



## رفتار آشوبناک نانوتیر بر روی بستر ویسکوالاستیک غیرخطی تحت تحریک هارمونیک با استفاده از تئوری غیر موضعی

مسعود میر<sup>1</sup>، مسعود طهانی<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

\* مسعود، صندوق پستی 91775-1111، mtahani@um.ac.ir

### چکیده

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 04 آبان 1396

پذیرش: 23 دی 1396

ارائه در سایت: 12 بهمن 1396

کلید واژگان:

نانوتیر

الاستیسیته غیر موضعی

بستر ویسکوالاستیک

آشوب

آنالیز ملنیکوف

در این مقاله، ارتعاشات غیرخطی یک نانوتیر اویلر برنولی واقع بر بستر ویسکوالاستیک غیرخطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرض می‌شود که نانو تیر در معرض یک نیروی هارمونیک قرار دارد که می‌تواند تخمینی از یک میدان الکتروستاتیک باشد. بستر ویسکوالاستیک غیرخطی برای دو حالت دارای سخت شونده و نرم شونده در نظر گرفته می‌شود. با توجه به مدل سازی در مقیاس نانو، معادلات دینامیک غیرخطی نانوتیر مورد نظر از روش تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن و با صرف نظر از اینرسی درون صفحه‌ای به دست می‌آید. با استفاده از روش گالرکین و شکل مود اول، معادله دیفرانسیل مشتقات پاره‌ای به دست آمده به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. پس از محاسبه نقاط تعادل سیستم و مشاهده دوشاخگی هیتروکلینیک، مدارهای هیتروکلینیک تعیین می‌شوند. سپس با استفاده از روش انتگرال ملنیکوف حرکت آشوبناک سیستم به صورت تحلیلی بررسی شده و محدوده امن رفتار سیستم با توجه به فضای پارامتری مساله مشخص می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که وقتی بستر ویسکوالاستیک دارای خاصیت سخت شونده باشد، بروز رفتار آشوبناک در سیستم نمی‌تواند مورد انتظار باشد. مشاهده می‌شود که استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی برای بررسی رفتار آشوبناک نانوتیرها ضروری بوده و عدم استفاده از این تئوری نتایج متفاوتی می‌دهد و ممکن است سیستم را در ناحیه غیرامن قرار دهد.

## Chaotic behavior of nonlocal nanobeam resting on a nonlinear viscoelastic foundation subjected to harmonic excitation

Massoud Mir, Masoud Tahani\*

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

\* P.O.B. 91775-1111, Mashhad, Iran, mtahani@um.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 26 October 2017  
Accepted 13 January 2018  
Available Online 01 February 2018

### Keywords:

Nanobeam  
Nonlocal elasticity  
Viscoelastic foundation  
Chaos  
Melnikov analysis

### ABSTRACT

In this paper, the nonlinear vibration of a Euler–Bernoulli nanobeam resting on a non-linear viscoelastic foundation is investigated. It is assumed that the nanobeam is subjected to a harmonic excitation that can be representative of an electrostatic field. The non-linear viscoelastic foundation is considered for both hardening and softening cases. By neglecting of the in-plane inertia, Eringen's nonlocal elasticity theory is used to model and derive the equation of motion of the nanobeam. Using the Galerkin method and the first mode shape, the obtained partial differential equation is reduced to the ordinary differential equation. Calculating the system's equilibrium points lead to heteroclinic bifurcation and the heteroclinic orbits are obtained. Then, using the Melnikov integral method, the chaotic motion of the system is studied analytically, and the safe region of the system is determined respect to the parametric space of the problem. When the viscoelastic foundation has a hardening characteristic, the chaotic behavior in the system does not occur. It has been observed that the use of nonlocal elasticity theory is necessary to investigate the chaotic behavior of nanobeam, and using the classical theory of elasticity may place the system in the chaotic region.

### 1- مقدمه

مدل سازی رفتار آن‌ها بسیار مورد توجه محققین می‌باشد. به تبع پیشرفت‌ها در حوزه نانوتکنولوژی، کاربرد سیستم‌های میکرو و نانوالکترومکانیکی نیز به دلیل خواص منحصر به فردشان رو به گسترش است. تیرهای نانومقیاس، اصلی ترین جزء ساختاری سیستم‌های نانوالکترومکانیکی بوده که در نانوملگرها<sup>1</sup>، نانوسوئیچ‌ها، سنسورهای زیستی و به طور کلی در بیشتر سیستم‌های نانوالکترومکانیکی به کار می‌روند [1-3].

با گذشت چند دهه از ظهور علوم و تکنولوژی نانو، هنوز هم نانوتکنولوژی به عنوان یکی از زمینه‌های علمی مورد علاقه محققین مطرح بوده و تحقیقات جدید و شایسته‌ای در این حوزه صورت می‌گیرد. به دلیل خواص شگفت‌آور نانو مواد و نانو ساختارها تلاش‌های زیادی جهت ساخت و به کارگیری آن‌ها در حال انجام است. با توجه به خواص جالب شیمیایی، الکتریکی و مکانیکی نانو ساختارها، درک رفتار و تعیین خواص مختلف نانو ساختارها و همچنین

<sup>1</sup> Nano-actuators

### Please cite this article using:

M. Mir, M. Tahani, Chaotic behavior of nonlocal nanobeam resting on a nonlinear viscoelastic foundation subjected to harmonic excitation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 02, pp. 264-272, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

لی [20]، به بررسی دینامیک غیرخطی یک نانوتیتر دارای بارگذاری محوری بر روی بستر الاستیک غیرخطی با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی پرداختند. نجار و همکاران [21]، یک نانومولگر میکروالکترومکانیکی را به صورت یک نانوتیتر اویلر-برنولی و با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی مدل کرده و با در نظر گرفتن نیروهای کازیمیر<sup>6</sup> و وان دروالس<sup>7</sup>، دینامیک غیرخطی آن را مورد بررسی قرار دادند. حسینی و همکاران [22]، ارتعاشات آزاد غیرخطی تیرهای نانومقیاس را با در نظر گرفتن اثرات سطحی با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها با حل دقیق معادلات حرکت، فرکانس‌های طبیعی نانوتیتر را محاسبه نموده و تاثیر اثرات سطحی بر فرکانس طبیعی را بررسی کردند. البورگی و همکاران [23]، ارتعاشات غیرخطی آزاد و اجباری نانوتیترهای هدفمند را با تکیه‌گاه ساده بر روی بستر الاستیک غیرخطی مورد بررسی قرار دادند. تیر اویلر-برنولی در نظر گرفته شده بر اساس تئوری الاستیسیته غیرموضعی جهت مدل‌سازی استفاده شده و اثرات پارامترهای غیرموضعی و پارامترهای بستر الاستیک غیرخطی بر فرکانس‌های غیرخطی مورد بررسی قرار گرفته است. وثوقی [24]، به مطالعه ارتعاشات آزاد غیرخطی نانوتیتر هدفمند بر بستر الاستیک پرداخت. وی از تئوری الاستیسیته غیرموضعی جهت محاسبه فرکانس غیرخطی سیستم بهره برد. سلطان پور و همکاران [25]، به بررسی ارتعاشات عرضی نانوتیتر هدفمند با تئوری تیر تیموشنکو مبتنی بر الاستیسیته غیرموضعی پرداختند. این نانوتیتر بر بستر الاستیک قرار داشته و دارای ترک می‌باشد. تگان [26]، به بررسی ارتعاشات غیرخطی نانوتیتر اویلر-برنولی بر بستر الاستیک با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی پرداخت. سپس تاثیر پارامتر غیرموضعی و پارامترهای مربوط به بستر الاستیک را بر ارتعاشات نانوتیتر مورد بررسی قرار داد.

علاوه بر مدل‌سازی ریاضی و بررسی رفتار غیرخطی سیستم‌های میکرو و نانو الکترومکانیکی، بررسی رفتار آشوبناک سیستم‌های غیرخطی نیز مورد توجه محققین می‌باشد. یاگاساکی [27]، دینامیک میکروتیتر یک سر گیردار را در مد ضرب‌های مورد مطالعه قرار داد و با استفاده از روش ملنیکوف<sup>8</sup> به بررسی آشوب در این سیستم پرداخت. بررسی رفتار غیرخطی میکروتشددیدگر مکانیکی یکی از مباحث مورد علاقه محققین می‌باشد. میکروتشددیدگر مکانیکی، با حرکت به واسطه نیروهای الکترواستاتیک دو طرف آن، رفتار آشوبناک از خود نشان می‌دهد که با روش‌های تحلیلی همانند روش ملنیکوف مورد ارزیابی قرار گرفته است [28-30]. معانی و همکاران [31]، به بررسی رفتار غیرخطی تشدیدگر میکروالکترومکانیکی پرداختند که بروز آشوب می‌تواند روی عملکرد بهینه آن تاثیر گذارد. آن‌ها روش جدیدی برای پیش‌بینی آشوب ارائه دادند که بسیار ساده بوده و هزینه محاسباتی کمی نسبت به روش ملنیکوف دارد. آوریجکس و همکاران [32]، به مدل‌سازی ریاضی و تحلیل دینامیک آشوبناک تیر اویلر-برنولی انعطاف‌پذیر پرداختند. تجدیدیان‌فر و همکاران [33]، به بررسی ارتعاشات آشوبناک میکرو و نانو تشدیدگر الکترومکانیکی تحت تحریک‌های ترکیبی متناوب AC و مستقیم DC پرداختند. مالکی و نحوی [34]، به بررسی رفتار دینامیک غیرخطی نانوتشددیدگر مکانیکی پرداخته و از تئوری الاستیسیته غیرموضعی برای پیش‌بینی آشوب در این نانوتشددیدگر استفاده کردند. آن‌ها با استفاده از روش تحلیلی ملنیکوف، مقدار بحرانی ولتاژ تحریک AC را که منجر به حرکت

به علت مشکلات زیادی که در انجام آزمایش در مقیاس نانو وجود دارد، عمده مطالعات رفتار مواد با استفاده از روش‌های مدل‌سازی و شبیه‌سازی اتمی و یا تئوری‌های محیط پیوسته انجام می‌شوند. زمان‌بر بودن و هزینه محاسباتی بالا، باعث شده است تا در بسیاری موارد روش‌های شبیه‌سازی دینامیک مولکولی جای خود را به روش‌های محیط پیوسته بدهد. روش‌های محیط پیوسته کلاسیک، در غالب موارد کارآیی لازم در مقیاس نانو را نداشته و بهتر است از تئوری‌های بهبود یافته استفاده شود. برای بررسی رفتار مواد در مقیاس نانو و مدل‌سازی نانو ساختارها می‌توان از تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن<sup>1</sup> که دارای پارامتر مقیاس طول است، به جای تئوری الاستیسیته کلاسیک استفاده نمود. در تئوری الاستیسیته غیرموضعی که توسط ارینگن ارائه شده است بر خلاف تئوری الاستیسیته کلاسیک، تنش در یک نقطه تابعی از کرنش در تمام نقاط محیط پیوسته است [4-6]. ردی [7]، تئوری‌های مهم تیر که شامل تیرهای اویلر-برنولی، تیموشنکو، ردی و لوینسون<sup>2</sup> است را با الاستیسیته غیرموضعی مجدداً فرمولبندی کرد. وی همچنین حل تحلیلی برای خمش، کمانش و ارتعاش نانوتیترها را با بررسی اثر پارامتر غیرموضعی ارائه داد. محققین بسیاری از تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن جهت مدل‌سازی خمش، کمانش و ارتعاشات تیرهای نانومقیاس استفاده کرده و تاکید نموده‌اند که برای مدل‌سازی در مقیاس نانو، باید از تئوری‌های غیرکلاسیک دارای پارامتر مقیاس طول نظیر تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن استفاده نمود [8-11]. کریم‌پور و همکاران [12]، با استفاده از تئوری تنش کوپل به بررسی ناپایداری فروکشیدگی<sup>3</sup> در یک نانومولگر پرداخته و تاثیر اندازه و نیروی کازمیر بر ناپایداری کشیدگی را مورد بررسی قرار دادند. طادی‌بنی و همکاران [13]، با استفاده از تئوری گرادیان کرنش بهبود یافته به بررسی اثر اندازه بر ناپایداری تیر یکسر گیردار نانو پرداختند. آن‌ها اثر نیروی مولکولی، جاذبه الکترواستاتیک و ولتاژ اعمالی بر رفتار نانوتیتر را تحلیل و بررسی نمودند. انصاری و همکاران [14]، به بررسی ارتعاشات اجباری غیرخطی یک تیر متحرک پرداختند. در این مطالعه، تیر تحت اثر نیروی هارمونیک و در محیط حرارتی قرار گرفته است و پاسخ فرکانسی آن از روش تعادل هارمونیک به دست آمده است. انصاری و نوروززاده [15]، به آنالیز کمانش نانوصفحه هدفمند با استفاده از تئوری الاستیسیته غیر موضعی پرداختند. در این مطالعه، اثر پارامترهای تنش سطحی و پارامتر مقیاس کوچک بر بار کمانش بحرانی بررسی شد. انصاری و همکاران [16]، به بررسی پایداری دینامیکی یک نانولوله کربنی چند جداره که دارای بارگذاری حرارتی می‌باشد، پرداختند. در این تحقیق، نانولوله به صورت یک نانوتیتر غیر موضعی مدل شده و بر یک بستر پسترناک واقع است. همچنین انصاری و همکاران [17]، به بررسی ارتعاشات آزاد یک نانولوله برن نیتريد<sup>4</sup> حاوی سیال پرداختند. در این تحقیق از تئوری بهبود یافته گرادیان کرنشی استفاده شد و نانولوله به صورت یک نانوتیتر مدل گردید. تای [18]، مدلی برای خمش، کمانش و ارتعاشات نانوتیتر با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارائه داد. وی با حل تحلیلی، تغییر شکل، بار کمانش و فرکانس طبیعی را برای تیر با تکیه‌گاه ساده به دست آورد. شیمشک [19]، به بررسی ارتعاشات آزاد نانوتیترهای اویلر-برنولی در شرایط مرزی مختلف پرداخت. وی با استفاده از روش گالرکین و روش هی<sup>5</sup> فرکانس غیرخطی نانوتیتر را محاسبه کرد. ونگ و

<sup>1</sup> Eringen<sup>2</sup> Levinson<sup>3</sup> Pull-in instability<sup>4</sup> Boron nitride nanotube<sup>5</sup> He<sup>6</sup> Casimir<sup>7</sup> Van der Waals<sup>8</sup> Melnikov

دینامیک شبکه اتمی به دست آمده اند، تقریب زده شود. برای مقادیر مختلف فرکانس مقدار  $e_0 a$  در بازه های متفاوتی قرار می گیرند.

ارینگن رابطه انتگرالی (1) را به صورت یک رابطه مرتبه دوم دیفرانسیلی به صورت زیر ساده نمود [5]:

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^c = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2)$$

که  $\sigma_{ij}^c$  تانسور تنش کلاسیک،  $\varepsilon_{kl}$  تانسور کرنش،  $C_{ijkl}$  تانسور مدول الاستیک بوده و  $\mu = (e_0 a)^2$  به پارامتر ابعاد کوچک مشهور است. با توجه به شرایط هندسی تیر، نوع تیر و شرایط بارگذاری، پاسخ فرم های انتگرالی و دیفرانسیلی (رابطه های (1) و (2)) تقریباً منطبق بوده [38-40] و در ادامه از فرم دیفرانسیلی استفاده می شود. معادله ساختاری غیرموضعی<sup>6</sup> برای نانوتیر به صورت زیر نوشته می شود:

$$\sigma_{xx} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = E \varepsilon_{xx} \quad (3)$$

که  $E$  مدول یانگ،  $\sigma_{xx}$  تنش محوری عمودی و  $\varepsilon_{xx}$  کرنش محوری می باشد.

### 3- معادلات حاکم بر اساس تئوری الاستیسیته غیرموضعی

بر اساس تئوری تیر اویلر-برنولی، میدان جابه جایی یک نقطه از تیر به صورت زیر است:

$$u_x(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (4)$$

$$u_y(x, z, t) = 0 \quad (5)$$

$$u_z(x, z, t) = w(x, t) \quad (6)$$

که  $u$  و  $w$  به ترتیب جابه جایی محوری و عرضی هر نقطه روی محور خنثی می باشند. روابط کرنش-جابه جایی غیرخطی ون-کارمن<sup>7</sup> بر پایه فرضیات جابه جایی عرضی بزرگ، چرخش نسبتاً کم و کرنش کوچک به قرار زیر است:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^0 - z \kappa_x \quad (7)$$

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 \quad (8)$$

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (9)$$

به طوری که  $\varepsilon_{xx}^0$  کرنش غیرخطی سطح میانی و  $\kappa_x$  انحنای تیر است.

در این تحقیق، یک نانوتیر ایزوتروپیک مستقیم به طول  $l$ ، ضخامت  $h$  و پهنای  $b$  بر روی بستر ویسکوالاستیک غیرخطی و بار هارمونیک  $q(x, t)$  مطابق شکل 1<sup>8</sup> در نظر گرفته می شود. همان طور که در شکل دیده می شود، نانوتیر بر روی بستر ویسکوالاستیک غیرخطی با ثابت های فنری  $K_L$ ،  $K_P$  و  $K_{NL}$  به ترتیب برای بستر الاستیک وینکلر، بستر الاستیک پسترناک و بستر الاستیک غیرخطی و

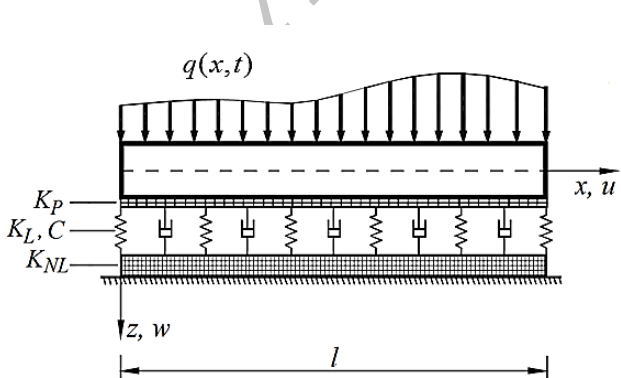


Fig. 1. The isotropic nanobeam on the nonlinear viscoelastic foundation  
شکل 1 نانوتیر ایزوتروپیک بر روی بستر ویسکوالاستیک غیرخطی

آشوبناک می شود، تعیین کردند.

محققین بسیاری به مطالعه رفتار ارتعاشی تیرها بر بستر الاستیک خطی و غیرخطی و همچنین بستر ویسکوالاستیک پرداخته اند [35,36]. شیمشک [37]، به بررسی ارتعاشات میکروتیرها بر روی بستر الاستیک غیرخطی با استفاده از تئوری تنش-کویل بهبودیافته پرداخت. همچنین مطالعه رفتار ارتعاشی نانوتیرها با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی بر روی بسترهای مختلف نیز مورد مطالعه قرار گرفته است [23-26].

همان طور که پیشتر ذکر شد، مدل سازی نانوتیرها مورد علاقه محققین می باشد. یکی از مناسب ترین تئوری ها جهت مدل سازی نانوتیرها، تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن می باشد. بررسی کمی<sup>1</sup> ارتعاشات نانوتیرها با تئوری الاستیسیته مذکور به فراوانی مورد بررسی قرار گرفته است اما بررسی رفتار غیرخطی این سیستم ها به طور کیفی<sup>2</sup> و همچنین پیش بینی وقوع آشوب در سیستم های نانو بسیار ناشناخته است. تاکنون بررسی کیفی رفتار غیرخطی یک نانوتیر که بر روی بستر ویسکوالاستیک غیرخطی قرار دارد با استفاده از تئوری های غیرکلاسیک الاستیسیته مورد مطالعه قرار نگرفته است. این تحقیق می تواند در طراحی و شناخت رفتار نانوزوناتورها و دیگر سیستم های نانو الکترومکانیکی مورد استفاده قرار گیرد.

در این مقاله رفتار کیفی ارتعاشات غیرخطی نانوتیرها بر روی بستر ویسکوالاستیک غیرخطی مورد مطالعه قرار می گیرد. این نانوتیر با استفاده از تئوری اویلر-برنولی و بر اساس تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن مدل می گردد. پس از تعیین معادله حرکت، معادله دیفرانسیل مشتق پاره ای با استفاده از روش گالرکین به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می شود. سپس معادله دیفرانسیل معمولی به دست آمده برای بررسی رفتار آشوبناک و دوشاخگی هیتروکلینیک<sup>3</sup> مورد بررسی قرار می گیرد. همچنین جهت بررسی بهتر آشوب، بزرگترین نمای لیاپانوف<sup>4</sup> نیز برای سیستم مورد نظر محاسبه می شود.

### 2- تئوری الاستیسیته غیرموضعی

تئوری الاستیسیته غیرموضعی اولین بار توسط ارینگن ارائه شد [4-6]. بر اساس این تئوری تنش  $(\sigma)$  در یک نقطه  $(x)$  از ماده الاستیک نه تنها به میدان کرنش در آن نقطه بلکه به کرنش در تمامی نقاط دیگر ماده وابسته است. تانسور تنش  $\sigma$  در نقطه  $x$  از محیط مادی  $\Omega$  در معادله ساختاری تئوری الاستیسیته غیرموضعی به صورت زیر با تانسور کرنش  $\varepsilon$  تمام نقاط محیط مادی ارتباط پیدا می کند:

$$\sigma_{ij}(x) = \int_{\Omega} \alpha(|x - \hat{x}|, \tau) \sigma_{ij}^c(\hat{x}) d\Omega(\hat{x}) \quad (1)$$

که  $\sigma_{ij}$  تانسور تنش و  $\alpha(|x - \hat{x}|, \tau)$  تابع کرنل<sup>5</sup> و  $e_0 a / \tau = \alpha$ ، که  $e_0$  ثابت مادی مربوط به هر ماده است،  $a$  یک مشخصه طولی داخلی (برای مثال طول پیوند اتمی یا پارامتر شبکه) و  $l$  یک طول مشخصه خارجی (برای مثال طول ترک یا طول موج) می باشد. تابع کرنل بیانگر مدول غیرموضعی یا تابع فرسایش انرژی موج است که اثرات کرنش نقاط مختلف جسم را بر روی تنش نقطه مورد نظر توصیف می کند. مقدار  $e_0$  هم می تواند به صورت تجربی محاسبه شود و هم می تواند با انطباق منحنی های انتشار موج های صفحه ای با آن هایی که از

<sup>1</sup> Quantitative

<sup>2</sup> Qualitative

<sup>3</sup> Heteroclinic

<sup>4</sup> Largest Lyapunov exponent

<sup>5</sup> Kernel function

<sup>6</sup> Nonlocal constitutive equation

<sup>7</sup> Von Kármán

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( N \frac{\partial w}{\partial x} \right) + (q + F_{\text{Foun}}) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (19)$$

که شرایط مرزی متناظر در دو انتهای نانوتیر به صورت زیر است:

$$\delta u = 0 \text{ یا } N = 0 \quad (20)$$

$$\delta w = 0 \text{ یا } \frac{\partial M}{\partial x} + N \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ یا } M = 0 \quad (22)$$

با ضرب  $dA$  در طرفین رابطه (3) و انتگرال گیری روی سطح مقطع، نتیجه می شود:

$$N - \mu \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = EA \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (23)$$

به طور مشابه با ضرب  $z dA$  در طرفین رابطه (3) و انتگرال گیری روی سطح مقطع، نتیجه می شود:

$$M - \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (24)$$

عبارت صریح نیروی عمودی در الاستیسیته غیرموضعی با قرار دادن مشتق دوم از رابطه (18) در رابطه (23) قابل محاسبه است:

$$N = EA \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \mu \rho A \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \quad (25)$$

همچنین ممان خمشی در الاستیسیته غیرموضعی با استفاده از روابط (19) و (24) به دست می آید:

$$M = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \left[ \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( N \frac{\partial w}{\partial x} \right) - (q + F_{\text{Foun}}) \right] \quad (26)$$

برای به دست آوردن معادله های غیرموضعی حاکم بر حسب جابه جایی باید روابط (25) و (26) را در روابط (18) و (19) قرار داد:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ EA \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{EA}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \right) = 0 \quad (27)$$

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left( N \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left( N \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( w - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = (q + F_{\text{Foun}}) - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} (q + F_{\text{Foun}}) \quad (28)$$

همان طور که مشاهده می شود، روابط (27) و (28) با جابه جایی های  $u$  و  $w$  کوپل شده اند. برای ساده سازی معادله حاکم به دست آمده به یک معادله ساده بر حسب تغییر شکل جانبی از اینرسی درون صفحه ای صرف نظر شده است [44]، بنابراین رابطه ای بر حسب  $w$  به دست می آید. بر اساس این فرض و با توجه به شرایط مرزی مربوط به حرکت محوری  $u(0,t)=u(l,t)=0$  و پس از کمی عملیات ریاضی، نیروی محوری  $N$  به صورت زیر به دست می آید:

$$N = \frac{EA}{2l} \int_0^l \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (29)$$

با جایگذاری از رابطه (29) در رابطه (28)، معادله حرکت بر حسب  $w$  به دست می آید:

همچنین میراگر با ثابت  $C$  قرار دارد. در این تحقیق، از اصل همیلتون به صورت زیر برای تعیین معادلات حرکت استفاده می شود:

$$\delta \int_0^t (K - W_I - W_E) dt = 0 \quad (10)$$

به طوری که،  $K$ ،  $W_I$  و  $W_E$  به ترتیب، انرژی جنبشی، کار نیروهای داخلی و کار نیروهای خارجی می باشند.

وردش (تغییر) اول کار نیروهای داخلی (انرژی کرنشی) در بازه زمانی  $[0,t]$  به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} \delta \int_0^t W_I dt &= \int_0^t \int_{\Omega} \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dv dt \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} \sigma_{xx} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) dv dt \\ &= \int_0^t \int_0^l \left[ N \left( \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} - M \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) \right] dx dt \end{aligned} \quad (11)$$

که  $l$  طول نانوتیر است و منتجه های نیرو و ممان برابر است با:

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA = EA \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (12)$$

$$M = \int_A z \sigma_{xx} dA = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (13)$$

که  $A$ ، سطح مقطع تیر و  $l$ ، ممان اینرسی مقطع تیر است.

کار نیروهای خارجی شامل کار بار گسترده  $q$  و کار حاصل از نیروی بستر ویسکوالاستیک  $F_{\text{Foun}}$  می باشند. با توجه به پارامترهای نشان داده شده در "شکل 1"، نیروی بستر ویسکوالاستیک به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$F_{\text{Foun}} = -K_L w - \lambda K_{NL} w^3 + K_P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - C \frac{\partial w}{\partial t} \quad (14)$$

با توجه به این که بسترهای الاستیک غیرخطی دو نوع رفتار نرم شونده و سخت شونده دارند، علامت عبارت های رابطه (14) نشان دهنده جهت نیروی اعمالی بستر ویسکوالاستیک به نانوتیر می باشد و تمامی ضرایب بستر ویسکوالاستیک دارای مقدار مثبت می باشند [41-43]، پارامتر  $\lambda$  در رابطه (14) برای بستر نرم شونده به صورت  $\lambda = -1$  و برای بستر سخت شونده،  $\lambda = 1$  است. بار گسترده هارمونیک که به نانوتیر اعمال می گردد، به صورت زیر فرض می شود:

$$q(x, t) = f \sin \Omega t \quad (15)$$

که  $f$  و  $\Omega$  به ترتیب، دامنه بار گسترده اعمالی و فرکانس متناظر آن می باشد. وردش اول کار انجام شده به وسیله نیروهای خارجی در بازه زمانی  $[0,t]$  به صورت زیر است:

$$\delta \int_0^t W_E dt = \int_0^t \int_0^l -(q + F_{\text{Foun}}) \delta w dx dt \quad (16)$$

همچنین وردش اول انرژی جنبشی در بازه زمانی  $[0,t]$  به صورت زیر قابل بیان است:

$$\int_0^t \delta K dt = \int_0^t \int_0^l \rho A \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dx dt \quad (17)$$

با قراردادن رابطه های (11)، (16) و (17) در رابطه (10)، انتگرال گیری جزء به جزء و مساوی صفر قراردادن ضرایب  $\delta u$  و  $\delta w$ ، معادله های حرکت به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= c \\ \beta &= k_l + k_p \pi^2 + \frac{\pi^4}{1 + \bar{\mu}^2 \pi^2} \\ \gamma &= \frac{3}{4} \lambda k_{nl} + \frac{A \pi^4 r^2}{4I} \\ F &= \frac{-4\bar{f}}{\pi(1 + \bar{\mu}^2 \pi^2)} \end{aligned} \quad (38)$$

#### 4- دوشاخگی هیتروکلینیک و پیش بینی آشوب

در بخش‌های قبل معادله ارتعاش نانوتیر به‌دست آمد و معادله دیفرانسیل مشتقات پاره‌ای حرکت به معادله دیفرانسیل معمولی (رابطه (37)) تبدیل شد. برای بررسی رفتار این سیستم دینامیکی، ابتدا باید رابطه (37) به شکل معادلات فضای حالت بازنویسی شود:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \psi \\ \dot{\psi} &= -\alpha\psi - \beta\phi - \gamma\phi^3 + F \sin \omega \bar{t} \end{aligned} \quad (39)$$

اگر رابطه (39) به‌صورت

$$\dot{X} = f(X) + \epsilon g(X, \bar{t}) \quad (40)$$

نوشته شود، که در آن

$$\begin{aligned} f(X) &= \begin{pmatrix} \psi \\ -\beta\phi - \gamma\phi^3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \\ g(X, \bar{t}) &= \begin{pmatrix} \psi \\ -\alpha\psi + F \sin \omega \bar{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (41)$$

آنگاه سیستم غیرپرتورب به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \psi \\ \dot{\psi} &= -\beta\phi - \gamma\phi^3 \end{aligned} \quad (42)$$

و همیلتونین سیستم غیرپرتورب به‌صورت زیر است:

$$H(\phi, \psi) = \frac{1}{2} \beta \phi^2 + \frac{1}{4} \gamma \phi^4 + \frac{1}{2} \psi^2 \quad (43)$$

سیستم غیرپرتورب رابطه (42)، به‌ازاء علامت پارامترهای  $\beta$  و  $\gamma$  رفتارهای دینامیکی مختلفی را نشان می‌دهد. با توجه به رابطه (38) مشاهده می‌شود که علامت پارامتر  $\beta$  همیشه مثبت است و پارامتر  $\gamma$  فقط به‌ازاء  $\lambda = -1$  می‌تواند مقادیر منفی اختیار کند. با توجه به این که سیستم دینامیکی مورد نظر، فقط به‌ازاء  $\gamma$  های منفی می‌تواند رفتار آشوبناک داشته باشد [30]، بنابراین برای بستر ویسکوالاستیک غیرخطی که سخت‌شوندگی دارد، هیچگاه سیستم آشوبناک نخواهد شد.

سیستم دینامیکی رابطه (42) دارای دو نقطه زینی  $(\pm\sqrt{-\beta/\gamma}, 0)$  و یک مرکز در  $(0,0)$  می‌باشد. بنابراین سیستم دارای یک مدار هیتروکلینیک است که از نقاط زینی می‌گذرد. دوشاخگی هیتروکلینیک، یک دوشاخگی سراسری است که می‌تواند معیاری برای رفتار آشوبناک سیستم باشد. در این دوشاخگی، منیفلدهای پایدار و ناپایدار سیستم تداخل پیدا می‌کنند و پدیده نعل اسبی در نگاشت پوانکاره که نشان دهنده رفتار آشوبناک است، روی می‌دهد. در این تحقیق، روش ملنیکوف جهت بررسی تحلیلی آشوب مورد استفاده قرار می‌گیرد. با اضافه نمودن جمله‌های اغتشاشی به همیلتونین سیستم، مدارهای هیتروکلینیک سیستم دچار اغتشاش شده و می‌توان با محاسبه فاصله بین منیفلدهای پایدار و ناپایدار سیستم، شرط تقاطع این منیفلدها را به‌دست آورد.

برای پیدا کردن مدارهای هیتروکلینیک، می‌توان همیلتونین را برابر با همیلتونین در نقطه زینی قرار داد،  $H = H_{\text{saddle}}$ . واضح است که  $H_{\text{saddle}}$

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left( \frac{EA}{2l} \int_0^l \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right) \left( \mu \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( w - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - (q + F_{\text{Foun}}) \\ + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} (q + F_{\text{Foun}}) = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

جهت عمومیت بخشیدن به بحث حاضر، بهتر است معادله دیفرانسیل حرکت به‌صورت بی‌بعد درآید. برای این منظور پارامترهای بی‌بعد لازم به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{x}{l}, \bar{w} = \frac{w}{r}, \bar{t} = \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} t, k_l = \frac{l^4}{EI} K_L, \\ k_{nl} = \frac{r^2 l^4}{EI} K_{NL}, k_p = \frac{l^2}{EI} K_P, c = \frac{l^2}{\sqrt{\rho A EI}} C, \\ \bar{f} = \frac{l^4}{EI r} f, \bar{\mu} = \frac{e_0 a}{l} = \frac{\sqrt{\mu}}{l}, \omega = \sqrt{\frac{\rho A l^4}{EI}} \Omega \end{aligned} \quad (31)$$

که شعاع ژیراسیون مقطع تیر است. با توجه به معادله حرکت (30) و پارامترهای بی‌بعد رابطه (31)، می‌توان معادله حرکت را به‌صورت بی‌بعد بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \frac{EI r}{l^4} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} + \left( \frac{EA r^3}{2l^4} \int_0^1 \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \right) \left( \bar{\mu}^2 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \right) \\ + \frac{EI r}{l^4} \frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2} \left( \bar{w} - \bar{\mu}^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \right) - (\bar{q} + \bar{F}_{\text{Foun}}) \\ + \bar{\mu}^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} (\bar{q} + \bar{F}_{\text{Foun}}) = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

به‌طوری‌که

$$\bar{F}_{\text{Foun}} = \frac{EI r}{l^4} (-k_l \bar{w} - \lambda k_{nl} \bar{w}^3 + k_p \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - c \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}}) \quad (33)$$

$$\bar{q}(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{EI r}{l^4} \bar{f} \sin \omega \bar{t} \quad (34)$$

براساس روش گالرکین، می‌توان معادله حرکت (32) که به‌صورت معادله دیفرانسیل مشتق پاره‌ای است به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل نمود. برای این کار  $\bar{w}(\bar{x}, \bar{t})$  به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} v(\bar{x}) \phi_n(\bar{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi\bar{x}) \phi_n(\bar{t}) \quad (35)$$

که  $\phi_n(\bar{t})$  یک ضریب تابع زمان و نامعلوم است و  $v(\bar{x})$  تابعی است که باید شرایط مرزی سینماتیکی را ارضا نماید. از آن‌جا که در نظر گرفتن یک مد در حل معادله حرکت (32) فرق زیادی با در نظر گرفتن دو مد ندارد [36]، فقط حالت مد اول در نظر گرفته می‌شود. بنابراین برای یک تیر دو سر مفصل،  $\bar{w}(\bar{x}, \bar{t})$  به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{t}) = \sin(\pi\bar{x}) \phi(\bar{t}) \quad (36)$$

جایگذاری حل تقریبی (36) در معادله حرکت (32) و ضرب آن در  $v(\bar{x}) = \sin(\pi\bar{x})$  و انتگرال‌گیری در بازه  $[0,1]$  به معادله دیفرانسیل معمولی زیر منجر می‌شود:

$$\ddot{\phi} + \alpha\dot{\phi} + \beta\phi + \gamma\phi^3 = F \sin \omega \bar{t} \quad (37)$$

بطوری‌که علامت نقطه (دات) در رابطه (37) مشتق‌گیری نسبت به  $\bar{t}$  بوده و ضرایب این رابطه عبارتند از:

(49) می تواند معیاری برای طراحی باشد تا طرح سیستم رزوناتور، با تغییر در هندسه، خواص مواد و همچنین تغییر پارامترهای بستر ویسکوالاستیک غیرخطی سیستم را از آشوب مصون نگاه دارد.

همان طور که در رابطه (48) مشاهده می شود، معیار ملنیکوف شامل پارامترهای  $\beta$  و  $F$  می باشد. این دو پارامتر براساس رابطه (38) تابع پارامتر بی بعد  $\bar{\mu}$  می باشند و  $\bar{\mu}$  نیز با توجه به رابطه (31) تابع  $\mu$  می باشد. از آنجا که  $\mu$ ، پارامتر ابعاد کوچک در الاستیسیته غیرموضعی است، معیار ملنیکوف (رابطه (48)) تابعی از  $\mu$  می شود. بنابراین می توان دریافت که در صورت استفاده از تئوری الاستیسیته کلاسیک نتیجه متفاوتی برای معیار ملنیکوف به دست می آید.

### 5- نتایج شبیه سازی سیستم

برای بررسی روش تحلیلی ملنیکوف، شبیه سازی کامپیوتری بر روی سیستم پرتورب انجام شده است. با انتگرال گیری عددی رابطه (39) می توان نمودار صفحه فاز سیستم را رسم نمود. نمودار صفحه فاز سیستم برای مقادیر مختلف پارامترهای رابطه (39) رسم شده است تا رفتار منظم و آشوبناک سیستم مورد بررسی قرار گیرد.

در "شکل های 4 تا 9"، نمودار صفحه فاز سیستم و نمودار مقطع پوانکاره سیستم نشان داده شده است. "شکل 4" نمودار صفحه فاز را به ازای مقادیر مشخص شده نشان می دهد. براساس رابطه (49) مقدار  $\alpha_{cr} = 0.40$  می باشد که در بخش بالایی منحنی انتقال به آشوب قرار دارد. با توجه به نمودار صفحه فاز (شکل 4) و نمودار مقطع پوانکاره (شکل 5)، رفتار پرریودیک سیستم کاملا مشخص است.

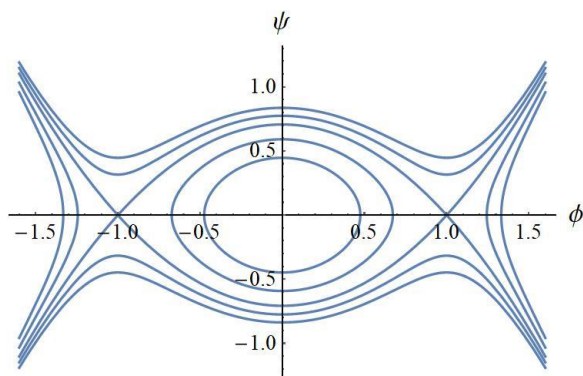


Fig. 2 Heteroclinic orbit of the unperturbed system for  $\beta = 1$  and  $\gamma = -1$

شکل 2 مدار هیتروکلنیک سیستم غیرپرتورب به ازاء  $\beta = 1$  و  $\gamma = -1$  به همراه مدارهای اطراف آن

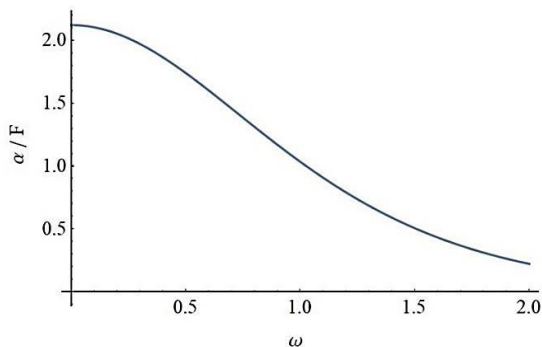


Fig. 3 Heteroclinic bifurcation in the  $((\alpha/F), \omega)$  plane for  $\beta = -\gamma = 1$

شکل 3 دوشاخگی هیتروکلنیک در صفحه  $((\alpha/F), \omega)$ ، به ازاء  $\beta = -\gamma = 1$

$-\beta^2/4\gamma$ ، بنابراین با توجه به رابطه (43) مدارهای هیتروکلنیک سیستم غیرپرتورب به صورت زیر تعیین می شوند:

$$\Gamma_0^\pm(\bar{t}): (\phi_h(\bar{t}), \psi_h(\bar{t})) \quad (44)$$

به طوری که:

$$\begin{aligned} \phi_h(\bar{t}) &= \pm \sqrt{\frac{-\beta}{\gamma}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\beta}{2}} \bar{t}\right) \\ \psi_h(\bar{t}) &= \pm \sqrt{\frac{-\beta}{2\gamma}} \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{\beta}{2}} \bar{t}\right) \end{aligned} \quad (45)$$

مدارهای سیستم غیرپرتورب براساس رابطه (42) و با تابع همیتونین مطابق رابطه (43) در "شکل 2" نشان داده شده است. در این شکل، مدار هیتروکلنیک یک دور جداساز<sup>1</sup> را تعریف می کند که از دو نقطه زینی  $(\pm\sqrt{-\beta/\gamma}, 0)$  می گذرد.

پس از محاسبه پارامترهای مدار هیتروکلنیک سیستم می توان به محاسبه انتگرال ملنیکوف پرداخت [45-47]:

$$M(\bar{t}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Gamma_0(\bar{t})) \wedge g(\Gamma_0(\bar{t}), \bar{t} + \bar{t}_0) d\bar{t} \quad (46)$$

که  $f \wedge g = f_1 g_2 - f_2 g_1$  حاصل ضرب تعریف شده برای این منظور است و  $f$  و  $g$  در رابطه (41) تعریف شده اند. انتگرال ملنیکوف به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} M(\bar{t}_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\psi_h(\bar{t})) [-\alpha(\psi_h(\bar{t})) + F \sin \omega(\bar{t} + \bar{t}_0)] d\bar{t} \\ &= \frac{2\alpha\beta\sqrt{2\beta}}{3\gamma} \pm \frac{\sqrt{2}F\pi\omega \sin(\omega\bar{t}_0) \operatorname{csch}\left(\frac{\pi\omega}{\sqrt{2\beta}}\right)}{\sqrt{-\gamma}} \end{aligned} \quad (47)$$

براساس آنالیز ملنیکوف، تغییر علامت  $M(\bar{t}_0)$  شرط تقاطع منبغدهای پایدار و ناپایدار سیستم است. بنابراین اگر  $M(\bar{t}_0)$  براساس رابطه (47) صفر شود، سیستم می تواند از خود رفتار آشوبناک نشان دهد. در نتیجه فضای پارامتریک مربوط به حوزه های که رفتار آشوبناک سیستم مورد انتظار می باشد به صورت زیر است:

$$\left| \frac{2\alpha\beta\sqrt{\beta}}{3F\pi\omega\sqrt{-\gamma}} \sinh\left(\frac{\pi\omega}{\sqrt{2\beta}}\right) \right| \leq 1 \quad (48)$$

بنابراین رفتار آشوبناک برای مسیرهایی که نزدیک سیستم غیرپرتورب جداکننده باشند مشهود است:

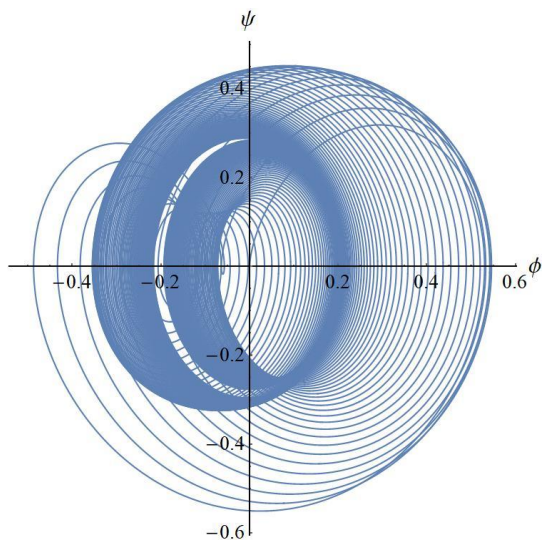
$$\frac{\alpha}{F} \leq \left(\frac{\alpha}{F}\right)_{cr} = \left| \frac{3\pi\omega\sqrt{-\gamma}}{2\beta\sqrt{\beta}} \operatorname{csch}\left(\frac{\pi\omega}{\sqrt{2\beta}}\right) \right| \quad (49)$$

که  $(\alpha/F)_{cr}$  حالت آستانه رفتار آشوبناک است که در "شکل 3" نمایش داده شده است. با توجه به شکل مذکور، مرز بین حوزه رفتارهای آشوبناک احتمالی و غیرآشوبناک سیستم مشخص شده است.

واضح است که برای مقادیر بالای منحنی آستانه حرکت آشوبناک (شکل 3)، آشوب اتفاق نمی افتد ولی برای وضعیتی از سیستم که زیر این منحنی قرار می گیرد می توان انتظار رفتار آشوبناک را داشت. این به معنی این است که روش ملنیکوف، شرایط لازم و نه کافی را برای بروز آشوب ارایه می دهد. با دانستن ناحیه آشوبناک سیستم، می توان پارامترهای سیستم را طوری تنظیم نمود تا از بروز آشوب در سیستم خودداری گردد. در واقع رابطه

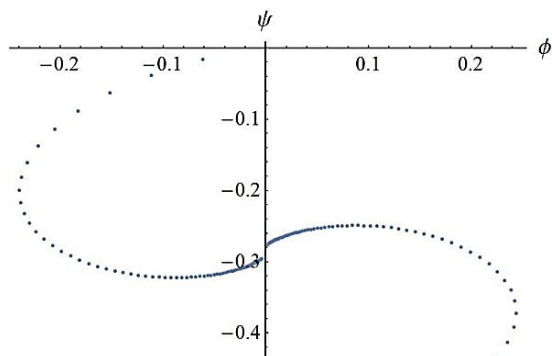
<sup>1</sup> Separatrix





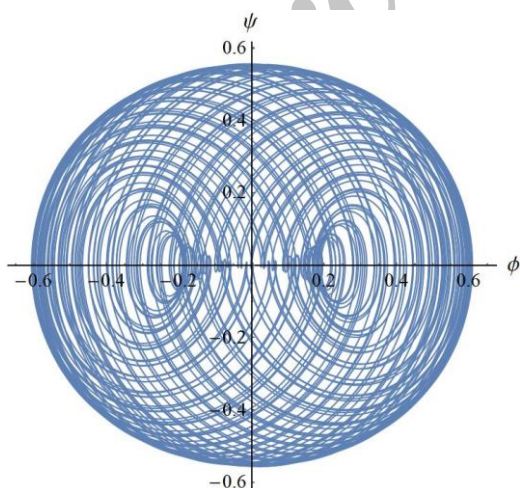
**Fig. 6** Phase plane trajectories of the system for  $\alpha = 1, \beta = 1.5, \gamma = -2, F = 0.5, \omega = 1.4$

شکل 6 نمودار صفحه فاز به ازاء مقادیر  $\alpha = 0.01, \beta = 0.5, \gamma = -0.2, F = 0.3, \omega = 1.4$



**Fig. 7** Poincaré section for  $\alpha = 0.01, \beta = 0.5, \gamma = -0.2, F = 0.3, \omega = 1.4$

شکل 7 نمودار مقطع پوانکاره به ازاء مقادیر  $\alpha = 0.01, \beta = 0.5, \gamma = -0.2, F = 0.3, \omega = 1.4$

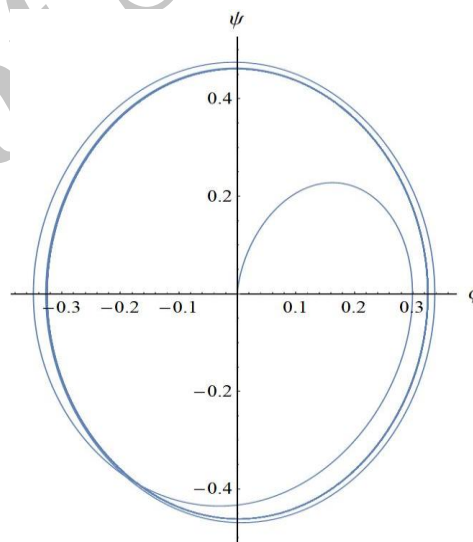


**Fig. 8** Phase plane trajectories of the system for  $\alpha = 0.001, \beta = 0.5, \gamma = -0.2, F = 0.3, \omega = 1.4$

شکل 8 نمودار صفحه فاز به ازاء مقادیر  $\alpha = 0.001, \beta = 0.5, \gamma = -0.2, F = 0.3, \omega = 1.4$

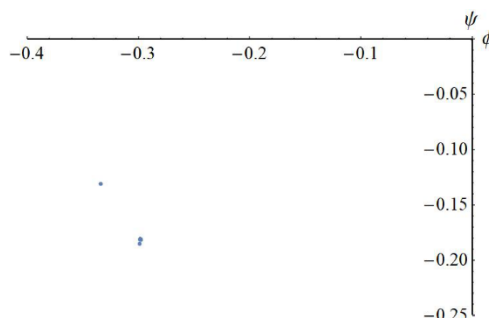
"شکل های 6 و 8" نمودارهای صفحه فاز و "شکل های 7 و 9" نمودارهای مقطع پوانکاره را برای حالت هایی از سیستم نشان می دهند که در نامسای رابطه (49) صدق کرده و در پایین منحنی آستانه حرکت آشوبناک قرار دارند. بنابراین براساس پیش بینی روش ملنیکوف می توان رفتار آشوبناک را از سیستم انتظار داشت. از مقایسه "شکل های 6 تا 9" با "شکل های 4 و 5" بدیهی به نظر می رسد که سیستم رفتار پیچیده تر و نامنظم تری را از خود به نمایش می گذارد. برای نشان دادن بهتر رفتار آشوبناک سیستم می توان نمودار بزرگترین نمای لیپانف را برای یکی از حالت هایی که سیستم در قسمت پایین منحنی آستانه حرکت آشوبناک قرار دارد رسم نمود. به کمک این معیار می توان وجود آشوب در پاسخ سیستم را بررسی نموده و این عدد نشانگر میزان حساسیت سیستم موردنظر به شرایط اولیه می باشد. نمای لیپانف مثبت نمایانگر حساس بودن سیستم به شرایط اولیه و در نتیجه بروز رفتار آشوبناک است [48]. "شکل 10" بزرگترین نمای لیپانف را به ازای شرایط اولیه مشخص شده نشان می دهد.

با توجه به مقادیر عددی شبیه سازی های "شکل های 6 تا 9" مشاهده می شود که وقتی ضریب مربوط به میرایی بستر ویسکوالاستیک ( $\alpha$ ) مقادیر کوچکتری اختیار می کند و از ضریب ویسکوالاستیک بحرانی ( $\alpha_{cr}$ ) فاصله بیشتری می گیرد، زمینه بروز رفتار آشوبناک در سیستم بیشتر فراهم می شود.



**Fig. 4** Phase plane trajectories of the system for  $\alpha = 1, \beta = 1.5, \gamma = -2, F = 0.5, \omega = 1.4$

شکل 4 نمودار صفحه فاز سیستم به ازاء مقادیر  $\alpha = 1, \beta = 1.5, \gamma = -2, F = 0.5, \omega = 1.4$



**Fig. 5** Poincaré section for  $\alpha = 1, \beta = 1.5, \gamma = -2, F = 0.5, \omega = 1.4$

شکل 5 نمودار مقطع پوانکاره سیستم به ازاء مقادیر  $\alpha = 1, \beta = 1.5, \gamma = -2, F = 0.5, \omega = 1.4$

- [7] J. N. Reddy, Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, No. 2-8, pp. 288-307, 2007.
- [8] M. Aydogdu, A general nonlocal beam theory: Its application to nanobeam bending, buckling and vibration, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 41, No. 9, pp. 1651-1655, 2009.
- [9] J. N. Reddy, Nonlocal nonlinear formulations for bending of classical and shear deformation theories of beams and plates, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No. 11, pp. 1507-1518, 2010.
- [10] A. Gharehkhani, E. Abbaspoure-Sani, Study of static deflection and instability voltage of phase shifter micro-switches using a nonlinear beam model and non-localized elasticity theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 99, No. 9, pp. 9-99, 1396. (in Persian)
- [11] C. M. C. Roque, A. J. M. Ferreira, J. N. Reddy, Analysis of Timoshenko nanobeams with a nonlocal formulation and meshless method, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 49, No. 9, pp. 976-984, 2011.
- [12] I. Karimipour, Y. Tadi Beni, A. Koochi, M.R. Abadyan, Using couple stress theory for modeling the size-dependent instability of double-sided beam-type nanoactuators in the presence of Casimir force, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 38, No. 6, pp. 1779-1795, 2015.
- [13] Y. Tadi Beni, I. Karimipour, M. R. Abadyan, Modeling the instability of electrostatic nano-bridges and nano-cantilevers using modified strain gradient theory, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 39, No. 9, pp. 2633-2648, 2015.
- [14] R. Ansari Khalkhali, A. Norouzzadeh, R. Gholami, Forced vibration analysis of conveying fluid carbon nanotube resting on elastic foundation based on modified couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 8, pp. 27-34, 2015. (in Persian)
- [15] R. Ansari Khalkhali, A. Norouzzadeh, Nonlocal and surface effects on the buckling behavior of functionally graded nanoplates: An isogeometric analysis, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 84, pp. 84-97, 2016.
- [16] R. Ansari, R. Gholami, S. Sahmani, A. Norouzzadeh, M. Bazdid-Vahdati, Dynamic stability analysis of embedded multi-walled carbon nanotubes in thermal environment, *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 28, No. 6, pp. 659-667, 2015.
- [17] R. Ansari, A. Norouzzadeh, R. Gholami, M. Faghieh Shojaei, M. Hosseinzadeh, Size-dependent nonlinear vibration and instability of embedded fluid-conveying SWBNNTs in thermal environment, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 61, pp. 148-157, 2014.
- [18] H. T. Thai, A nonlocal beam theory for bending, buckling, and vibration of nanobeams, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 52, pp. 56-64, 2012.
- [19] M. Şimşek, Large amplitude free vibration of nanobeams with various boundary conditions based on the nonlocal elasticity theory, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 56, pp. 621-628, 2014.
- [20] Y. Z. Wang, F. M. Li, Nonlinear primary resonance of nano beam with axial initial load by nonlocal continuum theory, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 61, pp. 74-79, 2014.
- [21] F. Najjar, S. El-Borgi, J. N. Reddy, K. Mrabet, Nonlinear nonlocal analysis of electrostatic nanoactuators, *Composite Structures*, Vol. 120, pp. 117-128, 2015.
- [22] S. Hosseini-Hashemi, R. Nazemzadeh, H. Rokni, Nonlocal nonlinear free vibration of nanobeams with surface effects, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 52, pp. 44-53, 2015.
- [23] S. El-Borgi, R. Fernandes, J. N. Reddy, Non-local free and forced vibrations of graded nanobeams resting on a non-linear elastic foundation, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 77, pp. 348-363, 2015.
- [24] A. R. Vosoughi, Nonlinear free vibration of functionally graded nanobeams on nonlinear elastic foundation, *Iranian journal of science and technology, Transactions of Civil Engineering*, Vol. 40, No. 1, pp. 23-32, 2016.
- [25] M. Soltanpour, M. Ghadiri, A. Yazdi, M. Safi, Free transverse vibration analysis of size dependent Timoshenko FG cracked nanobeams resting on elastic medium, *Microsystem Technologies*, pp. 1-18, 2016.
- [26] N. Togun, Nonlocal beam theory for nonlinear vibrations of a nanobeam resting on elastic foundation, *Boundary Value Problems*, Vol. 2016, No. 1, pp. 1-14, 2016.
- [27] K. Yagasaki, Bifurcations and chaos in vibrating microcantilevers of tapping mode atomic force microscopy, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 42, No. 4, pp. 658-672, 2007.
- [28] H. S. Haghghi, A. H. D. Markazi, Chaos prediction and control in MEMS resonators, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 15, No. 10, pp. 3091-3099, 2010.
- [29] M. S. Siewe, U. H. Hegazy, Homoclinic bifurcation and chaos control in MEMS resonators, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 35, No. 12, pp. 5533-5552, 2011.
- [30] E. M. Miandoab, A. Yousefi-Koma, H. N. Pishkenari, F. Tajaddodianfar, Study of nonlinear dynamics and chaos in MEMS/NEMS resonators, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 22, No. 1-3, pp. 611-622, 2015.
- [31] E. Maani Miandoab, H. N. Pishkenari, A. Yousefi-Koma, F. Tajaddodianfar, Chaos prediction in MEMS-NEMS resonators, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 82, pp. 74-83, 2014.
- [32] J. Awrejcewicz, A. V. Krysko, V. Dobraian, I. V. Papkova, V. A. Krysko, Chaotic and synchronized dynamics of non-linear Euler-Bernoulli beams,

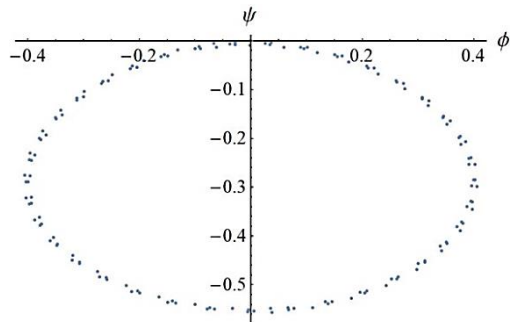


Fig. 9 Poincaré section for  $\alpha = 0.001, \beta = 0.5, \gamma = -0.2, F = 0.3, \omega = 1.4$

شکل 9 نمودار مقطع پوانکاره به ازاء مقادیر  $\alpha = 0.001, \beta = 0.5, \gamma = -0.2, F = 0.3, \omega = 1.4$

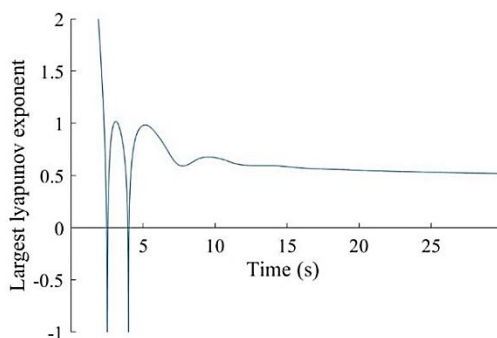


Fig. 10 Largest Lyapunov exponent for  $\alpha = 0.001, \beta = 0.5, \gamma = -0.2, F = 0.3, \omega = 1.4, \phi(0) = 0.1, \psi(0) = 0.15$

شکل 10 بزرگترین نمای لیاپانف به ازاء مقادیر  $\alpha = 0.001, \beta = 0.5, \gamma = -0.2, \phi(0) = 0.1, \psi(0) = 0.15, F = 0.3, \omega = 1.4$

## 6- نتیجه گیری

با در نظر گرفتن یک نانوتیر اویلر-برنولی بر روی بستر ویسکوالاستیک، دینامیک غیرخطی آن با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی اربینگن مورد بررسی قرار گرفت و با استفاده از روش ملنیکوف، محدوده مورد انتظار رفتار آشوبناک سیستم تعیین گردید. با توجه به این که معیار به دست آمده تابع پارامتر غیرموضعی هم می باشد، لزوم استفاده از الاستیسیته غیرموضعی در بررسی دینامیک غیرخطی سیستم مشخص گردید.

شبه سازی های عددی شامل نمودار صفحه فاز، نمودار مقطع پوانکاره و بزرگترین نمای لیاپانف هم نتایج به دست آمده از روش ملنیکوف را تایید می کند. همچنین از همپلتونین سیستم نتیجه می شود که نانوتیر بر بستر ویسکوالاستیک غیرخطی که حالت سخت شونده گی داشته باشد از خود رفتار آشوبناک نشان نمی دهد و فقط برای بسترهای ویسکوالاستیک غیرخطی دارای نرم شونده گی شرایط بروز آشوب فراهم است.

## 7- مراجع

- [1] X. Li, B. Bhushan, K. Takashima, C. W. Baek, Y. K. Kim, Mechanical characterization of micro/nanoscale structures for MEMS/NEMS applications using nanoindentation techniques, *Ultramicroscopy*, Vol. 97, No. 1-4, pp. 481-494, 2003.
- [2] Y. Moser, M. A. M. Gijs, Miniaturized flexible temperature sensor, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 16, No. 6, pp. 1349-1354, 2007.
- [3] J. Pei, F. Tian, T. Thundat, Glucose biosensor based on the microcantilever, *Analytical Chemistry*, Vol. 76, No. 2, pp. 292-297, 2004.
- [4] A. C. Eringen, Nonlocal polar elastic continua, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, No. 1, pp. 1-16, 1972.
- [5] A. C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics*, Vol. 54, No. 9, pp. 4703-4710, 1983.
- [6] A. C. Eringen, *Nonlocal Continuum Field Theories*, First Edition, pp. 31-48, New York: Springer, 2002.



- [40] N. Challamel, C. M. Wang, The small length scale effect for a non-local cantilever beam: a paradox solved, *Nanotechnology*, Vol. 19, No. 34, pp. 34-57, 2008.
- [41] H. S. Shen, F. W. Williams, Postbuckling analysis of imperfect composite laminated plates on non-linear elastic foundations, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 30, No. 5, pp. 651-659, 1995/09/01, 1995.
- [42] H. S. Shen, F. W. Williams, Thermomechanical postbuckling analysis of imperfect laminated plates of softening nonlinear elastic foundations, *Composite Structures*, Vol. 40, No. 1, pp. 55-66, 1997.
- [43] H. S. Shen, Thermal postbuckling analysis of imperfect reissner-mindlin plates on softening nonlinear elastic foundations, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 33, No. 3, pp. 259-270, 1998.
- [44] S. A. Emam, A static and dynamic analysis of the postbackling of geometrically imperfect composite beams, *Composite Structure*, Vol. 90, No. 2, pp. 247-253, 2009.
- [45] P. H. John Guckenheimer, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, First Edition, pp. 184-193, New York: Springer, 1983.
- [46] S. Wiggins, *Global Bifurcations and Chaos*, pp. 426-429, New York: Springer, 1988.
- [47] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, pp. 687-711, New York: Springer, 2003.
- [48] F. C. Moon, *Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*, pp. 191-200, John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey, 2005.
- [33] F. Tajaddodianfar, H. Nejat Pishkenari, M. R. Hairi Yazdi, Prediction of chaos in electrostatically actuated arch micro-nano resonators: Analytical approach, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 30, No. 1-3, pp. 182-195, 2016.
- [34] M. Maleki, H. Nahvi, Nano-resonator dynamic behavior based on nonlocal elasticity theory, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 229, No. 14, pp. 2665-2671, October 1, 2015, 2015.
- [35] D. Younesian, S. R. Marjani, E. Esmailzadeh, Nonlinear vibration analysis of harmonically excited cracked beams on viscoelastic foundations, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 71, No. 1, pp. 109-120, 2013.
- [36] H. Norouzi, D. Younesian, Chaotic vibrations of beams on nonlinear elastic foundations subjected to reciprocating loads, *Mechanics Research Communications*, Vol. 69, pp. 121-128, 2015.
- [37] M. Şimşek, Nonlinear static and free vibration analysis of microbeams based on the nonlinear elastic foundation using modified couple stress theory and He's variational method, *Composite Structures*, Vol. 112, pp. 264-272, 2014.
- [38] A. Norouzzadeh, R. Ansari, Finite element analysis of nano-scale Timoshenko beams using the integral model of nonlocal elasticity, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 88, pp. 194-200, 2017.
- [39] A. Norouzzadeh, R. Ansari, H. Rouhi, Pre-buckling responses of Timoshenko nanobeams based on the integral and differential models of nonlocal elasticity: An isogeometric approach, *Applied Physics A*, Vol. 123:330, 2017.

Archive of SID