ماهنامه علمى پژوهشى

مهندسی مکانیک مدر س



mme.modares.ac.ir

# تحليل غيرخطي كمانش هيگروترمومكانيكي پنل استوانهاي نازك تقويتشده مدرج تابعي بر بستر الاستيك

سارا کر میان<sup>1</sup>، علیر ضیا شیاطر زاده<sup>2\*</sup>

1– دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

a\_shaterzadeh@shahroodut.ac.ir 3619995161 \* شاهرود، صندوق يستى

چکیدہ	اطلاعات مقاله
حل تحلیلی و عددی پنل،های تقویتشده در صنعت گامی مؤثر در جهت طراحی این گونه سازهها میباشد. در این مقاله یک روش	مقاله پژوهشی کامل
تحلیلی به منظور بررسی پایداری غیرخطی پنلهای استوانهای نازک تقویتشده مدرج تابعی بر بستر الاستیک، تحت بارگذاریهای	دريافت: 23 مهر 1396 
هیگروترمومکانیکی ارائه شده است. تقویتکنندهها مایل در نظر گرفته شدهاند. پنل دارای نقص هندسی اولیه میباشد. خصوصیات	پدیرش: ۱۱ دی ۱396 ارائه در سایت: 03 بهمن 1396
مواد وابسته به دما بوده و در راستای ضخامت، بر اساس قانون توزیع توانی ساده در نظر گرفته شده است. بستر الاستیک بر اساس	کلید واژگان:
مدل پیشنهادی وینکلر و پاسترناک فرض شده است. روابط حاکم بر اساس تکنیک تقویتکنندههای تکهای لخنیتسکی و تئوری	پنل استوانهای
کلاسیک پوستهها و با توجه به الگوی غیرخطی فنکارمن-دانل، استخراج شده است. روابط صریح منحنی خیز-فشار برای پنلهای	مواد مدرج تابعی
استوانهای مدرج تابعی با استفاده از تابع تنش و روش گالرکین بهدست آمده است. تأثیر زاویه تقویتکننده، پارامترهای متفاوت	پس کمانش تقب تکنید و ادا
ابعادی، شاخص کسر حجمی، نقص هندسی اولیه، سفتی بستر الاستیک و درصد رطوبت بر پس کمانش پنل مدرج تابعی، بررسی	هويت ننده مايل بستر الاستيک
شده است. در بارگذاری ترمومکانیکی تأثیر وجود گرادیان دما در ضخامت پنل و تأثیر شرایط مرزی مختلف نیز بررسی شده است.	
نتایج حاصل با سایر مراجع مورد راستی آزمایی قرار گرفته است.	

# Nonlinear hygro-thermo-mechanical buckling analysis of eccentrically stiffened thin FG cylindrical panel on elastic foundations

### Sara Karamian, Alireza Shaterzadeh

Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran. \* P.O.B. 3619995161 Shahrood, Iran, a\_shaterzadeh@shahroodut.ac.ir

#### **ARTICLE INFORMATION**

Original Research Paper

Keywords:

FGM Postbuckling

cylindrical panel

spiral stiffene

elastic foundation

Received 15 October 2017

Accepted 01 January 2018

Available Online 23 January 2018

ABSTRACT

Exact and numerical solution of eccentrically stiffened panels in the industry is a major step forward in the design of these structures. This paper presents an analytical approach to investigate the nonlinear stability analysis of eccentrically stiffened thin FG cylindrical panels on elastic foundations subjected to hygro-thermo-mechanical loads. The stiffeners are assumed to be spiral-type. The panel has the initial geometrical imperfection. The material properties are assumed to be temperature-dependent and graded in the thickness direction according to a simple power law distribution. The elastic foundation is considered based on Winkler and Pasternak proposed model. Governing equations are derived basing on the Lekhnitsky smeared stiffeners technique and classical shell theory incorporating Von Karman-Donnell geometrical type nonlinearity. Explicit relations of load-deflection curves for FG cylindrical panels are determined by applying stress function and Galerkin method. The effects of angel of stiffener, different dimensional parameters, volume fraction index, initial geometrical imperfection, the stiffness of elastic foundation and moisture concentration on the postbuckling of FG panel are investigated. Also effects of temperature gradient through the thickness and effects of different boundary conditions are investigated for thermo-mechanical loading. The obtained results are validated by comparing with those in the literature.

1\_مقدمه

کمانش پنلهای کامپوزیتی باید به خوبی بررسی شود. اخیراً، دستهی جدیدی از مواد کامیوزیتی شناخته شده با عنوان مواد مدرج تابعی<sup>۱</sup> بهطور خاص مورد توجه بسیاری از پژوهش گران قرار گرفتهاند. مواد مدرج تابعی نسل جدیدی از مواد کامیوزیتی هستند که در آنها خواص مکانیکی بهطور

ینل.های کامیوزیتی معمولاً در هوافضا، مکانیک، سازههای دریایی و دیگر کاربردهای مهندسی، به دلیل وزن سبک، استحکام و سفتی بالا و ویژگیهای حرارتی مناسب، استفاده می شوند. در دماهای بالا، پنل های کامپوزیتی بدون حضور بارهای مکانیکی نیز کمانش می کنند. بنابراین، یاسخ کمانش و پس-

Please cite this article using: S. Karamian, A. Shaterzadeh, Nonlinear hygro-thermo-mechanical buckling analysis of eccentrically stiffened thin FG cylindrical panel on elastic foundations, *Modares Mechanical* Engineering, Vol. 18, No. 02, pp. 73-83, 2018 (in Persian)

<sup>1</sup> Functionally graded material (FGM)

پیوسته و به آرامی از سطحی به سطح دیگر تغییر میکند. سازههای مدرج تابعی مانند پنلهای استوانهای در سالهای اخیر، نقش مهمی را در صنایع مدرن ایفا میکنند. در نتیجه پاسخ استاتیکی پنلهای استوانهای ساختهشده از مواد مدرج تابعی موضوع بسیاری از مطالعات در سالهای اخیر بوده است.

شن و وانگ [1] تحلیل پس کمانش حرارتی پنل های استوانه ای مدرج تابعي با بستر الاستيک را ارائه کردند. آنها [2] همچنين تحليل خمش غیرخطی پنلهای استوانهای تقویت شده از جنس مواد مدرج تابعی با شرایط مرزی ساده بر بستر الاستیک در محیطهای حرارتی را انجام دادند. لی و همکاران [3] رفتار ترمومکانیکی پنلهای مدرج تابعی در جریان هوای مافوق صوت را بررسی کردند. علی بیگلو و چن [4] حل الاستیسیتهی سه بعدی برای تحلیل استاتیکی یک پنل استوانهای تقویتشده با شرایط مرزی ساده در لبه-ها را توسعه دادند. تانگ و داک [5] به مطالعه ی پاسخ غیرخطی پنلهای ضخیم مدرج تابعی و کمعمق با دو انحنا بر بستر الاستیک تحت بارگذاری-های ترمومکانیکی پرداختند. آنها [6] همچنین پاسخ غیرخطی پنلهای استوانهای مدرج تابعی تحت بارگذاری فشاری با اثرات دما را مورد بررسی قرار دادند. اقدم و همکاران [7] همچنین یک حل نیمه تحلیلی برای پاسخ استاتیکی پنلهای مدرج تابعی کاملاً مقید با درنظر گرفتن اثرات تغییر شکل-های برشی را ارائه کردند. یانگ و همکاران [8] نتایج تحلیل پسکمانش ترمومکانیکی پنلهای استوانهای از جنس مواد مدرج تابعی با خواص وابسته به دما را ارائه کردند. تانگ [9] یک روش تحلیلی به منظور بررسی اثرات قیود مماس بر لبه در رفتار کمانش و پس کمانش پنل های مسطح و استوانهای مدرج تابعی بر بستر الاستیک تحت بارگذاری ترمومکانیکی را معرفی کرد. داک و همکاران [10] تحلیل پس کمانش پنلهای استوانهای مدرج تابعی بر بستر الاستیک همراه با نقص اولیه تحت بارگذاری ترمو-مکانیکی را ارائه دادند. نجفیزاده و همکاران [11] کمانش الاستیک پوستههای استوانهای مدرج تابعی با تقویت کننده های طولی و حلقوی تحت بار گذاری محوری فشاری را بررسی کردند. بهتازگی دانگ و همکاران [12] پسکمانش پوسته-های کمعمق با دو انحنا و تقویت کننده های مدرج تابعی با خواص وابسته به دما براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبهی سوم را بررسی کردند.

از دیگر عوامل مؤثر بر کمانش سازهها عامل رطوبت میباشد. زنکور [13] به بررسی اثر هیگروترمومکانیکی بر روی صفحات مدرج تابعی بر بستر الاستیک پرداخت. او [14] همچنین حل دقیق مسئله تنش حرارتی برای یک سیلندر توخالی ناهمگن پیزوالکتریک هیگروترمال را ارائه کرد. شن [15] اثرات هیگرو-ترمال را بر پس کمانش پنل های استوانه ای تحت بار محوری بررسی کرد. سونگ [16] تحلیل کمانش پوستههای استوانهای با تقویت-کنندههای مایل از ارائه داد. کمانش پوستههای استوانهای با تقویت کننده-های مایل تحت بار فشاری و پیچشی یکنواخت در کار ین [17] مورد بررسی قرار گرفت. بهتازگی، شاطرزاده و فروتن پس کمانش پوستههای استوانهای با تقویت کننده های مایل بر بستر الاستیک را بررسی کردند.

مزیت شکل هندسی سادهی تقویت کنندههای طولی و حلقوی از منظر مهندسی واضح است. اما در بحث تقویت کننده ها وزن کمتر حائز اهمیت زیادی میباشد. تقویت کننده های طولی وحلقوی به منظور مقاومت در برابر تغییر شکل در جهت محوری و محیطی طراحی شدهاند، اما در صورتی که مد بار کمانشی بحرانی برای یک حالت خاص بارگذاری به گونهای باشد که تغییر شکلهایی در راستای متقاطع با جهتهای اصلی ایجاد کند این تقویت کننده-

ها دیگر مؤثر نیستند. مثال واضح این موضوع، پوستهی استوانهای تقویتشده طولی تحت بار شعاعی یا پوستهی استوانهای تقویتشدهی حلقوی تحت بار محوری و یا پوستهی استوانهای تقویتشده طولی-حلقوی تحت بار پیچشی میباشد. با پیشرفت سریع تکنولوژی هوا فضا و اهمیت زیاد وزن کم در حمل و نقل هوایی و سازههای فضایی، آرایش تقویت کنندهها باید به شکلی باشد که دستیابی به این مهم امکانپذیر باشد [16]. در این میان تقویت کنندههای مایل نسبت به گونههای رایج دیگر (طولی و حلقوی) از این مزیت مهم برخوردار می باشند. با این وجود مطالعات کمی در این مورد صورت گرفته-است. بنابراین مطالعه بر روی رفتار غیرخطی این قبیل سازهها از منظر عملی دارای اهمیت ویژهای میباشد. در توسعه نتایج تحقیقات صورت گرفته تا به امروز، مقالهی حاضر به تحلیل کمانش غیرخطی پنلهای استوانهای مدرج تابعی با تقویت کننده های مایل بر بستر الاستیک همراه با نقص هندسی اولیه تحت بارگذاریهای هیگروترمومکانیکی می پردازد. بارگذاریهای سه گانه هیگروترمومکانیکی برای پنل استوانهای تقویتشده مدرج تابعی، برای اولین بار در این مقاله بررسی شده است.

## 2- فرمولبندي مسأله 1-2- روابط بنيادي و معادلات حاكم

# یک پنل استوانهای نازک تقویت شده مدرج تابعی با شعاع انحنای R، ضخامت ، طول محوری a و طول کمان b، بر بستر الاستیک خطی مطابق شکل h در hنظر گرفته می شود. پنل دارای تقویت کننده های مایل با زوایای heta و $\eta$ می-باشد. $h_{\rm s}$ ، $d_{\rm s}$ به ترتیب عرض، ضخامت تقویت کننده او S فاصله ی بین دو $h_{\rm s}$ ، $d_{\rm s}$ تقویت کننده می باشد. شکل 2 نشان دهنده زاویه قرار گرفتن تقویت کنندههای مایل می باشد. مختصات اصلی x و z به ترتیب در راستای محوری، محیطی

و شعاعی است. ینل از جنس مواد مدرج تابعی شامل فلز و سرامیک در نظر گرفته شده است. با اعمال قانون توزيع تواني ساده٬ كسر حجمي بهصورت رابطه (1) مي-ىاشد [10]:

 $V_{\rm m}(z) = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^N$ ,  $V_{\rm c}(z) = 1 - V_{\rm m}(z)$ (1)که h ضخامت پنل؛  $(\infty < N < \infty)$  شاخص کسر حجمی؛ z مختصات ضخامت hکه بین h/2 و h/2 می باشد؛ زیرنویس m و c به ترتیب فلز و سرامیک را نشان میدهد. خواص مؤثر (Pr<sub>eff</sub>)<sup>۳</sup> پنل مدرج تابعی، به عنوان مثال مدول یانگ E، ضریب انبساط حرارتی  $\alpha$  و ضریب انبساط رطوبتی  $\beta$  بر اساس قانون Eتركيب خطى بهصورت رابطه (2) تعيين مى شود [10]:  $Pr_{\rm eff}(z) = Pr_{\rm c}V_{\rm c}(z) + Pr_{\rm m}V_{\rm m}(z)$ (2)

که Pr نشان دهنده یک خاصیت ماده وابسته به دما میباشد. خواص مؤثر پنل مدرج تابعی از قرار دادن رابطه (1) در رابطه (2) به صورت رابطه (3) به دست مي آيد:

$$Pr_{\rm eff}(z) = Pr_{\rm c} + Pr_{\rm mc} \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^{N}$$
 (3)  
که  $Pr_{\rm mc}$  به شکل رابطه (4) می باشد:

$$Pr_{\rm mc} = Pr_{\rm m} - Pr_{\rm c}$$

Pr یک خاصیت ماده وابسته به دما می باشد که به صورت یک تابع غیر خطی از دما در رابطه (5) تعريف مي شود [8,2,1]:

$$Pr = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3)$$
(5)

(4)

 <sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Simple power law distribution
 <sup>3</sup> Effective properties







Fig. 2 Display of cylindrical panel with spiral stiffeners شکل 2 نمایش پنل استوانهای با تقویتکنندههای مایل

که  $\Delta T + T = T_0 + \Delta T$  مقدار افزایش دمای محیطی است که پنل در آن قرار دارد و  $T_0$  دمای محیط بوده و برابر با X 300 میباشد.  $P_0 P_1 P_1 P_2 P_2 e_1 P_2 e_1$ ضرایب دمایی هستند که برای هر ماده مشخص میبایست از جداول استخراج گردد. نیروی بستر الاستیک با توجه به مدل پاسترناک<sup>۱</sup> مطابق با رابطه (6) میباشد:

$$q_e = k_1 w - k_2 \nabla^2 w \tag{6}$$

که در این رابطه  $k_1^2 + \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  خیز پنل،  $k_1$  مدول بستر وینکلر<sup>7</sup> و  $k_1$  سفتی لایه برشی بر اساس مدل پاسترناک میباشد.

بر اساس تئوری کلاسیک پوستهها و روابط غیرخطی کرنش-جابهجایی فن-کارمن-دانل<sup>7</sup>، مؤلفههای کرنش بر روی سطح میانی پنل استوانهای بهشکل رابطه (7) میباشد [20,19,12]:

$$\varepsilon_{x}^{0} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^{2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w^{*}}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{y}^{0} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^{2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w^{*}}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy}^{0} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w^{*}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w^{*}}{\partial y}$$

$$k_{x} = -\frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}}, \quad k_{y} = -\frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}}, \quad k_{xy} = -\frac{\partial^{2} w}{\partial x \partial y}$$
(7)

Pasternak model

<sup>2</sup> Winkler <sup>3</sup> Von Karman-Donnell

که  $^{0}_{xy} = e^{0}_{y} ^{0}_{xy}$  مؤلفههای کرنش نرمال،  $^{0}_{xy} \gamma_{xy}$  کرنش برشی در سطح میانی پنل و  $^{x}_{x} = e^{0}_{x}$  تغییرات انحنا و پیچش پنل بوده، u = v و w به ترتیب جابه-جایی در راستای محورهای x = v (روی صفحه میانی) و  $^{*}w$  نقص هندسی اولیه میباشد. کرنشها در راستای ضخامت پنل در فاصله z از سطح میانی به صورت رابطه (8) میباشد:  $z = z = x^{0} + zk$ 

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^\circ + z\kappa_x, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^\circ + z\kappa_y, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^\circ + 2zk_{xy} \quad (8)$$

رابطه تنش-کرنش برای پنل استوانهای بدون تقویتکننده و با در نظر گرفتن تنشهای حرارتی و رطوبتی، بهشکل رابطه (9) بیان میشود [13,10]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^{\rm sh}, \ \sigma_y^{\rm sh} \end{pmatrix} = \frac{E(z, T)}{1 - v^2} \{ (\varepsilon_x, \varepsilon_y) + v(\varepsilon_y, \varepsilon_x) - (1 + v) [\alpha(z, T)\Delta T(1, 1) + \beta(z, T)\Delta C(1, 1)] \}$$

$$\tau_{xy}^{\rm sh} = \frac{E(z, T)}{2(1 + v)} \gamma_{xy}$$

$$(9)$$

که نسبت پواسون<sup>†</sup> v ثابت فرض می شود،  $\sigma_x^{sh}$   $\sigma_x^{sh}$  تنش نرمال در مختصات v r روی پنل و  $T_{xy}^{sh}$  تنش برشی بر روی پنل می باشد. مقدار افزایش درصد رطوبت به شکل رابطه  $\Delta C = C - C$  می باشد که در آن C درصد رطوبت وردی بوده و  $c_0$  درصد رطوبت اولیه و برابر با  $\infty$  می باشد. روابط تنش-کرنش تقویت کننده های مایل با در نظر گرفتن تنش های حرارتی و رطوبتی، به شکل رابطه (10) خواهد بود [18,10]:

$$\sigma_x^{s} = Z_1 E_s(T) [\varepsilon_x \left( \cos^3 \theta + \cos^3 \eta \right) + \varepsilon_y (\sin^2 \theta \cos \theta + \sin^2 \eta \cos \eta)] - \frac{E_s(T)}{1 - 2\nu} [\alpha_s(T)\Delta T + \beta_s(T)\Delta C]$$

$$\sigma_y^{s} = Z_2 E_s(T) [\varepsilon_x (\sin \theta \cos^2 \theta + \sin \eta \cos^2 \eta) + \varepsilon_y (\sin^3 \theta + \sin^3 \eta)] - \frac{E_s(T)}{1 - 2\nu} [\alpha_s(T)\Delta T + \beta_s(T)\Delta C]$$

$$\tau_{xy}^{s} = Z_3 E_s(T) [2\gamma_{xy} (\sin \theta \cos \theta + \sin \eta \cos \eta)]$$

$$- \frac{E_s(T)}{1 - 2\nu} [\alpha_s(T)\Delta T + \beta_s(T)\Delta C]$$
(10)

 $B_{\rm s}(T)$  به ترتیب تنشهای نرمال، تنش برشی تقویت کنندهها و  $B_{\rm s}(T)$ ،  $F_{\rm sv}$  ,  $\sigma_{\rm sv}^{\rm x}$  ,  $\sigma_{\rm sv}(T)$  و رطوبتی  $\alpha_{\rm s}(T)$  و  $\alpha_{\rm s}(T)$  و رطوبتی تقویت کنندهها با خواص وابسته به دما می اشند. به منظور برقراری پیوستگی بین پنل و تقویت کنندهها، جنس تقویت کنندهها کاملاً فلزی فرض شده است. در رابطه (10) مقادیر ضرایب  $D_{\rm sv}$  ,  $D_{\rm sv}$  و  $Z_{\rm s}$  ,  $D_{\rm sv}$  ,

$$Z_{1} = \frac{d_{s}}{S} \frac{\sin(\theta + \eta)}{(\sin \theta + \sin \eta)}, Z_{2} = \frac{d_{s}}{S} \frac{\sin(\theta + \eta)}{(\cos \theta + \cos \eta)},$$
$$Z_{3} = \frac{d_{s}}{2S} \sin(\theta + \eta)$$
(11)

ازآنجایی که تنشهای حرارتی و رطوبتی تقویت کننده ا جزئی بوده و به طور یکنواخت در تمام پنل توزیع می شود، از آن ها صرف نظر شده است. با استفاده از روابط تنش-کرنش به دست آمده به محاسبه منتجه های نیرو و ممان پرداخته شده است. معادلات منتجه های نیرو و ممان برای پنل استوانه ای تقویت شده مدرج تابعی به صورت روابط (12) و (13) حاصل می شود:

$$\begin{split} N_{x} &= A_{11}\varepsilon_{x}^{0} + A_{12}\varepsilon_{y}^{0} + A_{14}k_{x} + A_{15}k_{y} + \varphi_{1} \\ N_{y} &= A_{21}\varepsilon_{x}^{0} + A_{22}\varepsilon_{y}^{0} + A_{24}k_{x} + A_{25}k_{y} + \varphi_{1} \\ N_{xy} &= A_{33}\gamma_{xy}^{0} + 2A_{36}k_{xy} \end{split} \tag{12} \\ M_{x} &= A_{14}\varepsilon_{x}^{0} + A_{15}\varepsilon_{y}^{0} + A_{41}k_{x} + A_{42}k_{y} + \varphi_{2} \\ M_{y} &= A_{24}\varepsilon_{x}^{0} + A_{25}\varepsilon_{y}^{0} + A_{51}k_{x} + A_{52}k_{y} + \varphi_{2} \\ M_{xy} &= A_{36}\gamma_{xy}^{0} + 2A_{63}k_{xy} \tag{13} \\ (14) \qquad (14) \qquad (14) \qquad (14) \qquad (14) \qquad (14) \qquad (15) \qquad (16) \qquad (16) \qquad (17) \qquad (17) \qquad (17) \qquad (18) \qquad (18) \qquad (19) \qquad (19) \qquad (19) \qquad (19) \qquad (19) \qquad (11) \qquad (11) \qquad (11) \qquad (12) \qquad (12) \qquad (12) \qquad (13) \qquad (13) \qquad (13) \qquad (14) \qquad (14) \qquad (14) \qquad (16) \qquad (16) \qquad (16) \qquad (17) \qquad (17) \qquad (17) \qquad (18) \qquad (18) \qquad (19) \qquad (19) \qquad (19) \qquad (19) \qquad (19) \qquad (11) \qquad (11) \qquad (11) \qquad (12) \qquad (12) \qquad (13) \qquad (13) \qquad (13) \qquad (13) \qquad (14) \qquad (14) \qquad (14) \qquad (15) \qquad (15) \qquad (16) \qquad (16) \qquad (16) \qquad (17) \qquad (17) \qquad (17) \qquad (17) \qquad (18) \qquad (18) \qquad (18) \qquad (19) \qquad (19) \qquad (19) \qquad (19) \qquad (19) \qquad (11) \qquad (11) \qquad (11) \qquad (11) \qquad (12) \qquad (12) \qquad (13) \qquad (13) \qquad (13) \qquad (13) \qquad (14) \qquad (14) \qquad (14) \qquad (14) \qquad (14) \qquad (15) \qquad (15) \qquad (16) \qquad (16) \qquad (16) \qquad (17) \qquad (17) \qquad (17) \qquad (18) \qquad (18) \qquad (18) \qquad (18) \qquad (18) \qquad (19) \qquad (19) \qquad (19) \qquad (19) \qquad (19) \qquad (19) \qquad (11) \qquad (11) \qquad (11) \qquad (11) \qquad (12) \qquad (12) \qquad (13) \qquad (13) \qquad (13) \qquad (14) \qquad (14) \qquad (14) \qquad (15) \qquad (15) \qquad (16) \qquad (16)$$

<sup>4</sup> Poisson's ratio

$$\begin{split} D_{22}^* &= A_{24}B_{12}^* + A_{25}B_{22}^* + A_{52}, \\ D_{21}^* &= A_{24}B_{11}^* + A_{25}B_{21}^* + A_{51}, \\ D_{31}^* &= A_{14}C_{11}^* + A_{15}C_{21}^*, \\ C_{11}^{**} &= A_{14}C_{11}^* + A_{15}C_{21}^*, \\ C_{21}^{**} &= A_{24}C_{11}^* + A_{24}C_{21}^* \\ (22) \\ e^{-4x} &= (17) \ \text{ot} \$$

با جای گذاری رابطه (20) در معادله (16) رابطه (24) حاصل می شود:

$$A_{11}^{*}\frac{\partial^{4}f}{\partial x^{4}} + A_{22}^{*}\frac{\partial^{4}f}{\partial y^{4}} + (A_{33}^{*} - A_{12}^{*} - A_{21}^{*})\frac{\partial^{4}f}{\partial x^{2}\partial y^{2}}$$
$$-B_{21}^{*}\frac{\partial^{4}w}{\partial x^{4}} - B_{12}^{*}\frac{\partial^{4}w}{\partial y^{4}} - (B_{11}^{*} + B_{22}^{*} + 2B_{36}^{*})\frac{\partial^{4}w}{\partial x^{2}\partial y^{2}}$$
$$-(\frac{\partial^{2}w}{\partial x\partial y} - \frac{1}{R}\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}} - \frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}\frac{\partial^{2}w}{\partial y^{2}} + 2\frac{\partial^{2}w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^{2}w^{*}}{\partial x\partial y}$$
$$-\frac{\partial^{2}w^{*}}{\partial x^{2}}\frac{\partial^{2}w}{\partial y^{2}} - \frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}\frac{\partial^{2}w^{*}}{\partial y^{2}}) = 0$$
(24)

f معادلات (23) و (24) معادلات غیرخطی بر حسب دو پارامتر مجهول w و مىباشند. آنها براى تحليل پايدارى غيرخطى پنلهاى استوانهاى تقويتشده مدرج تابعي بر بستر الاستيک مورد استفاده قرار مي گيرند.

#### 2-2- تحليل كمانش مكانيكي

شرایط تکیه گاهی پنل، ساده میباشد. بسته به شرایط لبهها، شرایط مرزی به سه حالت زیر تعریف میشوند:

 $w = N_{xy} = M_x = 0, \ N_x = N_{x0}$  در  $x = 0, \ a$ (2.5) $w = N_{xy} = M_y = 0, \ N_y = N_{y0} \ organ y = 0, b,$ حالت 2: چهار لبه پنل استوانهای دارای شرایط تکیه گاهی ساده بوده و ثابت" میباشند. در این حالت شرایط مرزی به شکل رابطه (26) میباشد:

$$w = u = M_x = 0, N_x = N_{x0}$$
 (26)  
 $w = v = M_y = 0, N_y = N_{y0}$  (26)  
حالت 3: تمامی لبههای پنل استوانهای دارای تکیهگاه ساده میباشد. دو لبه

در x=0, a متحرک و دو لبه دیگر در y=0, b ثابت میباشند. در این حالت x=0, aشرایط مرزی به صورت رابطه (27) تعریف می شود :

$$w = N_{xy} = M_x = 0, \ N_x = N_{x0} \ x = 0, a$$
  
$$w = v = M_y = 0, \ N_y = N_{y0} \ y = 0, b,$$
(27)

که  $N_{x0}$  و  $N_{y0}$  بارهای فشاری صفحهای<sup>†</sup> در لبههای متحرک (حالت 1 و اولین قسمت از حالت 3) یا بارهای فشاری ایجادشده در لبههای ثابت (حالت 2 و قسمت دوم از حالت 3) میباشند. شرایط مرزی (25) تا (27) با در نظر گرفتن خیز پنل بهشکل رابطه (28)، ارضا خواهند شد:

$$w(x, y) = W \sin \lambda_m x \sin \delta_n y \tag{28}$$

که  $\lambda_m = m\pi/a$  و  $\delta_n = n\pi/b$  بوده و m, n = 1, 2, ... اعداد طبيعی هستند  $\lambda_m = m\pi/a$ 

ميباشند:

$$(\varphi_{1}, \varphi_{2}) = -\frac{1}{1-v} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z)[\alpha(z)\Delta T(1, z) + \beta(z)\Delta C(1, z)]dz$$
(14)

A<sub>ij</sub> مؤلفههای سفتی کششی، خمشی و کوپل شدهی پنل میباشند که مقدار آنها در پیوست ارائه شده است. N<sub>v</sub> ،N<sub>x</sub> و N<sub>x</sub> به ترتیب نیروهای نرمال و

نیروی برشی در صفحه میباشند. $M_x$ ،  $M_y$  و  $M_{xy}$  نیز به ترتیب گشتاورهای خمشی و گشتاور پیچشی صفحهای میباشند. معادلات تعادل غیرخطی پنل با استفاده از تئوری کلاسیک پوستهها در رابطه (15) ارائه شده است:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$
(ij) -15)  
$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0$$
(ij) -15)

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{N_y}{R} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial x} \right) + N_{xy} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[ N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) + N_{xy} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial x} \right) \right] \\ + q - k_1 w + k_2 \nabla^2 w = 0$$
(z -15)

فشار خارجی است که بهصورت یکنواخت بر سطح پنل توزیع شده است. q~ معادله سازگاری بهشکل رابطه (16) میباشد [20,19]:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$
(16)

با توجه به دو معادله اول تعادل (15-الف) و (15–ب)، تابع تنش (f(x,y به-صورت رابطه (17) تعريف مي شود:

$$N_{x} = \frac{\partial^{2} f}{\partial y^{2}}, N_{y} = \frac{\partial^{2} f}{\partial x^{2}}, N_{xy} = -\frac{\partial^{2} f}{\partial x \partial y}$$
(17)

$$\varepsilon_{x}^{0} = A_{22}^{*}N_{x} - A_{12}^{*}N_{y} + B_{11}^{*}k_{x} + B_{12}^{*}k_{y} + C_{11}^{*}\varphi_{1}$$

$$\varepsilon_{y}^{0} = A_{11}^{*}N_{y} - A_{21}^{*}N_{x} + B_{21}^{*}k_{x} + B_{22}^{*}k_{y} + C_{21}^{*}\varphi_{1}$$

$$\gamma_{y}^{0} = A_{33}^{*}N_{xy} - 2B_{36}^{*}k_{xy}$$
(18)

$$=A_{33}^*N_{xy} - 2B_{36}^*k_{xy} \tag{18}$$

ضرايب رابطه (18) بهصورت رابطه (19) مي باشد:

$$\Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}, A_{11}^* = \frac{A_{11}}{\Delta}, A_{22}^* = \frac{A_{22}}{\Delta}, A_{21}^* = \frac{A_{21}}{\Delta},$$

$$A_{12}^* = \frac{A_{12}}{\Delta}, A_{33}^* = \frac{1}{A_{33}}, B_{36}^* = \frac{A_{36}}{A_{33}}$$

$$B_{11}^* = A_{24}A_{12}^* - A_{14}A_{22}^*, B_{22}^* = A_{15}A_{21}^* - A_{25}A_{11}^*,$$

$$C_{11}^* = A_{12}^* - A_{22}^*, C_{21}^* = A_{21}^* - A_{11}^*,$$

$$B_{12}^* = A_{25}A_{12}^* - A_{15}A_{22}^*, B_{21}^* = A_{14}A_{21}^* - A_{24}A_{11}^*$$
(19)

ز جایگذاری رابطه (17) در معادله (18) رابطه (20) بهدست میآید:
$$\partial^2 f = \partial^2 f = \partial^2 f$$

$$\varepsilon_{x}^{\ 0} = A_{22}^{*} \frac{\partial y^{2}}{\partial y^{2}} - A_{12}^{*} \frac{\partial y^{2}}{\partial x^{2}} - B_{11}^{*} \frac{\partial x^{2}}{\partial x^{2}} - B_{12}^{*} \frac{\partial x^{2}}{\partial y^{2}} + C_{11}^{*} \varphi_{1}$$

$$\varepsilon_{y}^{\ 0} = A_{11}^{*} \frac{\partial^{2} f}{\partial x^{2}} - A_{21}^{*} \frac{\partial^{2} f}{\partial y^{2}} - B_{21}^{*} \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} - B_{22}^{*} \frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} + C_{21}^{*} \varphi_{1}$$

$$\gamma_{xy}^{\ 0} = -A_{33}^{*} \frac{\partial^{2} f}{\partial x \partial y} + 2B_{36}^{*} \frac{\partial^{2} w}{\partial x \partial y}$$
(20)

با جای گذاری معادله (18) در معادله (13)، رابطه (21) حاصل می شود: ضرایب رابطه (21) به شکل رابطه (22) میباشد:

$$M_{x} = B_{11}^{**}N_{x} + B_{21}^{**}N_{y} + D_{11}^{*}k_{x} + D_{12}^{*}k_{y} + C_{11}^{**}\varphi_{1} + \varphi_{2}$$
  

$$M_{y} = B_{12}^{**}N_{x} + B_{22}^{**}N_{y} + D_{21}^{*}k_{x} + D_{22}^{*}k_{y} + C_{21}^{**}\varphi_{1} + \varphi_{2}$$
(21)

 $\begin{array}{l} B_{11}^{**} = A_{14}A_{22}^* - A_{15}A_{21}^*, B_{21}^{**} = A_{15}A_{11}^* - A_{14}A_{12}^* \\ B_{12}^{**} = A_{24}A_{22}^* - A_{25}A_{21}^*, B_{22}^{**} = A_{25}A_{11}^* - A_{24}A_{12}^* \\ D_{12}^* = A_{14}B_{12}^* + A_{15}B_{22}^* + A_{42}, \end{array}$ 

www.SIZe.ir

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Simply support

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Freely movable (FM) <sup>3</sup> Immovable (IM)

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> In-plane compressive loads

و به ترتیب نشان دهنده تعداد نیم موج در جهت x و y می باشند. W دامنه خیز <sup>1</sup> می باشد. هم چنین نقص هندسی اولیه \* ۲ با رابطه ای مشابه با فرم معادله خیز پنل w، به شکل رابطه (29) تعریف می شود:  $w^*(x, y) = \mu h \sin \lambda_m x \sin \delta_n y$ (29)

که در این رابطه ضریب µ نشاندهنده اندازه نقص بوده و دارای مقداری بین 0 و 1 میباشد. با جایگذاری معادلات (28) و (29) در معادله (24) معادلهای با مشتقات جزئی<sup>۲</sup> از مرتبه 4 بهشکل رابطه (30) بهدست میآید:

$$2A_{11}^{*}\frac{\partial^{4}f}{\partial x^{4}} + 2A_{22}^{*}\frac{\partial^{4}f}{\partial y^{4}} + 2(A_{33}^{*} - A_{12}^{*} - A_{21}^{*})\frac{\partial^{4}f}{\partial x^{2}\partial y^{2}} = (\lambda_{m}^{2}\delta_{n}^{2})W(W + 2\mu h)\cos 2\lambda_{m}x + (\lambda_{m}^{2}\delta_{n}^{2})W(W + 2\mu h)\cos 2\delta_{n}y + 2[B_{21}^{*}\lambda_{m}^{4} + B_{12}^{*}\delta_{n}^{4} + (B_{11}^{*} + B_{22}^{*} + 2B_{36}^{*})\lambda_{m}^{2}\delta_{n}^{2} + \frac{1}{R}\lambda_{m}^{2}]W\sin \lambda_{m}x\sin \delta_{n}y$$
(30)

رابطه (30) یک معادله با مشتقات جزئی ناهمگن است. برای حل این معادله یک جواب، مشابه با جمله ناهمگن رابطه (30) با ضرایب مجهول حدس زده میشود و با جایگذاری در معادله، ضرایب مجهول بهصورت زیر بهدست می-آیند:

$$f = A_1 \cos 2\lambda_m x + A_2 \cos 2\delta_n y + A_3 \sin \lambda_m x \sin \delta_n y + \frac{1}{2} N_{x0} y^2 + \frac{1}{2} N_{y0} x^2$$
(31)

باید توجه نمود که دوجمله آخر اضافهشده به تابع تنش برای ارضا نمودن رابطه (17) میباشند. ضرایب *A*، بهشکل رابطه (32) میباشند:

$$A_{1} = \frac{\delta_{n}^{2}}{32A_{11}^{*}\lambda_{m}^{2}}W(W + 2\mu h), A_{2} = \frac{\lambda_{m}^{2}}{32A_{22}^{*}\delta_{n}^{2}}W(W + 2\mu h)$$

$$A_{3} = \frac{\left(B_{21}^{*}\lambda_{m}^{4} + (B_{11}^{*} + B_{22}^{*} + 2B_{36}^{*})\lambda_{m}^{2}\delta_{n}^{2} + B_{12}^{*}\delta_{n}^{4} + \frac{1}{R}\lambda_{m}^{2}\right)}{(A_{11}^{*}\lambda_{m}^{4} + (A_{33}^{*} - A_{12}^{*} - A_{21}^{*})\lambda_{m}^{2}\delta_{n}^{2} + A_{22}^{*}\delta_{n}^{4})}W$$
(32)

با قرار دادن روابط (28)، (29) و (31) در رابطه (23) و اعمال روش گالرکین<sup>۳</sup> در بازه x ≤ a و b و y ≤ b، پاسخ غیرخطی استاتیکی پنل استوانهای تقویتشده مدرج تابعی بر بستر الاستیک حاصل میشود:

$$\frac{mn\pi^{2}}{4\lambda_{m}\delta_{n}}\left[-\frac{\lambda_{m}^{2}}{R}\frac{(M_{1}+M_{2})}{M_{3}}-\frac{M_{1}M_{2}}{M_{3}}-\frac{\lambda_{m}^{4}}{R^{2}}\frac{1}{M_{3}}-D_{11}^{*}\lambda_{m}^{4}-(D_{12}^{*})\right] \\
+D_{21}^{*}-4D_{36}^{*}\lambda_{m}^{2}\delta_{n}^{2}-D_{22}^{*}\delta_{n}^{4}-k_{2}(\lambda_{m}^{2}+\delta_{n}^{2})-k_{1}\right]W \\
+\frac{8\lambda_{m}\delta_{n}}{3}\left[\frac{M_{1}}{M_{3}}+\frac{\lambda_{m}^{2}}{R}\frac{1}{M_{3}}\right]W(W+\mu h)+\left[\frac{\delta_{n}}{6A_{11}^{*}R\lambda_{m}}\right] \\
-\frac{2}{3}\left(\frac{B_{21}^{**}}{A_{11}^{*}}+\frac{B_{12}^{**}}{A_{22}^{*}}\lambda_{m}\delta_{n}\right]W(W+2\mu h)-\frac{mn\pi^{2}}{64\lambda_{m}\delta_{n}}\left(\frac{\lambda_{m}^{4}}{A_{22}^{*}}\right) \\
+\frac{\delta_{n}^{4}}{A_{11}^{*}}W(W+\mu h)(W+2\mu h)-\frac{mn\pi^{2}}{4\lambda_{m}\delta_{n}}\left(N_{x0}\lambda_{m}^{2}\right) \\
+N_{y0}\delta_{n}^{2}\left(W+\mu h\right)+\frac{4}{\lambda_{m}\delta_{n}}\frac{N_{y0}}{R}+\frac{4}{\lambda_{m}\delta_{n}}q=0$$
(33)

در رابطه بالا m و n اعداد فرد هستند و عبارات  $M_1$  و  $M_2$  بهصورت رابطه ( $M_1$  میباشند:

$$\begin{split} M_{1} &= \left[B_{21}^{*}\lambda_{m}^{4} + (B_{11}^{*} + B_{22}^{*} + 2B_{36}^{*})\lambda_{m}^{2}\delta_{n}^{2} + B_{12}^{*}\delta_{n}^{4}\right] \\ M_{2} &= \left[B_{21}^{*}\lambda_{m}^{4} + (B_{11}^{**} + B_{22}^{**} - 2B_{36}^{*})\lambda_{m}^{2}\delta_{n}^{2} - B_{12}^{**}\delta_{n}^{4}\right] \\ M_{3} &= \left[A_{11}^{*}\lambda_{m}^{4} + (A_{33}^{*} - A_{12}^{*} - A_{21}^{*})\lambda_{m}^{2}\delta_{n}^{2} + A_{22}^{*}\delta_{n}^{4}\right] \end{split}$$
(34)

در ادامه تحلیل کمانش پنل تحت بارگذاریهای مختلف ارائه شده است. پنل استوانهای با لبههای متحرک که فشار خارجی یکنواخت بر روی سطح بالایی آن اعمال میشود در نظر گرفته شده است. در این حالت از جایگذاری N<sub>x0</sub> = N<sub>y0</sub> = 0 در معادله (33)، رابطه (35) بهدست میآید :

$$= b_1^1 W + b_2^1 W (W + \mu) + b_3^1 W (W + 2\mu) + b_4^1 \overline{W} (\overline{W} + \mu) (\overline{W} + 2\mu)$$
(35)

ضرایب رابطه (35) در پیوست ارائه شده است. برای حالتی که فشار محوری  $F_x$  بهطور یکنواخت بر روی دو لبه انحنادار پنل در x=0, a در غیاب فشار  $F_x$  خارجی و بارهای حرارتی، اعمال می شود منتجه های نیروی پیش از کمانش عبارتند از:

$$q = 0. \ N_{y0} = 0. \ N_{x0} = -F_x h \tag{36}$$

با جای گذاری رابطه (36) در رابطه (33)، معادله (37) حاصل می شود:

$$F_{x} = b_{1}^{2} \frac{\overline{W}}{\overline{W} + \mu} + b_{2}^{2} \overline{W} + b_{3}^{2} \frac{\overline{W}(\overline{W} + 2\mu)}{\overline{W} + \mu} + b_{4}^{2} \overline{W}(\overline{W} + 2\mu)$$
(37)

ضرایب رابطه (37) در پیوست ارائه شده اند.

#### 3-2- تحليل كمانش هيگروترمال

در این حالت پنل در معرض محیط حرارتی و رطوبتی قرار دارد. شرایط عدم حرکت در لبهها با اعمال شرایط u = 0, a در x = 0, a و v = 0, c در v = 0, a در رابطه (38) برقرار خواهد شد [1]:

$$\int_{0}^{b} \int_{0}^{a} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = 0, \quad \int_{0}^{a} \int_{0}^{b} \frac{\partial v}{\partial y} dy dx = 0 \tag{38}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A_{22}^* \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - A_{12}^* \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - B_{11}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_{12}^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{11}^* \varphi_1$$
$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial x}$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = A_{11}^* \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - A_{21}^* \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - B_{21}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_{22}^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{21}^* \varphi_1$$
$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w^*}{\partial y} + \frac{w}{R}$$
(39)

از جایگذاری روابط (28)، (29) و (31)، در معادله (39) و سپس جایگذاری نتایج بهدست آمده در رابطه (38)، بارهای فشاری ایجادشده در لبهها مطابق روابط (40) و (41) بهدست میآیند:

$$N_{x0} = \varphi_{1} + \frac{4}{mn\pi^{2}} \{ \frac{\lambda_{m}^{2} \delta_{n}^{2}}{R} \frac{1}{M_{3}} + \delta_{n}^{2} \frac{M_{1}}{M_{3}} - \frac{1}{A_{11}^{*} A_{22}^{*} - A_{21}^{*} A_{12}^{*}} [(B_{11}^{*} A_{11}^{*} + B_{21}^{*} A_{12}^{*}) \lambda_{m}^{2} + (B_{12}^{*} A_{11}^{*} + B_{22}^{*} A_{12}^{*}) \delta_{n}^{2} + \frac{A_{12}^{*}}{R} ] \} W + \frac{1}{8(A_{11}^{*} A_{22}^{*} - A_{21}^{*} A_{12}^{*})} (A_{11}^{*} \lambda_{m}^{2} - A_{12}^{*} \delta_{n}^{2}) W (W + 2\mu h)$$

$$(40)$$

$$N_{y0} = \varphi_{1} + \frac{1}{mn\pi^{2}} \left\{ \frac{m}{R} \frac{1}{M_{3}} + \frac{\lambda_{m}^{2} \frac{1}{M_{3}}}{M_{3}} - \frac{1}{A_{11}^{*}A_{22}^{*} - A_{21}^{*}A_{11}^{*}} \right]$$

$$(B_{11}^{*}A_{21}^{*} + B_{21}^{*}A_{22}^{*})\lambda_{m}^{2} + (B_{12}^{*}A_{21}^{*} + B_{22}^{*}A_{22}^{*})\delta_{n}^{2} + \frac{A_{22}^{*}}{R} \right] W$$

$$+ \frac{1}{8(A_{11}^{*}A_{22}^{*} - A_{21}^{*}A_{12}^{*})} (A_{21}^{*}\lambda_{m}^{2} - A_{22}^{*}\delta_{n}^{2})W(W + 2\mu h)$$

$$(41)$$

4 prebuckling

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Amplitude of deflection

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> PDE <sup>3</sup> Galerkin method

$$+\frac{4}{mn\pi^{2}}\left[\frac{\delta_{n}^{2}}{6A_{11}^{*}\lambda_{m}^{2}R}-\frac{2}{3}\left(\frac{B_{21}^{*}}{A_{11}^{*}}+\frac{B_{12}^{*}}{A_{22}^{*}}\right)\delta_{n}^{2}\right]\frac{W(W+2\mu h)}{(W+\mu h)}$$
$$-\left[\frac{1}{16\lambda_{m}^{2}}\left(\frac{A_{11}^{*}\lambda_{m}^{4}+A_{22}^{*}\delta_{n}^{4}}{A_{11}^{*}A_{22}^{*}}\right)\right)$$
$$+\frac{1}{8}\left(\frac{A_{11}^{*}\lambda_{m}^{2}+A_{12}^{*}\delta_{n}^{2}}{A_{11}^{*}A_{22}^{*}}-A_{21}^{*}A_{12}^{*}\right)\right]W(W+2\mu h)$$
(42)

پارامتر 
$$arphi_1$$
 با توجه به رابطه (14) بهشکل معادله (43) میباشد: $arphi_1=-Ph\Delta T-Fh\Delta C$  (43)

که در این رابطه *P* و *F* به شکل رابطه (44) می باشد:  

$$(P, F) = \frac{1}{1 - v} [E_c(\alpha_c, \beta_c) + \frac{E_{\rm mc}(\alpha_c, \beta_c) + E_c(\alpha_{\rm mc}, \beta_{\rm mc})}{N + 1} + \frac{E_{\rm mc}(\alpha_{\rm mc}, \beta_{\rm mc})}{2N + 1}]$$
(44)

با جایگذاری رابطه (43) در رابطه (42)، رابطه (45) جهت محاسبه کمانش هیگروترمال حاصل می شود:

$$\Delta T = b_1^3 \frac{\overline{W}}{\overline{W} + \mu} + b_2^3 \overline{W} + b_3^3 \frac{\overline{W}(\overline{W} + 2\mu)}{\overline{W} + \mu} + b_4^3 \overline{W}(\overline{W} + 2\mu) - \frac{F}{P} \Delta C$$
(45)

ضرایب رابطه (45) در پیوست ارائه شده است.

معادله (45) نشاندهنده رابطه خیز-بار برای پس کمانش پنل استوانهای مدرج تابعی می باشد و برای ترسیم منحنیهای پس کمانش پنل تحت بار هیگروترمال استفاده میشود. دو طرف این معادله وابسته به دما می باشد که این امر، مسئله را بسیار پیچیده کرده است. الگوریتم تکرار برای تعیین روابط خیز-بار در یک دوره کمانش پنل استفاده میشود. برای توضیح بهتر، با ورود اطلاعاتی چون شاخص کسر حجمی *N*، پارامترهای هندسی (*R/h. h/k*) و مقدار *M/h*، می توان *T* $\Delta$  را از معادله (44) به دست آورد. در ابتدا با فرض 0 =در نظر گرفته می شود. در مرحله بعد *T* $\Delta$  به دست آمده از مرحله قبل، در سمت راست معادله، جایگزین می شود تا 2T مشخص شود. در صورت برقراری شرایط  $3 \ge |_{T}\Delta - T\Delta|$ ، فرایند تکرار در *x* امین مرحله متوقف خواهد شد. در این جا *T* $\Delta$  پاسخ دلخواه دما و *3* تلورانس مراحل تکرارمی باشد.

#### 4-2- تحليل كمانش هيگروترمومكانيكي

کمانش هیگروترمومکانیکی پنل برای دو حالت توزیع دمای یکنواخت و خطی در راستای ضخامت پنل بررسی میشود (توزیع رطوبت در هر دو حالت یکنواخت می باشد):

در حالت توزیع دمای یکنواخت دمای محیط بهطور یکنواخت از دمای اولیه  $T_{\rm f}$  تا دمای نهایی  $T_{\rm f}$  افزایش پیدا میکند که در نتیجه اختلاف دما  $T_{\rm i}$  مای نهایی  $\Delta T = T_{\rm f} - T_{\rm i}$ 

برای پنل با شرایط مرزی حالت 2 ، هنگامی که در معرض افزایش دمای یکنواخت  $\Delta T$  و فشار یکنواخت q قرار گیرد از جای گذاری معادله (43) در روابط (40) و (41) و سپس جای گذاری نتیجه حاصل در معادله (33)، رابطه (46) حاصل می شود:

 $q = b_1^4 \overline{W} + b_2^4 \overline{W} (\overline{W} + \mu) + b_3^4 \overline{W} (\overline{W} + 2\mu) + b_4^4 \overline{W} (\overline{W} + \mu) (\overline{W} + 2\mu) + b_5^4 (P\Delta T + F\Delta C) (\overline{W} + \mu) + b_6^4 (P\Delta T + F\Delta C)$  (46)

ضرایب معادله (46) در پیوست ارائه شده است.

برای پنل با شرایط مرزی حالت 3 از جایگذاری معادله (43) در رابطه (41) و سپس جایگذاری نتیجه حاصل در معادله (33)، تحلیل دیگری از کمانش هیگروترمومکانیکی حاصل میشود که بهصورت رابطه (47) بهدست میآید:

$$\begin{aligned} q &= b_1^5 \overline{W} + b_2^5 \overline{W} (\overline{W} + \mu) + b_3^5 \overline{W} (\overline{W} + 2\mu) + b_4^5 \overline{W} (\overline{W} \\ &+ \mu) (\overline{W} + 2\mu) + b_5^5 (P\Delta T + F\Delta C) (\overline{W} + \mu) \\ &+ b_6^5 (P\Delta T + F\Delta C) \end{aligned}$$

ضرایب  $b_1^5$  تا  $b_6^5$  در پیوست ارائه شده است.

(47)

در حالت توزیع دمای خطی، دما در راستای ضخامت پنل از معادله یکبعدی فوریه در شرایط حالت پایدار پیروی میکند [6]:

$$\frac{d}{dz} \left[ K(z) \frac{dT}{dz} \right] = 0, \quad T(z = h/2) = T_{\rm c}, T(z = -h/2) = T_{\rm m}$$
(48)

که  $T_{\rm c}$  و  $T_{\rm m}$  به ترتیب دمای سطح سرامیکی و فلزی میباشند. حل معادله (48) به صورت یک سری چندجمله ای میباشد که با استفاده از هفت جمله (48) اول این سری پاسخ توزیع دما در راستای ضخامت پنل به شکل رابطه (49) حاصل می شود:

$$T(z) = T_{\rm m} + \Delta T \frac{r \sum_{k=0}^{5} \frac{\left(-r^{N} K_{\rm cm}/K_{\rm m}\right)^{k}}{kN+1}}{\sum_{k=0}^{5} \frac{\left(-K_{\rm cm}/K_{\rm m}\right)^{k}}{kN+1}}$$
(49)

که در این رابطه  $\Delta T = T_c - T_m$  اختلاف دما بین سطح سرامیکی و فلزی پنل مدرج تابعی میباشد. T و  $K_{cm}$  بهصورت معادله (50) میباشد:

$$r = (2z + h)/2h$$
,  $K_{\rm cm} = K_{\rm c} - K_{\rm m}$  (50)

و فلز میباشند، و دمای  $K_{\rm c}$  و  $K_{\rm c}$  میباشند، و دمای  $K_{\rm c}$  میلی به عنوان دمای مرجع در نظر گرفته میشود. از جای گذاری معادله (48) در رابطه (11) با فرض  $\Delta c = 0$  ، رابطه (15) حاصل میشود:

$$\varphi_{1} = Hh\Delta T ,$$

$$H = \frac{\sum_{k=0}^{5} \frac{(-K_{cm}/K_{m})^{k}}{kN+1} \left[ \frac{E_{m}\alpha_{m}}{kN+2} + \frac{E_{m}\alpha_{cm} + E_{cm}\alpha_{m}}{(k+1)N+2} + \frac{E_{cm}\alpha_{cm}}{(k+2)N+2} \right]}{\sum_{k=0}^{5} \frac{(-K_{cm}/K_{m})^{k}}{kN+1}}$$
(51)

در معادله (46) و (47) با جایگزین کردن H به جای P منحنیهای پس-کمانش در حالت بارگذاری هیگروترمومکانیکی در شرایط توزیع دمای خطی در راستای ضخامت پنل، حاصل میشود. در اینجا به سبب مختصرنویسی از تکرار دوباره روابط خودداری شده است.

#### 3- نتايج عددي

به منظور اعتبارسنجی فرمول بندی حاضر، در شکل 3 نتایج مطالعه حاضر با نتایج موجود در مقاله شن و همکاران [21] برای پس کمانش پنل استوانهای بدون تقویت کننده مقایسه شده است. همچنین نتایج پس کمانش پنل استوانهای با تقویت کننده های طولی و حلقوی تحت بارگذاری حرارتی، با نتایج موجود در مقاله داک و همکاران [10] در شکل 4 مقایسه شده است.

در ادامه، نتایج حاصل از تحلیل حاضر ارائه شده است. بدین منظور اندازه کلیه پارامترهای مورد نیاز برای تحلیل کمانش پنل در جدولهای 1 و 2 بیان شده است. در صورتی که اندازه پارامتری با اندازه پارامترهای موجود در جدولها، متفاوت باشد، اندازه آن پارامتر بیان میشود. . با توجه به این که پاسخ کمانش و پس کمانش پنلهای استوانهای اغلب در مدهای کمانش m=n=1 بیان میشوند [9]، در این مقاله نیز نتایج بر اساس همین مقادیر حاصل شدهاند.

برای ترسیم منحنیهای خیز-بار برای بارهای حرارتی و ترمومکانیکی، کافی است در روابط (45) تا (47) مقدار تغییرات درصد رطوبت (Δ*C*) برابر با صفر قرار داده شود. در شکلهای 5 تا 7 به بررسی نتایج تحلیل استاتیکی پنل استوانهای مدرج تابعی با تقویتکنندههای مایل برای زوایای مختلف تحت بارگذاریهای مکانیکی، حرارتی و ترمومکانیکی پرداخته شده است. برای بررسی نتایج حاصل، در هر بارگذاری ابتدا با تغییر زوایای تقویتکنندههای

مایل، زاویهای که در آنها بهترین نتایج حاصل شده است را یافته و سپس به بررسی اثر سایر پارامترها در آن زوایا پرداخته شده است. شکلهای 5 و 6، تأثیر زوایای مختلف بر منحنی پس کمانش پنل با تقویت کنندههای مایل به ترتیب تحت فشار محوری و بارگذاری حرارتی را نشان میدهد. در این شکلhetaها نتایج پس کمانش پنل برای زوایای مختلف تقویت کننده با تغییر در زاویه از  $^{00}$  تا  $^{900}$  و زاویه  $\eta$  برای سه مقدار  $^{00}$ ،  $^{00}$  و  $^{900}$  ارائه شده است. شکل 7 تأثیر زوایای مختلف بر منحنی پس کمانش پنل با دو لبه ثابت و توزیع دمای یکنواخت، چهار لبه ثابت و توزیع دمای خطی در راستای ضخامت پنل، تحت بار ترمومکانیکی را نشان میدهد. در این شکل به دلیل تشابه در نتایج حاصل، از ارائه همه آنها خودداری شده است و تنها چند منحنی شاخص از بین نتایج ارائه شده است.



Fig. 3 Comparison of postbuckling curves for the panel under thermo-mechanical load



for the stiffened panel

 $\alpha_{\rm m}$  (K<sup>-1</sup>)

 $K_{\rm m}$  (W/mK)

 $\beta_{\rm m}$  (1/wt%H<sub>2</sub>O)

**شکل 4** مقایسه منحنیهای

ماده سرامیک (Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>)

فلز (SUS304)

**جدول 2** خواص مکانیک

8 نشان داده شده است کاهش ظرفیت تحمل ب	استوانهای در شکل ی هندسی اولیه سبب	µ بر پسکمانش پنل میشود که وجود نقص	ضریب مشاهده	0 0	0.5 1 <sub>W/h</sub>	1.5
		گردد.	پنل می	Fig. 4 Comparison under thermal load	n of postbuckling curv	'es
	¥			ت بار حرارتی	کمانش پنل تقویتشده تح	ہىر
				[22,10]	پنل استوانهای مدرج تابعی	ی
Table 2 Mechanics	al properties of FG c	ylindrical panel				
$P_3$	$P_2$	$P_1$	$P_{-1}$	$P_0$	خاصيت	
-8.946×10 <sup>-11</sup>	2.160×10-7	3.7×10 <sup>-4</sup>	0	348.43×109	$E_{\rm c}$ (Pa)	
0	0	9.095×10 <sup>-4</sup>	0	5.8723×10 <sup>-6</sup>	$\alpha_{\rm c}~({ m K}^{-1})$	
0	0	0	0	13.723	$K_{\rm c}$ (W/mK)	
0	0	0	0	0	$\beta_{\rm c}$ (1/wt%H <sub>2</sub> O)	
0	-6.534×10 <sup>-7</sup>	3.079×10 <sup>-4</sup>	0	201.04×109	$E_{\rm m}$ (Pa)	

0

0

0

12.330×10-6

15.379 5×10<sup>-4</sup>

8.086×10-4

0

0

جدول 1 پارامترهای استفادهشده برای تحلیل پس کمانش پنل استوانهای تقویتشده Table 1 Parameters used for postbuckling analysis of stiffened cylindrical panel

- بارامتر	نماد	مقدار
ضخامت پنل	<i>h</i> (m)	0.04
نسبت طول کمان به طول محوری پنل	b/a	1
نسبت طول کمان به ضخامت پنل	b/h	50
نسبت طول کمان به شعاع انحنای پنل	b/R	0.5
ضخامت تقويت كنندهها	$h_{\rm s}({\rm m})$	0.03
عرض تقويت كنندهها	$d_{s}\left(\mathrm{m} ight)$	0.05
فاصله بين تقويت كنندهها	<i>S</i> (m)	0.4
شاخص کسر حجمی	Ν	1
ندازه نقص	μ	0.1
مدول بستر وینکلر (بیبعد)	$K_1$	100
مدول سفتی لایه برشی پسترناک (بیبعد)	$K_2$	30
نسبت پواسون	ν	0.3
دمای محیط	$T_0(\mathbf{K})$	300

همان طور که مشاهده می شود در هر سه نوع بار گذاری مکانیکی، حرارتی و ترمومکانیکی، با افزایش زاویهی تقویتکنندهها، ظرفیت تحمل بار ینل کمتر می شود. بیشترین ظرفیت تحمل بار مربوط به پنل با تقویت کننده های طولی و کمترین ظرفیت تحمل بار مربوط به تقویت کنندههای ( $\theta = \eta = 0^{\circ}$ ) حلقوي ( $\theta = \eta = 90^{\circ}$ ) مي باشد.

با بررسی تأثیر زوایای مختلف تقویتکنندهها بر نتایج پسکمانش پنل استوانهای تقویت شده مدرج تابعی مشاهده می شود که در همه بارگذاری های عمال شده، بهترین نتایج در شرایطی حاصل می شود که تقویت کننده ها طولی باشند. در ادامه تأثیر سایر پارامترها بر پس کمانش پنل با تقویت کنندههای طولی تحت بار گذاریهای ذکرشده، ارائه شده است.

شکلهای 8 و 9 به ترتیب نتایج تأثیر پارامترهای هندسی *b/a b/h* و *b/k* را بر یاسخ غیرخطی ینل نشان میدهد. مشاهده می شود که با افزایش نسبت b/h ظرفیت تحمل بار پنل کاهش می یابد. به عبارت دیگر هرچه پنل ناز کتر شود ظرفيت تحمل بار أن كمتر مى شود. هم چنين افزايش نسبت b/a و b/a سبب افزایش ظرفیت تحمل بار پنل می شود. هم چنین تأثیر نقص هندسی اولیه با ت. بار

0

0

0

0

0

0



Fig. 8 Effect of ratio b/h on postbuckling of panel under axial compressive load

شکل 8 تأثیر نسبت b/h بر پس کمانش پنل تحت بار محوری فشاری



Fig. 9 Effect of ratio b/a and b/R on postbuckling of panel under uniform external pressure and thermos-mechanical load (4 immovable edges) respectively

**شکل 9** تأثیر نسبت *b/a و b/a* بر پس *ک*مانش پنل به ترتیب تحت فشار خارجی یکنواخت و بار ترمومکانیکی (4 لبه ثابت)

تأثیر تقویت کننده و افزایش دمای  $\Delta T$  بر پس کمانش پنل استوانه ی در شکل 11 نشان داده شده است. مشاهده می شود که ظرفیت تحمل بار پنل تقویت شده بیشتر از پنل بدون تقویت کننده می باشد به عبارت دیگر تقویت -کننده ها می توانند میزان مقاومت پنل را نسبت به بارگذاری صورت گرفته افزایش دهند. علاوه بر این، افزایش دما سبب کاهش ظرفیت تحمل بار پنل می شود. هم چنین ظرفیت تحمل بار پنل با خواص مستقل از دما بیشتر از پنل با خواص وابسته به دما می باشد. با این وجود در نظر گرفتن خواص وابسته به دما برای پنل سبب دستیابی به تحلیل رفتار آن با شرایطی نزدیک -تر به واقعیت می گردد.

شکل 12 به بررسی تأثیر بستر الاستیک بر پاسخ غیرخطی پنل تحت بار ترمومکانیکی می پردازد. مشاهده می شود که ظرفیت تحمل بار پنل به طور قابل ملاحظهای در حضور بسترهای الاستیک افزایش می ابد. به علاوه مشاهده می شود که تأثیر مثبت بستر الاستیک پاسترناک بر پس کمانش پنل بیشتر از بستر الاستیک وینکلر می باشد.

اثر شرایط مرزی مختلف بر پاسخ غیرخطی پنل استوانهای تقویتشده مدرج تابعی تحت فشار عرضی یکنواخت در شکل 13 نشان داده شده است. همانطور که مشاهده میشود ظرفیت تحمل بار پنل با چهار لبه ثابت بیشتر از پنل با دو لبه ثابت است. همچنین ظرفیت تحمل بار پنل با چهار لبه متحرک از همه کمتر است. این نمودار برای 0 =  $\Delta T$  رسم شده است.



Fig. 5 Postbuckling curves for the panel with different angles of stiffeners under axial compressive load

**شکل 5** منحنی پسکمانش پنل برای زوایای مختلف تقویتکننده تحت فشار محوری



Fig. 6 Postbuckling curves for the panel with different angles of stiffeners under thermal load

**شکل 6** منحنی پسکمانش پنل برای زوایای مختلف تقویتکننده تحت بار حرارتی



Fig. 7 Postbuckling curves for the panel with different angles of stiffeners under thermo-mechanical load

**شکل 7** منحنی پسکمانش پنل برای زوایای مختلف تقویتکننده تحت بار ترمو-مکانیکی

شکل 10 بیانگر تأثیر شاخص کسر حجمی بر منحنی پس کمانش پنل استوانهای تحت بار ترمومکانیکی میباشد. 0=N نشاندهنده پنل فلزی و ∞=N نشاندهنده پنل سرامیکی است. همان طور که مشاهده میشود با افزایش شاخص کسر حجمی، بار بحرانی کمانش افزایش پیدا میکند. پنل استوانهای سرامیکی در برابر بار کمانش مقاومت به مراتب بالاتری نسبت به پنل استوانه-ای فلزی دارد که با توجه به سفتی کمتر فلزات، مورد انتظار است.



Fig. 13 Effect of boundary conditions on postbuckling of panel



Fig. 14 Effect of moisture concentration on postbuckling of panel under hygro-thermal load



**Fig. 15** Effect of moisture concentration on postbuckling of panel under hygro-thermo-mechanical load with uniform temperature distribution (4 immovable edges)

شکل 15 تأثیر درصد رطوبت بر پسکمانش بنل تحت بار هیگروترمومکانیکی با توزیع دمای یکنواخت (4 لبه ثابت)

توزیع دمای خطی و یکنواخت نیز مقایسه شده است. بهطوری که منحنی خیز-بار که برای Tc=300 رسم شده است نشاندهنده توزیع یکنواخت دما در راستای ضخامت پنل با  $0 = \Delta T$  میباشد و منحنیهایی که برای سایر دماها رسم شدهاند نشاندهنده توزیع دمای خطی هستند. مشاهده میشود که توزیع دمای خطی سبب افزایش ظرفیت تحمل بار پنل میشود.

#### 4- نتيجه گيري

در این مقاله یک روش تحلیلی برای بررسی پس کمانش پنلهای نازک استوانهای مدرج تابعی با تقویت کنندههای مایل بر بستر الاستیک تحت بار-گذاریهای هیگروترمومکانیکی ارائه شده است. معادلات حاکم براساس تئوری



**Fig. 10** Effect of volume fraction index on postbuckling of panel under thermo-mechanical load with uniform temperature distribution (4 immovable edges)

**شکل 1**0 تأثیر شاخص کسر حجمی بر پسکمانش پنل تحت بار ترمومکانیکی با



Fig. 11 Effect of stiffeners and temperature increment on postbuckling of panel under axial compressive load

شکل 11 تأثیر تقویت کنندهها و افزایش دما بر پس کمانش پنل تحت بار محوری



**Fig. 12** Effect of elastic foundations on postbuckling of panel under thermo-mechanical load with uniform temperature distribution (4 immovable edges)

شکل 12 تأثیر بسترهای الاستیک بر پس کمانش پنل تحت بار ترمومکانیکی با توزیع دمای یکنواخت (4 لبه ثابت)

در شکلهای 14 تا 16 به ترتیب نتایج تأثیر رطوبت بر پاسخ غیرخطی پنل تحت بارهای هیگروترمال، هیگروترمومکانیکی با توزیع دمای خطی و یکنواخت در راستای ضخامت پنل نشان داده شده است. مشاهده میشود که افزایش درصد رطوبت سبب کاهش ظرفیت تحمل بار پنل میگردد. همچنین در شکل 16 تأثیر رطوبت و توزیع دمای خطی و یکنواخت نیز بر پس کمانش پنل بررسی شده است. دمای سطح فلزی X 300 در نظر گرفته شده است.

مشاهده میشود که وجود گرادیان دما در ضخامت پنل سبب ایجاد خیز کمتر و رفتار پس کمانش پایدارتر در پنل میشود. همچنین در این شکل

$$\begin{split} &+m^3 n^3 \pi^6 B_a^2 (\overline{D}_{12}^{**} + \overline{D}_{21}^{**} - 4\overline{D}_{36}^{*}) + m^5 \pi^6 \overline{D}_{22}^{**}] \\ &+ \frac{mn \pi^2 B_a^4 \overline{D}_{11}^{**} K_1}{16 B_h^4} + \frac{mn \pi^4 K_2 B_a^2 \overline{D}_{11}^{**}}{16 B_h^4} (m^2 B_a^2 + n^2) \\ &b_2^1 = -\frac{2m^2 n^2 \pi^4 B_a^2}{3 B_h^4} \overline{M_3} - \frac{2m^4 n^2 \pi^2 B_a^4 R_b}{3 B_h^3} \frac{1}{\overline{M_3}} \\ &b_3^1 = -\frac{n^2 \pi^2 R_b}{24 \overline{A}_{11}^* B_h^3} + \frac{m^2 n^2 \pi^4 B_a^2}{6 B_h^4} \left( \frac{\overline{B}_{21}^{**}}{\overline{A}_{11}^{**} + \overline{A}_{22}^{**}} \right), \\ &b_4^1 = \frac{mn \pi^6}{256 B_h^4} \left( \frac{m^4 B_a^4}{\overline{A}_{22}^*} + \frac{n^4}{A_{11}^*} \right) \end{split}$$

که در رابطه بالا:

$$\begin{split} &K_{1} = \frac{k_{1}a^{4}}{D_{11}^{*}}, K_{2} = \frac{k_{2}a^{2}}{D_{11}^{*}}, \overline{A_{11}^{*}} = hA_{11}^{*}, \overline{A_{22}^{*}} = hA_{22}^{*}, \\ &\overline{A_{12}^{*}} = hA_{12}^{*}, \overline{A_{21}^{*}} = hA_{21}^{*}, \overline{A_{33}^{*}} = hA_{33}^{*}, \overline{B_{11}^{*}} = \frac{B_{11}^{*}}{h}, \\ &\overline{B_{22}^{*}} = \frac{B_{22}^{*}}{h}, \overline{B_{12}^{*}} = \frac{B_{12}^{*}}{h}, \overline{B_{21}^{*}} = \frac{B_{21}^{*}}{h}, \overline{B_{36}^{*}} = \frac{B_{36}^{*}}{h}, \overline{B_{11}^{**}} = \frac{B_{11}^{**}}{h}, \\ &\overline{B_{22}^{*}} = \frac{B_{22}^{*}}{h}, \overline{B_{12}^{**}} = \frac{B_{12}^{*}}{h}, \overline{B_{21}^{**}} = \frac{B_{21}^{*}}{h}, \overline{B_{36}^{*}} = \frac{B_{36}^{*}}{h}, \overline{B_{11}^{**}} = \frac{B_{11}^{**}}{h}, \\ &\overline{B_{22}^{*}} = \frac{B_{22}^{*}}{h}, \overline{B_{12}^{**}} = \frac{B_{12}^{*}}{h}, \overline{B_{21}^{*}} = \frac{B_{21}^{*}}{h}, \overline{B_{36}^{*}} = \frac{B_{36}^{*}}{h}, \overline{B_{11}^{**}} = \frac{B_{11}^{**}}{h}, \\ &\overline{D_{22}^{*}} = \frac{B_{22}^{*}}{h}, \overline{B_{12}^{**}} = \frac{B_{12}^{*}}{h}, \overline{B_{21}^{*}} = \frac{B_{21}^{*}}{h}, \overline{B_{36}^{*}} = \frac{B_{36}^{*}}{h}, \overline{B_{11}^{**}} = \frac{B_{11}^{**}}{h}, \\ &\overline{D_{22}^{*}} = \frac{B_{22}^{*}}{h}, \overline{B_{12}^{**}} = \frac{B_{12}^{**}}{h}, \overline{B_{21}^{*}} = \frac{B_{21}^{**}}{h}, \overline{B_{36}^{*}} = \frac{B_{36}^{*}}{h}, \overline{B_{11}^{**}} = \frac{B_{11}^{**}}{h}, \\ &\overline{D_{22}^{*}} = \frac{B_{22}^{*}}{h}, \overline{B_{12}^{*}} = \frac{B_{12}^{**}}{h}, \overline{B_{21}^{*}} = \frac{B_{21}^{**}}{h}, \overline{B_{36}^{*}} = \frac{B_{36}^{**}}{h}, \overline{B_{36}^{*}} = \frac{B_{36}^{**}}{h}, \\ &\overline{B_{1}^{*}} = \frac{B_{11}^{**}}{h}, \\ &\overline{B_{1}^{*}} = \frac{B_{12}^{**}}{h}, \overline{B_{12}^{*}} = \frac{B_{12}^{**}}{h}, \overline{B_{21}^{*}} = \frac{B_{21}^{**}}{h}, \overline{B_{36}^{*}} = \frac{B_{36}^{**}}{h}, \\ &\overline{B_{1}^{*}} = \frac{B_{11}^{**}}{h}, \\ &\overline{B_{1}^{*}} = \frac{B_{11}^{*}}{h}, \\ &\overline{B_{1}^{*}} = \frac{B_{11}^{*}}{h}, \\ &\overline{B_{1}^{*}} = \frac{B_{11}^{*}}{h}, \\ &\overline{B_{11}^{*}} = \frac{B_{11}^{*}}{h}, \\ &\overline{B_{1}^{*}} = \frac{B_{12}^{*}}{h}, \\ &\overline{B_{1}^{*}} = \frac{B_{21}^{*}}{h}, \\ &\overline{B_{1}^{*}} = \frac{B_{12}^{*}}{h}, \\ &\overline{B_{1}^{*}} = \frac{B_{12}^{*}}{h}, \\ &\overline{B_{1}^{*}} = \frac{B_{12}^{*}}{h}, \\ &\overline{B_{1$$



Fig. 16 Effects of temperature gradient and moisture concentration on postbuckling of panel under hygro-thermo-mechanical load (4 immovable edges)

شکل 16 اثر گرادیان دما و درصد رطوبت بر پس کمانش پنل تحت بار هیگروترمو-مکانیکی (4 لبه ثابت)

کلاسیک پوستهها، روابط غیرخطی فن کارمن-دانل، نقص هندسی اولیه، روش تقویتکنندههای تکهای و مدل پیشنهادی بسترهای الاستیک وینکلر و پاسترناک استخراج شده است. روابط صریح و منحنیهای خیز-بار با استفاده از تابع تنش و روش گالرکین بهدست آمده است.

بعضی از نتایج بهدست آمده از تحلیل استاتیکی پنل عبارتند از: الف) تقویت کننده ها، بسترهای الاستیک و ثابت کردن لبه های پنل سبب افزایش ظرفیت تحمل بار پنل می شوند. بیشترین ظرفیت تحمل بار مکانیکی و حرارتی مربوط به پنل با تقویت کننده های طولی و کمترین ظرفیت تحمل بار مربوط به پنل با تقویت کننده های حلقوی می باشد. اما احتمال این که در انواع دیگر بارگذاری تأثیر زاویه تقویت کننده های مایل بیشتر باشد، وجود دارد [18,16].

ب) همواره در طی فرایندهای ساخت یک سازه نقصهای هندسی اولیه در آن
 بهوجود میآید. ظرفیت تحمل بارهای مکانیکی و حرارتی پنل بدون نقص از
 پنل با نقص هندسی اولیه بیشتر است و هرچه اندازه نقص افزایش یابد
 ظرفیت تحمل بار کاهش می یابد.

ج) وجود گرادیان دما در ضخامت پنل سبب ایجاد خیز کمتر و رفتار پس-کمانش پایدارتر در پنل میشود. همچنین توزیع دمای خطی سبب افزایش ظرفیت تحمل بار پنل، نسبت به توزیع دمای یکنواخت میشود.

د) افزایش درصد رطوبت سبب کاهش ظرفیت تحمل بارهای هیگروترمال و هیگروترمومکانیکی پنل میگردد.

#### 5- پيوست

$$\begin{split} A_{11} &= \frac{E_1}{1 - v^2} + Z_1 E_s h_s^T S_1, \ A_{12} &= \frac{E_1 v}{1 - v^2} + Z_1 E_s h_s^T S_2 \\ A_{14} &= \frac{E_2}{1 - v^2} + Z_1 E_s h_s^T z^T S_1, A_{15} &= \frac{E_2 v}{1 - v^2} \\ + Z_1 E_s h_s^T z^T S_2, A_{21} &= \frac{E_1 v}{1 - v^2} \\ + Z_2 E_s h_s^T S_3, \ A_{22} &= \frac{E_1}{1 - v^2} + Z_2 E_s h_s^T S_4 \\ A_{24} &= \frac{E_2 v}{1 - v^2} + Z_2 E_s h_s^T z^T S_3, \ A_{25} &= \frac{E_2}{1 - v^2} \\ + Z_2 E_s h_s^T z^T S_4, A_{33} &= \frac{E_1}{2(1 + v)} + 2Z_3 E_s h_s^T S_5 \\ A_{36} &= \frac{E_3}{2(1 + v)} + 2Z_3 E_s h_s^T z^T S_5, \ A_{41} &= \frac{E_3}{1 - v^2} \end{split}$$

$$\begin{split} &-\frac{\pi^4}{4B_h^4}\frac{1}{\left(\overline{A_{11}^*A_{22}^*}-\overline{A_{21}^*A_{12}^*}\right)}\left[\left(\overline{B_{11}^*A_{21}^*}+\overline{B_{21}^*A_{22}^*}\right)m^2n^2B_a^2\right.\\ &+\left(\overline{B_{12}^*A_{21}^*}+\overline{B_{22}^*A_{22}^*}\right)n^4\right],\ b_3^5&=b_3^4,\ b_4^5\\ &=\frac{mn\pi^6}{256B_h^4}\left(\frac{m^4B_a^4}{\overline{A_{22}^*}}+\frac{n^4}{\overline{A_{11}^*}}\right)+\frac{mn^3\pi^6\left(\overline{A_{21}^*m^2B_a^2}+\overline{A_{22}^*n^2}\right)}{128B_h^4}\left(\overline{A_{11}^*A_{22}^*}-\overline{A_{21}^*A_{12}^*}\right)\\ &,\ b_5^5&=-\frac{\pi^4mn^3}{16B_h^2},\ b_6^5&=\frac{R_b}{B_h} \end{split}$$

#### 6- مراجع

- H. S. Shen, H. Wang, Thermal postbuckling of FGM cylindrical panels resting on elastic foundations, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 38, No. 1, pp. 9-19, 2014.
- [2] H. S. Shen, H. Wang, Nonlinear bending of FGM cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments, *European Journal of Mechanics / A Solids*, Vol. 49, No. 1, pp. 49-59, 2015.
- [3] C. Y. Lee, J. H. Kim, Thermal post-buckling and snap-through instabilities of FGM panels in hypersonic flows, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 30, No. 1, pp. 175-182, 2013.
  [4] A. Alibeigloo, W. Q. Chen, Elasticity solution for an FGM cylindrical panel
- [4] A. Alibeigloo, W. Q. Chen, Elasticity solution for an FGM cylindrical panel in-tegrated with piezoelectric layers, *European Journal of Mechanics / A Solids*, Vol. 29, No. 4, pp. 714-723, 2010.
- [5] H. V. Tung, N. D. Duc, Nonlinear response of shear deformable FGM curved panels resting on elastic foundations subjected to mechanical an thermal loading conditions, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 38, No. 11-12, pp. 2848-2866, 2014.
- [6] N. D. Duc, H. V. Tung, Nonlinear response of pressure-loaded functionally graded cylindrical panels with temperature effects, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 7, pp. 1664-1672, 2010.
- [7] M. M. Aghdam, K. Bigdeli, N. Shahmansouri, A semi-analytical solution for bending of moderately thick curved functionally graded panels, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 17, No. 2, pp. 320-327, 2010.
- [8] J. Yang, K. M. Liew, Y. F. Wu, S. Kitipornchai, Thermo-mechanical postbuckling of FGM cylindrical panels with temperatur-depenent properties, *Internal Journal Solids and Structures*, Vol. 43, No. 2, pp. 307-324, 2006.
- [9] H. V. Tung, Postbuckling behavior of functionally graded cylindrical panels with tangential edge constraints and resting on elastic foundations, *Composite Structures*, Vol. 100, No. 2, pp. 532-541, 2013.
  [10] N. D. Duc, N. D. Tuan, T. Q. Quan, N. V. Quyen, T. V. Anh, Nonlinear
- [10] N. D. Duc, N. D. Tuan, T. Q. Quan, N. V. Quyen, T. V. Anh, Nonlinear mechanical, thermal and thermo-mechanical postbuckling of imperfect eccentrically stiffened thin FGM cylinrical panels on elastic foundations, *Thin-Walled Structures*, Vol. 96, No. 1, pp. 155-168, 2015.
  [11] M. M. Najafizadeh, A. Hasani, P. Khazaeinejad, Mechanical stability of
- [11] M. M. Najafizadeh, A. Hasani, P. Khazaeinejad, Mechanical stability of functionally graded stiffened cylindrical shells, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 33, No. 2, pp. 1151-1157, 2009.
- [12] D. V. Dung, D. T. Dong, Post-buckling analysis of functionally graded doubly curved shallow shells reinforced by FGM stiffeners with temperature-depenent material and stiffener properties based on TSDT, *Mechanics Research Communication, Part A*, Vol. 78, No. 1, pp. 28-41, 2016.
- [13] A. M. Zenkour, Hygro-thermo-mechanical effects on FGM plates resting on elastic foundations, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 1, pp. 234-238, 2010.
- [14] A. M. Zenkour, Exact solution of thermal stress problem of an inhomogeneous hygrothermal piezoelectric hollow cylinder, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 38, No. 24, pp. 6133-6143, 2014.
  [15] H. S. Shen, Hygrothermal effects on the postbuckling of axially loaded
- [15] H. S. Shen, Hygrothermal effects on the postbuckling of axially loaded shear deformable laminated cylindrical panels, *Composite Structures*, Vol. 56, No. 1, pp. 73-85, 2007.
- [16] T. C. Soong, Buckling of cylindrical shells with eccentric spiral-type stiffenrs, AIAA Journal, Vol. 7, No. 1, pp. 65-72, 1969.
- [17] S. W. Yen, Buckling of cylindrical shells with spiral stiffeners under uniform compression and torsion, *Composite Structures*, Vol. 11, No. 6, pp. 587-595, 1979.
- [18] A. Shaterzadeh, K. Foroutan, Post-buckling of cylindrical shells with spiral stiffeners under elastic foundation, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 60, No. 4, pp. 615-631, 2016.
- [19] D. D. Brush, B. O. Almorth, Buckling of Bars, Plates and Shells, Mc. Graw-Hill, US, pp. 142-189, 1975.
- [20] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, CRC Press, Boca Raton, pp. 567-568, 2004.
  [21] H. S. Shen, M. ASCE, A. Y. T. Leung, Postbuckling of pressure-loaded
- [21] H. S. Shen, M. ASCE, A. Y. T. Leung, Postbuckling of pressure-loaded functionally graded cylindrical panels in thermal environments, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 129, No. 4, pp. 414-425, 2003.
- [22] T. K. Nguyen, B. D. Nguyen, T. P. Vo, H. T. Thai, Hygro-thermal effects on vibration and thermal buckling behaviours of functionally graded beams, *Composite Structures*, Vol. 176, No. 3, pp. 1050-1060, 2017.

$$\begin{split} &-\frac{m^2 B_a^2 R_b^2}{\pi^2} \frac{1}{M_3} - \frac{\pi^2}{m^2 B_a^2 B_b^2} \Big[ m^4 B_a^4 D_{11}^{-1} + m^2 n^2 B_a^2 (D_{12}^{-1}) \\ &+ \overline{D}_{21}^{-1} - 4 \overline{D}_{36}^{-1} + n^4 \overline{D}_{22}^{-1} - \frac{K_1 \overline{D}_{11}^{-1} B_a^2}{B_h^2 m^2 \pi^2} \\ &- \frac{K_2 \overline{D}_{11}^{-1}}{m^2 B_h^2} (m^2 B_a^2 + n^2) \Big\}, \\ b_2^3 &= -\frac{1}{p} \Big\{ \frac{20m B_a^2 R_b}{3\pi^2 B_h} \frac{1}{M_3} + \frac{20n}{3m B_h^2} \frac{\overline{M}_1}{\overline{M}_3} \\ &+ \frac{4}{m m R^2} \frac{A_{12}^{-1} R_b}{B_h (A_{11}^+ A_{22}^+ - A_{21}^- A_{12}^+)} \frac{20n}{3m B_h^2} \frac{\overline{M}_1}{\overline{M}_3} \\ &+ \frac{4}{m m B_h^2} \frac{1}{(A_{11}^+ A_{22}^+ - A_{21}^- A_{12}^+)} \frac{20n}{3m B_h^2} \frac{\overline{M}_1}{\overline{M}_3} \\ &+ \frac{4}{m m B_h^2} \frac{1}{(A_{11}^+ A_{22}^+ - A_{21}^- A_{12}^+)} \frac{20n}{3m B_h^2} \frac{\overline{M}_1}{\overline{M}_3} \\ &+ \frac{4}{m m B_h^2} \frac{1}{(A_{11}^+ A_{22}^+ - A_{21}^- A_{12}^+)} \frac{2n}{3m B_h^2} \frac{B_{11}^+}{A_{11}^+} + \frac{B_{12}^+ A_{12}^+}{B_{22}^+}) n^2 \Big] \Big\} \\ b_3^3 &= -\frac{1}{p} \Big[ \frac{2n R_b}{3m^3 \pi^2 B_h B_h^2} - \frac{8n}{3m B_h^2} \frac{(B_{11}^+ A_{11}^+ + B_{22}^+ A_{12}^+)}{A_{11}^+ A_{22}^- - A_{21}^+ A_{12}^+}) \\ &+ \frac{\pi^2}{(B B_h^-} \frac{(A_{11}^+ M_{22}^- - A_{21}^+ A_{12}^+)}{A_{11}^+ A_{22}^- - A_{21}^- A_{12}^+}) \\ &+ \frac{\pi^2}{4B B_h^2} \Big( \frac{A_{11}^+ m^2 B_h^2 + A_{12}^+ n^2}{A_{11}^+ A_{22}^- - A_{21}^- A_{12}^+}) \\ &+ \frac{\pi^2}{4B B_h^2} \Big( \frac{M_{11}^- M_{22}^- - A_{21}^- A_{12}^+}{A_{11}^+ A_{22}^- - A_{21}^- A_{12}^+}) \\ &+ \frac{\pi^2}{4B B_h^2} \Big( \frac{M_{11}^- M_{22}^- - A_{21}^- A_{12}^+}{A_{11}^+ A_{22}^- - A_{21}^- A_{12}^+}) \\ &+ \frac{\pi^2}{4B B_h^2} \Big( \frac{M_{11}^- M_{22}^- - A_{21}^- A_{12}^+}{M_{11}^- A_{12}^- - A_{21}^- A_{12}^+}}) \\ &+ \frac{4R_h^4}{16 B_h^4} \Big( \frac{M_{11}^- A_{22}^- - A_{21}^- A_{12}^+}{B B_h^2} \Big) - \frac{4m^2 R_2^2 B_{11}^- A_{11}^- B_{22}^- A_{22}^- n^2}{B_h^2} \Big) \\ h_4^4 &= \frac{m^2 n^2 \pi^4 B_h^2 M_{11}^- A_{11}^- A_{22}^- A_{21}^- A_{22}^+}{B_{21}^- A_{22}^- M_{22}^-} \Big) \\ h_2^4 &= -\frac{m^2 n^2 \pi^4 B_h^2 M_{11}^- A_{11}^- A_{22}^- A_{21}^- A_{22}^+}}{B_{12}^+ A_{12}^-} \Big) \\ h_4^4 &= \frac{m \pi^2 B_h^2 (A_{11}^- A_{22}^- - A_{21}^- A_{12}^+)}{B B_h^4} \Big( \frac{A_{11}^- A_{22}^- - A_{21}^- A_{22}^-}{B_h^2} \Big) \\ h_4^4 &= \frac{m \pi^2 \pi^4 B_h^$$

 $\frac{5}{12} = b_1^*, \ b_2^* = -\frac{12}{12} - \frac{B_h^4}{B_h^3} - \frac{\overline{M_3}}{\overline{M_3}} \\ -\frac{5}{12} \frac{m^4 n^2 \pi^2 R_b B_a^4}{B_h^3} \frac{1}{\overline{M_3}} - \frac{\pi^2 n^2 R_b}{4B_h^3} - \frac{\overline{A_{22}^*}}{(\overline{A_{11}^* A_{22}^*} - \overline{A_{21}^* A_{12}^*})}$