



## ضرایب شدت تنش مود ترکیبی در ترک موازی با لبه یک نیم صفحه تحت بارگذاری یکنواخت

جواد علیزاده کاکلر<sup>1\*</sup>، جمال خضری<sup>2</sup>، علی عبدلی<sup>2</sup>

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه

\* ارومیه، صندوق پستی 1531157561، j.alizadeh@urmia.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 11 آذر 1396

پذیرش: 18 دی 1396

ارائه در سایت: 05 بهمن 1396

کلید واژگان:

ضریب شدت تنش

ترک گریفت

ترک زیرسطحی

کوپلینگ مودهای شکست

ضریب شکل

### چکیده

اگر ترک مرکزی در یک صفحه بی‌نهایت بزرگ تحت بارگذاری یکنواخت (ترک گریفت) به یکی از لبه‌های اعمال بار نزدیک شود، تبدیل به ترک زیرسطحی می‌شود. ترک‌های زیرسطحی در سازه‌هایی ایجاد می‌شوند که در معرض پدیده خستگی تماس غلتشی قرار دارند. در این مطالعه ابتدا ضرایب شدت تنش ترک گریفت تحت کشش و برش یکنواخت با استفاده از مدل‌سازی اجزای محدود محاسبه و با خطای کمتر از 0.1% صحت‌گذاری گردیده است. سپس ضرایب شدت تنش مود ترکیبی ترک زیرسطحی به ازای عمق‌های مختلف با نزدیک نمودن ترک به یکی از لبه‌های موازی صفحه تعیین شده است. عدم تقارن هندسی نسبت به سطح ترک و کوپلینگ مودهای شکست موجب بروز مودهای برشی و کششی قابل ملاحظه برای ترک زیرسطحی به ترتیب تحت بارهای کششی و برشی می‌گردد. کوپلینگ مودهای شکست با کاهش عمق ترک افزایش می‌یابد تا جایی که در نسبت طول به عمق 20 برای ترک، ضرایب شدت تنش ناشی از این پدیده، 69% ضرایب شدت تنش مودهای اصلی می‌شوند، با برآزش دقت بالای تابع درجه سه بر ضرایب شدت تنش مود ترکیبی محاسبه شده، چهار ضریب شکل برای مودهای کششی و برشی ناشی از کشش و برش یکنواخت ترک زیرسطحی ارائه شده است. روابط صریح ارائه شده برای ضریب شدت تنش، برای استفاده سریع و راحت توسط مهندسان بسیار مفید خواهد بود. مقادیر به دست آمده از این روابط حتی برای بارگذاری‌های غیریکنواخت نیز می‌تواند تقریب خوبی از ضرایب شدت تنش باشد (به خصوص برای طول ترک‌های کوتاه که تغییرات بار روی آن‌ها نمی‌تواند چندان زیاد باشد).

## Mixed mode stress intensity factors for a crack parallel to the free surface of a half-plane under uniform loading

Javad Alizadeh Kaklar\*, Jamal Khezri, Ali Abdoli

Department of Mechanical Engineering, Urmia University, Urmia, Iran.

\*P.O.B. 1531157561 Urmia, Iran. j.alizadeh@urmia.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 02 December 2017  
Accepted 08 January 2018  
Available Online 25 January 2018

#### Keywords:

Stress intensity factor  
Griffith crack  
Subsurface crack  
Coupling of the fracture modes  
Geometry correction factor

### ABSTRACT

The Griffith crack, a central crack in an infinite plane under uniform loading, is converted to a subsurface one by moving close to a loaded edge of the plane. Subsurface cracks initiate under rolling contact fatigue conditions. In this paper, first, finite element model of the Griffith crack has been developed and validated by calculating stress intensity factors (SIFs) under uniform tension and shear loadings. Then, by moving the crack close to a parallel edge of the plane, mixed mode SIFs of the subsurface crack have been determined for a wide range of the cracks depths. Non-symmetrical geometry with respect to the crack edge causes coupling between fracture modes and so, considerable shear and tension fracture modes under tension and shear loadings, respectively. The ratio of SIF for the coupling mode to the direct mode is creased up to 69% for the length to depth ratio of 20. Also, by fitting third-degree polynomials to the mixed mode SIFs, four geometry correction factors have been obtained for SIFs of subsurface cracks under uniform loadings. These approximate equations can be used easily and efficiently by engineers. Also, the relations can be utilized as a primary estimation for non-uniform loadings, especially when the crack length as well as the load variation along it is small.

### 1- مقدمه

زیرسطحی از جمله عیوبی هستند که اغلب در سازه‌های مبتلا به پدیده خستگی تماس غلتشی مشاهده می‌شوند. این ترک‌ها در یاتاقان‌های غلتشی، چرخ‌دنده‌ها، ریل‌ها و چرخ‌های فولادی در اثر بروز بیشینه تنش برشی در زیر سطح تماس می‌توانند جوانه بزنند. علاوه بر این وجود عیوب مادی زیرسطحی و تمرکز تنش ناشی از آن‌ها نیز می‌تواند عامل ایجاد ترک‌های زیرسطحی

نخستین گام در تعیین استحکام سازه‌های ترک‌دار و همچنین مطالعه رشد ترک خستگی، محاسبه ضریب شدت تنش ترک است. به جز موارد محدودی که روابط صریح تحلیلی و تقریبی برای آن‌ها وجود دارد، عموماً ضریب شدت تنش ترک با استفاده از حل اجزای محدود مسأله تعیین می‌گردد. ترک‌های

### Please cite this article using:

J. Alizadeh Kaklar, J. Khezri, A. Abdoli, Mixed mode stress intensity factors for a crack parallel to the free surface of a half-plane under uniform loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 02, pp. 219-224, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

در این مقاله ابتدا مدل اجزا محدود ترک مرکزی در صفحه بی نهایت بزرگ (به ترک گریفیث مشهور است) ایجاد و صحنه گذاری می شود و سپس ترک مرکزی به یکی از لبه های موازی با ترک صفحه بی نهایت نزدیک می گردد. با حل اجزا محدود، ضرایب شدت تنش ترک زیرسطحی برای عمق های متفاوت ترک تحت کشش و برش یکنواخت به دست می آید. ضمن صحنه گذاری مقادیر محاسبه شده، با برازش دقیق، ضریب شکل ترک زیرسطحی تعیین خواهد شد. روابط به دست آمده علاوه بر استفاده سریع و کاربردی توسط طراحان و مهندسان می تواند به عنوان ضرایب شدت تنش مرجع برای استخراج تابع وزن مورد استفاده قرار گیرد. همچنین پدیده کوپلینگ مودهای شکست تحت بارگذاری یکنواخت نیز مورد ارزیابی و مطالعه قرار می گیرد.

## 2- مدل سازی اجزا محدود

### 2-1- ترک گریفیث

اولین مطالعات برای ارائه مفهوم ضریب شدت تنش بیش از نود سال پیش توسط گریفیث انجام شد. او نشان داد که در یک ماده ترد مانند شیشه رشد ترک توسط حاصل ضرب تنش دوردست در ریشه دوم طول ترک کنترل می شود. ضریب شدت تنش برای سازه های ترک دار مختلف و تحت بارگذاری های متفاوت با استفاده از تئوری الاستیسیته قابل تعیین است. رایج ترین رابطه برای ضریب شدت تنش ترک مربوط به یک ترک مرکزی به طول  $2a$  در یک ورق بی نهایت بزرگ تحت کشش یا برش یکنواخت و به صورت رابطه (1) است (که به عنوان ترک گریفیث شناخته می شود) [14].

$$\begin{aligned} K_I &= \sigma \sqrt{\pi a} \\ K_{II} &= \tau \sqrt{\pi a} \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $K_I$  و  $K_{II}$  به ترتیب ضرایب شدت تنش مود I و II ترک، و  $\sigma$  و  $\tau$  به ترتیب تنش های یکنواخت عمودی و برشی هستند که به لبه های ورق اعمال می شوند (شکل 2).

برای سازه هایی با هندسه های مشابه، روابط (1) برای ضریب شدت تنش به صورت رابطه (2) قابل اصلاح است.

$$\begin{aligned} K_I &= Y_I \sigma \sqrt{\pi a} \\ K_{II} &= Y_{II} \tau \sqrt{\pi a} \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن  $Y_I$  و  $Y_{II}$  به ترتیب ضریب شکل بدون بعد مود I و II سازه ترک دار می باشند. در واقع ضرایب شکل برای ترک گریفیث برابر یک می باشند. ضریب شکل مود I ترک لبه ای به طول  $a$  در ورق نیمه بی نهایت، مقدار ثابت 1.12 است. این ضریب بیانگر اثر لبه آزاد ورق بر ضریب شدت تنش ترک است.

مدل سازی اجزا محدود در این مطالعه با استفاده از نسخه 6.13 نرم افزار اجزا محدود آباکوس انجام شده است. همچنین ورق ترک دار همواره به صورت مربعی به طول  $2A$  در نظر گرفته شده است. برای اطمینان از بی نهایت بزرگ بودن ابعاد ورق نسبت به طول ترک، ضریب شدت تنش مود I و II ترک برای نسبت های مختلف طول ورق مربعی به طول ترک ( $A/a$ ) محاسبه گردید. شکل 3 ضرایب شکل محاسبه شده برای ترک گریفیث به ازای ابعاد مختلف ورق را نشان می دهد.

همان طور که مشهود است اگر طول ورق 40 برابر طول ترک باشد با دقت بسیار خوبی می توان ورق را بی نهایت فرض کرد. به عبارت دیگر اگر طول ورق 40 برابر ترک باشد، خطای ضریب شدت تنش به دست آمده از روش اجزا محدود نسبت به مقادیر تحلیلی برای بارگذاری کششی و برشی به ترتیب برابر با 0.06% و 0.02% است. به این ترتیب می توان نتیجه گرفت که مدل

باشد. رشد ترک زیرسطحی در اثر خستگی تماس غلتشی می تواند منجر به جدا شدن تکه ای از ماده سطح قطعه و شکست خطرناک گردد (شکل 1).

پژوهش های متعددی به تعیین ضریب شدت تنش با استفاده از روش های عددی، تحلیلی و آزمایشگاهی پرداخته اند [2-4]. مطالعه ترک های زیرسطحی نیز جایگاه خاصی در میان مقالات مرتبط با مباحث شکست و خستگی دارد. بقینی و همکاران [5] تابع وزن آن را با تحلیل ترک زیرسطحی در نیم صفحه ارائه نمودند. پیچیدگی و تعداد زیاد ضرایب، استفاده از تابع وزن ارائه شده توسط آنها را مشکل می کند. در سال 2013 چن و همکاران [6] اندرکنش ترک زیرسطحی موازی با سطح یک نیم صفحه را با یک ناهنجاری مفروض در نزدیکی نوک ترک تحت نیروی تماسی عمودی مورد بررسی قرار دادند. محاسبه ضرایب شدت تنش ترک تحت شرایط مختلف نشان داد که وجود ناهنجاری لغزش نسبی سطوح ترک و رشد آن را مهار می نماید. مازو [8,7] در مطالعات خود، رشد ترک زیرسطحی در نیم صفحه را تحت فشار و برش ناشی از تماس غلتشی بررسی نمود. در این بررسی ها ضمن ارائه تابع وزن به نسبت ساده تر از تابع وزن بقینی و همکاران [5] از اثر کوپلینگ مودهای شکست در میکرو ترک ها صرف نظر شد. عزیززاده و قاجار [9,10] ضرایب شدت تنش ترک زیرسطحی بیضوی تحت بارهای یکنواخت کششی و برشی را با استفاده از روش اجزا محدود محاسبه کرده و اثرات نزدیک شدن به سطح نیم فضا را مهم ارزیابی نمودند. دانزلا و همکاران [11] در سال 2015 مکانیزم رشد ترک زیرسطحی در چرخ دنده و جدا شدن قسمتی از ماده سطح را به صورت تجربی مورد مطالعه قرار دادند. لزوم لحاظ نمودن پدیده قفل شدن برشی سطوح ترک در تعیین آستانه رشد ترک تحت برشی از نتایج مهم این پژوهش بود. همچنین بین و همکاران [12] عمر رشد ترک زیرسطحی در یک چرخ دنده را با استفاده از تحلیل در یک نرم افزار اجزا محدود و به کارگیری روش کرنش پلاستیک انباشته تعیین نمودند.

یکی از ابعاد اهمیت ترک های زیرسطحی بروز پدیده کوپلینگ مودهای شکست است. در اثر این پدیده اعمال بارگذاری مود I یا مود II به ترک زیرسطحی می تواند موجب بروز مود ترکیبی I و II در آن شود. به عبارت دیگر هرگونه میدان جابه جایی نامتقارن (غیرمقارن برای مود I و غیرپارامتقارن برای مود II) نسبت به سطوح ترک، مودهای شکست ترکیبی را تحت یک مود بارگذاری نتیجه خواهد داد. عامل نامتقارنی میدان جابه جایی می تواند عدم تقارن در هندسه، بارگذاری و یا جنس باشد. در مورد ترک زیرسطحی با توجه به نامتقارنی هندسه سازه نسبت به سطح ترک، پدیده کوپلینگ مودهای شکست و ایجاد مود ترکیبی I و II همواره مشاهده می گردد [9,5]. این پدیده باعث می شود، ترک های زیرسطحی حتی تحت بارگذاری فشاری تماس غلتشی که موجب بسته شدن سطوح ترک می شود نیز رشد نمایند. به عبارت دیگر، رشد ترک های زیرسطحی تحت شرایط خستگی تماس غلتشی متفاوت از رشد ترک های زیرسطحی است که عموماً تحت مود I اتفاق می افتد [13].

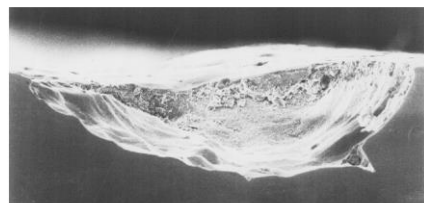


Fig. 1 Pitting of the contact surface due to a subsurface crack growth

شکل 1 کندیگی سطح تماس در اثر رشد ترک زیرسطحی [1]

هم را فراهم می‌آورد. حول نوک ترک 4 کانتور انتگرال گیر به ترتیب با شعاع‌های  $0.016a$ ،  $0.022a$ ،  $0.028a$  و  $0.034a$  در نظر گرفته شده است. انتخاب شعاع کوچک برای کانتورهای انتگرال گیر با این هدف بوده است که بتوان ترک را در مدل سازی ترک زیرسطحی به سطح ورق بسیار نزدیک نمود. کل ورق با استفاده از المان‌های تنش صفحه‌ای مرتبه 2 المان بندی شده است. برای کانتور اول حول نوک ترک از المان‌های مثلثی منفرد CPS6M استفاده شده است تا تکینگی نوک ترک را برطرف سازد [15]. بی نهایت بودن تنش در نوک ترک در این المان‌ها با انتقال گره روی نوک ترک به وسط ضلع شعاعی المان منفرد رفع می‌شود. سایر قسمت‌ها نیز با استفاده از المان‌های مربعی CPS8R مش بندی شده است. پس از بررسی همگرایی پاسخ به ازای طول‌های مختلف المان، ورق با استفاده از 23035 المان به اجزای محدود تقسیم شد (شکل 4).

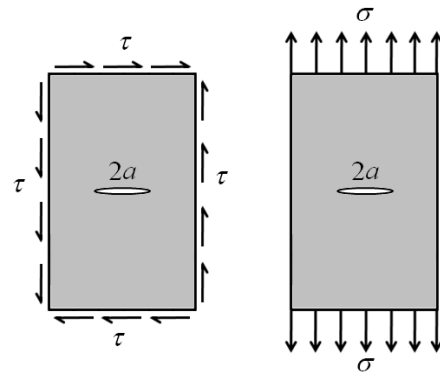


Fig. 2 Central crack in an infinite plate under uniform tension and shear (Griffith crack)

شکل 2 ترک مرکزی در ورق بی نهایت بزرگ تحت کشش و برش یکنواخت (ترک گریفیث)

### 2-2- ترک زیرسطحی

ترک گریفیث با نزدیک شدن به یکی از لبه‌های ورق که با ترک موازی است، تبدیل به ترک زیرسطحی می‌شود (شکل 5). در واقع ترک زیرسطحی با عمق بی نهایت همان ترک گریفیث خواهد بود. پس از مدل سازی و صحنه گذاری ترک گریفیث تحت بارهای عمودی و برشی با راهبرد مشابه، ترک زیرسطحی با عمق  $h$  در ورق نیمه بی نهایت مدل سازی می‌شود (شکل 5). از آنجا که در مدل سازی اجزای محدود ترک زیرسطحی عیناً همانند ترک گریفیث عمل شده و تنها عمق ترک تغییر نموده است؛ بنابراین می‌توان از صحت نتایج حل اطمینان داشت. پارامتر بی بعد  $\gamma = a/h$  به عنوان شاخص عمق ترک زیرسطحی تعریف می‌گردد. در این مطالعه اثر سطح آزاد نیم صفحه بر ضرایب شدت تنش ترک زیرسطحی و پدیده کوپلینگ موده‌های شکست تحت بارهای عمودی و برشی یکنواخت با مدل سازی و حل ترک زیرسطحی به ازای  $\gamma = 0.25, 0.33, 0.5, 0.66, 1, 1.25, 1.66, 2, 2.5, 3.33, 5, 6.66, 10, 12.5, 16.66, 20$  مورد مطالعه قرار گرفته است. شکل 6 نسبت طول به عمق مربوط به 6 ترک از 16 مورد بررسی را با مقیاس واقعی نشان می‌دهد. برای وضوح شکل و قابل تشخیص بودن ترک‌ها،  $\gamma$  مربوط به 10 ترک نشان داده نشده است. بررسی این گستره وسیع از ترک‌های زیرسطحی باعث خواهد شد که اولاً نتایج به دست آمده جامع و دقیق باشد. دوم ترک به قدری به سطح نزدیک شده باشد (تا 5% طول خود) که از نتایج حاصل بتوان برای ارزیابی انواع عیوب بسیار نزدیک به سطح در خستگی تماس غلتشی استفاده نمود.

### 3- ارائه نتایج و بحث پیرامون آن‌ها

#### 3-1- ضرایب شدت تنش ترک زیرسطحی

نتایج حل اجزای محدود ترک زیرسطحی برای 16 نسبت مختلف طول به عمق ترک ( $\gamma = 0.25, 0.33, 0.5, 0.66, 1, 1.25, 1.66, 2, 2.5, 3.33, 5, 6.66$ )، تحت کشش و برش یکنواخت در شکل 7 نشان داده شده است. برای صحنه گذاری نتایج به دست آمده از مقادیر ارائه شده در مرجع [5] برای بارگذاری یکنواخت استفاده شده است. مقایسه مقادیر حل حاضر و مرجع [5] در شکل 7 درستی نتایج را تأیید می‌نماید. به لحاظ کمی نیز میانگین خطای نسبی بین این مقادیر زیر 3% محاسبه شده است.

همان طور که شکل 7 نشان می‌دهد، اعمال کشش منجر به بروز مود ترکیبی I و II برای ترک زیرسطحی می‌شود. همچنین بار برشی یکنواخت نیز باعث ایجاد موده‌های I و II در ترک زیرسطحی می‌گردد؛ بنابراین موده‌های

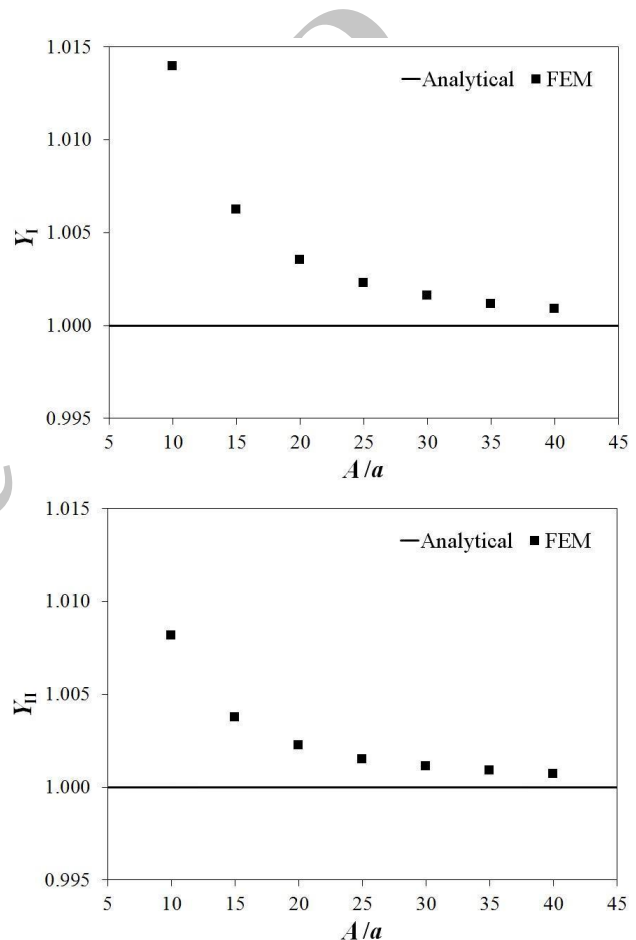


Fig. 3 Geometry correction factors of the Griffith crack for different ratios of the plate length to crack length

شکل 3 ضرایب شکل ترک گریفیث برای مقادیر مختلف نسبت طول ورق مربعی به طول ترک

اجزای محدود برای ترک گریفیث با خطای نسبی کمتر از 0.1% صحنه گذاری گردید.

در مدل اجزای محدود جنس ورق به صورت همگن، همسان گرد و با مدول الاستیک و ضریب پواسون  $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\nu = 0.3$  لحاظ شده است. مدل سازی ترک با استفاده از ابزار شکاف<sup>1</sup> انجام شده است. این ابزار در محل مورد نظر یک جفت گره روی هم تعبیه نموده و امکان فاصله گرفتن آن‌ها از

<sup>1</sup> Seem

همان طور که در شکل 8-b مشاهده می شود، اعمال برش یکنواخت منجر به باز شدن نیمی از ترک و بسته شدن نیم دیگر آن می شود. به عبارت دیگر تماس سطوح ترک در حالت برش یکنواخت اتفاق می افتد که لازم است لحاظ شود؛ بنابراین نتایج این مقاله برای برش یکنواخت زمانی معتبر است که کشش

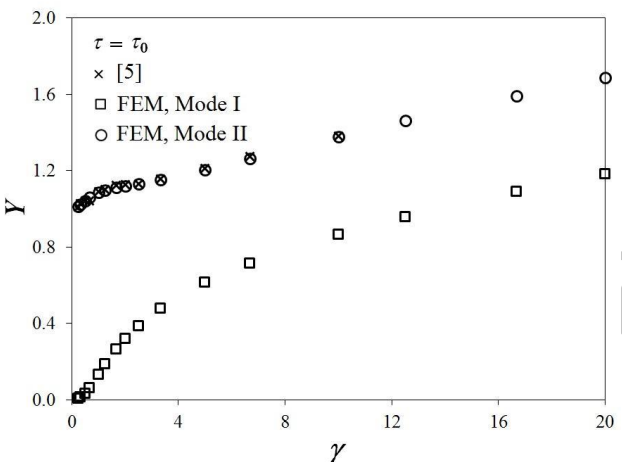
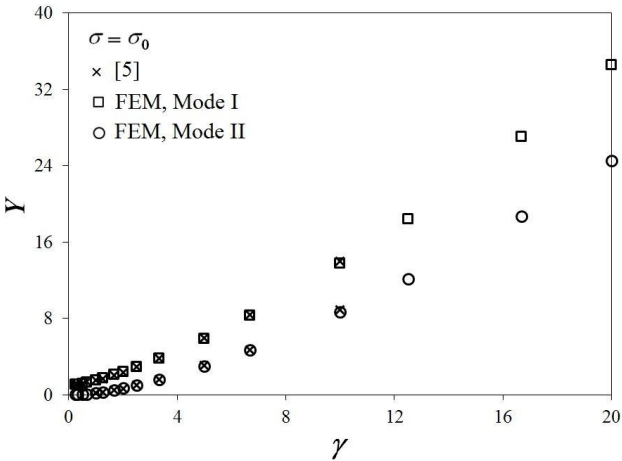


Fig. 7 Comparison of obtained geometry correction factors for subsurface crack by FEM and Ref. [5] under uniform tension and shear  
 شکل 7 مقایسه ضرایب شکل به دست آمده از حل اجزای محدود با مقادیر مرجع [5] برای ترک زیرسطحی تحت کشش و برش یکنواخت

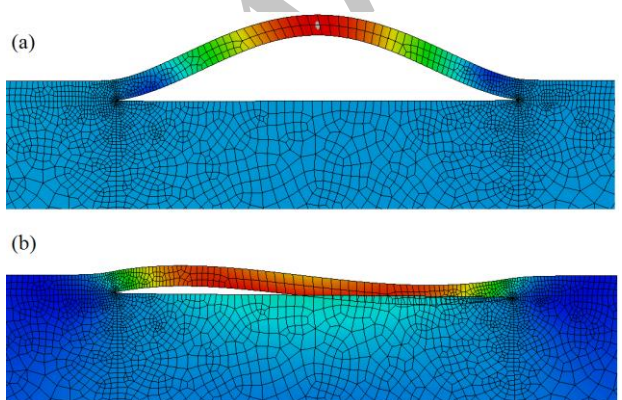


Fig. 8 Representation of different displacement fields on both sides of a subsurface crack,  $\gamma=10$ , and the coupling of fracture modes under a-uniform tension, b- uniform shear

شکل 8 نمایش تفاوت میدان جابه جایی دو طرف سطوح ترک زیرسطحی ( $\gamma=10$ ) و بروز پدیده کوپلینگ مودهای شکست تحت: الف- کشش یکنواخت، ب- برش یکنواخت

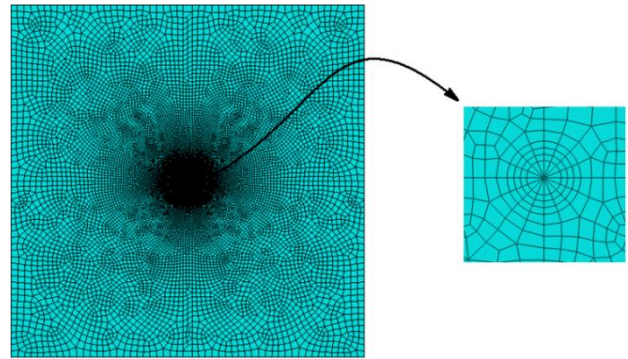


Fig. 4 Finite element model of the Griffith crack, meshing of the crack tip region

شکل 4 مدل اجزای محدود ترک گریفیث، نمایش المان بندی نوک ترک

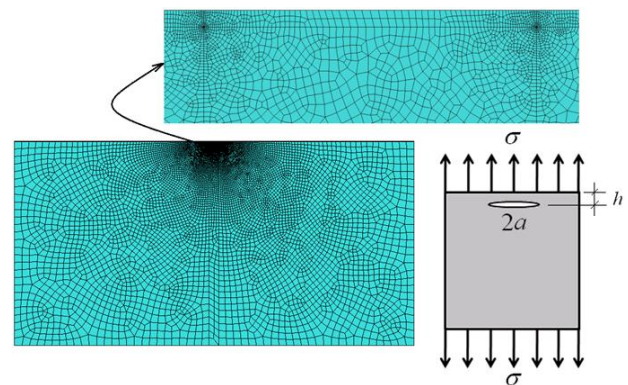


Fig. 5 Subsurface crack under tension and its finite element model

شکل 5 ترک زیرسطحی تحت کشش و مدل اجزای محدود آن

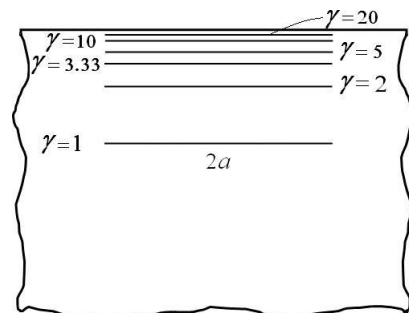


Fig. 6 Real scale representation of the proximity to the surface for the studied subsurface cracks

شکل 6 نمایش نزدیکی ترک های زیرسطحی مورد مطالعه به سطح با مقیاس واقعی

شکست ترک زیرسطحی به هم وابسته (کوپله) بوده و اعمال هر نوع بارگذاری موجب ایجاد مود ترکیبی در ترک می شود [16]. با نزدیک تر شدن ترک به لبه نیم صفحه (افزایش  $\gamma$ ) اثر کوپلینگ مودهای کششی و لغزشی افزایش می یابد. افزایش اثر پدیده کوپلینگ مودهای شکست در اثر افزایش نسبت  $\gamma$  به دلیل بیشتر شدن نامتقارنی هندسی سازه نسبت به سطوح ترک است. به عبارت دیگر با کاهش  $h$  (عمق ترک) سفتی قسمت بالای ترک کاهش می یابد، در حالی که سفتی ورق در ناحیه زیر ترک بی نهایت باقی می ماند. تفاوت در سفتی ورق دو طرف ترک منجر به اختلاف مؤلفه های میدان جابه جایی در دو طرف سطح ترک می شود؛ بنابراین با اعمال کشش به ورق، سطح بالایی ترک همزمان با باز شدن، روی سطح پایینی می لغزد. تحت بار برشی، سطح بالایی ترک همزمان با لغزش بر سطح پایینی از آن فاصله می گیرد (شکل 8).

جدول 1 ثوابت تابع ارائه شده برای ضریب شکل ترک زیرسطحی تحت کشش و برش یکنواخت

Table 1 Constants of Eq. (3) for geometry correction factors of subsurface crack under uniform tension and shear

	کشش یکنواخت		برش یکنواخت	
	مود I	مود II	مود I	مود II
$B_0$	0.7201	-0.3173	0.0083	1.0654
$B_1$	0.7248	0.3968	0.1658	0.0243
$B_2$	0.0664	0.0580	-0.0102	0.00097
$B_3$	-0.0009	-0.0008	0.00024	-0.00003

– کشش یکنواخت  $\sigma = 5 \text{ MPa}$

– کشش و برش یکنواخت همزمان  $\sigma = 2 \text{ MPa}$  و  $\tau = 10 \text{ MPa}$

– کشش خطی  $\sigma = x + 5 \text{ MPa}$  با تنش میانگین  $5 \text{ MPa}$

– کشش سهموی  $\sigma = 3x^2 + 4 \text{ MPa}$  با تنش میانگین  $5 \text{ MPa}$

روی سطوح ترک زیرسطحی اعمال و ضرایب شدت تنش مربوطه با استفاده از روش اجزای محدود محاسبه شده است. با توجه به اصل جمع آثار بار اعمالی روی سطوح ترک، همان میدان تنش ناشی از بارگذاری روی مرزهای نیم صفحه‌ی بدون ترک در محل ترک است [17]. مقایسه ضرایب شدت تنش محاسبه شده با استفاده از روش اجزای محدود و تابع ضریب شکل رابطه (3) در جدول 2 آورده شده است. در واقع برای مواردی که بار اعمالی به ترک یکنواخت نیست، از تنش میانگین برای محاسبه ضرایب شدت تنش با استفاده از رابطه (3) استفاده شده است. همچنین، در اثر اعمال بارهای نامتقارن (کشش و برش همزمان و کشش خطی)، ضرایب شدت تنش در هر دو نوک ترک زیرسطحی توسط اجزای محدود متفاوت محاسبه می‌شود که در جدول 2 ارائه شده است.

همان طور که نتایج نشان می‌دهد برای بارگذاری یکنواخت، خطای نسبی رابطه (3) زیر 3% است. بنابراین، برای بارگذاری یکنواخت، با دقت بسیار خوبی می‌توان از ضرایب شکل ارائه شده استفاده نمود. همچنین استفاده از تنش میانگین برای محاسبه ضرایب شدت تنش برای بارگذاری متغیر خطی و غیرخطی مورد نظر نیز دقت مهندسی مناسبی را به خصوص برای ارزیابی اولیه نتیجه می‌دهد؛ بنابراین ضرایب شکل ارائه شده ابزاری ساده و کارا برای استفاده مهندسان و محققان خواهد بود.

#### 4- نتیجه گیری

در این مطالعه ترک زیرسطحی موازی سطح یک نیم صفحه با استفاده از مدل اجزای محدود صحت گذاری شده مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت. ضمن ارزیابی کوپلینگ مدهای کششی و برشی شکست تحت بارگذاری یکنواخت، ضریب شکل ضرایب شدت تنش به صورت تابعی از نسبت طول به عمق ترک ارائه شد. نشان داده شد که قابلیت ضرایب شکل ارائه شده برای محاسبه ضرایب شدت تنش ترک تحت بارهای یکنواخت بسیار خوب و برای بارهای غیریکنواخت مناسب است. روابط ارائه شده برای ضرایب شکل مود I و II ترک زیرسطحی تحت کشش و برش یکنواخت، ابزار ساده‌ای برای تعیین ضرایب شدت تنش با دقت مناسب در اختیار قرار می‌دهد (حتی تحت بارگذاری‌های غیریکنواخت به خصوص برای ترک‌های کوچک). علاوه بر این نتایج این مطالعه می‌تواند به عنوان ضرایب شدت تنش مرجع برای استخراج توابع وزن ترک زیرسطحی مورد استفاده قرار گیرد.

اثر کوپلینگ مدهای شکست تحت بارگذاری یکنواخت برای عمق‌های کمتر از  $1.33a$ ، بیش از 10% تعیین شد؛ بنابراین در عمق‌هایی کمتر از این مقدار، بایستی اثر این پدیده در محاسبات لحاظ گردد. با کاهش عمق ترک،

لازم برای باز شدن تمام سطح ترک نیز همزمان با برش یکنواخت اعمال شود. البته با توجه به این که مود I ناشی از کشش یکنواخت بیش از 20 برابر مود I ناشی از کوپلینگ برش یکنواخت است، با کشش بسیار کمی سطوح ترک در برش یکنواخت باز شده و تماس نخواهند داشت.

برای ترک زیرسطحی با  $\gamma = 20$ ، ضریب شدت تنش مود I ناشی از کشش یکنواخت، 25.8 برابر ضریب شدت تنش ترک گریفیث است. ضریب شدت تنش مود II ناشی از برش یکنواخت، 73% بیشتر از ضریب شدت تنش ترک گریفیث معادل آن است. علاوه بر این برای هر دو بارگذاری کششی و برشی یکنواخت، ضریب شدت تنش ناشی از پدیده کوپلینگ مدهای شکست 69% ضریب شدت تنش مود بارگذاری است. این سهم از ضرایب شدت تنش ناشی از کوپلینگ که می‌تواند برای سایر بارگذاری‌ها بیشتر هم شود، ضرورت در نظر گرفتن این پدیده در طراحی و مطالعات خستگی را نشان می‌دهد.

با توجه به نتایج به دست آمده می‌توان بیان داشت پدیده کوپلینگ در ترک‌های زیرسطحی تحت بار کششی و برشی یکنواخت به ترتیب برای  $\gamma \geq 0.75$  و  $\gamma \geq 0.85$  منجر به ضریب شدت تنش مود کوپلینگ بیشتر از 10% ضریب شدت تنش ترک گریفیث می‌شود. به عبارت دیگر می‌توان از کوپلینگ مدهای شکست برای ترکی با عمق بیشتر از 1.3 برابر طولش صرف نظر کرد. البته در این حالت نیز تقریب ترک زیرسطحی با ترک گریفیث می‌تواند کاملاً نادرست باشد. ضریب شدت تنش مود I ترک زیرسطحی تحت کشش یکنواخت به ازای  $\gamma \geq 0.38$  بیش از 1.1 برابر ضریب شدت تنش ترک گریفیث است؛ بنابراین روابط مربوط به ترک گریفیث تنها برای  $\gamma < 0.38$  با خطای کمتر از 10% قابل استفاده خواهد بود.

#### 3-2- ضریب شکل ترک زیرسطحی

در این بخش با توجه به جامعیت حل‌های انجام شده و دقت بالای آن‌ها، هدف ارائه ضریب شکل مدهای ترکیبی ترک زیرسطحی تحت بارگذاری یکنواخت است. ضریب شکل ترک زیرسطحی بایستی برحسب پارامتر عمق ترک،  $\gamma$  باشد تا بتوان برای تمامی ترک‌های زیرسطحی از آن استفاده نمود. پس از انجام بررسی‌های اولیه و سعی و خطای لازم، تابع مناسب برای ضریب شکل ترک به صورت رابطه (3) نتیجه شد.

$$Y_{I(II)}^{\sigma_0(\tau_0)} = \sum_{i=0}^3 B_i \gamma^i \quad (3)$$

که در آن  $Y_I^{\sigma_0}$  و  $Y_{II}^{\sigma_0}$  به ترتیب ضریب شکل مود I و II ترک زیرسطحی تحت کشش یکنواخت  $\sigma_0$ ،  $Y_I^{\tau_0}$  و  $Y_{II}^{\tau_0}$  به ترتیب ضریب شکل مود I و II ترک زیرسطحی تحت برش یکنواخت  $\tau_0$ ،  $B_i$ ها ضرایب ثابت و  $\gamma$  نسبت طول به عمق ترک زیرسطحی است.

ضرایب  $B_i$  برای هر دسته از ضرایب شدت تنش با استفاده از برازش در نسخه 2.3.0 نرم افزار کرواکسپرت پروفشنال<sup>1</sup> تعیین و در جدول 1 ارائه شده است. شکل 9 دقت تابع برازش به دست آمده را در مقایسه با ضرایب شکل ترک زیرسطحی نشان می‌دهد. با توجه به شکل 9 چندجمله‌ای درجه 3 (رابطه (3)) با دقت بالایی ضرایب شکل ترک را نتیجه می‌دهد.

برای ارزیابی میزان کارایی رابطه (3) در تعیین ضرایب شدت تنش ترک زیرسطحی، ترکی به طول  $a = 1 \text{ mm}$  و نسبت طول به عمق  $\gamma = 8$  مورد بررسی قرار می‌گیرد. نسبت  $\gamma = 8$  در برازش تابع ضریب شکل ترک زیرسطحی و استخراج ضرایب  $B_i$  استفاده نشده است. چهار بارگذاری متفاوت:

<sup>1</sup> Curve Expert Professional

طول ترک زیرسطحی	$a$
ثوابت چندجمله‌ای درجه 3	$B$
مدول الاستیک (GPa)	$E$
عمق ترک زیرسطحی	$h$
ضریب شدت تنش ترک ( $\text{MPa mm}^{1/2}$ )	$K$
ضریب شکل	$\gamma$
<b>علائم یونانی</b>	
نسبت طول به عمق ترک زیرسطحی	$\gamma$
ضریب پواسون	$\nu$
تنش عمودی (MPa)	$\sigma$
تنش عمودی یکنواخت (MPa)	$\sigma_0$
تنش برشی (MPa)	$\tau$
تنش برشی یکنواخت (MPa)	$\tau_0$
<b>زیرنویسها</b>	
مقدار متوسط	ave
مود I	I
مود II	II

6- مراجع

- [1] S. Glodež, Z. Ren, Modelling of crack growth under cyclic contact loading, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 30, No. 2, pp. 159-173, 1998.
- [2] S. Chapuliot, Stress intensity factor calculation in sharp and beveled edge nozzle corners, *Pressure Vessels and Piping*, Vol. 141, No. 1, pp. 11-18, 2016.
- [3] P. Livieri, F. Segala, Stress intensity factors for embedded elliptical cracks in cylindrical and spherical vessels, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 86, No. 1, pp. 260-266, 2016.
- [4] D. Chakraborty, K. S. R. K. Murthy, D. Chakraborty, Experimental determination of mode I stress intensity factor in orthotropic materials using a single strain gage, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 173, No. 1, pp. 130-145, 2017.
- [5] M. Beghini, L. Bertini, V. Fontanari, A weight function for 2D subsurface cracks under general loading conditions, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, No. 3, pp. 427-439, 2008.
- [6] J. Chen, Q. Fang, Y. Liu, Interaction between dislocation and subsurface crack under condition of slip caused by half-plane contact surface normal force, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 114, No. 1, pp. 115-126, 2013.
- [7] A. Mazzù, A mode II weight function for subsurface cracks in a two-dimensional half-space, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Vol. 25, No. 10, pp. 911-916, 2002.
- [8] A. Mazzù, A numerical approach to subsurface crack propagation assessment in rolling contact, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Vol. 36, No. 6, pp. 548-564, 2013.
- [9] J. Alizadeh K., R. Ghajar, Calculation of mixed mode stress intensity factors for an elliptical subsurface crack under arbitrary normal loading, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Vol. 38, No. 6, pp. 700-713, 2015.
- [10] J. Alizadeh, K. R. Ghajar, Coupling of the fracture modes for the subsurface elliptical cracks under uniform shear loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 1-10, 2014. (in Persian)
- [11] G. Donzella, A. Mazzù, C. Petrogalli, Experimental and numerical investigation on shear propagation of subsurface cracks under rolling contact fatigue, *Procedia Engineering*, Vol. 109, No. 1, pp. 181-188, 2015.
- [12] Y. Yin, Y. X. Chen, L. Liu, Lifetime prediction for the subsurface crack propagation using three-dimensional dynamic FEA model, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 87, No. 1, pp. 54-70, 2017.
- [13] A. Ekberg, E. Kabo, Fatigue of railway wheels and rails under rolling contact and thermal loading—an overview, *Wear*, Vol. 258, No. 7, pp. 1288-1300, 2005.
- [14] R. I. Stephens, A. Fatemi, R. R. Stephens, H. O. Fuchs, *Metal Fatigue in Engineering*, Second Edition, pp. 122-132, New York: Wiley, 2000.
- [15] A. S. Fayed, Numerical analysis of mixed mode I/II stress intensity factors of edge slant cracked plates, *Engineering Solid Mechanics*, Vol. 5, No. 1, pp. 61-70, 2017.
- [16] T. Fett, *Stress Intensity Factors- T-Stresses- Weight Functions*, Second Edition, pp. 30-33, Boston, Computational Mechanics Publications, 2008.
- [17] X. Wang, G. Glinka, Determination of approximate point load weight functions for embedded elliptical cracks, *Fatigue*, Vol. 31, No. 11-12, pp. 1816-1827, 2009.

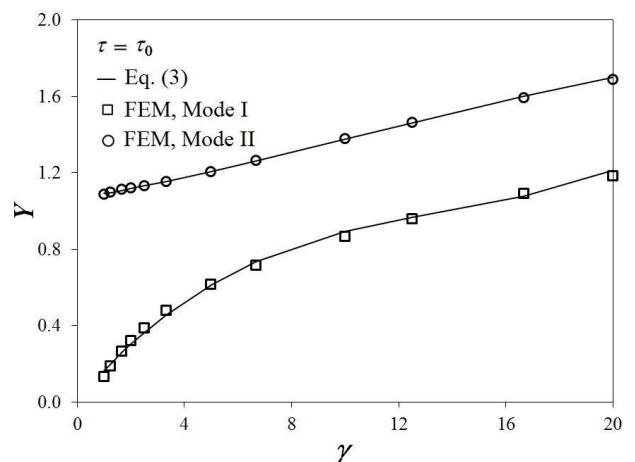
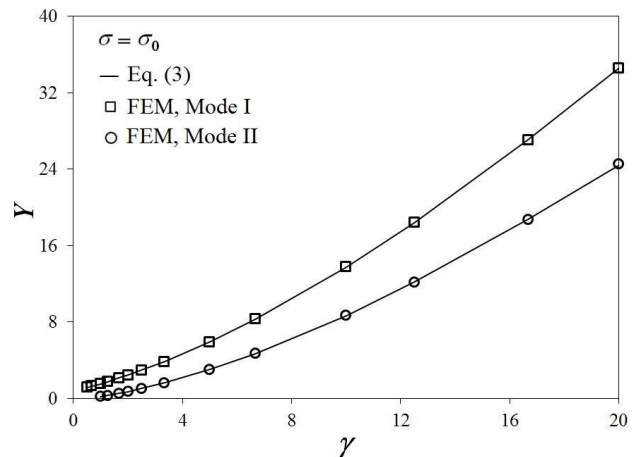


Fig. 9 Fitting of third-degree of polynomial on the geometry correction factors of subsurface crack under uniform tension and shear

شکل 9 برازش چندجمله‌ای درجه 3 روی ضرایب شکل ترک زیرسطحی تحت کشش و برش یکنواخت

جدول 2 ضرایب شدت تنش ترک زیرسطحی،  $\gamma=8$  و  $a=1\text{mm}$

Table 2 SIFs for a subsurface crack,  $a = 1 \text{ mm}$  and  $\gamma = 8$

	بارگذاری (MPa)	اجزای محدود	رابطه (3)	خطای نسبی (%)
$K_I$	$\sigma = 5$	91.6	91.3	0.3
	$\tau = 10, \sigma = 2$	50.5, 22.8	50.8, 22.2	0.6, 2.6
	$\sigma = x+5, (\sigma_{\text{ave}} = 5)$	87.5, 96.1	91.3	4.3, 5.0
	$\sigma = 3x^2+4, (\sigma_{\text{ave}} = 5)$	86.9	91.3	5.0
$K_{II}$	$\sigma = 5$	55.0	54.6	0.7
	$\tau = 10, \sigma = 2$	44.9, 1.0	45.5, 1.3	1.3, ---
	$\sigma = x+5, (\sigma_{\text{ave}} = 5)$	53.3, 56.6	54.6	2.4, 3.5
	$\sigma = 3x^2+4, (\sigma_{\text{ave}} = 5)$	50.5	54.6	8.1

اثر کوپلینگ موده‌های شکست تشدید شده و تا 69% مود اصلی برای عمق  $0.05a$  افزایش می‌یابد. تحت بار کششی یکنواخت، اثر سطح آزاد نیم‌فضا باعث می‌شود که ضریب شدت تنش مود I ترک زیرسطحی تا 25 برابر ترک گریفیث افزایش یابد. لذا، تخمین ترک زیرسطحی با استفاده از روابط ترک گریفیث صحیح نخواهد بود.

5- فهرست علائم

A نصف طول صفحه بی‌نهایت بزرگ