11,6,5]. استراتژی دوم برای شناسایی این منطقه استفاده از روش‌های جستجو و انطباق دنباله فرآیند عملیات شبیه‌سازی با اطلاعات جدیدی است که در حین پیشرفت این عملیات به‌دست می‌آید [12 برای نمونه دیده شود].

در مقاله حاضر، از استراتژی اول پیروی خواهد شد. به این معنا که در ابتدای محاسبات، نقطه با بیشترین احتمال وقوع شناسایی می‌گردد و تابع نمونه‌گیری مهم در آن محل قرار داده می‌شود. همچنین در تحقیق حاضر، تابع توزیع احتمال مشترک اولیه به نقطه با احتمال وقوع حداکثر انتقال می‌یابد و از آن به‌عنوان تابع نمونه‌گیری مهم استفاده می‌شود. علت اتخاذ این چنین راه‌حلی در مقاله حاضر آنست که پیش‌بینی می‌گردد که در فضاهای کاری شبیه‌سازی که بسیار نامتناسب می‌باشند از بهترین توابع ممکنه‌ای که می‌توان نمونه‌هایی تولید کرد که همزمان عدم تناسب موجود را در خود داشته باشند استفاده از تابع توزیع مشترک اولیه متغیرهای تصادفی مسئله می‌باشد [8 برای بحث بیشتر ملاحظه گردد].

بدین ترتیب تمرکز اصلی مطالعه فعلی، بحث در خصوص بند (ج) بالا می‌باشد. کاملا روشن است که اگر محاسبات اضافه تحمیلی به عملیات شبیه‌سازی (نسبت به عملیات شبیه‌سازی ساده که در آن نمونه‌گیری مهم استفاده نمی‌شود) بتوانند با روشی موثر و با راندمان انجام گیرند به‌طوری که کمترین محاسبات لازم و بالتبع کمترین زمان کامپیوتری را به‌دنبال داشته باشند، مجموعه عملیات شبیه‌سازی موثرتر ودر نتیجه جذاب تر و کاربردی تر خواهد شد. براساس اطلاعات نویسنده بعضی تلاش‌های اولیه در این ارتباط برای حالات خاص در سوابق تحقیقاتی وجود دارد [13]. معذالک ارائه روابط فراگیرتری موردنیاز می‌باشد. در این نوشتار نشان داده خواهد شد که زمانی که متغیرهای دخیل در مسئله نرمال باشند می توان انتگرال‌های موجود در روش شبیه‌سازی جهتی و نیز تکنیک نمونه گیری مهم را به جای حل عددی، به‌طور تحلیلی و با یافتن حل‌های بسته‌ای، حل نمود. این امر به‌طور طبیعی سبب می‌گردد که راندمان آنالیز بالاتر رفته و سرعت بسیار بیشتری در محاسبات پدید آید.

ساختار مقاله حاضر در ادامه بدین ترتیب خواهد بود که ابتدا در بخش‌های 2 و 3 فرمول‌بندی شبیه‌سازی جهتی و نیز نمونه‌گیری مهم در شبیه‌سازی جهتی مورد بحث قرار می‌گیرند و روابط لازم ارائه می‌گردند. در بخش 4 تلاش می‌شود که انتگرال‌های لازم در فرآیند آنالیز قابلیت اعتماد مورد بازبینی قرار گرفته و برخلاف رویه‌های معمول که عموما رویکردی با حل عددی برای آنان در پیش می‌گیرند، جواب‌های بسته برای آنان یافت

[1] Directional simulation method
[2] Importance sampling method
[3] Most Probable Point
[4] FORM

گردد. در بخش 5 روابط به‌دست آمده، برای آنالیز قابلیت اعتماد یک تیغه توربین هیدروکنیتیکی به‌کار گرفته می‌شوند. که پارامترهای در آن فضای نامتناسبی را برای آنالیز ایجاد کرده اند. نتیجه‌گیری در نهایت، بخش انتهایی این مقاله خواهد بود.

2- فرمول‌بندی شبیه‌سازی جهتی

فرض کنید در یک آنالیز قابلیت اعتماد، سیستم تحت مطالعه با n متغیر تصادفی نرمال که لزوما مستقل از یکدیگر نیستند توصیف شده باشد. این متغیرهای تصادفی که مولفه‌های بردار X را می‌سازند عموما پارامترهای بارگذاری و مقاومتی سیستم را تعریف می‌کنند. همچنین فرض کنید برای این سیستم، تابع حالت حدی که با $G(X) = 0$ نشان داده می‌شود تعریف شده باشد. در این تعریف، سیستم خراب شده فرض می‌گردد اگر تابع حالت حدی مقداری غیرمثبت ($G(X) \leq 0$) به خود گیرد و بالعکس سیستم سالم تلقی می‌گردد اگر تابع حالت حدی یاد شده مثبت باشد ($G(X) > 0$). بنابراین برای این سیستم احتمال خرابی می‌تواند به شکل زیر تعریف گردد [11 برای نمونه ملاحظه گردد]:

$$p_f = \int_D f_X(x)dx \tag{1}$$

که در آن $f_X(x)$ تابع توزیع احتمال مشترک متغیرهای تصادفی n گانه $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (یعنی مولفه‌های بردار X) و D فضایی را نمایش می‌دهد که در آن سیستم خراب شده لحاظ می‌گردد. در فرمول‌بندی شبیه‌سازی جهتی لازم است مسئله در فضای قطبی تعریف گردد. این کار با استفاده از رابطه $X = R\,A$ صورت می‌گیرد که در آن $R \geq 0$ شعاع و A بردار واحد جهت می باشد. برای فضای جدید (R, A) رابطه (1) به شکل زیر در می‌آید [برای جزییات بیشتر 7 و 8 ملاحظه گردند]:

$$p_f = \int_D f_X(ra)|J_X|\, drda \tag{2}$$

که در آن $|J_X|$ دترمینان ماتریس ژاکوبین بوده و برای نمایش انتقال عنصر دیفرانسیلی به فضای جدید مورد استفاده قرار می‌گیرد. قبلا نشان داده شده است که عبارت (2) را می‌توان به‌منظور شبیه‌سازی جهتی ساده (شبیه‌سازی بدون نمونه‌گیری مهم) به شکل زیر نوشت [8 ملاحظه گردد]:

$$p_f = E_A\left[\int_{r(a)}^{\infty} f_X(ra)\frac{|J_X|}{f_A(a)}dr\right] \tag{3}$$

که در آن $f_A(a)$ تابع توزیع احتمال مشترک مولفه‌های A و $E_A[\ ]$ اپراتور شبیه‌سازی جهتی از بردار A می‌باشد. $r(a)$ در عبارت بالا طول شعاع در جهت شبیه‌سازی شده $A=a$ بوده و فاصله مرکز تولید جهت‌ها را با محل تقاطع با تابع حالت حدی نمایش می‌دهد (شکل 1 دیده شود). نیز در مرجع یاد شده نشان داده شده است که:

$$\frac{|J_X|}{f_A(a)} = \frac{r^{n-1}}{\left[\frac{\Gamma(\frac{n}{2})\,2^{\frac{n}{2}-1}}{(\sqrt{2\pi})^n}\right]} \tag{4}$$

در عبارت بالا $\Gamma(\ )$ تابع گاما می‌باشد. از آن‌جا که مخرج عبارت (4) مستقل از r می‌باشد، انتگرالی که مشروط به جهت تولید شده بایستی محاسبه گردد عبارت خواهد بود از:

$$\int_{r(a)}^{\infty} r^{n-1} f_X(ra)dr \tag{5}$$

3- فرمول‌بندی نمونه‌گیری مهم در شبیه‌سازی جهتی

همان‌طور که اشاره شد در بعضی از فضاهای کاری خاصی که شرایط نامتناسبی حاکم بر آنان می‌باشد فرمول‌بندی ساده شبیه‌سازی جهتی که در رابطه (3) ارائه گردید و جهات در آن به‌صورت یکنواخت در فضای n بعدی تولید می‌گردند کفایت نمی‌کند و برای نیل به یک جواب معقول و مناسب بایستی شبیه‌سازی جهتی به تعداد زیاد انجام گیرد که بسیار وقت گیر خواهد بود. تکنیک نمونه‌گیری مهم، راه حلی موثر برای کاهش واریانس نمونه جهات تولید شده می‌باشد. براساس این تکنیک به‌جای تولید جهات از تابع توزیع احتمال مشترک $f_A(a)$، عمده جهات موردنظر به سمت منطقه‌ای سوق داده می‌شوند که مشارکت بیشتری در مقدار احتمال خرابی p_f دارد. این هدف می‌تواند با تعریف تابع توزیع احتمال مشترک جدید $h_B(b)$ صورت گیرد که در آن B دیگر به صورت یکنواخت نمی‌باشد. با استفاده از $h_B(b)$، رابطه (3) به شکل زیر در می‌آید:

$$p_f = E_B\left[\int_{r(b)}^{\infty} f_X(rb)\frac{|J_X|}{h_B(b)}dr\right] \tag{6}$$

که در آن $E_B[\ ]$ نشانگر اپراتور نمونه‌گیری جهت از تابع توزیع مشترک $h_B(b)$ می‌باشد. در خصوص شکل و ترکیب تابع $h_B(b)$ در سوابق تحقیقاتی پیشنهاداتی ارائه گشته است [8,5]. براساس این پیشنهادات، یک فرم ترکیبی برای استفاده همزمان از جهات با توزیع یکنواخت و جهات سوق داده شده به سمت منطقه موردنظرعبارتست از:

$$h_B(b) = (1-q)\, f_A(b) + q\ \ f_B(b) \tag{7}$$

در این رابطه $0 \leq q \leq 1$ نسبت تعداد جهات تولید شده از تابع نمونه گیری مهم به کل جهات می‌باشد. روشن است که در حالت خاص q=0، شبیه‌سازی جهتی به شکل ساده خود کاهش می‌یابد و در حالت q=1، تمامی جهات از تابع نمونه‌گیری مهم اخذ می‌گردند. $f_B(b)$ یک توزیع غیریکنواخت نمونه‌گیری جهتی می‌باشد. این توزیع عموما با لحاظ یک تابع توزیع مشترک مناسب $f_Y(y)$ و در نظر گرفتن میانگین آن در نقطه‌ای که سوق دادن جهات به آن موردنظر می‌باشد به‌دست می‌آید (شکل 2 ملاحظه گردد). هرچند خواص احتمالاتی این توزیع اختیاری می‌باشند معذالک برای راندمان بالاتر معمولا استفاده از تابع توزیع مشترک $f_X(\ )$ توصیه می‌گردد. بنابراین پس از معلوم شدن ترکیب احتمالاتی $f_Y(y)$ می‌توان نقاطی را به‌صورت تصادفی از آن تولید کرد و جهات $B=b$ را با لحاظ رابطه $Y=H\,b$ (H شعاع در فضای قطبی (H, B) است) به‌دست آورد:

$$b = \frac{y}{H} = \frac{y}{\parallel y \parallel} \tag{8}$$

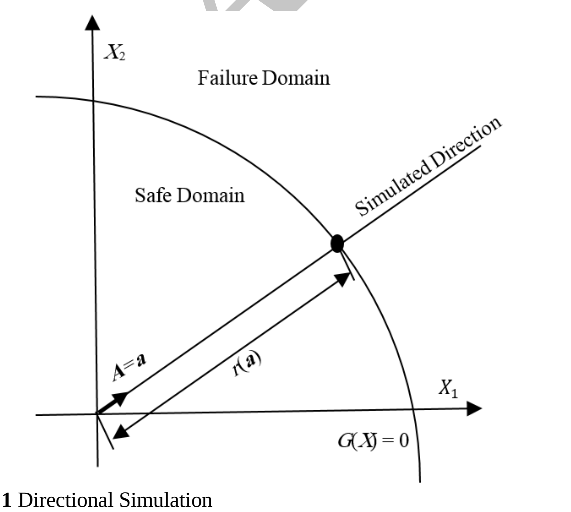

Fig. 1 Directional Simulation

شکل 1 شبیه‌سازی جهتی

که در آن ‖ ‖ مقدار قدرمطلق بردار را نمایش می‌دهد. از آن‌جا که رابطه میان تابع توزیع مشترک $f_Y(y)$ در فضای دکارتی و متناظر آن تابع توزیع مشتر ک $f_{H.B}(h,b)$ در فضای قطبی توسط عبارت $f_Y(y) = (1/|J_Y|)\, f_{H,B}(h,b)$ قابل بیان می‌باشد (که در آن مجددا $|J_Y|$ دترمینان ماتریس ژاکوبین می‌باشد که رابطه میان دو فضای مختصات را تعریف می‌کند)، می‌توان تابع توزیع مطلوب نمونه‌گیری مهم را بدین ترتیب با انتگرال‌گیری روی همه مقادیر شعاع H به‌دست آورد:

$$f_B(b) = \int_0^\infty f_{H,B}(h,b)dh = \int_0^\infty f_Y(hb)|J_Y|dh \tag{9}$$

از آن‌جا که $|J_X| = |J_Y| = r^{n-1}g(b)$ بوده که در آن $g(b)$ تابعی از b است رابطه (6) حال می‌تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$p_f = E_B\left[\int_{r(b)}^{\infty} f_X(rb)\frac{r^{n-1}}{(1-q)\, f_A(b) + q\int_0^\infty h^{n-1} f_Y(hb)dh}dr\right] \tag{10}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌گردد در این عبارت علاوه‌بر انتگرال اصلی، محاسبه انتگرال دیگری با شکل زیر و با حدهای 0 و ∞ بایستی صورت گیرد:

$$\int_0^\infty h^{n-1} f_Y(hb)dh \tag{11}$$

کاملا واضح است که سرعت و راندمان آنالیز قابلیت اعتماد سازه‌ها با استفاده از شبیه‌سازی جهتی و نمونه‌گیری مهم بسیار تحت تاثیر نحوه محاسبه انتگرال‌های (5) و (11) می‌باشد. در یک حالت کلی که در آن X و Y بردارهایی مرکب از متغیرهای تصادفی غیرنرمال باشند، انتگرال‌های یاد شده بایستی به‌صورت عددی محاسبه گردند. معذالک اگر X بردار متغیرهای تصادفی نرمال باشد و Y نیز معادل X (اما با میانگین x* یعنی نقطه با حداکثر احتمال وقوع) در نظر گرفته شود، می‌توان فرم بسته‌ای را برای انتگرال‌های یاد شده ارائه نمود. این مطلب موضوع بخش زیرین می‌باشد.

4- محاسبه انتگرال‌های لازم در آنالیز قابلیت اعتماد

در این بخش هدف یافتن حل‌های بسته‌ای برای انتگرال‌های (5) و (11) می‌باشد. بنابراین در مباحث زیر در یک فرمول‌بندی که هر دو انتگرال را پاسخگو باشد، جستجو برای یافتن پاسخ بسته به انتگرال زیر خواهد بود:

$$\int_R^\infty r^{n-1} f_X(rb)dr \tag{12}$$

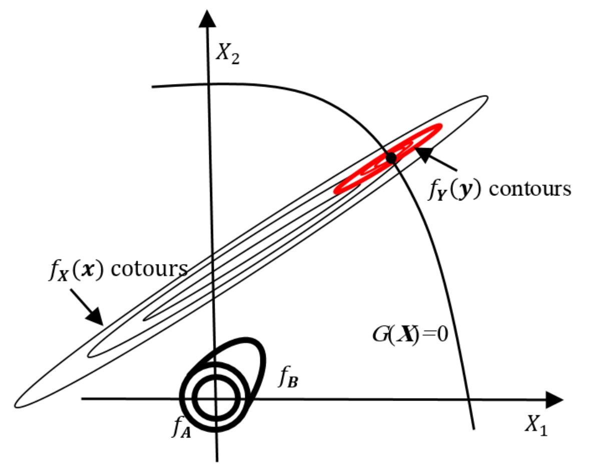

Fig. 2 Importance sampling in directional simulation

شکل 2 نمونه‌گیری مهم در شبیه سازی جهتی

که در آن بردار جهت b معلوم است. حالات زیر در این ارتباط مورد بررسی قرار می‌گیرند:

4-1- تابع توزیع نرمال استاندارد با میانگین غیر صفر x^* $f_X(\ )$

اولین حالتی که مورد بررسی قرار می‌گیرد حالتی است که در آن $f_X(\ )$ تابع توزیع مشترک n متغیر تصادفی نرمال استاندارد با میانگین نقطه ای غیر از مرکز یعنی x^* باشد (($f_X(\ )$ همان $\phi_n(x)$ یعنی تابع توزیع مشترک نرمال استاندارد با میانگین x^* باشد) (شکل 3 ملاحظه گردد).

در این حالت با استفاده از تقارن شکلی $\phi_n(\ )$ حول مرکزیت x^* محورهای مختصات جدید V را چنان تعریف می‌کنیم که محور V_1 در امتداد بردار b قرارگیرد. به عبارت دیگر دستگاه مختصات X چنان دوران داده می‌شود که X_1 در امتداد b جای گیرد. در این حالت با استفاده از رابطه $x=r\,b$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I &= \int_R^\infty r^{n-1}\,\phi_n(rb - x^*)dr \\ &= \int_R^\infty v_1^{n-1}\phi_n(v_1 - v_1^*;\ v_2 - v_2^*; \dots;\ v_n - v_n^*)dv_1 \\ &= \phi_{n-1}(-v_2^*;\ -v_3^*; \dots;\ -v_n^*)\int_R^\infty v_1^{n-1}\,\phi(v_1 - x^*\,b)dv_1 \end{aligned} \tag{13}$$

که در آن $(v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*)$ مولفه‌های بردار نقطه میانگین v^* (و یا همان x^*) در سیستم مختصات V می‌باشند. در عبارت‌های بالا از این واقعیت‌ها استفاده شده است که در انتگرال‌گیری در امتداد محور V_1 همه مقادیر $v_2 = v_3 = \dots = v_n = 0$ می‌باشند و نیز تصویربردار x^* روی V_1 مقدار $x^*\,b$ می‌باشد. حال با استفاده از این واقعیت که: $x_1^{*2} + x_2^{*2} + \dots + x_n^{*2} = v_1^{*2} + v_2^{*2} + \dots + v_n^{*2}$ و بالتبع $d^2 = \sum_{i=2}^n v_i^{*2} = \sum_{i=1}^n x_i^{*2} - (x^*\,b)^2$، می‌توان رابطه (13) را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$I = \frac{e^{-\frac{1}{2}d^2}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}\int_R^\infty r^{n-1}\,\phi(r - x^*b)dr \tag{14}$$

برای یافتن حل انتگرال موجود در (14) با اخذ $a = x^*b$ ، $r\text{-}a\text{=}s$ و نیز $m\text{=}n\text{-}1$ ، عبارت I به شکل زیر خواهد شد:

$$I = \frac{e^{-\frac{1}{2}d^2}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}\int_{R-a}^\infty (s+a)^m\,\phi(s)ds \tag{15}$$

حال با استفاده از رابطه $(x+y)^m = \sum_{k=0}^m \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} x^k y^{m-k}$، خواهیم داشت:

$$I = \frac{e^{-\frac{1}{2}d^2}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}\sum_{k=0}^m \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} a^{m-k}\int_{R-a}^\infty s^k\,\phi(s)ds \tag{16}$$

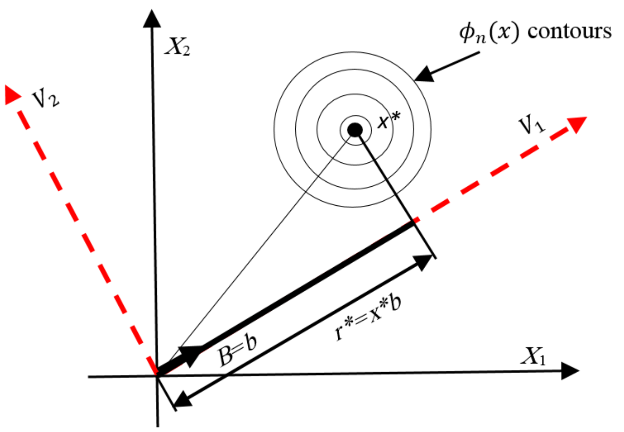

Fig. 3 Integration along $B=b$ in standard Normal space

شکل 3 انتگرال‌گیری در راستای $B=b$ در فضای نرمال استاندارد

و در انتها با داشتن پاسخ صریح برای انتگرال موجود در (16) داریم:

$$I = I_1\ (I_2 + I_3\, I_4) \tag{17}$$

که در آن:

$$I_1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}d^2}}{(\sqrt{2\pi})^m} \tag{17a}$$

$$I_2 = a^m[1 - \Phi(R - a)] \tag{17b}$$

$$I_3 = \sum_{k=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} a^{m-k} \tag{17c}$$

و:

$$I_4 = \phi(R - a) \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} \frac{(k-1)!!}{(2j)!!} (R - a)^{2j} \tag{17d}$$

اگر k فرد باشد و:

$$I_4 = \phi(R - a) \sum_{j=0}^{\frac{k-2}{2}} \frac{(k-1)!!}{(2j+1)!!} (R - a)^{2j+1} + (k-1)!!\,[1 - \Phi(R - a)] \tag{17e}$$

اگر k زوج باشد.

در عبارت‌های بالا $\phi(\ )$ و $\Phi(\ )$ به ترتیب تابع توزیع احتمال و تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد بوده و $(\ )!!$ اپراتور فاکتوریل دوگانه می‌باشد.

4-2- تابع توزیع مشترک n متغیر تصادفی نرمال مستقل $f_X(\ )$ با بردار میانگین x^* و ماتریس قطری σ_X

در این حالت، ارائه یک راه‌حل بسته در دو مرحله صورت می‌گیرد. ابتدا سیستم مختصات جدید Z چنان تعریف می‌گردد که در آن $Z_i = X_i/\sigma_{X_i}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ می‌باشد. این کار به معنای انقباض هر یک از مقادیر X_i به اندازه σ_{X_i} در امتداد محور مربوطه می‌باشد. از آن‌جا که بردار X نرمال و مولفه‌های آن مستقل می‌باشند بردار Z نیز نرمال و دارای مولفه‌های مستقل هستند. بردار Z را می‌توان به شکل ماتریسی $Z = \sigma_X^{-1} X$ نشان داد. میانگین این بردار:

$$z^* = \begin{bmatrix} z_1^* \\ z_2^* \\ \vdots \\ z_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^*/\sigma_{X_1} \\ x_2^*/\sigma_{X_2} \\ \vdots \\ x_n^*/\sigma_{X_n} \end{bmatrix} \quad \text{ویا:} \quad z^* = \sigma_X^{-1} x^* \tag{18}$$

و ماتریس کوواریانس آن ماتریس واحد است (یعنی: $C_Z = I$). در عبارت بالا σ_X^{-1} یک ماتریس قطری از مرتبه n با عناصر عکس انحراف معیار مولفه‌های X_i می‌باشد. در این حالت خواهیم داشت:

$$I = \int_R^\infty r^{n-1} f_X(rb)dr = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \sigma_{X_i}} \int_R^\infty r^{n-1} f_Z(r\, \sigma_X^{-1} b)dr \tag{19}$$

حال با مقایسه این رابطه با عبارت (12)، می‌توان یک بردار جدید بنام b' را با واحدسازی بردار $\sigma_X^{-1} b$ تعریف کرد (یعنی: $b' = \sigma_X^{-1}\ b/\|\sigma_X^{-1}\, b\|$). با دوران سیستم مختصات Z و ایجاد سیستم مختصات V به نحوی که محور V_1 در راستای بردار b' قرار گیرد، عبارت (17) به شکل زیر در خواهد آمد:

$$I = I_1\ (I_2 + I_3\, I_4) \tag{20}$$

که در آن:

$$I_1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}d^2}}{(\sqrt{2\pi})^m \left(\prod_{i=1}^{m+1} \sigma_{X_i}\right) C_1^{m+1}} \tag{20a}$$

$$I_2 = C_2^m[1 - \Phi(C_1 R - C_2)] \tag{20b}$$

$$I_3 = \sum_{k=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} C_2^{m-k} \tag{20c}$$

و:

$$I_4 = \phi(C_1 R - C_2) \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} \frac{(k-1)!!}{(2j)!!} (C_1 R - C_2)^{2j} \tag{20d}$$

اگر k فرد باشد و:

$$I_4 = \phi(C_1 R - C_2) \sum_{j=0}^{\frac{k-2}{2}} \frac{(k-1)!!}{(2j+1)!!} (C_1 R - C_2)^{2j+1} + (k-1)!!\,[1 - \Phi(C_1 R - C_2)] \tag{20e}$$

اگر k زوج باشد.

که در آنان $m=n-1$ بوده و مقادیر C_1، C_2 و d^2 از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$C_1 = b'^{\mathrm{T}} \sigma_X^{-1}\ b$$
$$C_2 = b'^{\mathrm{T}} \sigma_X^{-1}\ x^*$$

$$d^2 = \sum_{i=2}^n v_i^{*2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i^*}{\sigma_{X_i}}\right)^2 - (C_2)^2$$

4-3- تابع توزیع مشترک n متغیر تصادفی نرمال همبسته $f_X(\ )$ با بردار میانگین x^* و ماتریس کوواریانس C_X

در این حالت، ارائه یک حل بسته در سه مرحله صورت می‌گیرد:

الف) ایجاد یک سیستم مختصات جدید W که در آن متغیرهای تصادفی، مستقل از یکدیگر باشند. همان‌گونه که از سوابق تحقیقاتی می‌توان یافت، ارتباط دو سیستم X و W با استفاده از عبارت $W = \Lambda\, X$ برقرار می‌شود که در آن Λ ماتریسی است که سطرهای آن بردارهای ویژه متناظر مقادیر ویژه‌ای هستند که برای ماتریس C_X به‌دست آمده‌اند. در فضای W متغیرهای تصادفی نرمال، مستقل و دارای بردار میانگین w^* و ماتریس کوواریانس C_W زیر می‌باشند:

$$w^* = \Lambda\, x^*$$
$$C_W = \Lambda\, C_X\, \Lambda^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

ماتریس C_W، ماتریسی قطری بوده که عناصر قطر آن مجذور مقادیر ویژه می‌باشند ($\sigma_{W_i} = \lambda_i$ که در آن λ_i، i امین مقدار ویژه می‌باشد).

ب) ایجاد سیستم مختصات Z که با انقباض محورهای W_i متناسب با σ_{w_i} صورت می‌گیرد (یعنی: $Z_i = W_i/\sigma_{w_i}$ و یا به شکل ماتریسی $Z = \sigma_W^{-1}\, W$ که در آن σ_W^{-1} ماتریس قطری با عناصر $1/\sigma_{w_i}$ می باشد). در این سیستم مختصات بردار میانگین عبارتست از $z^* = \sigma_W^{-1}\ w^* = \sigma_W^{-1}\ \Lambda\ x^*$ و ماتریس کوواریانس ماتریسی واحد است. حال در این سیستم مختصات، انتگرال مطلوب خواهد شد:

$$I = \int_R^\infty r^{n-1} f_X(rb)dr = |J_X| \int_R^\infty r^{n-1} f_Z(r\, \sigma_W^{-1}\, \Lambda\ b)dr \tag{22}$$

که در آن $|J_X|$ دترمینان ماتریس ژاکوبین برای ایجاد ارتباط میان $f_X(\ )$ و $f_Z(\ )$ می‌باشد. با استفاده از روابط بالا می‌توان نشان داد که این دترمینان برابر است با $|\sigma_W^{-1}\, \Lambda|$. حال با مقایسه این رابطه با عبارت (12) می‌توان بردار جدیدی بنام b'' تعریف کرد که با واحدسازی بردار $\sigma_W^{-1}\, \Lambda\, b$ به دست می‌آید (یعنی: $b'' = \sigma_W^{-1}\ \Lambda\ b/\|\sigma_W^{-1}\ \Lambda\ b\|$).

ج) ایجاد سیستم مختصات V با دوران سیستم مختصات Z به‌گونه‌ای که محور V_1 بر راستای بردار b'' منطبق گردد. حال با استفاده از رابطه $v_1^* = b''^{\mathrm{T}}\ \sigma_W^{-1}\, \Lambda\, x^*$ می‌باشد و دانستن آنکه $\sum_{i=2}^n v_i^{*2} = \sum_{i=1}^n z_i^{*2} - v_1^{*2}$ داریم:

$$I = \left[\prod_{i=2}^n \phi(v_i^*)\right] |\sigma_W^{-1}\, \Lambda| \int_R^\infty r^{n-1}\, \phi\left[(b''^{\mathrm{T}}\ \sigma_W^{-1}\, \Lambda\, b)r - (b''^{\mathrm{T}}\ \sigma_W^{-1} \Lambda\, x^*)\right]dr \tag{23}$$

که در آن:

$$\prod_{i=2}^{n}\phi(v_i^*) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}(\sigma_W^{-1}\Lambda\, x^*)_i^2 - (b''^{T}\sigma_W^{-1}\Lambda\, x^*)^2\right]\right\} \qquad (24)$$

با استفاده از روابط بالا، می‌توان I در (23) را از رابطه زیر یافت:

$$I = I_1\ (I_2 + I_3\, I_4) \qquad (25)$$

که در آن:

$$I_1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}d^2}\, C_3}{(\sqrt{2\pi})^m\, C_1^{m+1}} \qquad (25a)$$

$$I_2 = C_2^m[1-\Phi(C_1R - C_2)] \qquad (25b)$$

$$I_3 = \sum_{k=0}^{m}\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} C_2^{m-k} \qquad (25c)$$

و:

$$I_4 = \phi(C_1R - C_2)\sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}}\frac{(k-1)!!}{(2j)!!}(C_1R - C_2)^{2j} \qquad (25d)$$

اگر k فرد باشد و:

$$I_4 = \phi(C_1R - C_2)\sum_{j=0}^{\frac{k-2}{2}}\frac{(k-1)!!}{(2j+1)!!}(C_1R - C_2)^{2j+1} + (k-1)!!\,[1-\Phi(C_1R - C_2)] \qquad (25e)$$

اگر k زوج باشد.

در این عبارات m=n-1 بوده و مقادیر C_1 ، C_2 ، C_3 و d^2 از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$C_1 = b''^{T}\sigma_W^{-1}\Lambda\, b$$
$$C_2 = b''^{T}\sigma_W^{-1}\Lambda\, x^*$$
$$C_3 = |\sigma_W^{-1}\Lambda|$$
$$d^2 = \sum_{i=1}^{n}(\sigma_W^{-1}\Lambda\, x^*)_i^2 - (C_2)^2$$

حال با یافتن روابط جدید و بسیار مهم (17)، (20) و (25) که حل‌های بسته‌ای با فرض نرمال بودن متغیرهای تصادفی مسئله برای انتگرال‌های موجود در رابطه (10) ارائه می‌دهند، می‌توان آنالیز قابلیت اعتماد را با استفاده از روش شبیه‌سازی جهتی و نیز با استفاده ازتکنیک نمونه‌گیری مهم، بسیار راندمان تر و بدون نیاز به انتگرال‌گیری عددی انجام داد. در مثالی که ذیلا می‌آید نشان داده خواهد شد که چگونه می‌توان در یک فضای کاری بسیار نامتناسب که در آن متغیرهای تصادفی دارای انحراف معیارهای بسیار متفاوتی می‌باشند و بدین ترتیب چاره‌ای جز استفاده از تکنیک‌هایی مثل نمونه‌گیری مهم نمی‌باشد، می‌توان این تکنیک را بسیار کارآمدتر به‌کار گرفت و با سرعت به‌مراتب بیشتری به نتایج دلخواه دست یافت.

5- مثال – آنالیز قابلیت اعتماد یک تیغه توربین هیدروکنیتیکی

در این مثال احتمال خرابی یک تیغه توربین هیدروکنیتیکی مورد بررسی قرار می‌گیرد که از مراجع [3,2] اقتباس گردیده است. این توربین فرض می‌گردد که در رودخانه‌ای به‌کار گرفته می‌شود که دارای جریان آبی با سرعت‌های متفاوت و با طبیعتی تصادفی در طول 12 ماه در سال می‌باشد. شکل هندسی تیغه این توربین که بال گونه می باشد در شکل 4 و نیز بارگذاری ناشی از جریان آب روی تیغه در شکل 5 نشان داده شده‌اند.

لنگر خمشی ایجاد شده در ریشه تیغه (محل اتصال آن به محور) از رابطه $M_{\mathrm{flap}} = 1/2\,\rho\, C_m\, v(t)^2$ به‌دست می‌آید [3,2]. مود خرابی که در اینجا مورد توجه است ایجاد لنگر خمشی در این ناحیه از تیغه، فراتر از لنگر خمشی قابل تحمل و به‌دنبال آن شکست تیغه است. بنابراین تابع حالت حدی متناظر خواهد شد:

$$G(X) = M_{\mathrm{resist}} - M_{\mathrm{flap}} = \frac{\varepsilon_a EI}{h_1} - \frac{1}{2}\rho\, C_m\, v(t)^2 \qquad (26)$$

در این رابطه M_{flap} لنگر ایجاد شده در نقطه اتصال به محور، M_{resist} لنگر مقاوم، ε_a کرنش مجاز مصالح تیغه، $v(t)$ سرعت جریان آب در رودخانه محل نصب توربین، $\rho = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$ چگالی آب جریان رودخانه، $C_m = 0.3422$ ضریب لنگر، $E = 14\ \mathrm{GPA}$ مدول یانگ و I ممان اینرسی سطح مقطع در محل ریشه تیغه بوده و توسط رابطه $I = \frac{2}{3}l_1(h_1^3 - h_2^3)$ محاسبه می‌گردد. ابعاد l_1 ، h_1 و h_2 در شکل 4 نشان داده شده اند.

در این مثال پارامترهای $v(t)$ ، l_1، h_1، h_2 و ε_a به‌عنوان متغیرهای تصادفی با خواص احتمالاتی مندرج در جدول 1 در نظر گرفته می‌شوند. سرعت آب در این مثال تابعی از زمان بوده و میانگین و انحراف معیار آن نیز مطابق عبارات زیر تابعی از زمان تعریف شده اند:

$$\mu_{v(t)} = \sum_{i=1}^{4} a_i^m \sin(b_i^m t + c_i^m)$$
$$\sigma_{v(t)} = \sum_{i=1}^{4} a_i^s \exp\left\{-\left[\frac{t-b_i^s}{c_i^s}\right]^2\right\} \qquad (27)$$

در روابط بالا a و b ها ثابت بوده و مقادیر آنان عبارتند از:

a_1^m=3.815	b_1^m=0.2895	c_1^m=-0.2668
a_1^m=2.528	b_2^m =0.5887	c_2^m=0.9651
a_1^m=1.176	b_3^m =0.7619	c_3^m =3.116
a_1^m =-0.07856	b_4^m =2.183	c_4^m =-3.161
a_1^s = 0.7382	b_1^s = 6.456	c_1^s = 0.9193
a_2^s = 1.013	b_2^s = 4.075	c_2^s = 1.561
a_3^s = 1.875	b_3^s = 9.913	c_3^s = 6.959
a_4^s = 1.283	b_4^s = 1.035	c_4^s = 2.237

در این مثال متغیرهای تصادفی مستقل از یکدیگر لحاظ می‌گردند و نیز تنها مقادیر مثبت سرعت جریان آب در رودخانه در نظر گرفته خواهند شد.

در آنالیز حاضر، توجه به این واقعیت که مقادیر نوعی برای انحراف معیار $\sigma_{v(t)}$ در زمان‌های مختلف چیزی در حدود 4.5 می‌باشد، و نیز با توجه به مقادیر متناظر برای بقیه متغیرهای تصادفی که در جدول 1 قید شده‌اند، ملاحظه می‌گردد که تفاوت بسیار قابل ملاحظه‌ای میان آنان وجود دارد که متاسفانه باعث ایجاد فضای بسیار نامتناسب و بیماری برای شبیه‌سازی جهتی در شکل ساده آن می‌گردد. همان‌طور که قبلا خاطرنشان گردید در این چنین فضایی ناچارا بایستی از روش نمونه‌گیری مهم استفاده کرد.

در یک حالت ایده‌آل لازم است به‌منظور آنالیز قابلیت اعتماد تیغه توربین یادشده یک آنالیز وابسته به زمان ارائه گردد. علت این امر طبیعت وابسته به زمان فرآیند بارگذاری روی این تیغه می‌باشد که قاعدتا با یک فرآیند تصادفی بایستی نمایش داده شود. با این حال از آن‌جا که این نوع آنالیز در حیطه نظر این مقاله نمی‌باشد، در این‌جا یافتن مقادیر احتمال خرابی "لحظه‌ای"، $p_f(t)$،

جدول 1 متغیرهای تصادفی و خواص احتمالاتی آنان

Table 1 Random Variables and their probabilistic properties

متغیر تصادفی	میانگین	انحراف معیار	نوع توزیع
$v(t)$ (m/sec)	$\mu_{v(t)}$	$\sigma_{v(t)}$	گوسی
$\boldsymbol{l_1}$ (m)	0.22	0.002	گوسی
$\boldsymbol{h_1}$ (m)	0.025	0.00025	گوسی
$\boldsymbol{h_2}$ (m)	0.019	0.00019	گوسی
$\boldsymbol{\varepsilon_a}$	0.025	0.00025	گوسی

و شاخص‌های ایمنی متناظر یعنی $\beta(t)$، (با تعریف شناخته شده آن یعنی $(\beta(t)=-\Phi^{-1}[p_f(t)]$ و با لحاظ خواص احتمالاتی لحظه‌ای فرآیند گفته شده به‌دست می‌آیند. در اشکال 6 و 7 این مقادیر در زمان‌های مختلف t در بازه زمانی [0-12] ماه توسط روش شبیه‌سازی جهتی پیشنهادی و استفاده از نمونه‌گیری مهم محاسبه شده و ارائه گشته‌اند. مقایسه شاخص‌های ایمنی ارائه شده در این‌جا با آن‌هایی که در مرجع [2] گزارش شده‌اند نشان می‌دهد که جواب‌ها بسیار به یکدیگر نزدیک هستند (جواب‌های مرجع [2] نشان داده نشده‌اند).

در محاسبه $p_f(t)$ و متناظر آنان $\beta(t)$ ها نکات ذیل مشاهده گردیدند:

الف) از آن‌جا که مقادیر واریانس متغیرهای تصادفی دوم تا پنجم بسیار کوچک می‌باشند، فضای کاری X بسیار نامتناسب و بیمار بوده و بدین ترتیب انتظار می‌رود که شبیه‌سازی ساده منجر به جواب مناسبی نخواهد شد. در

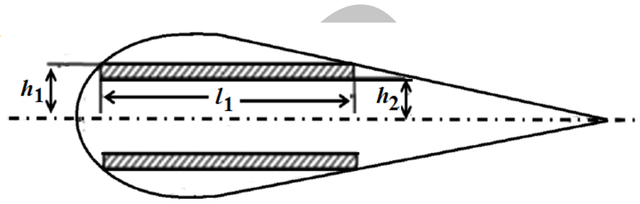

Fig. 4 Turbine blade cross section at its root area

شکل4 سطح مقطع تیغه توربین در محل اتصال به محور

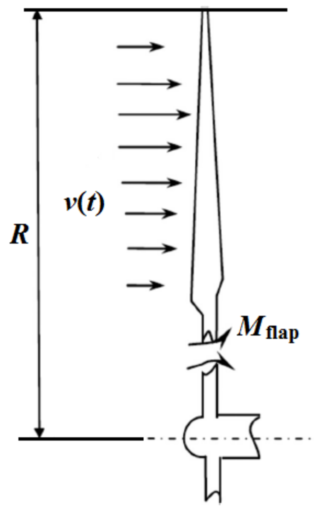

Fig. 5 Flow loading on turbine blade

شکل 5 بارگذاری جریان روی تیغه توربین

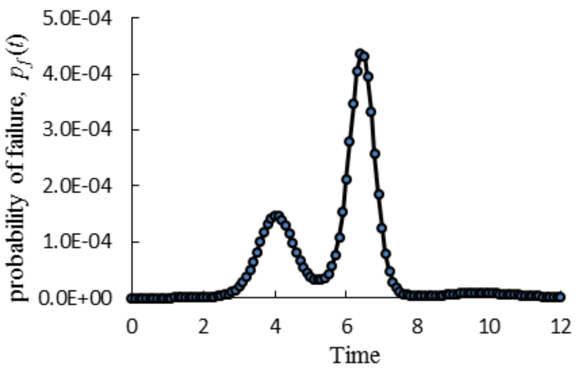

Fig. 6 Probability of failure of turbine blade at different times, $p_f(t)$

شکل 6 احتمال خرابی تیغه توربین در زمان‌های مختلف، $p_f(t)$

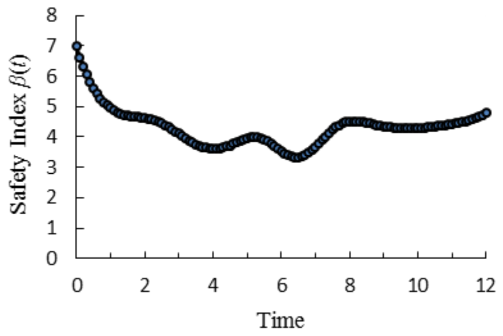

Fig 7 Safety index of turbine blade at different times, $\beta(t)$

شکل 7 شاخص سلامتی تیغه توربین در زمان‌های مختلف، $\beta(t)$

مثال حاضر تجربه نشان داد که حتی با تعیین یک میلیارد شبیه‌سازی جهتی یکنواخت، مقدار قابل اعتنایی برای $p_f(t)$ ها به‌دست نمی‌آید. به این معنا که عمده جهات شبیه‌سازی شده از دست رفته و منجر به محاسبه مقدار قابل قبولی برای $p_f(t)$ نمی‌گردد. بنابراین چاره‌ای جز استفاده از تکنیک‌هایی مثل نمونه‌گیری مهم باقی نمی‌ماند.

ب) اگر انتگرال‌های موجود در روابط (5) و (11) به‌صورت عددی محاسبه گردند، زمان بسیار قابل ملاحظه‌ای بیشتر از حالتی صرف خواهد شد که انتگرال‌های یاد شده توسط روابط ارائه شده توسط این مقاله (در این مثال رابطه (25)) محاسبه گردند. برای مثال، اگر یک میلیون شبیه‌سازی جهتی برای محاسبه هر یک از $p_f(t)$ ها (با t مشخص) در نظر گرفته شود CPU مربوط به آنالیز با استفاده از انتگرال‌گیری عددی حدودا پنجاه برابر بیشتر از حالتی است که روابط تحلیلی ارائه شده در این تحقیق استفاده شوند.

بنابراین ملاحظه می‌گردد که از آن‌جا که ایجاد امکان تعداد شبیه‌سازی‌های بیشتر در روش‌های شبیه‌سازی بسیار کلیدی و مهم می‌باشد، استفاده از روابط پیشنهادی برای محاسبه انتگرال‌ها این فرصت را برای آنالیز کننده فراهم می‌نماید که در مسائل پیچیده، شبیه‌سازی‌های بیشتری را برای نیل به جواب‌های دقیق‌تر با زمان معقول‌تری انجام دهد.

در جداول 2 و 3 اثر تعداد شبیه‌سازی‌های جهتی و نیز ضریب q (معادله (7) ملاحظه گردد) در مقدار $p_f(t)$ مورد مطالعه قرار گرفته‌اند (در این‌جا برای نمونه t=6 انتخاب شده است). همان‌طور که از این دو جدول ملاحظه می‌گردد، زمانی‌که تعداد شبیه‌سازی‌ها افزایش می‌یابد مقادیر $p_f(t)$ به سمت مقدار پایداری پیش خواهد رفت، همان‌طور که انتظار می‌رود. همچنین مقدار q در این مثال در مقادیر نهایی $p_f(t)$ تاثیر قابل ملاحظه‌ای ندارد به‌طوری‌که حتی با q های کوچک، مقادیر $p_f(t)$ مناسب به‌دست می‌آیند.

6- بحث و نتیجه گیری

همان‌طور که از سوابق تحقیقاتی کاملا آشکار و معلوم می‌باشد روش‌های شبیه‌سازی و از جمله شبیه‌سازی جهتی این مزیت عمده را نسبت به روش

جدول 2 اثر تعداد شبیه‌سازی‌های جهتی در p_f در t=6

Table 2 Effect of simulation number on p_f at t=0

تعداد شبیه سازی جهتی	$p_f(t=0)$
100	0.1678×10^{-3}
1,000	0.2234×10^{-3}
10,000	0.2117×10^{-3}
100,000	0.2128×10^{-3}
1000,000	0.2094×10^{-3}
10,000,000	0.2095×10^{-3}

تذکر: در اینجا q=0.7 مورد استفاده قرار گرفته است.

جدول 3 اثر مقدار ضریب q در $p_f\ (t)$

Table 3 Effect of q coefficient on $p_f\ (t)$

q	$\boldsymbol{p_f(t)}$
0.1	0.2117×10^{-3}
0.2	0.2095×10^{-3}
0.3	0.2123×10^{-3}
0.4	0.2127×10^{-3}
0.5	0.2128×10^{-3}
0.6	0.2130×10^{-3}
0.7	0.2128×10^{-3}
0.8	0.2151×10^{-3}
0.9	0.2148×10^{-3}

تذکر: در اینجا t=6 و تعداد جهات شبیه سازی 100,000 لحاظ گشته اند.

قابلیت اعتماد مرتبه اول دارند که اولا در فضای اولیه X (بدون انتقال به فضای نرمال استاندارد) می‌توانند به‌کار آیند و ثانیا در حالاتی که تابع و یا توابع حالات حدی بسیار غیرخطی باشند روش‌های شبیه‌سازی روش‌های دقیق‌تری خواهند بود (نیازی به خطی‌سازی تابع حالت حدی وجود ندارد). با این حال در روش‌های شبیه‌سازی از جمله شبیه‌سازی جهتی به‌خصوص اگر فضای موجود کاری فضای نامتناسب و بیمار باشد متاسفانه برای نیل به پاسخ مناسب نیاز به زمان بسیار محاسباتی خواهند داشت. استفاده از تکنیک‌هایی مثل نمونه‌گیری مهم، هر چند نشان داده شده است که بسیار موثر می‌باشد معذالک حجم محاسبات اضافه‌ای را همزمان به محاسبات لازم تحمیل می‌کند.

در این مقاله بمنظور بهره‌گیری بیشتر از تکنیک نمونه‌گیری مهم در روش شبیه‌سازی جهتی، حل‌های بسته‌ای برای انتگرال‌های مطرح در مسئله در حالتی که متغیرهای تصادفی نرمال باشند پیشنهاد شدند. این حل‌های بسته سبب بی‌نیازی از انجام محاسبات پرحجم انتگرال‌گیری عددی در هر شبیه‌سازی جهتی شده و به‌دنبال آن محاسبات با سرعت بسیار بیشتری به پاسخ‌های لازم همگرا گردیدند.

روشی که برای آنالیز قابلیت اعتماد سیستم های مکانیکی در این مقاله ارائه گردید به این ترتیب این امکان را ایجاد می‌کند که سیستم‌های پیچیده‌ای که متغیرهای تصادفی تعریف شده آنان دارای خواص احتمالاتی دلخواه بوده و نیز توابع حالات حدی آنان بسیار غیرخطی باشند، با سرعت قابل قبولی آنالیز شده و جواب‌های مناسب با دقت معقول به‌دست آیند.

7- مراجع

[1] Z. Hu, X. Du, Reliaility analysis for hydrokinetic turbine blades, *Renewable Energy*, Vol. 48, pp. 251-262, 2012.

[2] Z. P. Mourelatos, Z. M. Majcher, V. Pandey, I. Baseski, Time-dependent reliability analysis using the total probability theorem, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 137, No. 3, pp. 031405-1 031405-8, 2015.

[3] Z. Hu, X. Du, A sampling approach to extreme value distribution for time-dependent reliability analysis, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 135, No. 7, pp. 071003-1 071003-8, 2013.

[4] O. Ditlevsen, A. M. Hasofer, P. Bjerager, R. Olesen, Directional simulation in Gaussian space, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 3, No. 4, pp. 207-17, 1988.

[5] P. Bjerager, Probability integration by directional simulation, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 114, No. 8, pp. 1285-302, 1988.

[6] O. Ditlevsen, R. E. Melchers, H. Gluver, General multi-dimensional probability integration by directional simulation, *Computers and Structures*, Vol. 36, No. 2, pp. 355-68, 1990.

[7] R. E. Melchers, Radial importance sampling for structural reliability, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 189, No. 116(1), pp. 189-203, 1990.

[8] M. R. Moarefzadeh, R. E. Melchers, Directional importance sampling for ill-proportioned spaces, *Structural Safety*, Vol. 21, No. 1, pp. 1-22, 1999.

[9] J. Nie, B. R. Ellingwood, Directional methods for structural reliability analysis, *Structural Safety*, Vol. 22, No. 3, pp. 233-249, 2000.

[10] J. F. Richard, W. Zhang, Efficient high-dimensional importance sampling, *Journal of Econometrics*, Vol. 141, No. 2, pp. 1385-1411, 2007.

[11] R. E. Melchers, *Structural Reliability; Analysis and Prediction*, Second Edition, pp. 94-131, England: John Wiley, 1999.

[12] F. Grooteman, An adaptive directional importance sampling method for structural reliability, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 26, No. 2, pp. 134–141, 2011.

[13] Sh. Okuda, H. Kobayasi, M. Yonezawa, An efficient method of structural reliability analysis based on a directional importance sampling simulation (A determination of equivalent directional importance sampling probability densities weighted in the direction of the design points), Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol. 79, No. 801, pp. 609-619, 2013.