



## Nonlinear Dynamics and Chaotic Behavior in an Oscillator Connected to Shape Memory Alloy

### ARTICLE INFO

#### Article Type

Original Research

#### Authors

Yahyaei Sh.<sup>1</sup> MSc,  
Zakerzadeh M.R.\*<sup>1</sup> PhD,  
Bahrami A.<sup>1</sup> PhD

#### How to cite this article

Yahyaei Sh, Zakerzadeh M.R, Bahrami A. Nonlinear Dynamics and Chaotic Behavior in an Oscillator Connected to Shape Memory Alloy. Modares Mechanical Engineering. 2019;19(1):95-104.

<sup>1</sup>Applied Design Department, Mechanical Engineering Faculty, University of Tehran, Tehran, Iran

#### \*Correspondence

Address: Applied Design Department, Mechanical Engineering Faculty, University of Tehran, Tehran, Iran. Postal Code: -  
Phone: +98 (21) 61119962  
Fax: +98 (21) 88013029  
zakerzadeh@ut.ac.ir

#### Article History

Received: July 21, 2018  
Accepted: August 18, 2018  
ePublished: January 1, 2019

### ABSTRACT

The dynamic response of shape memory alloy (SMA) systems and structures often exhibits a complex behavior due to their intrinsic nonlinear characteristics. The key characteristics of SMAs stem from adaptive dissipation associated with the hysteretic loop and huge changes in mechanical properties caused by the martensitic phase transformation. These exceptional properties have attracted attention of many researchers in various engineering fields from biomedicine to aerospace. One of the possible responses that may happen in SMA structures is the chaotic response, which can lead to a massive change in the system behavior. Moreover, such a system is highly sensitive to initial conditions. Therefore, its analysis is essential for a proper design of SMA structures. The present article discusses nonlinear dynamics and chaotic behavior in a one-degree-of-freedom (1DoF) oscillator connected to SMA at constant working temperature and pseudo elastic region. Equation of motion is formulated, using the Brinson constitutive model. Combination of structural equations of SMA and dynamical and kinematic relations, as well as forth-order Runge-Kutta scheme are employed to solve the equation governing the oscillator motion. Free and forced vibrations under the influence of harmonic stimulation force and in a wide range of excitation frequencies are presented in the form of various numerical examples. Different tools for detecting chaos, including, phase plane, time response, frequency response, Lyapunov exponent, and Poincare map are used to determine the type of motion. Numerical simulations demonstrate a wide range of periodic, quasi periodic, and chaotic responses for certain values of excitation frequencies, which is a reason for the proper understanding of the behavior of these systems.

**Keywords** Shape Memory Alloy; 1DoF Oscillator; Nonlinear Dynamics; Chaotic Behavior

### CITATION LINKS

[1] Nonlinear dynamics and chaos in shape memory alloy systems [2] Chaos and hyperchaos in shape memory systems [3] Modeling the dynamic behavior of shape memory alloys [4] Nonlinear dynamics and chaos in coupled shape memory oscillators [5] Bifurcations and crises in a shape memory oscillator [6] Nonlinear dynamics and chaos in a shape memory alloy pseudoelastic oscillator [7] Tensile-compressive asymmetry influence on shape memory alloy system dynamics [8] The influence of model parameters and of the thermomechanical coupling on the behavior of shape memory devices [9] Identification of regular and chaotic isothermal trajectories of a shape memory oscillator using the 0-1 test [10] Analysis of chaotic non-isothermal solutions of thermomechanical shape memory oscillators [11] Dynamical jumps in a shape memory alloy oscillator [12] Non-linear dynamics of a thermomechanical pseudoelastic oscillator excited by non-ideal energy sources [13] Dynamical behavior of a pseudoelastic vibration absorber using shape memory alloys [14] A comparative analysis of some one-dimensional shape memory alloy constitutive models based on experimental tests [15] One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: Thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable [16] Implementation strategy for the dual transformation region in the Brinson SMA constitutive model [17] Experimental study of a bio-inspired robotic morphing wing mechanism actuated by shape memory alloy wires [18] Experimental investigation of vibration reduction using shape memory alloys [19] Analysis of the passengers effect on chaotic vibrations of a nonlinear full vehicle model [20] Applied nonlinear dynamics: Analytical, computational and experimental methods [21] Thermomechanical modelling, nonlinear dynamics and chaos in shape memory oscillators [22] Nonlinear ordinary differential equations [23] Lyapunov exponents estimation for hysteretic systems [24] Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering

## بررسی رفتار دینامیک غیرخطی و آشوبناک نوسانگر متصل به آلیاژ حافظه‌دار

شقایق یحیایی MSc

گروه طراحی کاربردی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران

محمد رضا ذاکرزاده PhD\*

گروه طراحی کاربردی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران

آرش بهرامی PhD

گروه طراحی کاربردی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران

### چکیده

پاسخ دینامیکی سیستم‌های متصل به آلیاژهای حافظه‌دار در اغلب موارد رفتار پیچیده‌ای است که ناشی از خصوصیات ذاتی غیرخطی آنها است. ویژگی‌های اساسی آلیاژهای حافظه‌دار مرتبط با رفتار مستهلک‌شونده و تغییر گسترده در خواص مکانیکی آنها است که به ترتیب ناشی از حلقه‌های هیستریزس و استحاله فاز مارتنزیتی است. این خصوصیات منحصربه‌فرد موجب جلب توجه محققان بسیاری در زمینه‌های مختلف مهندسی از پزشکی تا هوافضا شده است. یکی از پاسخ‌های در یافتنی از سیستم‌های متصل به آلیاژهای حافظه‌دار، رفتار آشوبناک است که منجر به تغییرات گسترده‌ای در رفتار سیستم می‌شود. علاوه بر آن، این گونه سیستم‌ها دارای حساسیت بالایی نسبت به شرایط اولیه هستند، لذا تحلیل آنها با هدف طراحی مناسب بسیار حایز اهمیت است. این مقاله به بررسی رفتار دینامیک غیرخطی و آشوبناک نوسانگر یک درجه آزادی، متصل به آلیاژ حافظه‌دار، در دمای کاری ثابت و حوزه سوپرلاستیک می‌پردازد. نیروی اعمالی توسط آلیاژ حافظه‌دار به وسیله مدل ساختاری برینسون استخراج می‌شود. از ترکیب معادلات ساختاری آلیاژ حافظه‌دار و روابط دینامیکی و سینماتیکی حاکم بر سامانه معادله حرکت به دست آمده و با استفاده از روش رانگ- کوتای مرتبه چهار حل می‌شود. ارتعاشات آزاد و اجباری سامانه تحت تاثیر نیروی تحریک هارمونیک و در گستره وسیعی از فرکانس‌های تحریک بررسی و در قالب مثال‌های عددی متنوع ارائه می‌شوند. ابزارهای شناخت آشوب همچون نمودارهای صفحه فاز، پاسخ زمانی، پاسخ فرکانسی، نمای لیاپانوف و نگاشت پوانکاره برای تعیین نوع حرکت به کار گرفته می‌شوند. شبیه‌سازی‌های عددی انواع گسترده‌ای از پاسخ‌های تناوبی، شبه‌تناوبی و آشوبناک را به‌ازای مقادیر مشخصی از فرکانس‌های تحریک نشان می‌دهند که دلیلی بر اهمیت درک مناسب رفتار این گونه سیستم‌ها است.

**کلیدواژه‌ها:** آلیاژ حافظه‌دار، نوسانگر یک درجه آزادی، دینامیک غیرخطی، رفتار آشوبناک

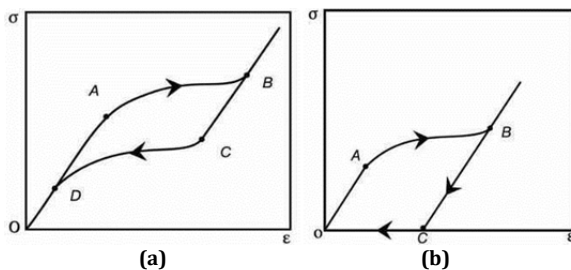
تاریخ دریافت: ۹۷/۰۴/۳۰

تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۵/۲۷

\* نویسنده مسئول: zakerzadeh@ut.ac.ir

مربوط به تغییر فاز، بین دو فاز آستنیت (پایدار در دمای بالا) و مارتنزیت (پایدار در دمای پایین) آنها است. در دماهای بالا و فاز آستنیت، ماده دارای ساختار کاملاً متقارن است و این ساختار متقارن با کاهش دما و تبدیل شدن به فاز مارتنزیت تغییر می‌کند و می‌تواند به دو صورت مارتنزیت دوقلوبی و غیردوقلوبی وجود داشته باشد. اثرات کلیدی که به استحاله فاز مربوط می‌شود، اثر سوپرلاستیک و حافظه‌داری (SME) است. در صورت اعمال بار خالص به آلیاژ حافظه‌دار، تغییر فاز بدون تغییر دما صورت می‌گیرد. نتیجه اعمال چنین نیرویی، مارتنزیت کاملاً غیردوقلوبی خواهد بود و در این حین کرنش‌های بسیار زیادی قابل مشاهده است. اگر دمای ماده بالاتر از دمای پایان آستنیت باشد، در صورت باربرداری، بازیابی شکل به‌طور کامل اتفاق می‌افتد، به‌گونه‌ای که رفتار ماده شبیه مواد الاستیک خواهد بود. فرآیند فوق توصیف‌گر رفتار سوپرلاستیک است (شکل ۱- a) [1]. اگر به ماده در حالتی که در فاز مارتنزیت دوقلوبی (در دمای پایین) قرار دارد نیرویی اعمال شود، به مارتنزیت غیردوقلوبی تبدیل خواهد شد. در صورت باربرداری، ماده به همان شکل باقی خواهد ماند و در صورت گرم کردن ماده به دمای بالاتر از پایان آستنیت، تغییر فاز از مارتنزیت به آستنیت صورت می‌پذیرد و منجر به بازیابی کامل شکل ماده می‌شود. این فرآیند باعث ظهور پدیده اثر حافظه‌داری می‌شود که در شکل ۱- b آورده شده است.

اصلی‌ترین ایراد آلیاژهای حافظه‌دار، نرخ کند تغییر شکل آنهاست. از آنجایی که پدیده‌های مربوط به تغییر فاز مارتنزیتی ذاتاً غیرخطی هستند، پاسخ دینامیک سیستم‌های آلیاژ حافظه‌دار به‌گونه‌ای است که امکان مطالعه آنها در چهارچوب تحلیل‌های خطی وجود ندارد و باید در مباحث دینامیک غیرخطی به آنها پرداخته شود [2].



شکل ۱) رفتار ماکروسکوپی آلیاژ حافظه‌دار در قالب نمودارهای تنش- کرنش، (a) اثر سوپرلاستیک (b) اثر حافظه‌داری

### ۱-۱- مروری بر مقالات پیشین

رفتار دینامیک سامانه‌های متشکل از آلیاژهای حافظه‌دار بسیار پیچیده است و می‌تواند رفتارهای تناوبی، شبه‌تناوبی، آشوبناک یا فوق‌آشوبناک از خود نشان دهد. مطالعه در این زمینه در تحقیقات افرادی چون ساوی و پاچیکو [2] مشهود است که در سال ۲۰۰۲ به بررسی رفتار آشوبناک سیستم‌های آلیاژ حافظه‌دار پرداختند. در این راستا نوسانات دو سیستم یک درجه آزادی و دو درجه آزادی در نظر گرفته شد. نتایج حاصل، قابلیت انتقال حرکت مربوط به جرم‌های متصل شده به طرفین فنر حافظه‌دار، از وضعیت آشوبناک به فوق‌آشوبناک را با تغییر دما نشان دادند. سیلک [3] در سال ۲۰۰۲ به بررسی ارتعاشات نوسانگر یک درجه آزادی شامل جرم صلب متصل به یک لوله جدرانازک از جنس آلیاژ حافظه‌دار تحت بارگذاری پیچشی پرداخت. نتایج ارتعاشات آزاد نشان می‌دهد که قدرت اتلاف انرژی در حالت حافظه‌داری بیشتر است. همچنین استفاده از مدل‌های دمای ثابت برای شرایط سوپرلاستیک مناسب‌تر است، در

### ۱- مقدمه

مواد هوشمند موادی هستند که قابلیت تشخیص تحریک خارجی و تغییرات محیطی را دارند و عکس‌العمل اصلاحی مناسب را به‌گونه‌ای در خلال اعمال تنش، حرارت، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی یا تغییر در خواص مکانیکی، الکتریکی، گرمایی، مغناطیسی و اپتیکی انجام می‌دهند که عیوب سیستم تقلیل یابد و در منطقه‌ای قابل قبول قرار گیرد. این پاسخ ممکن است به‌صورت تغییر در تنش‌ها یا کرنش‌های محلی باشد و در نهایت منجر به کاهش عیوب سیستم و بهبود عملکرد آن شود [1]. مواد پیزوالکتریک، الکترواستریکتیو، مگنتواستریکتیو و آلیاژهای حافظه‌دار از جمله مواد هوشمند هستند. در این مقاله توجه خود را به آلیاژهای حافظه‌دار معطوف کرده‌ایم که دارای توانایی بازیابی شکل اولیه خود پس از بارگذاری‌های ترمومکانیک هستند. در مواقع نیاز به نیرو و جابه‌جایی‌های بزرگ از آلیاژهای حافظه‌دار در فرکانس پایین استفاده می‌شود [1].

آلیاژهای حافظه‌دار دارای قابلیت بازیابی کرنش‌های دایمی مشهود هستند، در صورتی که تا دمای معینی گرم شوند. این ویژگی،

مقایسه‌ای بین رفتار دینامیک جاذب متشکل از آلیاژ حافظه‌دار و المان الاستیک خطی انجام دادند. تغییر فاز ناشی از تنش و حلقه‌های هیستریزس اصلی‌ترین عوامل تاثیرگذار روی عملکرد جاذب هستند، به همین دلیل جاذب‌های آلیاژ حافظه‌دار دارای عملکرد بهتری هستند. مزیت اصلی جاذب‌های آلیاژ حافظه‌دار، رفتار سازگاری آنها است، چرا که امکان تغییر فرکانس تنظیم با تغییر در دمای کاری وجود دارد. در اکثر پژوهش‌های یادشده تاکید محقق بر مدل ساختاری آلیاژ حافظه‌دار بوده است. طبق پژوهشی که صیادی و همکاران<sup>[14]</sup> در سال ۲۰۱۲ انجام دادند، مشخص شد که مدل ساختاری برینسون تطابق خوبی با نتایج تجربی دارد. به همین دلیل در پژوهش حاضر بر خلاف پژوهش‌های قبل، از مدل برینسون برای توصیف رفتار آلیاژ حافظه‌دار استفاده می‌شود. از آنجایی که این مدل نسبت به مدل‌های دیگر استفاده شده برای بیان رفتار ترمومکانیک آلیاژ حافظه‌دار دقت بالاتری دارد، انتظار می‌رود نتایج به دست آمده از نتایج مقالات قبلی در این زمینه واقعی‌تر باشد. همچنین به مطالعه رفتار دینامیک غیرخطی و آشوبناک نوسانگر پرداخته می‌شود که بسیار کمتر از سایر رفتارهای دینامیک از جمله بررسی فرکانس و شکل مود مورد توجه قرار گرفته است. تحلیل غیرخطی نقش بسزایی در طراحی سامانه‌های دینامیک ساخته شده از آلیاژهای حافظه‌دار و دمای کاری آنها دارد. از آنجایی که هدف این پژوهش پرداختن به جنبه‌هایی است که دارای کاربرد عملی هستند، بنابراین نوسانگر جرم و فنر به‌عنوان سازه مورد بررسی انتخاب شده است. نوسانگرها در کاربردهای مربوط به جاذب ارتعاشات، ضربه‌گیر، تکیه‌گاه ناپیوسته و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرند.

## ۲- مدل‌های فیزیکی آلیاژ حافظه‌دار

در مدل‌های اساسی سعی شده است تا رفتار آلیاژ حافظه‌دار به صورت تابعی از متغیرهای تنش، کرنش، دما و نرخ زمانی آنها بیان شود. چنانچه از مدل یک‌بُعدی برای سیم آلیاژ حافظه‌دار استفاده شود و دما در طول سیم ثابت فرض شود، پارامترهای سیم از تست‌های تجربی مکانیکی قابل استخراج خواهند بود. همان‌طور که پیش از این نیز ذکر شد، در این پژوهش به دلیل تطابق خوب مدل ساختاری برینسون با نتایج تجربی از مدل ساختاری برینسون استفاده شده است که در ادامه به‌طور مختصر بیان خواهد شد.

### ۲-۱- مدل برینسون

دلیل ضعف عمده مدل‌های پیش از برینسون آن است که اثر حافظه‌داری در دماهای پایین که خود به دو قسمت مارتنزیت حاصل از دما و تنش مجزا می‌شود، توسط آنها قابل توضیح نیست. اما در مدل برینسون با جدا کردن حالت‌های مختلف فاز مارتنزیت به دو قلوبی یعنی مارتنزیت ایجاد شده در اثر دما و غیردوقلوبی یعنی مارتنزیت ایجاد شده در اثر تنش، مشکل مدل‌های پیشین برطرف می‌شود. بنابراین نسبت حجمی مارتنزیت برابر با مجموع نسبت حجمی مارتنزیت حاصل از تنش ( $\xi_s$ ) و نسبت حجمی مارتنزیت حاصل از دما ( $\xi_T$ ) است. معادلات اساسی برینسون در سال ۱۹۹۳ ارائه شد<sup>[15]</sup>، اما از آنجایی که این روابط در بارگذاری‌های خاص ترمومکانیک نامعتبر بوده است و به نسبت حجمی غیرقابل قبول ( $\xi > 1$ ) برای مارتنزیت می‌رسد، فرم اصلاح شده آن توسط چانگ و همکاران<sup>[16]</sup> در سال ۲۰۰۷ ارائه شد. به دلیل آن که در مدل‌سازی آلیاژ حافظه‌دار توسط معادلات برینسون، مدل دینامیک آلیاژ حافظه‌دار مستقیماً ارائه نمی‌شود، بهتر است از مشتق روابط مطابق آن چه در کار بصائری و

حالی که در مورد شرایط حافظه‌داری باعث دست‌کم‌گرفتن مقدار اتلاف انرژی و نیروهای به‌وجود آمده در سامانه می‌شود. ماچادو و همکاران<sup>[4]</sup> در سال ۲۰۰۳ رفتار دینامیک غیرخطی سامانه جرم و فنر با آلیاژهای حافظه‌دار را بررسی کردند و به پاسخ‌های تناوبی، شبه‌تناوبی، آشوبناک و فوق‌آشوبناک با تغییر پارامترهای کنترل‌کننده دست یافتند. ماچادو و همکاران<sup>[5]</sup> در سال ۲۰۰۴ به بررسی پدیده دوشاخگی در نوسانگر یک درجه آزادی آلیاژ حافظه‌دار پرداختند. دوشاخگی به صورت ایجاد یک تغییر کیفی در رفتار سامانه با تغییر یکی از پارامترهای تاثیرگذار بر سیستم تعریف می‌شود. پارامترهای دوشاخگی در این مقاله، دامنه تحریک و دما انتخاب شدند. ماچادو و همکاران<sup>[6]</sup> نیز در سال ۲۰۰۷ به بررسی رفتار دینامیک نوسانگر یک درجه آزادی پرداختند که نیروی بازگرداننده در آن به وسیله المان آلیاژ حافظه‌دار تامین می‌شود. نتایج عددی، پیچیدگی رفتار سامانه و امکان رخداد آشوب را نشان می‌دهد. ابزارهای شناخت آشوب برای تعیین رفتار سیستم و نمای لیاپانوف برای اطمینان از نتایج مرتبط با آشوب به کار گرفته شد.

سای و همکاران<sup>[7]</sup> در سال ۲۰۰۸ به بررسی سامانه جرم و فنر متشکل از آلیاژهای حافظه‌دار با در نظر گرفتن تاثیر عدم تقارن در کشش و فشار در بارگذاری ترمومکانیک پرداختند. برناردینی و رگا<sup>[8]</sup> در سال ۲۰۱۰ به بررسی تاثیر پارامترهای موثر روی رفتار دمای متغیر نوسانگر آلیاژ حافظه‌دار پرداختند. آنها نشان دادند رفتار نوسانگر به ۷ پارامتر شامل پارامترهای مکانیکی، دمایی، ترمومکانیک، دامنه و فرکانس تحریک و شرایط اولیه بستگی دارد. برناردینی و همکاران<sup>[9]</sup> در همان سال به بررسی آماری تست ۱-۰ برای شناسایی مسیرهای متناوب و نامتناوب در شرایط همدمای برای تعیین نوع حرکت پرداختند. نتایج نشان می‌دهد این تست دارای توانایی تمایز حرکت تناوبی از آشوبناک است. لیتاک و همکاران<sup>[10]</sup> در سال ۲۰۱۳ از تست ۱-۰ برای مسیرهای غیرهمدمای استفاده و نتایج حاصل را با استفاده از نمودارهای پاسخ فرکانسی (FFT) صحت‌سنجی کردند. پاسخ‌های نامنظم با سطوح متفاوتی از آشوبناکی مورد بررسی قرار گرفتند و تفاوت کیفی آنها از طریق تفاوتی که در مقدار پارامتر کنترلی K وجود داشت، مشخص شد. برای پاسخ‌های تناوبی مقدار K به صفر میل کرده، در حالی که در مورد پاسخ‌های آشوبناک دارای مقداری غیرصفر است. اولیویرو و همکاران<sup>[11]</sup> در سال ۲۰۱۴ به بررسی پدیده پرش در ارتعاشات اجباری نوسانگر یک درجه آزادی آلیاژ حافظه‌دار پرداختند. این پدیده منجر به تغییرات ناخواسته در رفتار سیستم می‌شود، لذا تحلیل پرش به منظور طراحی مناسب این نوع از سیستم‌ها بسیار با اهمیت است. پیچیلیرو و همکاران<sup>[12]</sup> در سال ۲۰۱۵ به بحث و بررسی درباره رفتار دینامیک نوسانگر غیرایده‌آل آلیاژ حافظه‌دار پرداختند. تحریک غیرایده‌آل از طریق یک موتور الکتریکی جریان مستقیم (DC) با توان محدود و جرم چرخشی نامتقارن تامین می‌شود. در این تحقیق رفتار سیستم با در نظر گرفتن ولتاژ به‌عنوان پارامتر کنترل‌کننده بررسی شد. خروجی کلی مقاله تعامل غیرخطی بین نوسانگر و موتور جریان مستقیم بود که رخداد و ویژگی‌های رفتار منظم و نامنظم را تحت تاثیر قرار می‌دهد. همچنین نشان داده شد که تاثیر خصوصیات حلقه هیستریزس از قبیل اندازه حلقه و شیب قسمت الاستیک روی نوسانگر غیرایده‌آل، متفاوت از تاثیر همین خصوصیات روی نوسانگر ایده‌آل بوده که ممکن است به دلیل تبادل انرژی بین بخش‌های مختلف سیستم باشد. اولیویرو و همکاران<sup>[13]</sup> در سال ۲۰۱۷ به بررسی اثر استفاده از المان آلیاژ حافظه‌دار در جاذب‌های ارتعاشات پرداختند. همچنین آنها

همکاران [17] آمده است، استفاده شود. روابط مذکور در معادلات ۱ تا ۱۳ آورده شده‌اند. مشتق معادله اساسی برینسون به شکل رابطه ۱ است.

$$\dot{\xi} = -\frac{\xi_0}{2} \sin(a_A (T - A_s - \frac{\sigma}{C_A})) a_A (\dot{T} - \frac{\dot{\sigma}}{C_A}) \quad (10)$$

$$\dot{\xi}_s = \frac{\xi_{s0}}{\xi_0} \dot{\xi} \quad (11)$$

در روابط بیان شده،  $a_A$  و  $a_M$  ثوابتی هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

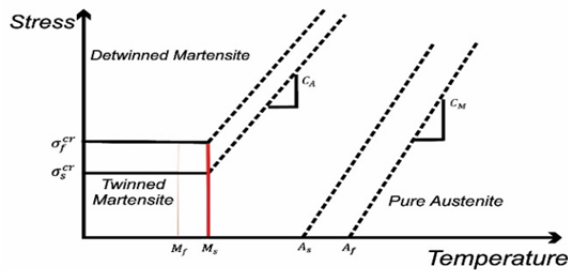
$$a_A = \frac{\pi}{A_f - A_s} \quad (12)$$

$$a_M = \frac{\pi}{M_s - M_f} \quad (13)$$

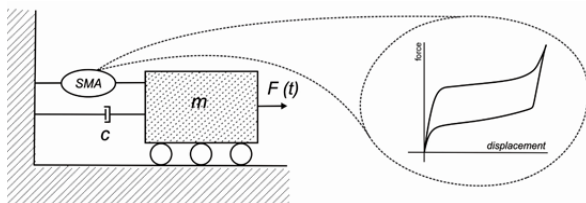
در این مرحله به تحلیل دینامیکی نوسانگر یک درجه آزادی که نیروی بازگرداننده ( $F_R$ ) توسط المان آلیاژ حافظه‌دار تامین شود، می‌پردازیم. این سامانه نمونه اولیه بسیاری از سامانه‌های مهندسی بوده و معادله حرکت مربوط به نوسانگر به صورت زیر است:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + F_R = F_0 \sin(\omega t) \quad (14)$$

که در آن  $m$  جرم نوسانگر،  $c$  ضریب استهلاک و  $F_R$  نیروی بازگرداننده آلیاژ حافظه‌دار است که از رابطه  $F_R = \sigma A$  به دست می‌آید.  $\sigma$  از روابط مربوط به آلیاژ حافظه‌دار که در بخش قبل به آن پرداخته شد، به دست آمده و  $A$  سطح مقطع میله حافظه‌دار است (شکل ۳). لازم به ذکر است طبق مطالعه آگوار و همکاران [18]، توزیع تنش و تغییر فاز در سطح مقطع میله یکنواخت بوده و همچنین رفتار آلیاژ حافظه‌دار تحت کشش و فشار متقارن فرض شده است.



شکل ۲) نمودار تنش-دمای بحرانی استفاده‌شده در مدل برینسون



شکل ۳) نوسانگر یک درجه آزادی آلیاژ حافظه‌دار در رژیم سوپرلاستیک

### ۳- حل عددی مساله

شبیه‌سازی‌ها برای آلیاژ حافظه‌دار نایتینول با خصوصیات موجود در جدول ۱ [14] در دمای ثابت  $75^\circ\text{C}$  انجام شده است. به منظور به‌دست آوردن خصوصیات ترمومکانیک آلیاژ نایتینول از اندازه‌گیری‌های تجربی دقیق انجام‌گرفته توسط صیادی و همکاران [14] با استفاده از تست گرماسنجی روبشی تفاضلی (DSC) و روش‌های تست بارگذاری بهره گرفته شده است. لازم به ذکر است در این دما آلیاژ حافظه‌دار در فاز آستنیت قرار دارد و رفتار سوپرلاستیک از خود نشان می‌دهد. حل عددی معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر سیستم با استفاده از روش تطبیقی

در این معادله متغیرهای حالت تنش ( $\sigma$ )، کرنش ( $\epsilon$ ) و دما ( $T$ ) به صورت تابعی از نسبت حجمی مارتنزیت ( $\xi$ ) بیان شده‌اند.  $\theta$  ضریب انبساط حرارتی،  $\epsilon_L$  ماکزیمم کرنش قابل بازیابی و  $E$  مدول الاستیسیته آلیاژ حافظه‌دار است که به صورت تابع خطی از نسبت حجمی مارتنزیت فرض می‌شود.

$$E(\xi) = E_A + \xi(E_M - E_A) \quad (2)$$

$E_A$  و  $E_M$  به ترتیب مدول الاستیسیته فاز مارتنزیت و فاز آستنیت هستند. همچنین ( $\Omega$ ) ثابت تبدیل فاز بوده است و به صورت رابطه ۳ تعریف می‌شود:

$$\Omega(\xi) = -\epsilon_L E(\xi) \quad (3)$$

دیگرام فاز آلیاژ حافظه‌دار استفاده‌شده در مدل برینسون در شکل ۲ نشان داده شده است [1]. این دیگرام بیان‌کننده شرایط تعادل بین فازهای مختلف است.  $M_f$  و  $M_s$  به ترتیب دمای شروع و پایان فاز مارتنزیت و  $A_f$  و  $A_s$  دمای ابتدا و انتهای فاز آستنیت هستند.  $C_M$  و  $C_A$  ضرایب تاثیر تنش در فازهای مارتنزیت و آستنیت و همچنین  $\sigma_s^{cr}$  و  $\sigma_f^{cr}$  مقادیر تنش بحرانی برای آغاز و پایان فاز مارتنزیت غیردوقلویی هستند. با توجه به پروفایل دما-تنش نشان‌داده‌شده در شکل ۲ و براساس مدل برینسون، نسبت حجمی مارتنزیت به صورت تابعی از دما و تنش به شکل زیر خواهد بود:

تبدیل به مارتنزیت غیردوقلویی  
اگر  $\sigma_s^{cr} + C_M(T - M_s) < \sigma < \sigma_f^{cr} + C_M(T - M_s)$  و  $T > M_s$  باشد:

$$\xi_s = -\frac{1 - \xi_{s0}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{\sigma_s^{cr} - \sigma_f^{cr}} (\sigma - \sigma_f^{cr} - C_M(T - M_s))\right) \frac{\pi}{\sigma_s^{cr} - \sigma_f^{cr}} (\dot{\sigma} - C_M \dot{T}) \quad (4)$$

$$\xi_T = -\frac{\xi_{T0}}{1 - \xi_{s0}} \xi_s \quad (5)$$

اگر  $T < M_s$  و  $\sigma_s^{cr} < \sigma < \sigma_f^{cr}$  باشد:

$$\xi_s = -\frac{1 - \xi_{s0}}{2} \sin\left(\frac{\pi(\sigma - \sigma_f^{cr})}{\sigma_s^{cr} - \sigma_f^{cr}}\right) \frac{\pi}{\sigma_s^{cr} - \sigma_f^{cr}} \dot{\sigma} \quad (6)$$

$$\xi_T = -\frac{\xi_s}{1 - \xi_{s0}} \Delta_{T\epsilon} + \frac{1 - \xi_s}{1 - \xi_{s0}} \dot{\Delta}_{T\epsilon} \quad (7)$$

در صورتی که  $T < T_0$  و  $M_f < T < M_s$  باشد:

$$\Delta_{T\epsilon} = \frac{1 - \xi_{s0} - \xi_{T0}}{2} \sin(a_M(T - M_f)) + a_M \dot{T} \quad (8)$$

در غیر این صورت:

$$\Delta_{T\epsilon} = 0 \quad (9)$$

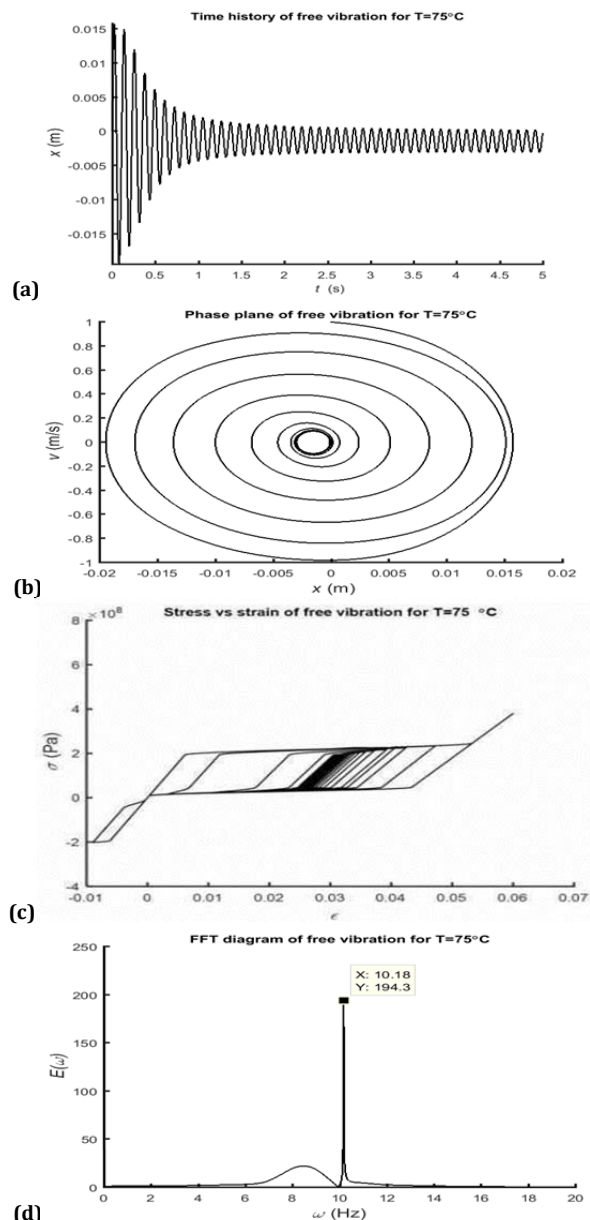
تبدیل به آستنیت اگر  $C_A(T - A_f) < \sigma < C_A(T - A_s)$  و  $T > A_s$  باشد:



نمودار محتوای فرکانسی تصویری از مقدار انرژی سیستم یا  $E(\omega)$  بر حسب فرکانس‌های مختلف است [20]. رفتار تناوبی مربوط به ارتعاشات آزاد سامانه در تحقیق ماجدو و همکاران [6] نیز مشهود است. در این مقاله بررسی ارتعاشات آزاد بدون حضور میراگر خارجی انجام شده است و نهایتاً نوسانات پس از کاهش دامنه به مدار متناوب میل می‌کنند که نتیجه توقف استحاله فاز است (نمودار ۳) [6].

جدول ۲) مقادیر عددی مفروض برای تحلیل ارتعاشات آزاد نوسانگر آلیاژ حافظه‌دار

مقدار	نماد	پارامتر
۱	$m$	جرم (kg)
۰	$c$	ضریب استهلاک ویسکوز
۰/۰۳	$\varepsilon_0$	کرنش اولیه
۱	$v_0$	سرعت اولیه (m/s)
۰	$x_0$	مکان اولیه (m)
۲۰	$T_0$	دمای اولیه ( $^{\circ}\text{C}$ )

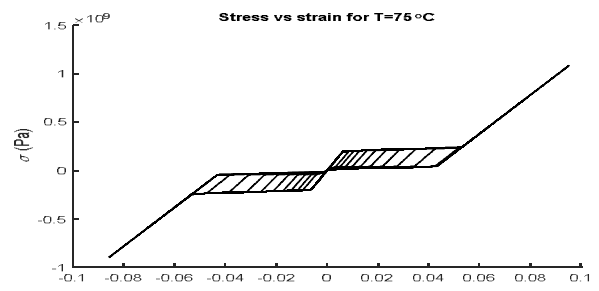


نمودار ۲) پاسخ ارتعاشات آزاد نوسانگر آلیاژ حافظه‌دار، (a) تاریخچه زمانی (صفحه فاز (c) تنش بر حسب کرنش (d) نمودار محتوای فرکانسی

رانگ- کوتا با گام زمانی متغیر در نرم‌افزار MATLAB انجام گرفته است و از خروجی آن برای تحلیل رفتارهای دینامیک غیرخطی استفاده می‌شود. ابتدا رفتار نایتینول به‌ازای این دما برای به‌دست‌آوردن نمودار تنش- کرنش و سایر شرایط اولیه مورد نیاز از قبیل حجم مارتنزیت ناشی از تنش و حجم مارتنزیت ناشی از دما مدل‌سازی شده است. همان‌طور که در نمودار ۱ مشاهده می‌شود، ماده، رفتار سوپراالاستیک داشته است و تمام کرنش‌های بازایی می‌شود.

جدول ۱) خصوصیات نایتینول به‌کاررفته به‌عنوان آلیاژ حافظه‌دار

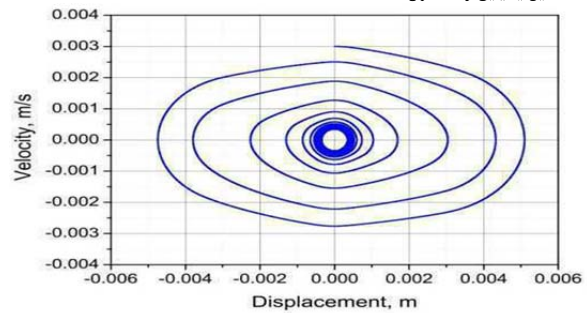
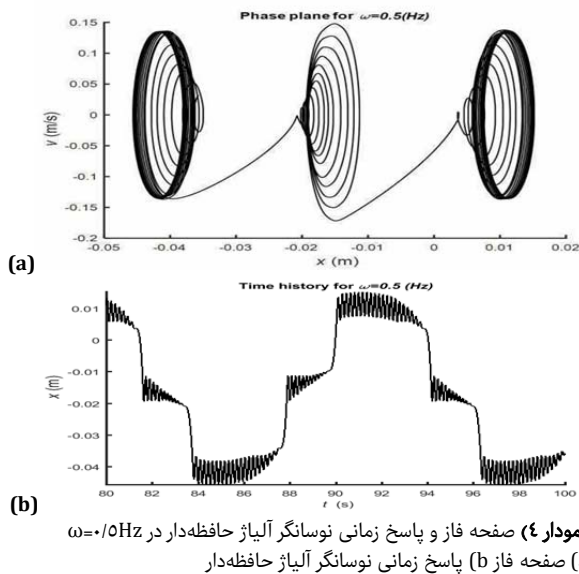
مقدار	نماد	خواص
۴۳/۹	$M_f$	دمای پایان فاز مارتنزیت ( $^{\circ}\text{C}$ )
۴۸/۴	$M_s$	دمای شروع شکل‌گیری فاز مارتنزیت ( $^{\circ}\text{C}$ )
۶۸	$A_s$	دمای شروع شکل‌گیری فاز آستنیت ( $^{\circ}\text{C}$ )
۷۳/۷۵	$A_f$	دمای پایان فاز آستنیت ( $^{\circ}\text{C}$ )
۶/۷۳	$C_A$	ضریب تاثیر تنش در فاز آستنیت (MPa)
۶/۳۲	$C_M$	ضریب تاثیر تنش در فاز مارتنزیت (MPa)
۳۱/۵	$E_A$	مدول الاستیسیته فاز آستنیت (GPa)
۲۰	$E_M$	مدول الاستیسیته فاز مارتنزیت (GPa)
%۴/۱	$\varepsilon_L$	ماکزیمم کرنش قابل بازایی
۲۵	$\sigma_s^{Cr}$	تنش بحرانی شروع فاز مارتنزیت غیردوقلویی (MPa)
۸۷	$\sigma_f^{Cr}$	تنش بحرانی پایان فاز مارتنزیت غیردوقلویی (MPa)



نمودار ۱) اثر سوپراالاستیک آلیاژ حافظه‌دار با احتساب تقارن در کشش و فشار

### ۱-۳- ارتعاشات آزاد

حالت ارتعاشات آزاد سامانه به‌ازای مقادیر ذکر شده در جدول ۲ بررسی شده است. به‌منظور نمایش واضح‌تر رفتار مستهلک‌شونده سامانه که ناشی از حلقه‌های هیستریزس بوده، ضریب استهلاک صفر در نظر گرفته شده است. همان‌طور که در نمودار ۲- a و b مشاهده می‌شود، پاسخ سامانه پس از چند نوسان میرا می‌شود و به مدار متناوب می‌رسد. این حرکت میرا شونده به دلیل وجود حلقه‌های هیستریزس داخلی در نمودار تنش- کرنش است. با گذشت زمان، مساحت داخل حلقه که نشان‌دهنده انرژی تلف‌شده است، کاهش می‌یابد تا نهایتاً به یک خط با شیب مدول یانگ ماده در فاز آستنیت می‌رسد و تغییر فاز آستنیت به مارتنزیت و بالعکس متوقف می‌شود. از آن به بعد آلیاژ حافظه‌دار شبیه به یک فنر خطی عمل می‌کند (نمودار ۲- c). به همین دلیل است که در نمودار پاسخ زمانی مربوطه، دامنه ارتعاشات رفته‌رفته کاهش می‌یابد تا به حرکت تناوبی با دامنه ثابت می‌رسد که نماینده مدار متناوب است. نمودار ۲- d پاسخ فرکانسی نوسانگر آلیاژ حافظه‌دار را نشان می‌دهد. نمودارهای پاسخ فرکانسی در واقع پاسخ سیستم در حوزه زمان را به حوزه فرکانس انتقال می‌دهند، بدین ترتیب فرکانس‌های موجود در پاسخ به‌صورت قله‌هایی در نمودار قابل شناسایی هستند [19]. همان‌طور که مشاهده می‌شود فرکانس طبیعی سامانه به‌ازای شرایط اولیه ذکر شده در جدول ۲ برابر با ۱۰/۱۸ هرتز بوده و



**نمودار ۳** پاسخ ارتعاشات آزاد نوسانگر آلیاژ حافظه‌دار در پژوهش انجام شده توسط ماچادو و همکاران

**۲-۳- ارتعاشات اجباری**

رفتار دینامیک سامانه به چند پارامتر کلیدی از جمله فرکانس تحریک خارجی ( $\omega$ ) وابسته است [21]. در این تحقیق به بررسی اثر فرکانس تحریک روی رفتار سامانه وابسته به زمان پرداخته می‌شود. در این گونه سیستم‌ها فاکتور زمان به‌طور صریح در معادلات حرکت ظاهر می‌شود و با اضافه کردن یک متغیر حالت جدید به سیستم می‌توان آن را به سیستم مستقل از زمان تبدیل کرد. بنابراین معادلات فضای حالت سامانه به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= 1/m (F_0 \sin(z) - F_R - cv) \\ \dot{z} &= \omega \end{aligned} \quad (15)$$

شبهه‌سازی‌های متعددی برای بررسی پاسخ ارتعاشات اجباری سامانه به‌ازای پارامترهای موجود در جدول ۳ و با در نظر گرفتن فرکانس تحریک به‌عنوان پارامتر کنترل‌کننده در بازه  $0.5/10$  هرترتز انجام شده است. برای تحلیل رفتار دینامیک سیستم‌ها و شناسایی پاسخ آشوبناک از ابزارهایی مانند نمودارهای صفحه فاز، پاسخ فرکانسی، پاسخ زمانی، نگاشت پوانکاره و ماکزیمم نمای لیاپانوف استفاده شده است. لازم به ذکر است در تحلیل رفتارهای آشوبناک برای اطمینان از خروجی حل معادلات، تعداد زیادی از داده‌های اولیه حاصل از انتگرال‌گیری عددی در یک بازه زمانی که در حالت گذرا هستند کنار گذاشته و پس از اطمینان از رسیدن به حالت پایا به پردازش نتایج پرداخته می‌شود.

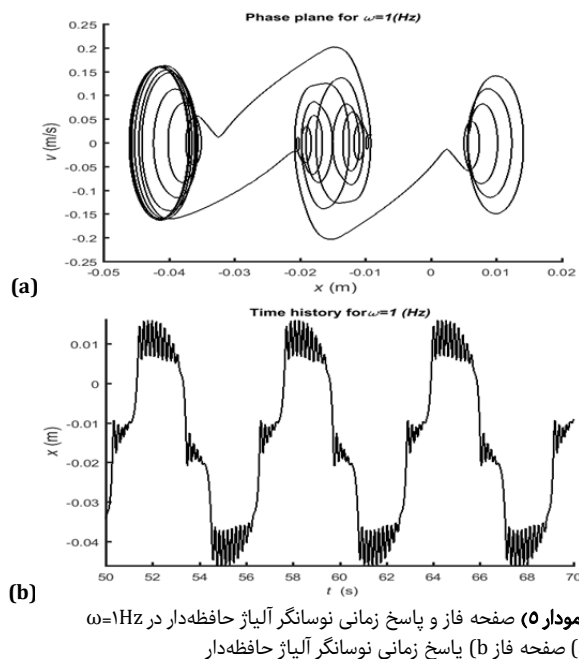
**جدول ۳** مقادیر عددی مفروض برای تحلیل ارتعاشات اجباری نوسانگر آلیاژ حافظه‌دار

پارامتر	نماد	مقدار
جرم (kg)	$m$	۱
ضریب استهلاک ویسکوز	$c$	۰/۰۱
گرنش اولیه	$\epsilon_0$	۰/۰۳
سرعت اولیه (m/s)	$v_0$	۱
مکان اولیه (m)	$x_0$	۰
دمای اولیه ( $^{\circ}\text{C}$ )	$T_0$	۲۰
دامنه تحریک (N)	$F_0$	۸

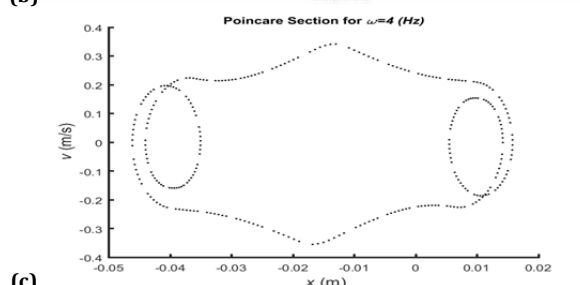
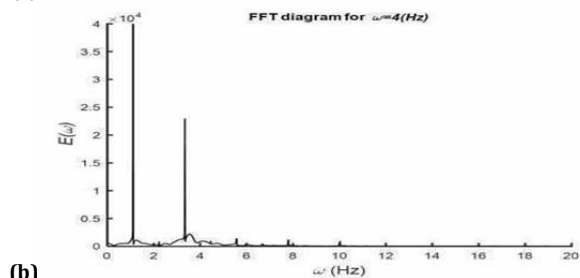
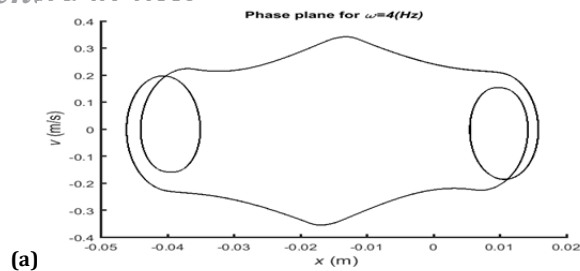
**۴- نتایج عددی تحلیل ارتعاشات اجباری**

نمودار ۴، صفحه فاز و پاسخ زمانی سامانه به‌ازای فرکانس تحریک  $\omega=0.5\text{Hz}$  را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود سیستم در این حالت دارای سه نقطه تعادل مارپیچی پایدار بوده که ناشی از جهت‌گیری متفاوت مرزدهانه‌ها در ساختار کریستالی ماده در فاز مارتنزیت است. رفتار نزولی سامانه، مربوط به هر یک از نقاط تعادل در نمودار پاسخ زمانی قابل مشاهده است.

نمودار ۵- a دوشاخگی از نوع نقطه زینی را در  $\omega=1\text{Hz}$  نشان می‌دهد. دوشاخگی در پی تغییر یکی از پارامترهای تاثیرگذار بر رفتار سیستم موسوم به پارامتر کنترل (در اینجا فرکانس تحریک) ایجاد می‌شود و می‌توان آن را به‌عنوان تغییر کیفی در دینامیک سیستم تعریف کرد که ناشی از ایجاد یا از بین رفتن نقاط تعادل یا تغییر در پایداری آنها است. دوشاخگی نقطه زینی، مکانیزمی برای تولد یا تخریب نقاط تعادل است. همان‌طور که مشاهده می‌شود تعداد نقاط تعادل از سه به چهار افزایش یافته است. وجود نقاط تعادل مختلف که در نتیجه تغییر فرکانس تحریک ایجاد می‌شود، می‌تواند در بسیاری از کاربردها به‌عنوان کنترل سیستم وابسته به فرکانس مورد استفاده قرار گیرد [1]. نمودار پاسخ زمانی مربوط به این رفتار در نمودار ۵- b آورده شده است.



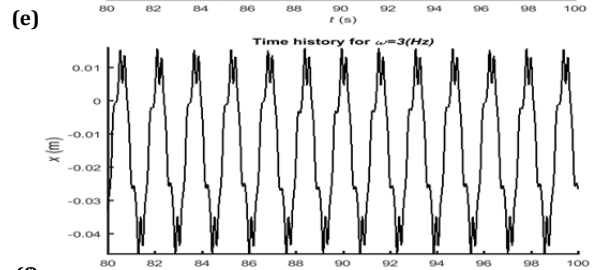
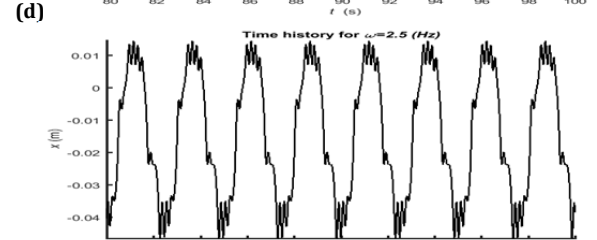
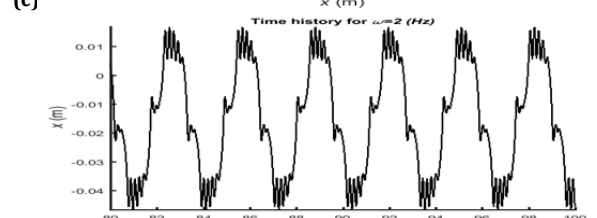
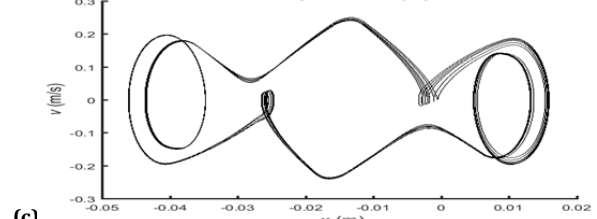
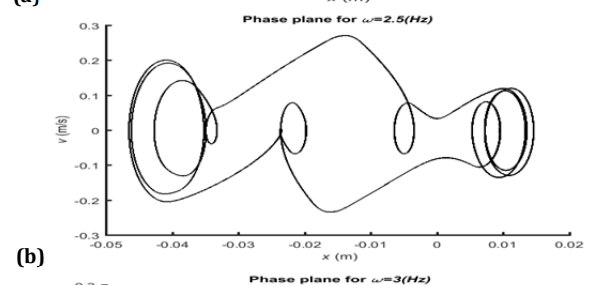
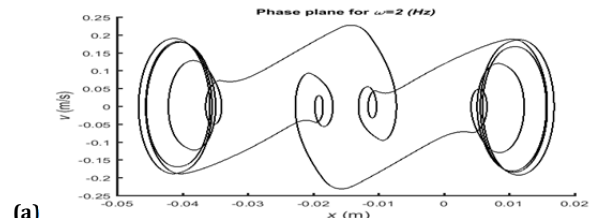
در نمودارهای ۶ که متناظر با فرکانس‌های تحریک  $\omega=2\text{Hz}$  تا  $\omega=3\text{Hz}$  است، مجدداً دوشاخگی نقطه زینی مشاهده می‌شود. با این تفاوت که در این مرحله نقاط تعادل از بین می‌روند و از تعداد



نمودار (۷) صفحه فاز، محتوای فرکانسی و نگاشت پوانکاره مربوط به نوسانگر آلیاژ حافظه‌دار در  $\omega=4Hz$  (a) صفحه فاز (b) محتوای فرکانسی (c) نگاشت پوانکاره مربوط به نوسانگر آلیاژ حافظه‌دار

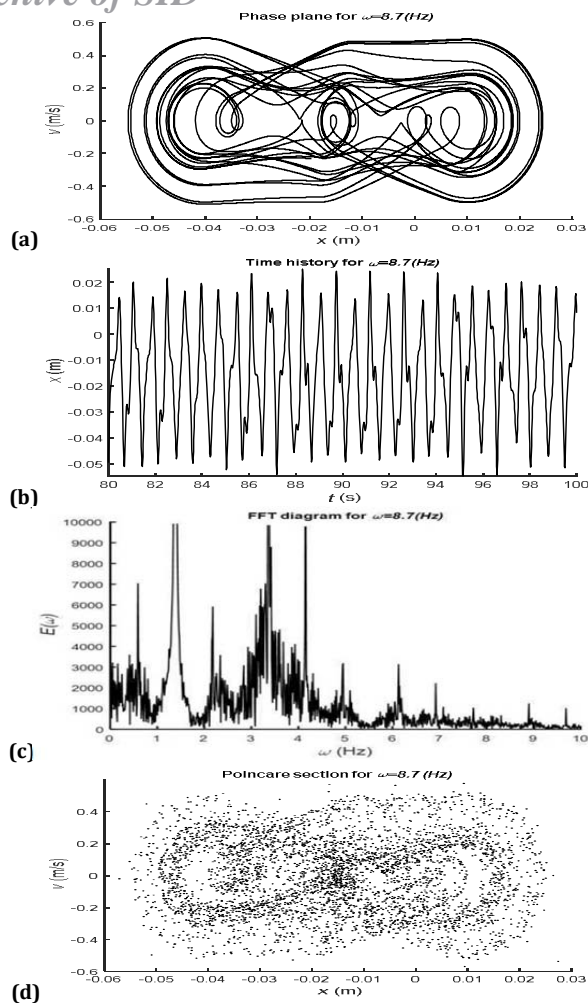
در نمودارهای ۸، رفتار شبه‌تناوبی از سیستم مشاهده می‌شود. این رفتار بر اثر دوشاخگی‌های پیاپی هاپف در سیستم رخ می‌دهد. با توجه به نمودار ۸- b و نسبت فرکانس‌های موجود در پاسخ سامانه برای حالت‌های مختلف، یک عدد گنگ است که بیانگر رفتار شبه‌تناوبی سیستم است. این رفتار به صورت شبه‌تناوبی  $n$ -تناوبه است که  $n$  تعداد فرکانس‌های (متناظر با تناوب) موجود در پاسخ است و با افزایش فرکانس تحریک، زیاد می‌شود و یکی از مسیرهای منتهی به آشوب محسوب می‌شود. نگاشت پوانکاره مربوط به این نوع پاسخ به صورت یک منحنی بسته بوده که در نمودار ۸- c و f قابل مشاهده است. طبق نتایج ارائه شده در نمودار ۹، حالت آشوب برای سامانه در فرکانس تحریک  $\omega=8/7Hz$  رخ می‌دهد. همان طور که در نمودار ۹- a قابل مشاهده است، نمودار صفحه فاز، مربوط به یک جاذب غیرمعمول است که تمام مسیرهای اطراف خود را جذب می‌کند و در صورتی که از نقطه‌ای روی جاذب به‌عنوان شرایط اولیه آغاز شود، مسیر مربوطه همواره در محدوده جاذب جذب باقی می‌ماند. نکته قابل توجه در مورد رفتار آشوبناک آن است که پاسخ سامانه حتی به‌ازای زمان‌های طولانی تکرار نمی‌شود. نمودار ۹- b که نمودار تاریخچه زمانی حرکت آشوبناک بوده، گویای این نکته است. یکی از راه‌های شناسایی ارتعاشات آشوبناک، وجود طیف گسترده‌ای از فرکانس‌ها در خروجی بوده، در حالی که پاسخ فرکانسی مربوط به یک حرکت هارمونیک دارای تعداد محدودی فرکانس است. همان طور که در نمودار ۹- c مشخص بوده، پاسخ فرکانسی سیستم در این حالت به‌صورت باند فرکانسی است که در سیستم‌های آشوبناک رخ می‌دهد.

آنها کاسته می‌شود. حتی پس از آن که نقطه تعادل از بین می‌رود، اثر آن در سیستم باقی می‌ماند و اصطلاحاً روح آن همچنان مسیرها را تحت تاثیر قرار می‌دهد. این اثر در نمودار ۶- b و c مشهود بوده و تغییر در تعداد نقاط تعادل در تحقیقات قبلی از جمله پژوهش مربوط به ساوی [1] قابل مشاهده است. نمودار ۷ دوشاخگی از نوع هاپف را در  $\omega=4Hz$  نشان می‌دهد که در خلال آن نقطه تعادل مارپیچی، پایداری خود را از دست می‌دهد و به‌وسیله سبکل حدی احاطه می‌شود.



نمودار (۶) نمودار صفحه فاز نوسانگر آلیاژ حافظه‌دار و پاسخ زمانی، نمودار صفحه فاز نوسانگر آلیاژ حافظه‌دار در (a)  $\omega=1Hz$  (b)  $\omega=1Hz$  (c)  $\omega=2/5Hz$  و پاسخ زمانی در (d)  $\omega=2Hz$  (e)  $\omega=2/5Hz$  (f)  $\omega=3Hz$

نمودار ۹- دنگاشت پوانکاره برای سامانه وابسته به زمان است. در مورد این گونه سیستمها دنگاشت پوانکاره با نمونه‌گیری از فضای فاز سامانه در فواصل زمانی به صورت ضرایب صحیح دوره تناوب  $(T = \frac{2\pi}{\omega})$  به دست آمده است [22]. لازم به ذکر بوده که  $\omega$  فرکانس تحریک است. دنگاشت حاصل از این نمونه‌گیری، ناحیه‌ای محدود شامل تعداد نامتناهی نقطه است که ابری از نقاط را تشکیل می‌دهند. این حالت از دنگاشت پوانکاره که به صورت توده‌ای از نقاط است، به عنوان یکی از ویژگی‌های سیستم‌های آشوبناک محسوب می‌شود.



**نمودار ۹** صفحه فاز، محتوای فرکانسی و دنگاشت پوانکاره مربوط به نوسانگر آلیاژ حافظه‌دار در  $\omega = 8.7$  Hz (a)، صفحه فاز (b) محتوای فرکانسی (c) دنگاشت پوانکاره مربوط به نوسانگر آلیاژ حافظه‌دار

مشخصه دیگر آشوب، حساسیت آن به شرایط اولیه است که به وسیله نمای لیپانوف بررسی می‌شود. نمای لیپانوف بیانگر نرخ دورشدن دو مسیر با شرایط اولیه بسیار نزدیک به هم است. نمای لیپانوف مثبت یکی از مهم‌ترین پارامترهای نشان‌دهنده رفتار آشوبناک محسوب می‌شود. در این حالت دو مسیر که روی جاذب قرار دارند و دارای شرایط اولیه بسیار نزدیک به هم هستند، با سرعت زیاد و به صورت نمایی از یکدیگر دور می‌شوند. به همین دلیل است که رفتار سیستم‌های آشوبناک را فقط تا یک زمان خاص می‌توان پیش‌بینی کرد. نمای لیپانوف را می‌توان به طور کیفی به صورت رابطه‌های ۱۶ و ۱۷ تعریف کرد:

اگر فاصله شروع دو مسیر از یکدیگر برابر با  $\delta_0$  باشد، پس از گذشت زمان  $t$  فاصله آنها از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

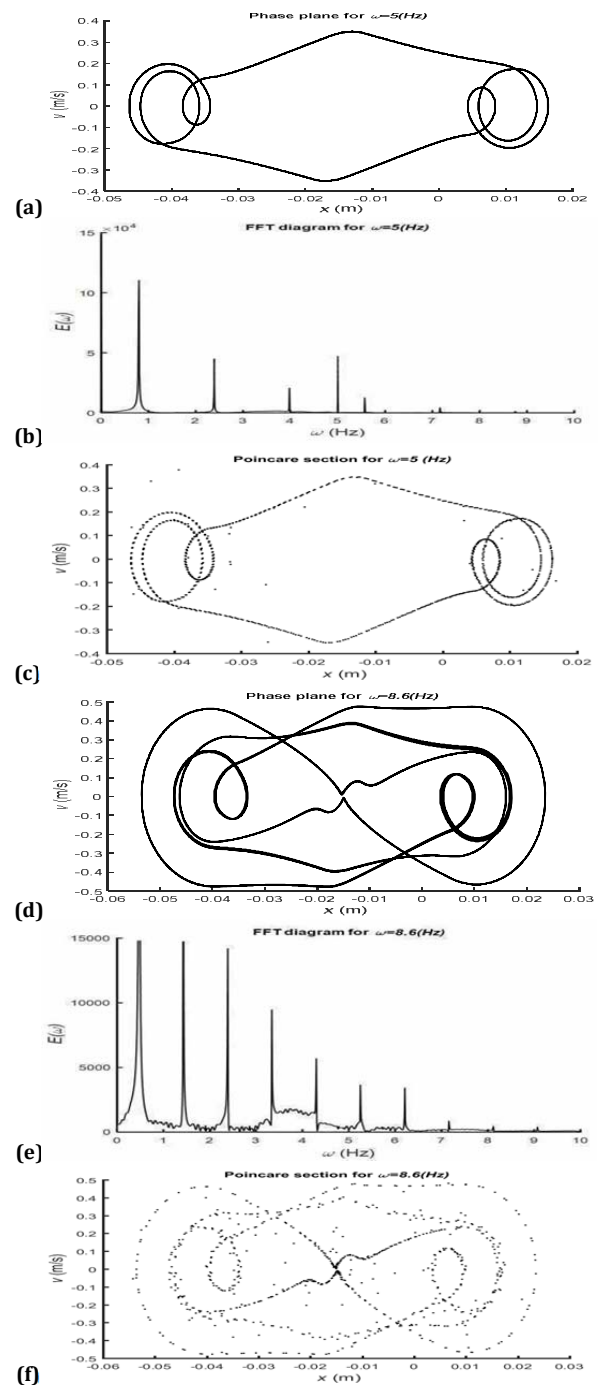
$$\delta(t) = \delta_0 e^{\lambda t} \quad (16)$$

اگر از طرفین رابطه ۱۶ لگاریتم طبیعی بگیریم، داریم:

$$\ln \delta(t) = \ln \delta_0 + \lambda t \quad (17)$$

بنابراین اگر نمودار  $\ln \delta(t)$  را بر حسب  $t$  رسم کنیم، شیب نمودار حاصله همان  $\lambda$  یا نمای لیپانوف است [23].

به منظور بررسی این خصلت سیستم، دو نقطه روی جاذب با فاصله اولیه  $\delta_0 = 10^{-6}$  m انتخاب شده و نرخ دورشدن آنها از یکدیگر مورد مطالعه قرار گرفته است. با توجه به نمودار ۱۰، در بازه زمانی  $0 < t < 20$  ثانیه، رشد نمایی فاصله بین دو مسیر کاملاً مشخص است.



**نمودار ۸** صفحه فاز، محتوای فرکانسی و دنگاشت پوانکاره مربوط به نوسانگر آلیاژ حافظه‌دار در  $\omega = 5$  Hz و  $\omega = 8.6$  Hz (a)، صفحه فاز (b) محتوای فرکانسی (c) دنگاشت پوانکاره مربوط به نوسانگر آلیاژ حافظه‌دار در  $\omega = 5$  Hz (d)، صفحه فاز (e) محتوای فرکانسی (f) دنگاشت پوانکاره مربوط به نوسانگر آلیاژ حافظه‌دار در  $\omega = 8.6$  Hz



$\omega=4\text{Hz}$ ، دوشاخگی از نوع هاپف اتفاق می‌افتد و نقطه تعادل مارپیچی، پایداری خود را از دست می‌دهد و به وسیله سیکل حدی احاطه می‌شود. از آن پس در  $8/16\text{Hz}$  و  $\omega=5$  سیکل حدی، طی چندشاخگی‌های هاپف متوالی به پاسخ‌های شبه‌تناوبی  $n$ -تناوبه، تبدیل و نهایتاً در فرکانس  $\omega=8/17\text{Hz}$  به آشوب منتهی می‌شود و وضعیت خود را تا پایان بازه مورد بررسی یعنی  $\omega=10\text{Hz}$  حفظ می‌کند. شناسایی مسیر منتهی به آشوب در مورد نوسانگر متصل به آلیاژ حافظه‌دار برای اولین بار در این مقاله انجام شده است. بنابراین سیستم‌های متشکل از آلیاژهای حافظه‌دار می‌توانند رفتارهای غیرمعمول و پیچیده‌ای از خود نشان دهند که باید در طراحی آنها مورد توجه قرار گیرد. همچنین از آنجایی که معمولاً از سامانه‌های آلیاژهای حافظه‌دار به منظور کنترل سایر سامانه‌ها استفاده می‌شود، می‌توان با در نظر گرفتن گستره‌های مختلف از پارامتر کنترل‌کننده به پاسخ‌های متناسب با کاربرد دست یافت.

**تشکر و قدردانی:** بدینوسیله از دانشکده‌ی مهندسی مکانیک دانشگاه تهران که امکان انجام این پژوهش را فراهم کرد، تشکر و قدردانی می‌گردد.

**تأییدیه اخلاقی:** این مقاله تا کنون در نشریه دیگری (به‌طور کامل یا بخشی از آن) به چاپ نرسیده و همچنین برای بررسی و چاپ به نشریه‌ی دیگری ارسال نشده است.

**تعارض منافع:** بدینوسیله نویسندگان اعلام می‌کنند که این اثر، حاصل یک پژوهش مستقل بوده و هیچ‌گونه تضاد منافعی با اشخاص دیگر یا سازمان‌ها ندارد.

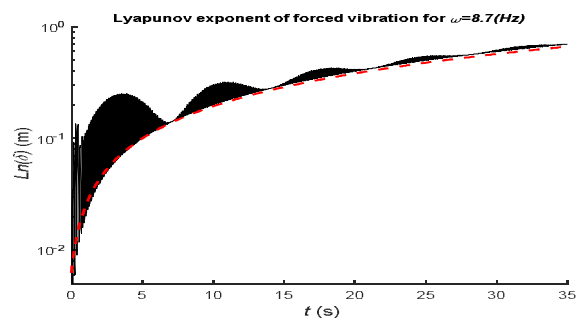
**سهم نویسندگان:** شقایق یحیایی (نویسنده اول)، نگارنده مقدمه/پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۷۰٪)؛ محمدرضا ذاکرزاده (نویسنده دوم)، پژوهشگر کمکی/تحلیلگر آماری (۱۵٪)؛ آرش بهرامی (نویسنده سوم)، روش‌شناس/پژوهشگر کمکی (۱۵٪)

**منابع مالی:** هیچ منبع مالی استفاده نشده است.

#### منابع

- 1- Savi MA. Nonlinear dynamics and chaos in shape memory alloy systems. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2015;70:2-19.
- 2- Savi MA, Pacheco PMCL. Chaos and hyperchaos in shape memory systems. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2002;12(03):645-657.
- 3- Seelecke S. Modeling the dynamic behavior of shape memory alloys. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2002;37(8):1363-1374.
- 4- Machado LG, Savi MA, Pacheco PMCL. Nonlinear dynamics and chaos in coupled shape memory oscillators. International Journal of Solids and Structures. 2003;40(19):5139-5156.
- 5- Machado LG, Savi MA, Pacheco PMCL. Bifurcations and crises in a shape memory oscillator. Shock and Vibration. 2004;11(2):67-80.
- 6- Machado LG, Lagoudas DC, Savi MA. Nonlinear dynamics and chaos in a shape memory alloy pseudoelastic oscillator. Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems. 2007;6525:6525-6525.
- 7- Savi MA, Sá MAN, Paiva A, Pacheco PMCL. Tensile-compressive asymmetry influence on shape memory alloy system dynamics. Chaos Solitons & Fractals. 2008;36(4):828-842.
- 8- Bernardini D, Rega G. The influence of model parameters and of the thermomechanical coupling on

شیب نمودار نیز مثبت‌بودن نمای لیاپانوف که مشخصه آشوب است را نشان می‌دهد. در مورد نمودار نمای لیاپانوف دو نکته حایز اهمیت است که هر دو در نمودار ۹ نمایان است. نکته اول مربوط به نوسانات نامنظم شیب نمودار است. شیب نمودار هرگز به‌صورت یک خط مستقیم نیست، چرا که قدرت جاذب در تمام نقاط یکسان نیست. بنابراین میزان واگرایی نمایی مسیرها در محدوده جاذب متفاوت است. نکته دوم مربوط به ابعاد جاذب است. از آنجایی که ابعاد جاذب محدود است و مسیرها نمی‌توانند محدوده جاذب اطراف جاذب را ترک کنند، لذا زمانی که میزان واگرایی نسبت به قطر جاذب در یک محدوده قابل مقایسه قرار می‌گیرد، واگرایی متوقف می‌شود و به خط اشباع میل می‌کند. زمان صاف‌شدن نمودار به ابعاد جاذب بستگی دارد [24]. مطالعات عددی نشان می‌دهد که رفتار آشوبناک برای فرکانس‌های تحریک بیشتر تا  $\omega=10\text{Hz}$  همچنان باقی می‌ماند.



نمودار ۱۰) نمای لیاپانوف مربوط به نوسانگر آلیاژ حافظه‌دار در  $\omega=8/17\text{Hz}$

#### ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله به تحلیل و بررسی رفتار دینامیک غیرخطی و آشوبناک نوسانگر یک درجه آزادی متصل به آلیاژ حافظه‌دار در رژیم سوپراالاستیک پرداخته شد. نتایج حاصل حاکی از طیف گسترده رفتارهای تناوبی، شبه‌تناوبی و آشوبناک برای سیستم مورد مطالعه در ارتعاشات آزاد و اجباری است. در بخش اول مقاله به معرفی اجمالی آلیاژهای حافظه‌دار، ریزساختار و معادلات حاکم بر آنها پرداخته شد. سپس ارتعاشات آزاد سامانه مورد بررسی قرار گرفت. نتایج به‌دست‌آمده نشان‌دهنده رفتار مستهلک‌شونده سیستم ناشی از حلقه‌های هیستریزیس آلیاژ حافظه‌دار است که در نتیجه تغییر فاز آستنیت به مارتنزیت و بالعکس ایجاد می‌شود. برای مشاهده واضح‌تر پاسخ زمانی نزولی سیستم، ضریب استهلاک در بررسی ارتعاشات آزاد برابر با صفر در نظر گرفته شد. در نهایت ارتعاشات سامانه به یک حالت پایدار متناظر با مدار تناوب می‌رسد. در بخش بعدی بررسی، ارتعاشات اجباری سیستم تحت نیروی تحریک هارمونیک و با تغییر فرکانس تحریک در بازه  $0/5$  و  $10$  هرترتز به‌عنوان پارامتر کنترل‌کننده انجام شد. با تغییر فرکانس تحریک انواع مختلف پاسخ از سامانه دریافت شد. به‌ازای  $\omega=0/5\text{Hz}$ ، سیستم دارای سه نقطه تعادل مارپیچی پایدار است. در فرکانس  $\omega=1\text{Hz}$  به‌دلیل رخداد دوشاخگی نقطه زینی، تعداد نقاط تعادل از سه به چهار افزایش می‌یابد. مجدداً در بازه فرکانسی  $\omega=[2,3]\text{Hz}$  دوشاخگی نقطه زینی مشاهده می‌شود، با این تفاوت که در این مرحله نقاط تعادل از بین می‌روند و از تعداد آنها کاسته می‌شود. وجود نقاط تعادل مختلف که در نتیجه تغییر فرکانس تحریک ایجاد می‌شود، می‌تواند در بسیاری از کاربردها به‌عنوان کنترل موقعیت سیستم وابسته به فرکانس مورد استفاده قرار گیرد. در

- 16- Chung JH, Heo JS, Lee JJ. Implementation strategy for the dual transformation region in the Brinson SMA constitutive model. *Smart Materials and Structure*. 2007;16(1):N1.
- 17- Basaeri H, Yousefi Koma A, Zakerzadeh MR, Mohtasebi SS. Experimental study of a bio-inspired robotic morphing wing mechanism actuated by shape memory alloy wires. *Mechatronics*. 2014;24(8):1231-1241.
- 18- Aguiar RAA, Savi MA, Pacheco PMCL. Experimental investigation of vibration reduction using shape memory alloys. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2012;24(2):247-261.
- 19- Fakhraei J, Mohammad Khanlo H, Ghayour M. Analysis of the passengers effect on chaotic vibrations of a nonlinear full vehicle model. *Modares Mechanical Engineering*. 2015;15(1):173-184. [Persian]
- 20- Nayfeh AH. *Applied nonlinear dynamics: Analytical, computational and experimental methods*. Balachandran B, editor. Hoboken: Wiley; 1995.
- 21- Bernardini D, Rega G. Thermomechanical modelling, nonlinear dynamics and chaos in shape memory oscillators. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*. 2005;11(3):291-314.
- 22- Jordan D, Smith P. *Nonlinear ordinary differential equations*. Oxford: Oxford Press; 2007.
- 23- Machado LG, Lagoudas DC, Savi MA. Lyapunov exponents estimation for hysteretic systems. *International Journal of Solids and Structures*. 2009;46(6):1269-1286.
- 24- Strogatz SH. *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. New York: Avalon Publishing; 2014.
- the behavior of shape memory devices. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2010;45(10):933-946.
- 9- Bernardini D, Rega G, Litak G, Syta A. Identification of regular and chaotic isothermal trajectories of a shape memory oscillator using the 0-1 test. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part K Journal of Multi-body Dynamics*. 2012;227(1):17-22.
- 10- Litak G, Bernardini D, Syta A, Rega G, Rysak A. Analysis of chaotic non-isothermal solutions of thermomechanical shape memory oscillators. *The European Physical Journal Special Topics*. 2013;222(7):1637-1647.
- 11- Oliveira HS, De Paula AS, Savi MA. Dynamical jumps in a shape memory alloy oscillator. *Shock and Vibration*. 2014;2014:656212.
- 12- Piccirillo V, Balthazar JM, Tusset AM, Bernardini D, Rega G. Non-linear dynamics of a thermomechanical pseudoelastic oscillator excited by non-ideal energy sources. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2015;77:12-27.
- 13- Oliveira HDS, De Paula AS, Savi MA. Dynamical behavior of a pseudoelastic vibration absorber using shape memory alloys. *Shock and Vibration*. 2017;2017:7609528.
- 14- Sayyaadi H, Zakerzadeh MR, Salehi H. A comparative analysis of some one-dimensional shape memory alloy constitutive models based on experimental tests. *Scientia Iranica*. 2012;19(2):249-257.
- 15- Brinson LC. One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: Thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 1993;4(2):229-242.