ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

ارتعاشات آزاد پیچشی نانو ذره کروی با استفاده از تئوری الاستیسیته سطح گورتین

یاسر میرزایی

استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد دماوند، دماوند

دماوند، صندوق‌پستی 194/39715، mirzaei@damavandiau.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 05 مهر 1396
پذیرش: 15 دی 1396
ارائه در سایت: 12 بهمن 1396

کلید واژگان:
فرکانس طبیعی
نانو کره
نانو ذره
انرژی سطح

چکیده

حل تحلیلی ارتعاشات آزاد پیچشی نانو ذرات کروی با به‌کارگیری تئوری الاستیسیته سه‌بعدی دقیق همراه با مدل گورتین- مرداک برای وارد نمودن اثرات سطح مورد مطالعه قرار گرفته است. برای بدست آوردن معادلات حرکت، معادلات ناویر برای یک محیط مادی نوشته شده و با استفاده از جداسازی هلمهولتز، معادلات ناویر به معادلات برداری موج تبدیل شده است سپس با استفاده از فرضیاتی که برای حرکت پیچشی کره مفروض است معادلات برداری موج در سیستم مختصات کروی به‌صورت دقیق حل شده و میدان‌های جابجایی و تانسور تنش استخراج شده است. در ادامه با استفاده از تئوری گورتین- مرداک، اثرات انرژی سطح که بنوعی مبین اندازه نانو برای کره است در شرایط مرزی مساله وارد می‌شود. نهایتا با اعمال شرایط مرزی معادله مشخصه فرکانسی استخراج می‌شود. با در نظر گرفتن نانو کره از جنس آلومنیوم و دو نوع سطح مختلف متاثر از جهت‌های کریستالوگرافی، چندین مثال عددی مورد بررسی قرار گرفته است تا تاثیر انرژی سطح و به ویژه اندازه شعاع داخلی نانو کره بر روی فرکانس‌های طبیعی پیچشی سیستم نشان داده شود. مشاهده می‌شود برای نانو کره آلومنیوم با اندازه کمتر از 50 نانومتر تاثیرات انرژی سطح بر فرکانس طبیعی قابل توجه است.

Free torsional vibration analysis of Nano-spherical particle using Gurtin surface elasticity model

Yaser Mirzaei

Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Damavand Branch, Damavand, Iran
*P.O.B. 194/39715, Damavand, Iran, mirzaei@damavandiau.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 27 September 2017
Accepted 05 January 2018
Available Online 01 February 2018

Keywords:
Natural frequency
Nano-sphere
Nano-particle
Surface energy

ABSTRACT

The torsional vibrational characteristics of nano-scale sphere using an exact size-dependent elasticity solution based on Gurtin-Murdoch's surface elasticity model are studied. In the absence of body forces, the displacement field is governed by the classical Navier's equation. Helmholtz decomposition is used to separate the dynamic equations of motion into the decoupled vector wave equations. The motion under consideration is assumed to be torsional and vector wave equation exactly is solved and displacement field and stress tensor are obtained. Size-dependent elasticity solution based on Gurtin-Murdoch surface energy model is employed to incorporate the surface stress terms into the pertinent boundary conditions, leading to frequency equations involving spherical Bessel functions. Isotropic aluminum with two different set of surface properties corresponding to the crystallography directions are considered and extensive numerical calculations have been carried out to illustrate the size effect of the nano-sphere on the first and second dimensionless vibrational natural frequencies. The numerical results describe the imperative influence of surface energy and radii ratio on vibrational characteristic frequency of nano-sphere. In particular, the surface energy is much important when inner radius is smaller than 50 nm.

1- مقدمه

با کشف نانوذرات و متعاقب آن، انقلاب فناوری نانو، حجم متون علمی و مهندسی پیرامون بررسی جنبه‌های مختلف رفتار ارتعاشی نانوذرات افزایش چشمگیری داشته است و تعداد کاربردهای مربوط به بررسی رفتار دینامیکی سیستم‌های مقیاس نانومتری همچنان روبه‌رشد است. نیاز به درک بهتر خواص دینامیکی نانوذرات با پیشرفت تکنیک‌های اندازه‌گیری در تجهیزاتی با مقیاس نانو، مانند میکروسکوپ نیروی اتمی، میکروسکوپ انتقال الکترونی و طیف‌سنجی رامان آشکارتر شد و از طرف دیگر، خواص منحصربه فرد ارتعاشی نانوذرات باعث به‌کارگیری آن‌ها در ساخت دستگاه‌ها و ابزارهای جدید نانو مکانیکی مانند سنسورها، محرک‌ها، رزوناتورهای، اسیلاتورهای فرکانس بالا و دستگاه‌های نشر میدانی شده است و همچنین نانو ذرات شروع به تاثیرگذاری در برخی از حوزه‌های نوظهور فن‌آوری‌های "نانو بایو" مانند مواد هیبریدی، زیستی- مصنوعی و درمان سرطان نموده است.

با بررسی منابع علمی در زمینه ارتعاشات آزاد کره مشاهده می‌گردد که مطالعات بسیاری در زمینه ارتعاشات آزاد اجسام کروی همگن بر پایه تئوری پوسته نازک برای ورق و پوسته‌ها نازک و یا تئوری‌های بهبود یافته برای

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Y. Mirzaei, Free torsional vibration analysis of Nano-spherical particle using Gurtin surface elasticity model, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 02, pp. 234-242, 2018 (in Persian)

Archive of SID
www.SID.ir

ورق‌های نسبتا ضخیم انجام شده است. پیشرفت سریع صنایع معاصر به سمت دقت بالا در کاربردهای مهندسی، خواستار پیش‌بینی‌های دقیق‌تر از رفتار دینامیکی سیستم‌های مکانیکی است. بر این اساس با کاراتر شدن روش‌های تحلیلی و کامپیوتر، تحلیل ارتعاشات آزاد سه‌بعدی عناصر ساختاری با اشکال مختلف بر پایه تئوری الاستیسیته خطی در دهه‌های اخیر افزایش یافته است. در مطالعات بر پایه الاستیسیته سه‌بعدی هیچ فرضیه‌ی بر سینماتیک مساله اعمال نشده و نتایج دقیقی ارائه می‌گردد که دیگر روش‌های تقریبی نمی‌توانند پیش‌بینی کنند. حل دقیق مسائل با استفاده از الاستیسیته سه‌بعدی، نه تنها حل قابل اعتمادی را ارائه می‌کند بلکه تشخیص خصوصیات فیزیکی مساله را نیز بهتر می‌کند [1]. لامب وچری [3،2] دو نوع مد ارتعاشی برای ارتعاشات آزاد کره ارائه کرد. ارتعاشات نوع اول ارتعاشات پیچشی می‌باشد. در ارتعاشات پیچشی، کره دارای حرکت پیچشی است که در این حرکت تغییری در حجم کره بوجود نیامده و همچنین جابجایی شعاعی صفر است. ارتعاشات نوع دوم ارتعاشات کروی (تپشی یا جفت شده بین خمشی و کششی) می‌باشد. در ارتعاشات کروی تغیر شکل کره در نتیجه ارتعاش در راستای شعاعی است. بسیاری از کارهایی که بعدا در این زمینه انجام شد بر پایه کار لامب بوده است. برای مثال ساتو و یوسامی [4] طیف وسیع و کاملی برای مقادیر فرکانسی ارتعاش آزاد کره در جداولی تهیه کرده و متناسب با این فرکانس‌ها شکل مدهای مربوطه را نیز نمایش دادند. سپس شا و همکاران [5] رفتار ارتعاش آزاد کره توخالی را مورد مطالعه قرار داده و با استفاده از آنالیز سه‌بعدی معادله مشخصه فرکانسی را برحسب توابع بسل کروی نوع اول و نوع دوم بدست آورده و نتایج عددی برای طیف وسیعی از نسبت شعاع به ضخامت را به‌صورت منحنی تهیه کردند.

در سال‌های اخیر، کاربرد ساختارهای نانو مانند نانولوله [6]، نانومیله [7] و نانو ورق [8] در اجزاء تجهیزات تکنولوژیکی روند رو به رشدی را داشته است که این موارد منجر به افزایش تقاضا پیرامون شناخت رفتار مواد در مقیاس نانو گردیده است. برای مطالعه خواص مواد در ابعاد نانو "تئوری مدل‌سازی اتمی" و "تئوری الاستیسیته وابسته از اندازه" بیان و توسعه داده شده است.

یکی از تئورهای الاستیسیته وابسته از اندازه، تئوری الاستیسیته غیرمحلی است که برای اولین بار توسط ارینگن در دهه 60 میلادی پیشنهاد شد و سپس توسط خود او در دهه 70 میلادی توسعه داده شد [9-12]. ونگ و همکاران [13] تئوری الاستیسیته غیرمحلی را برای پوسته توسعه دادند تا انتشار امواج در نانولوله کربنی را مورد مطالعه قرار دهند. اخیرا فاضل‌زاده و قواملو [14] در سال 2012 با به‌کارگیری تئوری الاستیسیته غیرمحلی، ارتعاشات متقارن محوری پوسته کروی مستغرق در سیال را مورد مطالعه قرار دادند. همچنین آن‌ها [15] در سال 2013 با به‌کارگیری تئوری الاستیسیته غیرمحلی معادلات حرکت ارتعاشات آزاد شعاعی نانو کره را استخراج کرده و طیف فرکانس طبیعی را برحسب پارامتر غیرمحلی، ضریب پواسون و شعاع کره به‌دست آوردند.

تئوری الاستیسیته سطحی یکی دیگر از تئورهای الاستیسیته وابسته از اندازه برای بررسی رفتار مواد در مقایس نانو است. افزایش میزان سطح نسبت به حجم در یک ذره باعث میشود سطوح ماده تاثیر قابل توجه و گاهی تاثیر غالب بر طبیعت تغییرشکل ماده بگذارند [17،16]. تئوری الاستیسیته وابسته از اندازه بر پایه انرژی سطح اولین بار توسط گورتین و مورداخ [18] در سال 1975 ارائه شد و سپس توسط گورتین در سال 1998 [19] توسعه داده شد. شینوی [20] در سال 2005 با به‌کارگیری محاسبات اتمیک ثوابت الاستیک سطوح را به‌دست آورد. شینوی [21] در سال 2002 تغییر شکل تعدادی المان در اندازه نانو (همانند تیر، لوله و ورق) را با به‌کارگیری تئوری الاستیسیته سطحی گورتین مورد مطالعه قرار گرفت و گزارش کرد که نتایج حاصل از تئوری الاستیسیته سطحی تطابق خوبی با "تئوری اتمی" دارد. هی و همکاران در سال 2008 تاثیر تنش سطحی بر فرکانس‌های طبیعی نانو وایر را با به‌کارگیری تیوری اویلر برنولی مورد مطالعه قرار دادند [22]. هاشمی‌نژاد و عوض محمدی در سال 2009 بازتابش امواج فشاری و برشی از ناهمگنی کروی با ابعاد نانو را مورد بررسی قرار دادند و تاثیرات کشش سطحی بر تمرکز تنش دینامیکی پیرامون ناهمگنی را نشان دادند [23].

ونگ [24] با به‌کارگیری تئوری الاستیسیته غیرمحلی تاثیر اثرات سطح ارتعاشات آزاد نانولوله حاوی سیال را مورد مطالعه قرار داد. التاهر و همکاران در سال 2015 تاثیرات همبسته انرژی سطح و الاستیسیته غیرمحلی بر ارتعاشات نانوتیر را با استفاد از روش اجزاء محدود مورد بررسی قرار دادند. در ادامه انصاری و همکاران [25] تاثیر تنش سطحی بر مشخصات ارتعاشی و پایداری نانولوله‌های حاوی سیال را مورد مطالعه قرار دادند آن‌ها برای مدل‌سازی از تئوری تیر تیموشنکو و برای حل از روش کوادریچر تعمیم یافته بهره گرفتند و تاثیر پارمترهای مختلف را بروی سرعت بحرانی و فرکانس طبیعی مطالعه کردند. پس از آن انصاری و همکاران [26] با به‌کارگیری تئوری تیر تیموشنکو و فرضیات ون-کارمن، ارتعاشات آزاد غیرخطی نانولوله حاوی سیال را مورد مطالعه قرار دادند برای حل از روش کوادریچر تعمیم یافته بهره گرفتند و تاثیر پارامترهای مختلف و شرایط مرزی مختلف را بر پایداری و فرکانس طبیعی نمایش دادند. انصاری و همکاران در سال [27] انتشار امواج در نانولوله حاوی سیال را مورد مطالعه قرار دادند آن‌ها برای مدل‌سازی از تئوری تیر تیموشنکو و برای حل معادلات از روش کوادریچر استفاده نمودند . انصاری و نوروززاده [28] با به‌کارگیری تیوری غیرمحلی ارینگن و تئوری الاستیسیته سطح گورتین، کمانش نانو ورق مواد مدرج تابعی را مورد مطالعه قرار دادند و نشان دادند که اثرات سطح تاثیرات قابل‌توجهی بر کمانش نانو ورق دارد. نوروززاده و همکاران [29] ارتعاشات اجباری غیرخطی تیر متحرک محوری تحت اثر نیروی هارمونیک و در محیط حرارتی را مورد بررسی قرار دادند. برای مدل‌سازی از تئوری تیر تیموشنکو برای تیر متحرک محوری بهره گرفتند سپس این معادلات و شرایط مرزی موردنظر با روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته حل گردید و تاثیر پارامترهای مختلف اعم از سرعت محوری، نیروی عرضی وارد بر تیر، ضریب میرایی و اختلاف دما در پاسخ‌های فرکانسی تیر متحرک محوری با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در دو انتها بررسی قرار گرفت. انصاری و همکاران [30]، ارتعاشات نانولوله کربنی حاوی سیال داخلی با سرعت ثابت و تحت نیروی گسترده خارجی هارمونیک واقع بر بستر الاستیک ویسکو-پاسترناک را مورد مطالعه قرار دادند. برای مدل‌سازی نانولوله، تئوری تیر تیموشنکو به‌کار گرفته شد و با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته معادلات حل گردید و علاوه‌بر آن اثرات ابعاد نانولوله، سرعت سیال، نیروی عرضی اعمالی و پارامترهای بستر الاستیک بر پاسخ‌های فرکانسی نانولوله مورد بررسی قرار گرفت.

قویا به‌نظر می‌رسد ارتعاشات آزاد پیچشی نانوذرات کروی با به‌کارگیری تئوری الاستیسیته سطحی مورد بررسی قرار نگرفته است. همچنین لازم به‌ذکر است کار حاضر یک مساله پایه‌ای در ارتعاشات نانوذرات را مورد توجه قرار داده است که نه تنها می‌تواند به‌عنوان یک کار پایه‌ای مرجع برای بررسی و استخراج مشخصات ارتعاشی نانو کره همانند کارهای مراجع [31-34] قرار گیرد بلکه نتایج حاصل از آن را می‌توان برای بعضی از کاربردهای تکنولوژیکی

www.SID.ir
Archive of SID

درگیر با انتشار امواج [35]، "میکروسکوپ ارتعاشی فراصوتی"، وسیله‌ای برای اندازه‌گیری تانسور الاستیک مواد [36]، سنسور جرمی نانو مکانیکی [38،37] استفاده نمود.

2- معادلات و روابط پایه

2-1- معادلات حرکت

هندسه مساله، کره همرکز با شعاع داخلی R_i و شعاع خارجی R_o مفروض است. سیستم محور مختصات کروی (r,θ,ϕ) به مرکز کره در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم بر میدان جابجایی در غیاب نیروهای خارجی و با فرض ماده الاستیک، خطی، همگن و ایزوتروپیک با استفاده از معادله کلاسیک ناویر به‌صورت زیر بیان می‌شوند [39].

$$\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\mu\nabla^2 U+(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot U) \tag{1}$$

که ρ چگالی ماده، U بردار جابجایی، ∇^2 لاپلاسین و λ,μ ثوابت لامه می‌باشند. میدان جابجایی باید شرایط مرزی واقع بر مساله را ارضا کند. با استفاده از اصل هلمهولتز [40] بردارجابجایی U به‌صورت حاصل‌جمع دو بردار u_1 و u_2 نوشته می‌شود که u_1 بخش غیرچرخشی میدان جابجایی و مرتبط با موج فشاری و u_2 بخش چرخشی میدان جابجایی و مرتبط با موج برشی است.

$$U=u_1+u_2 \tag{2}$$

که $\nabla\times u_1=0,\nabla\cdot u_2=0$ است. جداسازی هلمهولتز این امکان را فراهم می‌کند تا بتوان معادلات دینامیکی حرکت (1) را به دو دسته معادله برداری موج جدا کرد که با فرض هارمونیک بودن حرکت با فرکانس ω، معادلات برداری موج به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\nabla^2 u_1+\alpha^2 u_1=0\\ \nabla^2 u_2+\beta^2 u_2=0\end{aligned} \tag{3}$$

که $\alpha^2=\omega^2/c_p^2$ ، $\beta^2=\omega^2/c_s^2$ است و $c_p^2=(\lambda+2\mu)/\rho$ و $c_s^2=\mu/\rho$ به ترتیب سرعت موج برشی و موج فشاری در ماده الاستیک می‌باشند. حل معادلات برداری موج (3) به‌صورت زیر بیان می‌شود [40]:

$$\begin{aligned}u_1&=L=\nabla\varphi\\ u_2&=M+N=\nabla\times(e_r r\psi)+\nabla\times\nabla\times(e_r r\chi)\end{aligned} \tag{4}$$

که χ,ψ,φ توابع پتانسیل جابجایی نامیده می‌شوند و می‌بایست معادلات اسکالر هلمهولتز را ارضا کنند.

در ارتعاشات پیچشی کره، میدان جابجایی تنها متاثر از امواج برشی ψ می‌باشد و $\chi=\varphi=0$ است [40]. بنابراین در معادله (2)، $u_1=0$ است و میدان جابجایی سیستم متاثر از ترم جابجایی چرخشی به‌فرم زیر بیان می‌شود:

$$U=u_2=\nabla\times(e_r r\psi) \tag{5}$$

همان‌گونه که اشاره شد ψ تابع اسکالر موج برشی است و معادله سکالر موج به‌صورت زیر را ارضا می‌کند.

$$(\nabla^2+\beta^2)\psi=0 \tag{6}$$

میدان تانسور تنش برحسب میدان جابجایی به‌صورت زیر می‌باشد [40]:

$$\sigma=\lambda(\nabla\cdot U)\mathrm{I}+\mu(\nabla U+U\nabla) \tag{7}$$

که σ تانسور تنش و I ماتریس واحد است. تانسور کرنش و همچنین تانسور کرنش سطح برحسب تانسور تنش از رابطه زیر استخراج می‌گردد:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}-\frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk} \tag{8}$$

که δ_{ij} دلتای کرونکر، ν ضریب پواسون، E مدول الاستیسیته و $i=j=k=1,2,3$ است.

2-2- تاثیرات سطح

به‌علت برقراری تعادل استاتیکی اتم‌های روی سطح، پدیده اثرات سطح ظاهر می‌شوند. به‌عنوان توضیح اولیه می‌توان گفت این اثرات در همه مواد وجود دارند و ارتباطی به مقیاس و اندازه آن‌ها ندارند اما این اثرات زمانی اهمیت می‌یابند که نسبت سطح به حجم قطعه به‌صورت چشم‌گیری افزایش یابد و این عمدتا با کاهش حجم قطعه مقارن است. به بیان دیگر با کاهش ابعاد قطعه تا مرتبه نانو نسبت سطح به حجم چنان افزایش می‌یابد که نمی‌توان از اثرات سطحی صرف‌نظر نمود. بررسی وجود این اثرات در اجسام الاستیک در سال 1974 توسط گورتین و همکارانش [18] انجام شد و فرمول‌بندی آن‌ها بر این پایه استوار است که سطح جسم، مانند یک لایه نازکی در نظر گرفته شده که به‌صورت ایده‌آل به ماده چسبیده است و ثوابت الاستیک سطح با ثوابت الاستیک ماده متفاوت است. آن‌ها معادلات تعادل و ساختاری ماده را با استفاده از روابط کلاسیک فرمول‌بندی کرده و اثرات سطح را به‌صورت تنش‌های ناشی از سطح در شرایط مرزی ماده وارد نمودند. معادله تعادل سطح به‌صورت زیر نوشته می‌شود [13].

$$(\sigma_{ij}^{+}-\sigma_{ij}^{-})n_i n_j=\sigma_{\alpha\beta}^{s}\kappa_{\alpha\beta} \tag{9}$$

در رابطه فوق σ_{ij}^{+} و σ_{ij}^{-} نمایش‌دهنده تنش‌های بالایی و زیرین روی سطح ماده می‌باشند. n_i هم مولفه‌های بردار نرمال بر سطح به سمت بیرون می‌باشند. $\sigma_{\alpha\beta}^{s}$ و $\kappa_{\alpha\beta}$ نیز به ترتیب نشان‌دهنده تنش‌های سطح و نیز انحناهای سطح می‌باشند. در این رابطه $i=j=1,2,3$ و نیز $\alpha=\beta=1,2$ می‌باشند. برای سطح ایزوتروپیک تنش‌های سطحی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند [13]:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{s}=2\mu^s\varepsilon_{\alpha\beta}^{s}+\lambda^s\varepsilon_{\gamma\gamma}^{s}\delta_{\alpha\beta} \tag{10}$$

که $\delta_{\alpha\beta}$ دلتای کرونکر، $\varepsilon_{\alpha\beta}^{s}$ کرنش سطح، μ^s,λ^s ثوابت لامه سطح و $\alpha=\beta=\gamma=1,2$ می‌باشند.

3- بسط میدان پتانسیل و اعمال شرایط مرزی

حل معادله اسکالر موج (6)، منتج به میدان موج برشی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [40]:

$$\psi(r,\theta,\phi,\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(a_{nm}\,j_n(\beta r)+b_{nm}y_n(\beta r)\right)p_n^m(\cos\theta)\,e^{im\phi} \tag{11}$$

که a_{nm} ، b_{nm} ضرایب مجهول مودال، j_n,y_n توابع بسل کروی نوع اول و دوم و $p_n^m(\cos\theta)$ تابع لژاندر می‌باشند. با جایگذاری معادله (11) در معادله (5)، مولفه‌های میدان جابجایی به شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}u_r&=0,\\ u_\theta&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(a_{nm}\,l_n^{(1)}(\beta r)+b_{nm}l_n^{(2)}(\beta r)\right)\frac{\mathrm{i}m}{r\sin(\theta)}p_n^m(\cos\theta)\,e^{im\phi}\\ u_\phi&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(a_{nm}\,l_n^{(1)}(\beta r)+b_{nm}l_n^{(2)}(\beta r)\right)\frac{d}{d\theta}\left(p_n^m(\cos\theta)\right)e^{im\phi}\end{aligned} \tag{12}$$

که در آن $i=1,2$ و $l_n^{(i)}=\begin{cases}j_n & (i=1)\\ y_n & (i=2)\end{cases}$ می‌باشند. با جایگذاری مولفه‌های بردار جابجایی در رابطه (7)، مولفه‌های تانسور تنش به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

Archive of SID

$$\sigma_{rr}=0,$$
$$\sigma_{\theta\theta}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{2\mu}{r^2}\Big(a_{nm}S_{1n}^{(1)}(\beta r)+b_{nm}S_{1n}^{(2)}(\beta r)\Big)\frac{im}{\sin\theta}\Big(\frac{d}{d\theta}\big(p_n^m(\cos\theta)\big)-\cot\theta\, p_n^m(\cos\theta)\Big)e^{im\phi},$$
$$\sigma_{\phi\phi}=-\sigma_{\theta\theta},$$
$$\sigma_{r\theta}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{2\mu}{r^2}\Big(a_{nm}S_{2n}^{(1)}(\beta r)+b_{nm}S_{2n}^{(2)}(\beta r)\Big)\frac{im}{\sin\theta}p_n^m(\cos\theta)e^{im\phi},$$
$$\sigma_{r\phi}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{-2\mu}{r^2}\Big(a_{nm}S_{2n}^{(1)}(\beta r)+b_{nm}S_{2n}^{(2)}(\beta r)\Big)\frac{d}{d\theta}\big(p_n^m(\cos\theta)\big)e^{im\phi},$$
$$\sigma_{\theta\phi}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{\mu}{r^2}\Big(a_{nm}S_{1n}^{(1)}(\beta r)+b_{nm}S_{1n}^{(2)}(\beta r)\Big)e^{im\phi}\Big(\cot\theta\frac{d}{d\theta}\big(p_n^m(\cos\theta)\big)-\frac{d^2}{d\theta^2}\big(p_n^m(\cos\theta)\big)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}p_n^m(\cos\theta)\Big),\qquad\text{(a-13)}$$

که در آن $S_{jn}^{(i)}(\beta r)$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$S_{1n}^{(i)}(\beta r)=rl_n^{(i)}(\beta r)$$
$$S_{2n}^{(i)}(\beta r)=\frac{1}{2}r\Big((n-1)l_n^{(i)}(\beta r)-\beta r l_{n+1}^{(i)}(\beta r)\Big)\qquad\text{(b-13)}$$

با بسط معادله تعادل سطح (9) در سیستم مختصات کروی، شرایط مرزی غیرکلاسیک در حالت کلی به‌صورت زیر استخراج می‌گردد که باید در مرز داخلی نانو کره و مرز خارجی نانو کره برقرار باشد [13]:

$$\sigma_{rr}=\frac{1}{r}\big(\sigma_{\theta\theta}^s+\sigma_{\phi\phi}^s\big),$$
$$\sigma_{r\theta}=\frac{1}{r}\Big(\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}^s}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{\theta\phi}^s}{\partial\phi}+\big(\sigma_{\theta\theta}^s-\sigma_{\phi\phi}^s\big)\cot\theta\Big)$$
$$\sigma_{r\phi}=\frac{1}{r}\Big(\frac{\partial\sigma_{\theta\phi}^s}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{\phi\phi}^s}{\partial\phi}+2\sigma_{\theta\phi}^s\cot\theta\Big)\qquad\text{(a-14)}$$

که $\sigma_{\theta\theta}^s$، $\sigma_{\phi\phi}^s$، $\sigma_{\theta\phi}^s$ مولفه‌های تنش سطحی هستند. برای محاسبه تنش‌های سطحی، با به‌کارگیری معادله (10)، نیازمند محاسبه تانسور کرنش است که تانسور کرنش با استفاده از رابطه (8) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [13]:

$$\varepsilon_{\theta\theta}^s=\frac{1}{E}\big(\sigma_{\theta\theta}-\nu\sigma_{rr}-\nu\sigma_{\phi\phi}\big)$$
$$\varepsilon_{\phi\phi}^s=\frac{1}{E}\big(\sigma_{\phi\phi}-\nu\sigma_{rr}-\nu\sigma_{\theta\theta}\big)$$
$$\varepsilon_{\theta\phi}^s=\mu\sigma_{\theta\phi}\qquad\text{(b-14)}$$

با جایگذاری مولفه های کرنش از رابطه (14) در رابطه (10)، مولفه‌های تانسور تنش سطحی به‌صورت زیر استخراج می‌گردند.

$$\sigma_{\theta\theta}^s=k_1\sigma_{\theta\theta}+k_2\sigma_{\phi\phi}=(k_1-k_2)\sigma_{\theta\theta}$$
$$\sigma_{\phi\phi}^s=k_2\sigma_{\theta\theta}+k_1\sigma_{\phi\phi}=(k_2-k_1)\sigma_{\theta\theta}$$
$$\sigma_{\theta\phi}^s=\frac{\mu^s}{\mu}\sigma_{\theta\phi}\qquad(15)$$

که $k_1=(2\mu^s+\lambda^s(1-\nu))/E$ و $k_2=(-2\nu\mu^s+\lambda^s(1-\nu))/E$ است و نتیجتا $k_1-k_2=\mu^s/\mu$ می‌باشد.

نهایتا مولفه‌های تانسور تنش سطحی به‌صورت زیر تابعی از تانسور تنش ماده خواهد شد:

$$\sigma_{\theta\theta}^s=\frac{\mu^s}{\mu}\sigma_{\theta\theta},\quad \sigma_{\phi\phi}^s=-\frac{\mu^s}{\mu}\sigma_{\theta\theta},\quad \sigma_{\theta\phi}^s=\frac{\mu^s}{\mu}\sigma_{\theta\phi}\qquad(16)$$

با جایگذاری مولفه‌های تانسور تنش سطحی معادله (16) در رابطه 14-a)، شرایط مرزی غیرکلاسیک به‌صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$\sigma_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\mu^s}{\mu}\Big(\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{\theta\phi}}{\partial\phi}+2\sigma_{\theta\theta}\cot\theta\Big)\qquad(17)$$
$$\sigma_{r\phi}=\frac{1}{r}\frac{\mu^s}{\mu}\Big(\frac{\partial\sigma_{\theta\phi}}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\phi}+2\sigma_{\theta\phi}\cot\theta\Big)\qquad(18)$$

برای اعمال شرایط مرزی نیاز است که روابط فوق ساده گردند که این مهم با انجام مراحل ذیل حاصل خواهد شد.

مولفه‌های تنش $\sigma_{\theta\phi}$ و $\sigma_{\theta\theta}$ برحسب تابع موج برشی به‌صورت زیر بیان می‌شوند [39]:

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\Big)$$
$$\sigma_{\theta\phi}=\frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\cot\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\Big)\qquad(19)$$

با توجه به رابطه (11) که $\frac{\partial\psi}{\partial\phi}=im\psi$ و $\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}=-m^2\psi$ می‌باشند معادله (19) به شکل زیر ساده می‌گردد:

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{2im\mu}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\frac{1}{\sin\theta}\psi\Big)$$
$$\sigma_{\theta\phi}=\frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\cot\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\psi\Big)\qquad(20)$$

با توجه به رابطه (20)، سمت راست معادله (17) برحسب تابع موج برشی به‌صورت زیر استخراج می‌شود:

$$\frac{1}{r}\frac{\mu^s}{\mu}\Big(\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{\theta\phi}}{\partial\phi}+2\sigma_{\theta\theta}\cot\theta\Big)=\frac{im\mu^s}{r^2\sin\theta}\Big(\cot\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\Big(2-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\Big)\psi\Big)\qquad(21)$$

با جایگذاری تابع موج برشی از رابطه (11) در معادله فوق و انجام محاسبات نسبتا مفصل رابطه زیر استخراج می‌گردد:

$$\frac{1}{r}\frac{\mu^s}{\mu}\Big(\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{\theta\phi}}{\partial\phi}+2\sigma_{\theta\theta}\cot\theta\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{\mu^s}{r^2}\Big(a_{nm}S_{3n}^{(1)}(\beta r)+b_{nm}S_{3n}^{(2)}(\beta r)\Big)\frac{im}{\sin\theta}p_n^m(\cos\theta)e^{im\phi},\qquad(22)$$

که $S_{3n}^{(i)}(\beta r)=(-n^2-n+2)l_n^{(i)}(\beta r)$ است. نهایتا معادله (17) به‌صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{\mu}{r^2}\Big(a_{nm}V_n^{(1)}(\beta r)+b_{nm}V_n^{(2)}(\beta r)\Big)\frac{im}{\sin\theta}p_n^m(\cos\theta)e^{im\phi}=0\qquad(23)$$

که $V_n^{(i)}(\beta r)=2S_{2n}^{(i)}(\beta r)-\frac{\mu^s}{\mu}S_{3n}^{(i)}(\beta r)$ است. با انجام روش مشابه فوق برای معادله (18)، نهایتا معادله (18) به‌صورت ذیل استخراج می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{-\mu}{r^2}\Big(a_{nm}V_n^{(1)}(\beta r)+b_{nm}V_n^{(2)}(\beta r)\Big)\frac{im}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\big(p_n^m(\cos\theta)\big)e^{im\phi}=0\qquad(24)$$

بنابراین با اعمال شرایط مرزی در مرز داخلی و خارجی کره روابط زیر

Archive of SID

حاصل خواهد شد:

$$a_{nm}\, V_n^{(1)}(\beta R_i) + b_{nm} V_n^{(2)}(\beta R_i) = 0$$
$$a_{nm}\, V_n^{(1)}(\beta R_o) + b_{nm} V_n^{(2)}(\beta R_o) = 0 \tag{25}$$

نهایتا معادله مقدار ویژه فوق را می‌توان به‌فرم ماتریسی زیر بیان کرد:

$$[M]\{C\} = 0 \tag{26}$$

که $\{C\} = [a_{nm}, b_{nm}]^{\mathrm{T}}$ بردار مودال، $[M]$ ماتریس مربعی 2×2 تابعی از پارامتر فرکانس است. برای محاسبه فرکانس طبیعی دترمینان ماتریس مربعی را برابر با صفر قرار داده تا معادله مشخصه فرکانسی سیستم به‌دست آید سپس با استفاده از متدهای متداول ریشه‌یابی، ریشه‌های معادله مشخصه فرکانسی که همان فرکانس‌های طبیعی سیستم است برحسب پارامترهای هندسی مساله به‌دست می‌آید. در ادامه چندین مثال عددی در نظر گرفته شده و فرکانس‌های طبیعی سیستم نمایش داده خواهد شد.

4- نتایج عددی

برای نشان دادن تاثیر تنش سطحی بر روی رفتار ارتعاشی نانو کره، چندین نمونه‌های عددی در این بخش ارائه شده است. برای این منظور، نانو کره با نسبت شعاع خارجی به داخلی دلخواه در نظر گرفته می‌شود و جنس نانو کره از آلومینیوم دارای خواص فیزیکی

$\rho = 2700\ \mathrm{kg/m^3}, \mu = 34.7 \times 10^9 \mathrm{N/m^2}, \lambda = 52 \times 10^9 \mathrm{N/m^2}$

انتخاب می‌شود. دو مجموعه از خواص سطح مربوط به جهت‌های کریستالوگرافی [100] (سطح A) و [111] (سطح B) برای آلومینیوم در محاسبه استفاده می‌شوند. ثابت‌های الاستیک مربوط به جهت‌های کریستالوگرافی فوق، در مرجع [6] به‌صورت سطح A $E^s = -8.95\ \mathrm{N/m}$ ،(SA) و سطح B (SB)، $E^s = 6.08\ \mathrm{N/m}$ داده شده است. همچنین سطح C (SC)، $E^s = 0\ \mathrm{N/m}$ اشاره به سطح با شرایط کلاسیک دارد.

در جدول 1 فرکانس طبیعی اول نرمال شده $\omega c_p/R_i$، برای شکل مد $n = 2$، سه نوع سطح "SA"، "SB" و "SC"و نسبت شعاع $R_o/R_i = 2$ نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است با افزایش شعاع داخلی نانو کره، مقدار فرکانس طبیعی نرمال شده نانو کره برای هر دو سطح SA و SB با فرکانس طبیعی نرمال شده کلاسیک که در مراجع نیز آمده است برابر می‌گردد.

"شکل 1 تا 4" تغییرات فرکانس طبیعی پیچشی نرمال شده $\omega c_p/R_i$، برحسب شعاع داخلی نانوکره برای نسبت شعاع خارجی به داخلی $R_o/R_i = 1.1$ به‌ترتیب برای شکل مد $n = 2{,}3$ را نشان می‌دهند. این نمودارها برای سه نوع سطح مختلف "SA"، "SB" و "SC" رسم شده است.

با توجه به شکل‌ها می‌توان نتیجه‌گیری کرد فرکانس طبیعی نرمال شده

جدول 1 فرکانس طبیعی اول نرمال شده، برای شکل مد $n = 2$، سه نوع سطح و نسبت شعاع $R_o/R_i = 2$

Table 1 First dimensionless torsional natural frequency for $n = 2$, $R_o/R_i = 2$ and three surface types

R_i(nm)	SB	SC [Ref.[4]]	SA
1	0.682	0.651	0.596
10	0.654	0.651	0.646
20	0.653	0.651	0.649
30	0.652	0.651	0.649
40	0.651	0.651	0.650

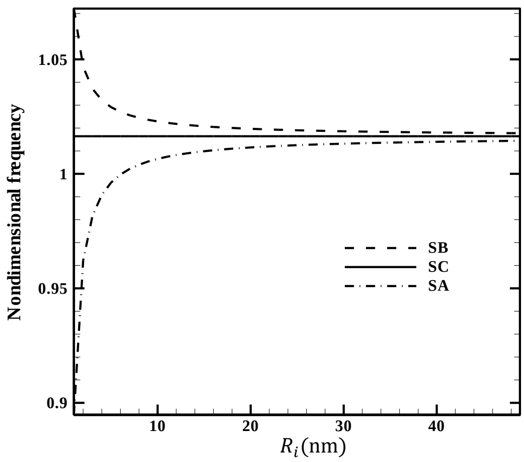

Fig. 1 First dimensionless torsional natural frequencies for $n = 2$, $R_o/R_i = 1.1$ and three surface types

شکل 1 فرکانس طبیعی اول پیچشی نرمال شده، برای شکل مد $n = 2$، سه نوع سطح و نسبت $R_o/R_i = 1.1$

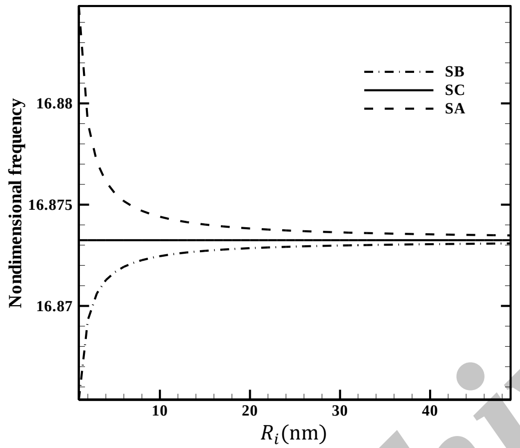

Fig. 2 Second dimensionless torsional natural frequencies for $n = 2$, $R_o/R_i = 1.1$ and three surface types

شکل 2 فرکانس طبیعی دوم پیچشی نرمال شده، برای شکل مد $n = 2$، سه نوع سطح و نسبت $R_o/R_i = 1.1$

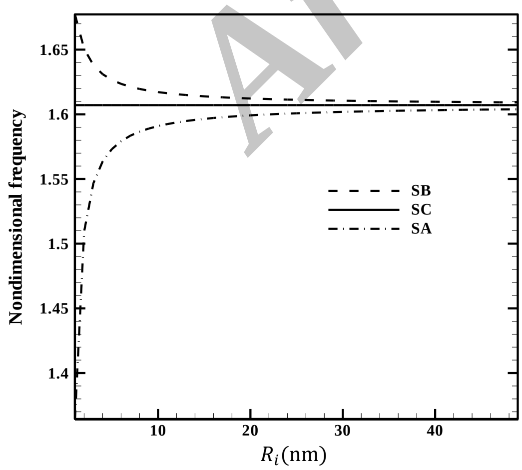

Fig. 3 First dimensionless torsional natural frequencies for $n = 3$, $R_o/R_i = 1.1$ and three surface types

شکل 3 فرکانس طبیعی اول پیچشی نرمال شده، برای شکل مد $n = 3$، سه نوع سطح و نسبت $R_o/R_i = 1.1$

Archive of SID

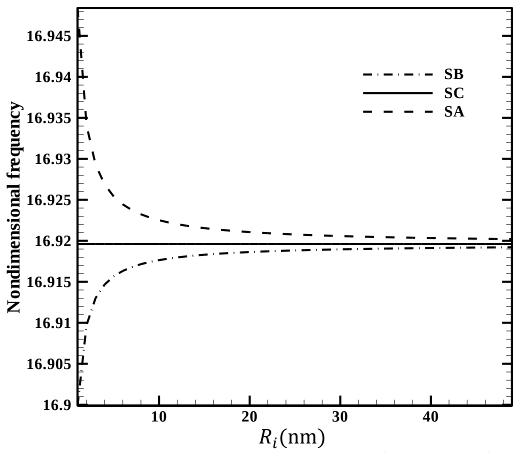

Fig. 4 Second dimensionless torsional natural frequencies for $n = 3$, $R_o/R_i = 1.1$ and three surface types

شکل 4 فرکانس طبیعی دوم پیچشی نرمال شده، برای شکل مد $n = 3$، سه نوع سطح و نسبت $R_o/R_i = 1.1$

نانو کره با مقادیر کلاسیک آن در حالت کلی متفاوت است و با توجه به نوع سطح و مرتبه فرکانس، مقدار فرکانس طبیعی نرمال شده نانو کره بیشتر و یا کمتر از مقدار کلاسیک آن است. اما صرف‌نظر از نوع سطح (SA یا SB) و یا مرتبه فرکانس مشاهده می‌شود که با افزایش شعاع داخلی نانو کره تاثیرات سطح کم شده و فرکانس طبیعی نانو کره به مقدار کلاسیک آن نزدیک می‌شود. نکته قابل توجه دیگر این‌که، تاثیرات سطح وابسته به مرتبه فرکانس است به‌عنوان مثال در فرکانس اول تاثیرات سطح SB باعث می‌شود که فرکانس طبیعی نرمال شده از مقدار کلاسیک آن بیشتر شود ولی در فرکانس دوم همان نانو کره اول تاثیرات سطح SB باعث می‌شود که فرکانس طبیعی نرمال شده از مقدار کلاسیک آن کمتر شود. از نمودارها قابل مشاهده است که اثرات سطح برای فرکانس‌های پایین‌تر مشهودتر است و همچنین از آن‌جا که مقدار قدرمطلق ثابت سطح برای "SA" بزرگتر از "SB" است لذا اختلاف فرکانسی نسبت به حالت کلاسیک برای سطح A بیشتر است.

"شکل 5 تا 8" تغییرات فرکانس طبیعی پیچشی نرمال شده $\omega c_p/R_i$، برحسب شعاع داخلی نانوکره برای نسبت شعاع خارجی به داخلی $R_o/R_i = 2$ به ترتیب برای شکل مد $n = 2,3$ را نشان می‌دهد. این نمودارها برای سه نوع سطح مختلف "SA "، "SB" و "SC" رسم شده‌اند. نتایج مشابهی همانند "شکل 1 تا 4" مشاهده می‌شود.

"شکل 9" تغییرات سه فرکانس طبیعی پیچشی نرمال شده $\omega c_p/R_i$، را برحسب نسبت شعاع داخلی نانو کره به شعاع خارجی آن R_i/R_o نشان می‌دهد. این نمودارها برای شعاع خارجی 2 نانومتر، سطح SB، شکل مد $n = 2$ و سه فرکانس اول آن رسم شده‌اند. همان‌گونه که مشخص است برای نسبت شعاع $R_i/R_o > 0.15$ ، با افزایش نسبت شعاع فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد شده افزایش یافته و علاوه بر آن فاصله بین فرکانس‌های اول، دوم و سوم نیز افزایش می‌یابد. اما برای نسبت شعاع $R_i/R_o < 0.15$ مشاهده می‌شود با وجود این‌که نحوه رفتار سه فرکانس اول، دوم و سوم یکسان است اما تغییرات آنها با افزایش نسبت شعاع، به‌صورت نوسانی است.

در خصوص پدیده تغیرات ناگهانی در "شکل 9" که نشان‌دهنده فرکانس پیچشی برای مد $n = 2$ است این نکته قابل ذکر است در صورتی که کلیه مدها شامل شعاعی، پیچشی و ... با شماره مدهای (n) مختلف بدون در نظر گرفتن شکل مد و شماره n به ترتیب کوچک به بزرگ چینش و رسم شود در تغییرات فرکانس اول سیستم با افزایش شعاع داخلی به‌طور کلی قابل ملاحظه خواهد بود که فرکانس اول سیستم گاهی شعاعی، گاهی پیچشی که شماره مد نیز امکان عوض شدن دارد لذا به‌عنوان مثال وقتی که فقط مد پیچشی و فقط شماره مد 2 در نظر گرفته شود تغییرات ناگهانی فرکانس دیده می‌شود که علت آن می‌تواند جابجایی ترتیب مدهای پیچشی با عدد مدهای مختلف باشد و یا این‌که علت آن جابجایی ترتیب مدهای پیچشی با مدهای غیرپیچشی باشد. برای توضیحات بیشتر به مقاله هاشمی‌نژاد و میرزایی [41] مراجعه شود.

"شکل 10" تغییرات سه فرکانس طبیعی پیچشی نرمال شده $\omega c_p/R_i$، را برحسب نسبت شعاع داخلی نانو کره به شعاع خارجی آن R_i/R_o نشان می‌دهد. این نمودارها برای شعاع خارجی 2 نانومتر، سطح SA و شکل مد $n = 2$ و سه فرکانس اول آن رسم شده‌اند. نتایج مشابهی همانند "شکل 9" مشاهده می‌شود.

"شکل 11 و 12" تغییرات سه دسته فرکانس طبیعی پیچشی نرمال شده $\omega c_p/R_i$، را برحسب نسبت شعاع داخلی نانو کره به شعاع خارجی R_i/R_o نشان می‌دهد. این نمودارها برای شعاع خارجی 2 نانومتر و شکل مد $n = 2,3,4$ رسم شده‌اند. همان‌گونه که مشخص است در حالی‌که دسته اول

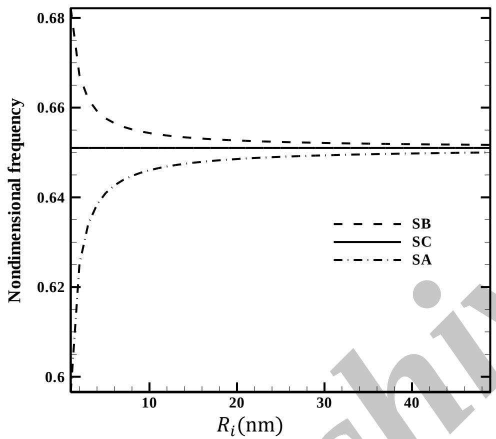

Fig. 5 First dimensionless torsional natural frequencies for $n = 2$, $R_o/R_i = 2$ and three surface types

شکل 5 فرکانس طبیعی اول پیچشی نرمال شده، برای شکل مد $n = 2$، سه نوع سطح و نسبت $R_o/R_i = 2$

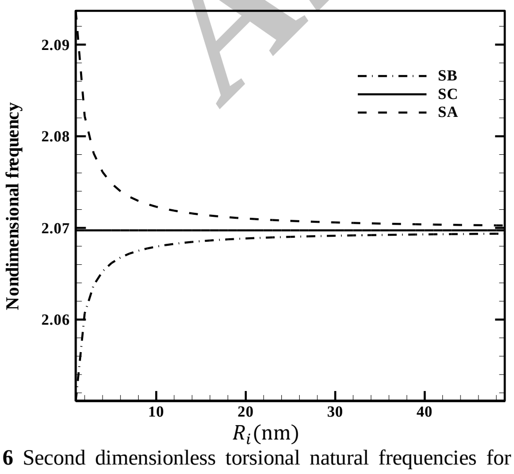

Fig. 6 Second dimensionless torsional natural frequencies for $n = 2$, $R_o/R_i = 2$ and three surface types

شکل 6 فرکانس طبیعی دوم پیچشی نرمال شده، برای شکل مد $n = 2$، سه نوع سطح و نسبت $R_o/R_i = 2$

Archive of SID

www.SID.ir

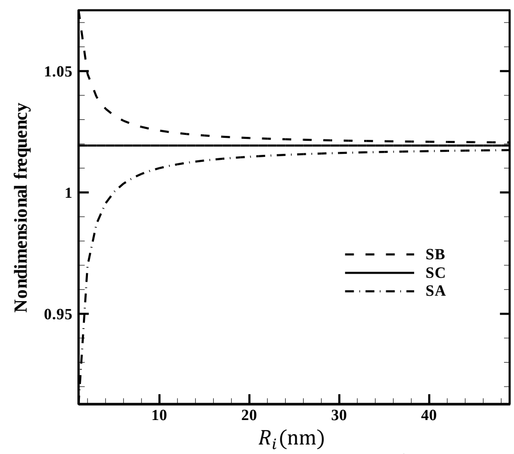

Fig. 7 First dimensionless torsional natural frequencies for $n = 3$, $R_o/R_i = 2$ and three surface types

شکل 7 فرکانس طبیعی اول پیچشی نرمال شده، برای شکل مد $n = 3$، سه نوع سطح و نسبت $R_o/R_i = 2$

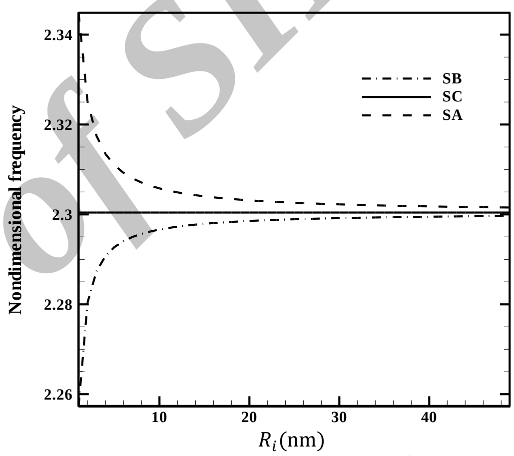

Fig. 8 Second dimensionless torsional natural frequencies for $n = 3$, $R_o/R_i = 2$ and three surface types

شکل 8 فرکانس طبیعی دوم پیچشی نرمال شده، برای شکل مد $n = 3$، سه نوع سطح و نسبت $R_o/R_i = 2$

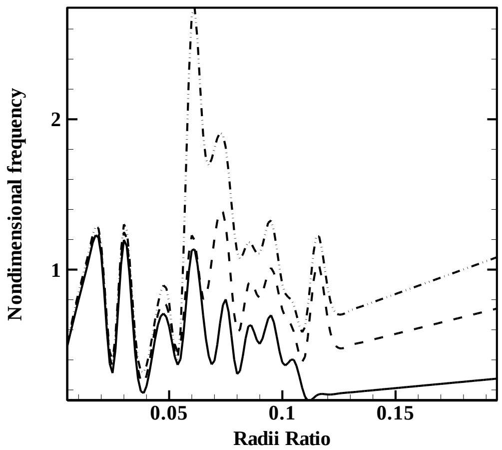

Fig. 9a dimensionless torsional natural frequencies versus R_i/R_o for $n = 2$, $R_o = 2$ nm and SB surface

شکل 9 الف سه فرکانس طبیعی اول پیچشی نرمال شده برحسب R_i/R_o، برای شکل مد $n = 2$، $R_o = 2$ nm و سطح SB

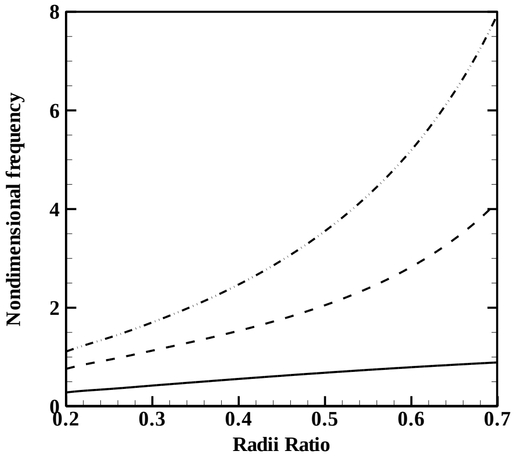

Fig. 9 b dimensionless torsional natural frequencies versus R_i/R_o for $n = 2$, $R_o = 2$ nm and SB surface

شکل 9 ب سه فرکانس طبیعی اول پیچشی نرمال شده برحسب R_i/R_o، برای شکل مد $n = 2$، $R_o = 2$ nm و سطح SB

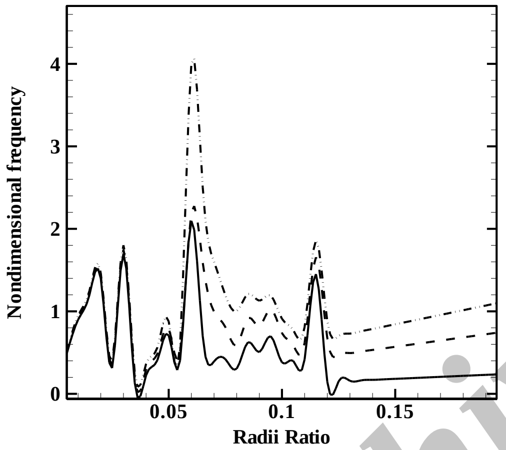

Fig. 10 a dimensionless torsional natural frequencies versus R_i/R_o for $n = 2$, $R_o = 2$ nm and SA surface

شکل 10 الف سه فرکانس طبیعی اول پیچشی نرمال شده برحسب R_i/R_o، برای شکل مد $n = 2$، $R_o = 2$ nm و سطح SA

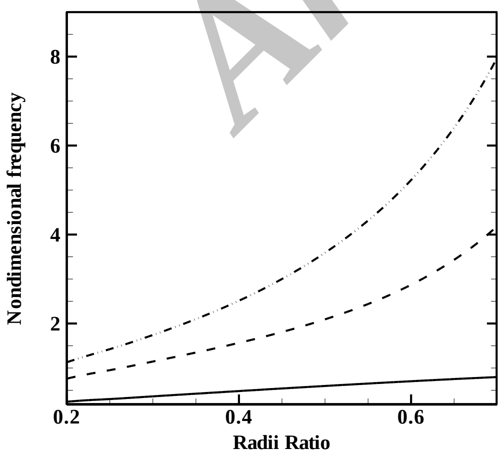

Fig. 10 b dimensionless torsional natural frequencies versus R_i/R_o for $n = 2$, $R_o = 2$ nm and SA surface

شکل **10 ب** سه فرکانس طبیعی اول پیچشی نرمال شده برحسب R_i/R_o ، برای شکل مد $n = 2$، $R_o = 2$ nm و سطح SA

Archive of SID

www.SID.ir

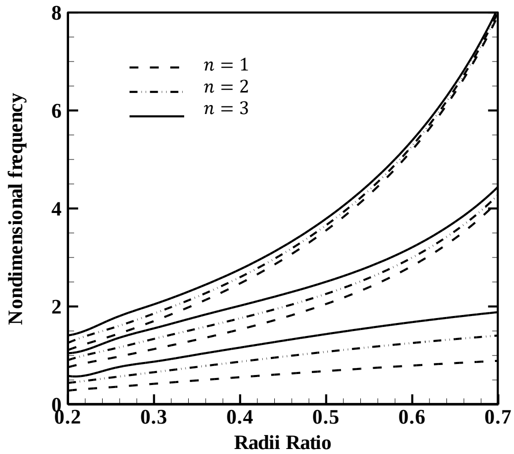

Fig. 11 dimensionless torsional natural frequencies versus R_i/R_o for $R_o = 2$ nm and SB surface

شکل 11 تغییرات فرکانس طبیعی پیچشی نرمال شده برحسب R_i/R_o برای $R_o = 2$ nm و سطح SB

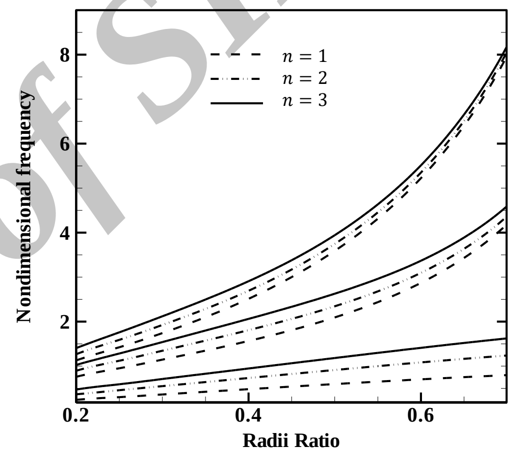

Fig. 12 dimensionless torsional natural frequencies versus R_i/R_o for $R_o = 2$ nm and SA surface

شکل 12 فرکانس طبیعی پیچشی نرمال شده برحسب R_i/R_o برای $R_o = 2$ nm و سطح SA

فرکانسی با افزایش نسبت شعاع از یکدیگر فاصله می‌گیرند اما دسته سوم فرکانسی که مربوط به فرکانس‌های طبیعی سوم هر عدد مد است با افزایش نسبت شعاع به یکدیگر نزدیک‌تر می‌شوند.

5- نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا کارهای انجام شده در ارتعاشات کره الاستیک و به‌طور خاص در زمینه ارتعاشات نانو کره را مرور کرده و نهایتا حل تحلیلی ارتعاشات آزاد پیچشی نانو ذرات کروی با به‌کارگیری تئوری الاستیسیته دقیق همراه با مدل‌سازی اثرات سطح توسط تئوری گورتین مرداک مورد بررسی قرار گرفت. مثال‌های عددی متنوعی جهت تجزیه و تحلیل فرکانس‌های طبیعی پیچشی نانو کره حل گردید و تغییرات فرکانس طبیعی پیچشی نرمال شده برحسب شعاع داخلی نانو کره R_i، برای چندین نسبت شعاع خارجی به داخلی $R_o/R_i = 1.1,2$ و برای سه نوع سطح مختلف "SA"، "SB" و "SC" و دو نوع شکل مد $n = 2,3$ رسم شد. نتیجه این‌که اثرات سطح در فرکانس‌های پایین‌تر و کره ضخیم‌تر مشهودتر است و با افزایش شعاع داخلی نانو کره این اثرات به‌تدریج کاهش می‌یابد و فرکانس طبیعی بی‌بعد شده به فرکانس طبیعی کلاسیک بسیار نزدیک می‌شود. همچنین مشاهده شد هر چقدر مقدار قدر مطلق مدول الاستیسیته سطح بیشتر باشد اختلاف فرکانسی نسبت به حالت کلاسیک بیشتر است.

با افزایش نسبت شعاع داخلی به خارجی نانو کره به‌علت این‌که تا قبل از نسبت شعاع 0.2، تاثیر بزرگ شدن حفره داخلی (بزرگ شدن نسبت شعاع) بر سختی مدهای مختلف متفاوت است لذا تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد شده با افزایش نسبت شعاع برای یک عدد مد مشخص نوسانی است و پس از نسبت شعاع 0.2، با افزایش نسبت شعاع، فرکانس طبیعی بی‌بعد شده افزایش یافته و علاوه بر آن فاصله بین فرکانس‌های اول، دوم و سوم نیز افزایش می‌یابد.

6- فهرست علائم

a_{nm}	ضرایب مجهول مودال
b_{nm}	ضرایب مجهول مودال
c_s	سرعت انتشار موج عرضی (ms^{-1})
c_p	سرعت انتشار موج طولی (ms^{-1})
E	مدول الاستیسیته (N/m)
E_s	الاستیسیته سطح
I	ماتریس واحد
$j_n(r)$	تابع بسل کروی مرتبه اول
$y_n(r)$	تابع بسل کروی مرتبه دوم
$p_n^m(\cos\theta)$	چند جمله ای لژاندر اصلاح شده
R_i	شعاع داخلی کره (nm)
R_o	شعاع خارجی کره (nm)
U	بردار جابجایی (m)
u_1	بخش غیر چرخشی بردار جابجایی (m)
u_2	بخش چرخشی بردار جابجایی (m)

علایم یونانی

∇^2	عملگر لاپلاسین
ρ	چگالی ماده $(\mathrm{kg/m^3})$
χ, ψ, φ	توابع پتانسیل جابجایی
λ, μ	ثوابت لامه $(\mathrm{N/m^2})$
σ	تانسور تنش $(\mathrm{N/m^2})$
ν	ضریب پواسون
δ_{ij}	دلتای کرونکر
$\sigma_{\alpha\beta}^s$	تنش‌های سطح $(\mathrm{N/m^2})$
$\kappa_{\alpha\beta}$	انحناهای سطح

7- تقدیر و تشکر

مقاله فوق برگرفته از طرح پژوهشی است که با حمایت دانشگاه آزاد اسلامی واحد دماوند اجرا شده است. بدین وسیله از آن واحد دانشگاهی تقدیر و تشکر به‌عمل می‌آید.

8- مراجع

[1] K. P. Soldatos, Review of three dimensional dynamic analyses of circular cylinders and cylindrical shells, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 47, No. 10, pp. 501–516, 1944.

Archive of SID

[2] H. Lamb, On the vibrations of an elastic sphere, *Proceedings London Mathematical Society*, Vol. 13, No. 1, pp. 189-212, 1882.
[3] C. Chree, The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solutions and applications, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 14, pp. 250–309, 1889.
[4] Y. Sato, T. Usami, Basic study on the oscillation of a homogeneous elastic sphere, part I, frequency of the free oscillations, *Geophysics Magazine*, Vo. 31, No. 1, pp. 15-24, 1962.
[5] A. H. Shah, C. V. Ramakrishnan, S. K. Datta, Three dimensional and shell theory analysis of elastic waves in a hollow sphere, Part I: Analytical foundation, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 36, No. 3, pp. 431–439, 1969.
[6] J. Eskandari, Y. Mirzaei, B. Gheghlaghi, R. Avazmohamadi, Size-dependent free vibration analysis of infinite nanotubes using elasticity theory, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 7, No. 2, pp. 137-144, 2012.
[7] Keivan Kiani, Free dynamic analysis of functionally graded tapered nano-rods via a newly developed nonlocal surface energy-based integro-differential model, *Composite Structures*, Vol. 139, pp. 151-166, 2016.
[8] M. R. Ilkhani, A. Bahrami, S. H. Hosseini-Hashemi, Free vibrations of thin rectangular nano-plates using wave propagation approach, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 40, No. 2, pp. 1287-1299, 2016.
[9] A. C. Eringen, Nonlocal polar elastic continua, *International Journal of Engineering and Science*, Vol. 10, No. 1, pp. 1-16, 1972.
[10] A. C. Eringen, Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves, *International Journal of Engineering and Science*, Vol. 10, No. 5, pp. 425-435, 1972.
[11] A. C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics*, Vol. 54, No. 3, pp. 4703-4710, 1983.
[12] A. C. Eringen, D. G. B. Edelen, On nonlocal elasticity, *International Journal of Engineering and Science*, Vol. 10, No. 3, pp. 233-248, 1972.
[13] G. F. Wang, X. Q. Feng, S. W. Yu., Interface effects on the diffraction of plane compressional waves by a nano-sized spherical inclusion, *Journal of Applied Physics*, Vol. 102, No. 4, pp. 0435331-6, 2007.
[14] S. A. Fazelzadeh, E. Ghavanloo, Coupled axisymmetric vibration of nonlocal fluid-filled closed spherical membrane shell, *Acta Mechanica*, Vol. 223, No. 9, pp. 2011-2020, 2012.
[15] E. Ghavanloo, S. A. Fazelzadeh, Nonlocal elasticity theory for radial vibration of nanoscale spherical shells, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 41, pp. 37-42, 2013.
[16] S. Cuenot, C. Fretigny, S. D. Champagne, B. Nysten, Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy, *Physical Review B*, Vol. 69, No. 16, pp. 165410-5, 2004.
[17] E. Wong, P. E. Sheehan, C. M. Lieber, Nano-beam mechanics: Elasticity, strength, and toughness of Nano-rods and nanotubes, *Science*, Vol. 277, No. 5334, pp. 1971-1975, 2004.
[18] M. E. Gurtin, A. I. Murdoch, A continuum theory of elastic material surfaces, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 57, No. 4, pp. 291–323, 1975.
[19] M. E. Gurtin, J. Weissmuller, F. Larche, A general theory of curved deformable interfaces in solids at equilibrium, *Philosophical Magazine A* , Vol. 78, No. 5, pp. 1093–1109, 1998.
[20] V. B. Shenoy, Atomistic calculations of elastic properties of metallic fcc crystal surfaces, *Physical Review B*, Vol. 71, No. 9, pp. 094104-11, 2005.
[21] V. B. Shenoy, Size-dependent rigidities of nano-sized torsional elements, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 15, pp. 4039-4052, 2002.
[22] J. He, C. M. Lilley, Surface stress effect on bending resonance of nanowires with different boundary conditions, *Applied Physics Letters*, Vol. 93, No. 26, pp. 263108-3, 2008.
[23] S. M. Hasheminejad, R. Avazmohammadi, Size-dependent effective dynamic properties of unidirectional nanocomposites with interface energy effects, *Composites Science and Technology* ,Vol. 69, pp. 2538-2546, 2009.
[24] L.Wang,Vibration analysis of fluid-conveying nanotubes with consideration of surface effects, *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 43, No. 1, pp. 437-439, 2010.
[25] R. Ansari , R. Gholami, A. Norouzzadeh, M. A. Darabi, Surface stress effect on the vibration and instability of nanoscale pipes conveying fluid based on a size-dependent Timoshenko beam model, *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 31, No. 5, pp. 708-719, 2015.
[26] R. Ansari, A. Norouzzadeh, R. Gholami, M. Faghih Shojaei, M. A. Darabi, Geometrically nonlinear free vibration and instability of fluid-conveying nanoscale pipes including surface stress effects, *Microfluidics and Nanofluidics*, Vol. 20, No. 1, pp. 28-37, 2016.
[27] R. Ansari , R. Gholami, A. Norouzzadeh, M. A. Darabi, Wave characteristics of nanotubes conveying fluid based on the non-classical Timoshenko beam model incorporating surface energies, *Arabian Journal for Science and Engineering*, Vol. 41, No. 11, pp. 4359-4369, 2016.
[28] R. Ansari, A. Norouzzadeh, Nonlocal and surface effects on the buckling behavior of functionally graded nanoplates: An isogeometric analysis, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 84, pp. 84-97, 2016.
[29] A. Norouzzadeh, R. Ansari, M. Darvizeh, Nonlinear forced vibration of axially moving Timoshenko beam in thermal environment via the harmonic balance method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 11, pp. 137-143, 2014. (In Persianفارسی)
[30] R. Ansari, A. Norouzzadeh, R. Gholami, Forced vibration analysis of conveying fluid carbon nanotube resting on elastic foundation based on modified couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 3, pp. 27-34, 2015. (In Persianفارسی)
[31] E. Duval, A. Boukenter, B. Champagnon, Vibration eigenmodes and size of microcrystallites in glass: Observation by very-low-frequency raman scattering, *Physical Review Letter*, Vol. 56, No. 19, pp. 2052-2055, 1986.
[32] E. Duval, A. Boukenter, B. Champagnon, Electron-phonon coupling dynamics in very small (between 2 and 8 nm diameter) Au nanoparticles, *The Journal of Chemical Physics*, Vol. 112, No. 13, pp. 8613, 2000.
[33] M. Nisoli, S. De Silvestri, A. Cavalleri, A. M. Malvezzi, A. Stella, G. Lanzani, P. Cheyssac, R. Kofman, Coherent acoustic oscillations in metallic nanoparticles generated with femtosecond optical pulses, *Physical Review B*, Vol. 55, No. 20, pp. 13424–13427, 1997.
[34] H. E. Sauceda, D. Mongin, P. Maioli, A. Crut, M. Pellarin, N. Del Fatti, F. Vallée, I. L. Garzn, Vibrational properties of metal nanoparticles: Atomistic simulation and comparison with time-resolved investigation, *The Journal of Chemical Physics C*, Vol. 116, No. 47, pp. 25147–25156, 2012.
[35] C. Voisin, D. Christofilos, N. Del Fatti, F. Vallée, Environment effect on the acoustic vibration of metal nanoparticles, *Physica B: Condensed Matter*, Vol. 316, No. 5, pp. 89–94, 2002.
[36] J. Tian, H. Ogi, M. Hirao, Vibration analysis of an elastic-sphere oscillator contacting semi-infinite viscoelastic solids in resonant ultrasound microscopy, *Journal of Applied Physics*, Vol. 95, No. 12, pp. 8366-8374, 2004.
[37] T. Natsuki, J. Shi, Q. Ni, Vibration analysis of nanomechanical mass sensor using double-layered graphene sheets resonators, *Journal of Applied Physics*, Vol. 114, No. 9, pp. 1-6 ,2013.
[38] K. Jensen, K. Kim, A. Zettl, An atomic-resolution nanomechanical mass sensor, *Nature nanotechnology*, Vol. 3, pp. 533-537, 2008.
[39] [39] Y. H. Pao, C. C. Mow, *Diffraction of Elastic Waves and Dynamics Stress Concentration*, pp. 420-435, New York: Crane Russak, 1973.
[40] A. C. Eringen, E. S. Şuhubi, *Elastodynamics: Linear Theory*, pp. 804-840, New York: Academic Press, 1975.
[41] Seyyed M. Hasheminejad, Y. Mirzaei, Exact 3D elasticity solution for free vibrations of an eccentric hollow sphere, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 330, No. 2, pp. 229-244, 2011.

Archive of SID