



## بررسی اثر تغییرات نمایی سطح مقطع بر ولتاژ خروجی برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک با غیر خطینگی هندسی، اینرسی، ماده و میرایی

حامد سلمانی<sup>1</sup>، غلامحسین رحیمی<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استاده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

\* تهران، صندوق پستی 14115-111، rahimi\_gh@modares.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 29 مهر 1396

پذیرش: 27 دی 1396

ارائه در سایت: 26 بهمن 1396

کلید واژگان:

پیزوالکتریک

برداشت کننده انرژی

مقطع متغیر نمایی

غیرخطی، روش تجربی

### چکیده

در این مقاله روابط الکترومکانیکی غیرخطی تیر برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک با مقطع متغیر نمایی ارائه شده است تا تاثیر متغیر نمودن مقطع تیر پیزوالکتریک با تابع نمایی در استخراج توان بیشتر با وزن کمتر از برداشت کننده انرژی بررسی شود. بدین منظور غیرخطینگی‌های ماده، میرایی، اینرسی و هندسی در نظر گرفته شده است. در به دست آوردن معادلات حرکت فرضیه اویلر برنولی و تغییرات خطی ولتاژ در جهت ضخامت مد نظر گرفته شده است. معادلات حاکم با شکل موده‌های متعامد تیر پیزوالکتریک با مقطع متغیر نمایی به همراه جرم نوک جداسازی شده است. معادلات دیفرانسیل غیرخطی و کوپل حاکم با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه حل شده‌اند. ضریب میرایی تیر با استخراج تابع پاسخ فرکانسی شتاب نوک تیر به شتاب تحریک پایه از آزمایشی مناسب در حالت خطی و مدار اتصال کوتاه محاسبه شده است. برای شناسایی ضرایب غیرخطی ماده و صحنه‌گذاری نتایج، شتاب تحریک شیکر افزوده شده است و در نتیجه آن دقت معادلات توسعه یافته مورد تایید قرار گرفته است. بمنظور بررسی اثر متغیر نمودن مقطع تیر بصورت نمایی در کارایی برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک، تاثیر طول، ضریب باریک شونده‌گی و شتاب تحریک مورد بررسی قرار گرفته است.

## Investigation of the exponentially tapering effect on the behavior of piezoelectric energy harvester including geometric, inertial, material and damping nonlinearities

Hamed Salmani, Gholam Hossein Rahimi\*

Department of Aerospace Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

\* P.O.B. 14115-111, Tehran, Iran, rahimi\_gh@modares.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 21 October 2017

Accepted 17 January 2018

Available Online 15 February 2018

### Keywords:

Piezoelectric, Energy harvesting

Exponential tapering

Nonlinear

Experimental method

### ABSTRACT

In this paper, the nonlinear electromechanical formulations of a piezoelectric energy harvester are proposed to investigate the effect of exponential tapering on generating more power with less mass from energy harvester. For this purpose, geometric, inertial, material and damping nonlinearities are included. The governing equations are derived using the Euler-Bernoulli and linear variation of electric voltage along the thickness assumptions. The coupled nonlinear equations are discretized by the mass normalized mode shapes of an exponentially tapered piezoelectric beam with tip mass, and resulting differential equations are solved employing the method of multiple scales. An experiment is set up, and the damping coefficient of the beam is calculated from the tip acceleration to base acceleration frequency response function in the case of low exciting acceleration and short circuit. Material nonlinear coefficients are identified using the experiment, when the exciting acceleration of the shaker is increased, and the proposed solution accuracy is verified. The effect of tapering exponentially on the behavior of the piezoelectric energy harvester is investigated by studying length, tapering parameter and exciting acceleration amplitude in some examples.

### 1- مقدمه

سیم‌کشی‌ها به دلیل افزایش وزن، کاهش قابلیت اطمینان و افت جریان گزینه چندان مناسبی برای رفع این نقیصه نمی‌باشند. بنابراین در حسگرهای بی‌سیم رویکردی که در نظر گرفته می‌شود، استفاده از باتری است که باتری‌ها نیز مستعمل شده و نیاز به تعویض و یا شارژ مجدد پیدا می‌کنند. این مساله زمانی اهمیت بیشتری پیدا می‌کند که شبکه‌ای متشکل از حسگرها<sup>1</sup>

فناوری‌ها روز به روز کوچکتر می‌شوند و با این پیشرفت، بخصوص در زمینه الکترونیک، حسگرها و مدارات الکترونیکی می‌توانند در جاهای دور از دسترس و فضاهای محدود مانند داخل بال و بدنه هواپیما، روی موتور و ... قرار بگیرند و اطلاعات حسگر را بصورت بی‌سیم منتقل نمایند. اگرچه این سیستم‌ها کوچک می‌شوند، ولی نیاز به منابع انرژی الکتریکی دارند که

<sup>1</sup> Network Sensor Node

### Please cite this article using:

H. Salmani, Gh. H. Rahimi, Investigation of the exponentially tapering effect on the behavior of piezoelectric energy harvester including geometric, inertial, material and damping nonlinearities, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 02, pp. 434-442, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

غیرخطی و ماده را خطی در نظر گرفتند و به این نتیجه رسیدند که تحت بار کششی تیر رفتار سخت شونده<sup>5</sup> از خود نشان می‌دهد. آن‌ها حل خود را با روش مقیاس‌های چندگانه انجام دادند.

عبدالکفی و همکاران [17] به بررسی پارامترهای معادلات ساختاری ارائه شده توسط عرفه و همکاران [12] در برداشت کننده‌های انرژی پیزوالکتریک تحت تحریک مستقیم<sup>6</sup> پرداخته و در حل خود پس از بردن معادلات به فضای حالت، آن‌ها را با روش مقیاس‌های چندگانه حل نمودند. آن‌ها در مدل‌سازی خود، مقطع را یکنواخت در نظر گرفته و علاوه بر ماده غیرخطی، اینرسی و رابطه جابجایی کرنش را نیز غیرخطی فرض نمودند. آن‌ها در تحقیق دیگری از همین فرضیات برای مدل‌سازی تیر پیزوالکتریک با تحریک پارامتری<sup>7</sup> پرداختند [18]. استانتون و همکاران وی [19] در معادلات ساختاری پیزوالکتریک از درجات بالاتر از 2 میدان الکتریکی به دلیل کوچک بودن آن در برداشت انرژی صرف‌نظر نموده و تنش را توزیع درجه 6 از کرنش در نظر گرفتند. آن‌ها اثر جرم نوک را نیز در معادلات خود مدنظر قرار دادند و معادلات را از روش مقیاس‌های چندگانه حل نمودند. لیندهام و همکارش ارتورک [20]، با استفاده از رابطه سازگاری غیرخطی و رابطه تنش و کرنش خطی، معادلات حاکم را استخراج نموده و با روش تعادل هارمونی حل نمودند. گارگ و همکارش [21] پاسخ زیر هارمونی<sup>8</sup> و فوق هارمونی<sup>9</sup> برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک را با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه مورد مطالعه قرار دادند. در یکی از معهود اقدامات برای حل غیرخطی تیر با مقطع متغیر، سیلویا و همکاران از تابع میجر-جی<sup>10</sup> شکل موده‌های تیر با مقطع متغیر خطی را استخراج نموده و پاسخ دینامیکی آن را در حالت تشدید اصلی<sup>11</sup> با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه مورد بررسی قرار دادند [22].

در این مقاله معادلات حاکم بر برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک غیرخطی با مقطع متغیر نمایی مورد بررسی قرار گرفته است تا تاثیر نمایی نمودن سطح مقطع تیر پیزوالکتریک بر ولتاژ خروجی از برداشت کننده انرژی در دامنه نوسانات بالا مورد مطالعه قرار گیرد. بدین منظور غیرخطی هندسی، ماده، میرایی و اینرسی در معادلات حاکم مدنظر قرار گرفته و معادلات غیرخطی کوپل حاکم بر رفتار تیر پیزوالکتریک استخراج شده است. علاوه بر تیر اولبر-برنولی<sup>12</sup> در نظر گرفته شده و تغییرات ولتاژ در جهت ضخامت خطی فرض شده است. پس از استفاده از شکل موده‌های متعامد تیر پیزوالکتریک با مقطع متغیر، معادلات حرکت جداسازی شده و به معادلات دیفرانسیل در حوزه زمان تبدیل می‌شوند. معادلات حاکم با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، حل و نتایج آن با نتایج تجربی مقایسه شده است. مقایسه نتایج نمایانگر، قرابت نتایج تجربی و تحلیلی است. در پایان تاثیر طول، ضریب باریک شونده‌گی و شتاب تحریک در ولتاژ غیرخطی به دست آمده از برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک مورد مطالعه قرار گرفته است.

## 2- روابط الکترومکانیکی

### 2-1- توسعه معادلات حرکت

برداشت کننده انرژی که در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرد از یک تیر فلزی تشکیل شده است که به یک تیر پیزوالکتریک چسبانده شده است. لایه پیزوالکتریک تمام طول تیر را می‌پوشاند و عرض تیر مرکب به صورت نمایی

مدنظر باشد، که در این حالت نیاز به سیستم‌هایی وجود دارد که خود، منبع انرژی<sup>1</sup> داشته باشند. این منابع انرژی می‌توانند به صورت مستقیم در حسگر مورد استفاده قرار گیرند و یا این‌که به طور غیرمستقیم برای شارژ باتری استفاده شوند. به علاوه باتری‌ها در شرایط محیطی خاصی کار می‌کنند و در دماهای بالا نمی‌توان از آن‌ها استفاده نمود. آلودگی زیست محیطی نیز دیگر مشکلی است که باتری‌ها ایجاد می‌کنند، بنابراین محققین به دنبال راه‌های تازه‌تر برای تامین انرژی حسگرها بوده‌اند و در این میان توجه‌ها به برداشت کننده‌های انرژی پیزوالکتریک که بر مبنای ارتعاشات تیر کار می‌کنند، به طور وسیعی رو به افزایش است. برداشت کننده‌های انرژی پیزوالکتریک از یک تیر تشکیل شده‌اند که یک یا دو لایه پیزوالکتریک به آن متصل شده است و وزنه‌ای به نوک آن متصل شده است که با استفاده از آن فرکانس طبیعی تیر تنظیم و تقریباً برابر با فرکانس تحریک می‌شود [1].

تحقیقات نشان داده است که متغیر نمودن سطح مقطع تیر پیزوالکتریک منجر به افزایش نسبت ولتاژ، به وزن برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک می‌شود. بیکر و همکاران مشاهده نمودند که با ایجاد تیر مثلثی می‌توان انرژی تولیدی برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک را تا 50 درصد افزایش داد، چرا که با مثلثی نمودن تیر می‌توان کرنش یکنواخت در طول آن ایجاد نمود [2]. تحقیقات در زمینه متغیر نمودن سطح مقطع تیر، نشان داد که این کار می‌تواند منجر به بهینه شدن ولتاژ و توان خروجی برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک شود [3-9]. سلمانی و همکاران نیز در پژوهشی با استفاده از حل تحلیلی نشان دادند که چنانچه مقطع تیر به صورت نمایی تغییر نماید می‌تواند منجر به افزایش نسبت ولتاژ و توان به وزن کل برداشت کننده انرژی شود [10].

برداشت کننده‌های انرژی پیزوالکتریک هنگامی که در معرض بار بالای ناشی از شتاب تحریک بالا قرار می‌گیرند، رفتار غیرخطی عموماً نرم شونده از خود نشان می‌دهند. این رفتار غیرخطی نشأت گرفته از اثر غیرخطی ماده، غیرخطی هندسی و غیرخطی اینرسی هستند. در این بخش به مرور مقالاتی پرداخته می‌شود که در برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک، آثار این پارامترها را با روش تحلیلی مورد بررسی قرار داده‌اند.

ونگر و هیدگورن [11] معادلات ساختاری تیر پیزوالکتریک را در حالتی که تحت میدان الکتریکی ضعیف قرار می‌گیرد ارائه نمودند. آنها با حل معادلات حرکت با استفاده از روش تعادل هارمونی<sup>2</sup> حل نموده و ضرایب مجهول ماده را با استفاده از نتایج روش تجربی محاسبه نمودند. در سال 2004 عرفه و همکارش [12] روابط ساختاری<sup>3</sup> غیرخطی پیزوالکتریک را برای عملگر پیزوالکتریک با توزیع درجه 2 بدست آورده و ضرایب مورد نیاز ماده پیزوالکتریک را از آزمایش محاسبه نمودند. دغاغ و همکاران [13] مدل یک درجه آزادی تیر را استفاده نموده و با فرض سفتی و میرایی غیرخطی معادلات حرکت برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک را استخراج نموده و با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه<sup>4</sup> ولتاژ و توان برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک را محاسبه نمودند. استانتون و همکاران [14, 15] با استفاده از معادلات ساختاری غیرخطی [11]، روابط کرنش جابجایی خطی و میرایی غیرخطی، ولتاژ برداشت کننده انرژی غیرخطی را محاسبه نمودند. ماسانا و دغاغ [16] برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک را بارگذاری محوری مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها در تحقیق خود رابطه بین کرنش و جابجایی را

<sup>5</sup> Hardening

<sup>6</sup> Direct Excitation

<sup>7</sup> Parametric excited

<sup>8</sup> Subharmonic

<sup>9</sup> Superharmonic

<sup>10</sup> Meijer-G Function

<sup>11</sup> Primary Resonance

<sup>12</sup> Euler-Bernoulli

<sup>1</sup> Self-Powered

<sup>2</sup> Harmonic Balance Method

<sup>3</sup> Constitutive Equations

<sup>4</sup> Method of Multiple Scales

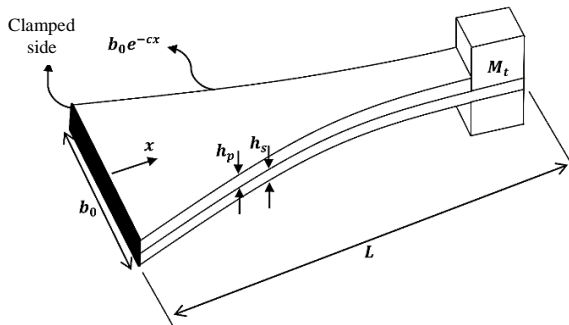


Fig. 1 Piezoelectric energy harvester

شکل 1 برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک

که در آن  $\phi_i$  شکل مود متعامد نسبت به جرم  $i$  ام تیر پیزوالکتریک با مقطع متغیر نمایی و جرم نوک است که در محاسبه آن از شرط مرزی تیر یک سر گیردار با جرم نوک استفاده شده است. در این شرط مرزی جابجایی و شیب در محل تکیه گاه صفر در نظر گرفته شده و در نوک تیر نیروی برشی و ممان به ترتیب، برابر با نیرو و ممان ناشی از جرم نوک هستند [10].

با توجه به این که تیرهای برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک در مود اول تیر بیشترین ولتاژ و توان را تولید می نمایند، با فرض تحریک در فرکانس طبیعی اول معادلات حرکت تنها در مود اول استخراج و حل می شوند. با استفاده از روابط (1) تا (6) و (8) و جایگذاری در رابطه (7) یکی از دو معادله حرکت حاکم بر رفتار غیرخطی برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک به شکل زیر به دست می آید:

$$\ddot{q}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{q}_1 + \zeta_{1n}q_1|q_1| + \omega_1^2q_1 - \lambda_1V(t) - D_{111}q_1^2 + E_{1111}q_1^3 - \theta_1V^2(t) + F_{1111}(q_1\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1^2q_1) - K_{111}q_1^2V(t) + N_{11}q_1V(t) = A_1F\cos(\Omega t) \quad (9)$$

در معادله (9) فرضیه یکنواختی میدان الکتریکی در جهت ضخامت به شکل  $E_3 = -V(t)/h_p$  در نظر گرفته شده است. ضرایب معادله (9) از معادلات (10) قابل محاسبه هستند:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= EI_0 \int_0^L \phi_1'' \phi_1'' e^{-cx} dx \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2} e_{113} b_0 (z_2 + z_1) \int_0^L \phi_1'' e^{-cx} dx \\ D_{111} &= \frac{3}{8} \frac{\alpha_1}{2} b_0 (z_2^4 - z_1^4) \int_0^L \phi_1'' \phi_1'' e^{-cx} dx \\ E_{1111} &= EI_0 \left( \int_0^L \phi_1'' \phi_1'' \phi_1' \phi_1' e^{-cx} dx + \int_0^L \phi_1'' \phi_1'' \phi_1' \phi_1' e^{-cx} dx \right) \\ \theta_1 &= \frac{1}{4} \frac{\alpha_2}{2h_p} b_0 (z_2 + z_1) \int_0^L \phi_1'' e^{-cx} dx \\ F_{1111} &= m_0 \int_0^L \left( \int_0^x \phi_1' \phi_1' ds \right) \left( \int_0^x \phi_1' \phi_1' ds \right) e^{-cx} dx + M \left( \int_0^L \phi_1' \phi_1' dx \right) \left( \int_0^L \phi_1' \phi_1' dx \right) \\ K_{111} &= \frac{1}{4} e_{113} b_0 (z_2 + z_1) \int_0^L (\phi_1'' \phi_1' \phi_1' + \phi_1' \phi_1'' \phi_1') + \phi_1' \phi_1' \phi_1'' e^{-cx} dx \\ N_{11} &= \frac{\alpha_3}{3h_p} b_0 (z_2^3 - z_1^3) \int_0^L \phi_1'' \phi_1'' e^{-cx} dx \\ A_1 &= -m_0 \int_0^L \phi_1 e^{-cx} dx - M \phi_1(L) \end{aligned} \quad (10)$$

در طول آن تغییر می نماید. وزنه ای در نوک تیر به عنوان جرم متمرکز چسبانده شده است که فرکانس طبیعی را تنظیم نموده و آن را به فرکانس تحریک نزدیک می کند. این تیر به صورت یک سر گیردار به تکیه گاه متصل شده و از این قسمت تحت تحریک پایه قرار می گیرد. الکترودهای لایه پیزوالکتریک به مقاومت الکتریکی  $R$  متصل شده اند. شکل برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک در "شکل 1" نمایش داده شده است.

معادلات ساختاری غیرخطی پیزوالکتریک با در نظر گرفتن فروالاستیسیته غیرخطی عبارت است از [12]:

$$\sigma_{11}^p = C_{1111}\epsilon_{11} - e_{113}E_3 + \frac{1}{2}\alpha_1\epsilon_{11}^2 + \frac{1}{2}\alpha_2E_3^2 - \alpha_3E_3\epsilon_{11} \quad (a)$$

$$D_3 = e_{311}\epsilon_{11} + \epsilon_{33}^s E_3 + \frac{1}{2}\alpha_3\epsilon_{11}^2 + \frac{1}{2}\alpha_4E_3^2 - \alpha_2E_3\epsilon_{11} \quad (b) \quad (1)$$

که در آن کرنش غیرخطی با در نظر گرفتن جابجایی بزرگ، از رابطه زیر به دست می آید [23]:

$$\epsilon_{11} = -z \left( w'' + \frac{1}{2} w'' w'^2 \right) \quad (2)$$

تغییرات انرژی پتانسیل با استفاده از تنش و کرنش روابط (1) و (2) و فرض رابطه تنش و کرنش خطی برای لایه فلزی از رابطه (3) قابل محاسبه است [24].

$$\delta\pi = \iint_{V_p} (\sigma_{11}\delta\epsilon_{11} - D_3\delta E_3) dv \quad (3)$$

انرژی جنبشی تیر نیز با در نظر گرفتن جابجایی بزرگ تیر که در آن علاوه بر جابجایی عرضی، جابجایی طولی نیز در تیر وجود دارد، از رابطه (4) بدست می آید:

$$T = \int_0^L m(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx + \frac{1}{2} M(\dot{u}_L^2 + \dot{w}_L^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{w}_L'^2 \quad (4)$$

که در آن رابطه بین جابجایی عرضی و جابجایی طولی عبارت است از:

$$u = -\frac{1}{2} \int_0^s w'^2 ds \quad (5)$$

علاوه بر انرژی جنبشی و پتانسیل حاکم بر تیر پیزوالکتریک، انرژی ناشی از تحریک پایه با فرکانس  $\Omega$ ، میرایی خطی، غیرخطی و بار الکتریکی  $Q$  نیز برای به دست آوردن معادلات حرکت مورد نیاز است که در ادامه به صورت کار مجازی بیان می شود:

$$\begin{aligned} \delta W &= - \int_0^L C_a \dot{w} + C_{an} \dot{w} |\dot{w}| \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( C_s I(x) \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} \right) \delta w dx \\ &\quad - m_0 \int_0^L F \cos(\Omega t) e^{-cx} \delta w dx \\ &\quad - M F \cos(\Omega t) \delta w_L - Q \delta V \end{aligned} \quad (6)$$

پس از محاسبه انرژی جنبشی و پتانسیل، می توان با استفاده از اصل همیلتون به شکل زیر استفاده نمود و معادلات حرکت را به دست آورد [25]:

$$\delta \int_t (T - \pi + W) dt = 0 \quad (7)$$

در معادله (7)، ضرایب  $\delta W$  برابر صفر قرار داده شده و معادله دیفرانسیل حاکم به دست آمده است. به علاوه از جداسازی گالرکین به شکل زیر استفاده شده است:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (8)$$

با توجه به این که ضرایب خطی معادلات حرکت به مراتب بزرگتر از ضرایب غیرخطی هستند، بنابراین ضرایب معادلات را در توان های  $\varepsilon$  به شکل معادله (18) ضرب می نمایند.

$$\begin{cases} \varepsilon^0 \omega_1, \varepsilon^0 \chi_1, \varepsilon^0 C_p, \varepsilon^0 \frac{1}{R} \\ \varepsilon^1 D_{111}, \varepsilon^1 \theta_1, \varepsilon^1 N_{11}, \varepsilon^1 L_{111}, \varepsilon^1 U_{11} \\ \quad , \varepsilon^1 \alpha_{4v}, \varepsilon^1 k_1, \varepsilon^1 \sigma_1 \\ \varepsilon^2 \zeta_1, \varepsilon^2 \zeta_{1n}, \varepsilon^2 \lambda_1, \varepsilon^2 E_{1111}, \varepsilon^2 F_{1111}, \\ \quad \varepsilon^2 K_{111}, \varepsilon^2 A_1 \end{cases} \quad (18)$$

به علاوه برای این که فرکانس نزدیک فرکانس طبیعی باشد، از پارامتر تنظیم کننده به شکل زیر استفاده می شود:

$$\Omega = \omega_1 + \varepsilon^2 \sigma \quad (19)$$

با استفاده از روابط (15) تا (19) معادلات دیفرانسیل برای ضریب  $\varepsilon^0$

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} q_{10} + \omega_1^2 q_{10} = 0 \quad (20)$$

$$C_p \left( \frac{\partial}{\partial T_0} v_0 \right) + \frac{v_0}{R} = -\chi_1 \left( \frac{\partial}{\partial T_0} q_{10} \right) \quad (21)$$

و برای  $\varepsilon^1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} q_{11} + \omega_1^2 q_{11} &= \theta_1 (v_0)^2 - N_{11} q_{10} v_0 + D_{111} (q_{10})^2 \\ &\quad - 2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} q_{10} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} C_p \left( \frac{\partial}{\partial T_0} v_1 \right) + \frac{v_1}{R} &= -C_p \left( \frac{\partial}{\partial T_1} v_0 \right) \\ &\quad - \chi_1 \left( \frac{\partial}{\partial T_0} q_{11} + \frac{\partial}{\partial T_1} q_{10} \right) \\ &\quad - L_{111} (q_{10})^2 \frac{\partial}{\partial T_0} q_{10} \\ &\quad + U_{11} q_{10} \frac{\partial}{\partial T_0} q_{10} + \alpha_{4v} v_0 \frac{\partial}{\partial T_0} v_0 \\ &\quad - k_1 q_{10} \frac{\partial}{\partial T_0} v_0 - \sigma_1 v_0 \frac{\partial}{\partial T_0} q_{10} \end{aligned} \quad (23)$$

و برای  $\varepsilon^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} q_{12} + \omega_1^2 q_{12} &= -2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} q_{11} - 2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} q_{10} \\ &\quad - \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} q_{10} - 2 \zeta_1 \omega_1 \frac{\partial}{\partial T_0} q_{10} \\ &\quad - \lambda_1 v_0 + 2 D_{111} q_{10} q_{11} \\ &\quad - E_{1111} (q_{10})^3 + 2 \theta_1 v_0 v_1 \\ &\quad - F_{1111} \left( \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} q_{10} \right) (q_{10})^2 \\ &\quad - F_{1111} \left( \frac{\partial}{\partial T_0} q_{10} \right)^2 q_{10} \\ &\quad + K_{111} (q_{10})^2 v_0 - N_{11} q_{10} v_1 \\ &\quad - N_{11} q_{11} v_0 - \frac{1}{2} F A_1 e^{i \omega_1 T_0} e^{i \sigma T_2} \\ &\quad - \frac{1}{2} F \frac{A_1}{e^{i \omega_1 T_0} e^{i \sigma T_2}} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} C_p \frac{\partial}{\partial T_0} v_2 + \frac{v_2}{R} &= -C_p \left( \frac{\partial}{\partial T_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial T_2} v_0 \right) \\ &\quad - \chi_1 \left( \frac{\partial}{\partial T_0} q_{12} + \frac{\partial}{\partial T_1} q_{11} + \frac{\partial}{\partial T_2} q_{10} \right) \\ &\quad - L_{111} (q_{10})^2 \left( \frac{\partial}{\partial T_0} q_{11} + \frac{\partial}{\partial T_1} q_{10} \right) \\ &\quad - 2 L_{111} q_{10} q_{11} \left( \frac{\partial}{\partial T_0} q_{10} \right) \\ &\quad + U_{11} q_{10} \left( \frac{\partial}{\partial T_0} q_{11} + \frac{\partial}{\partial T_1} q_{10} \right) \end{aligned}$$

معادله حرکت دوم برای حل دو مجهول  $V(t)$  و  $q_1(t)$  با مساوی صفر قرار دادن ضرایب  $\delta V$  و رابطه بین ولتاژ و بار الکتریکی به شکل زیر به دست می آید:

$$\dot{Q}(t) = \frac{V(t)}{R} \quad (11)$$

با جایگذاری رابطه (11) در مشتق اول ضرایب  $\delta V$  نسبت به زمان و استفاده از رابطه جداسازی گالرکین (8) معادله دیفرانسیل دوم به شکل زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} \chi_1 \dot{q}_1 + L_{111} q_1^2 \dot{q}_1 + C_p \dot{V}(t) - U_{11} q_1 \dot{q}_1 \\ - \alpha_{4v} V(t) \dot{V}(t) + k_1 q_1 \dot{V}(t) \\ + \sigma_1 \dot{q}_1 V(t) + \frac{V(t)}{R} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

که ضرایب آن به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= e_{311} b_0 h_{pc} \int_0^L \phi''_1 e^{-cx} dx \\ L_{111} &= e_{311} b_0 h_{pc} \int_0^L \left( \frac{1}{2} \phi'_1 \phi'_1 \phi''_1 \right. \\ &\quad \left. + \phi'_1 \phi''_1 \phi'_1 \right) e^{-cx} dx \\ C_p &= \frac{\varepsilon_{33} b_0}{h_p} \int_0^L e^{-cx} dx \\ U_{11} &= \alpha_3 b_0 h_{pc}^2 \int_0^L \phi''_1 \phi''_1 e^{-cx} dx \\ \alpha_{4v} &= \frac{\alpha_4 b_0}{h_p^2} \int_0^L e^{-cx} dx \\ k_1 &= \frac{\alpha_2 b_0 h_{pc}}{h_p} \int_0^L \phi''_1 e^{-cx} dx \\ \sigma_1 &= \frac{\alpha_2 b_0 h_{pc}}{h_p} \int_0^L \phi''_1 e^{-cx} dx \end{aligned} \quad (13)$$

در این بخش معادلات حرکت غیرخطی کوپل (9) و (12) با در نظر گرفتن غیرخطیگی های ماده، میرایی، اینرسی و هندسی بدست آمدند. در بخش بعد به حل این معادلات پرداخته شده است تا ولتاژ خروجی از برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک محاسبه شود.

## 2-2- حل معادلات حرکت

برای حل معادلات حرکت غیرخطی، روش مقیاس های چندگانه مورد استفاده قرار گرفته است. این روش، روشی معمول برای حل معادلات غیرخطی با میرایی و تحریک است و در برداشت کننده های انرژی پیزوالکتریک غیرخطی نیز برای محاسبه توان و ولتاژ برداشت کننده ها استفاده می شود [13,16-18,21,26]. در این روش متغیر زمان، به صورت بسطی از مقیاس های زمان به شکل زیر توصیف می شود:

$$T_n = \varepsilon^n t \quad (14)$$

با استفاده از قاعده زنجیره ای، مشتقات نسبت به زمان را می توان به شکل معادله (15) استخراج نمود:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + o(\varepsilon^3) \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 D_1^2 + 2\varepsilon^2 D_0 D_2 + o(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (15)$$

که در آن  $D_n = \partial / \partial T_n$  است. به علاوه، مجهولات معادلات حرکت نیز با استفاده از معادلات (16) و (17)، بسط داده می شوند.

$$q_1(t) = q_{10}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon q_{11}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 q_{12}(T_0, T_1, T_2) + o(\varepsilon^3) \quad (16)$$

$$V(t) = v_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon v_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 v_2(T_0, T_1, T_2) + o(\varepsilon^3) \quad (17)$$

3-1- روش تجربی

برای صحت‌گذاری روابط به‌دست آمده، آزمایشی ترتیب داده شده است که با استفاده از آن بتوان ولتاژ برداشت کننده انرژی غیرخطی را اندازه‌گیری نمود. در این آزمایش مجموعه تیر پیزوالکتریک و جرم نوک بر روی شیکر قرار داده می‌شوند. یک شتاب‌سنج بر روی شیکر و دیگری در قسمت نوک تیر نصب شده است که شتاب‌سنج نوک تیر، علاوه بر اندازه‌گیری شتاب نوک، نقش جرم نوک را نیز ایفا می‌نماید. الکترودهای لایه پیزوالکتریک به‌صورت موازی به مقاومت الکتریکی 100 اهم وصل شده و به یکی از کانال‌های دستگاه داده‌برداری متصل می‌شوند. چیدمان آزمایش در "شکل 2" نشان داده شده است.

به‌منظور آماده‌سازی آزمایش، در ابتدا لایه‌های فولادی و پیزوالکتریک بخوبی به هم چسبانده شده‌اند و جرم نوک نیز به لایه فلزی چسبانده شده است. سپس مجموعه تیر مرکب در داخل شیار فیکسچری که به شیکر پیچ شده است قرار می‌گیرد. ورق محکمی در داخل شیار قرار دارد که با محکم کردن پیچ، تیر را داخل شیار مقید می‌نماید. "شکل 3" تصویر این آزمایش را نشان می‌دهد.

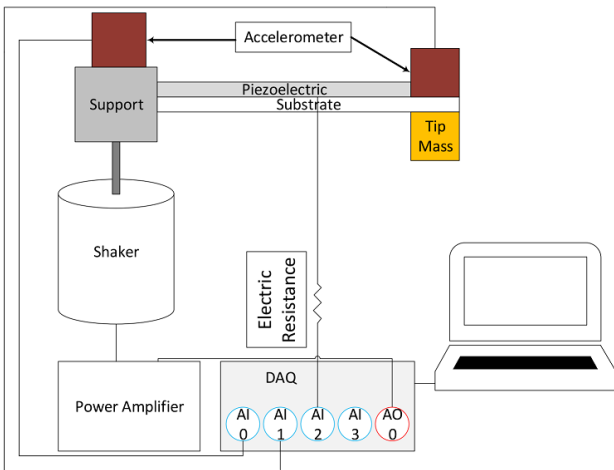


Fig. 2 Experiment Setup Schematic

شکل 2 شماتیک چیدمان آزمایش

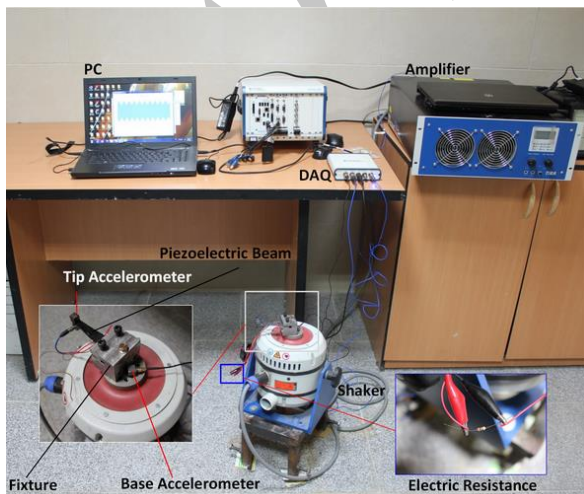


Fig. 3 Experiment Setup

شکل 3 چیدمان آزمایش

$$\begin{aligned}
 &+U_{11}q_{11}\left(\frac{\partial}{\partial T_0}q_{10}\right) \\
 &+ \alpha_{4v}v_0\left(\frac{\partial}{\partial T_0}v_1 + \frac{\partial}{\partial T_1}v_0\right) \\
 &+ \alpha_{4v}v_1\left(\frac{\partial}{\partial T_0}v_0\right) \\
 &- k_1q_{10}\left(\frac{\partial}{\partial T_0}v_1 + \frac{\partial}{\partial T_1}v_0\right) \\
 &- k_1q_{11}\left(\frac{\partial}{\partial T_0}v_0\right) \\
 &- \sigma_1v_0\left(\frac{\partial}{\partial T_0}q_{11} + \frac{\partial}{\partial T_1}q_{10}\right) \\
 &- \sigma_1v_1\left(\frac{\partial}{\partial T_0}q_{10}\right)
 \end{aligned} \tag{25}$$

به‌دست می‌آیند.

پاسخ معادله (21) به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$q_{10}(T_0, T_1, T_2) = A_{11}(T_1, T_2)e^{i\omega_1 T_0} + \bar{A}_{11}(T_1, T_2)e^{-i\omega_1 T_0} \tag{26}$$

که با جایگذاری آن در معادله (22)،  $v_0$  به دست می‌آید:

$$v_0(T_0, T_1, T_2) = \frac{i\chi_1\omega_1 A_{11}(T_1, T_2)R e^{i\omega_1 T_0}}{iC_p R \omega_1 + 1} - \frac{i\chi_1\omega_1 \bar{A}_{11}(T_1, T_2)R}{(iC_p R \omega_1 - 1)e^{i\omega_1 T_0}} \tag{27}$$

چنانچه معادلات (26) و (27) در معادله دیفرانسیل (22) جایگذاری شوند، جمله سکولار  $D_1 A_{11}(T_1, T_2)$  ظاهر می‌شود که برای حذف آن باید  $A_{11}$  تنها تابع  $(T_2)$  شود. با این فرض معادله (22) حل و در معادله (23) جایگذاری شده و پاسخ‌های به‌دست آمده در معادله (24) قرار داده می‌شوند. بخش حقیقی و موهومی جملات سکولار معادله حاصل باید بطور مجزا برابر صفر شوند. پیش از آن که معادلات ساده‌سازی شوند،  $A_{11}(T_2)$  به شکل قطبی بازنویسی شده و در جملات سکولار جایگزین می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 A_{11}(T_2) &= \frac{1}{2} a(T_2) e^{i\psi(T_2)} \\
 \bar{A}_{11}(T_2) &= \frac{1}{2} a(T_2) e^{-i\psi(T_2)}
 \end{aligned} \tag{28}$$

در مرحله بعد تغییر متغیر  $\eta = \sigma T_2 - \psi(T_2)$  داده می‌شود و با توجه به پایا بودن مساله  $da(T_2)/dT_2$  و  $d\eta(T_2)/dT_2$  برابر با صفر خواهند بود. بدین ترتیب  $a(T_2)$  تنها مجهول مساله است که از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{1}{4} F^2 A_1^2 = \left(\Im(\sigma, a(T_2))\right)^2 + \left(\Re(\sigma, a(T_2))\right)^2 \tag{29}$$

که در آن  $\Re(\sigma, a(T_2))$  و  $\Im(\sigma, a(T_2))$  به ترتیب قسمت موهومی و حقیقی جملات سکولار هستند. از معادله (29) می‌توان  $a(T_2)$  را برحسب  $\sigma$  به‌دست آمده و پس از محاسبه  $a(T_2)$  می‌توان اندازه ولتاژ  $v_0$  را برحسب  $\sigma$  محاسبه نمود.

$$|v_0| = \frac{\omega_1 \chi_1 R}{\sqrt{(R\omega_1 C_p)^2 + 1}} a(T_2) \tag{30}$$

3- بحث و نتایج

در این بخش، به بررسی نتایج به دست آمده از روابط بخش قبل پرداخته می‌شود. در ابتدا روابط به دست آمده با استفاده از روش تجربی صحت‌گذاری می‌شوند و در مرحله بعد پارامترهای مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرند تا تاثیر متغیر نمودن مقطع تیر پیزوالکتریک بصورت نمایی در دامنه‌های تحریک بالا مورد مطالعه قرار گیرد.

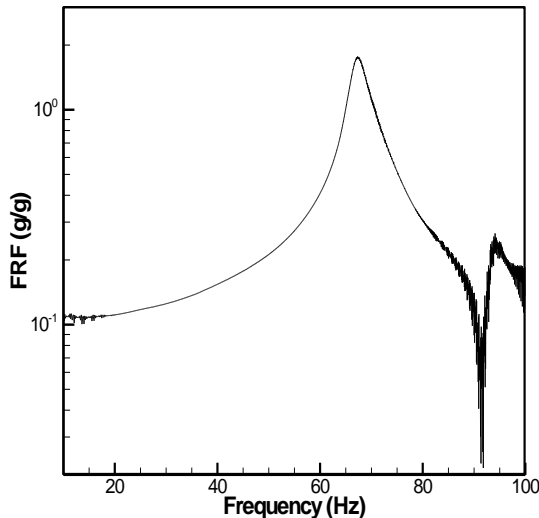


Fig. 4 Tip acceleration to base acceleration FRF

شکل 4 تابع پاسخ فرکانسی شتاب نوک به شتاب تحریک پایه

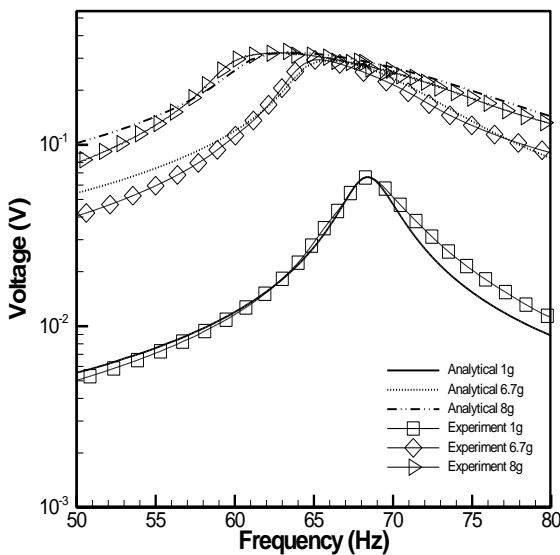


Fig. 5 Experiment and analytical results

شکل 5 نتایج روش تجربی و تحلیلی

و غیرخطینگی هندسی که رفتار غیرخطی سخت‌شونده ایجاد می‌نماید تاثیر کمتری در پاسخ سیستم دارد. به‌علاوه نتایج تحلیلی و تجربی، قرابت مناسبی دارند و هرچه فرکانس از فرکانس ولتاژ حداکثر فاصله می‌گیرد، اختلاف نتایج زیاد می‌شود. این پدیده به این دلیل اتفاق می‌افتد که در حل با روش مقیاس‌های چندگانه پاسخ در اطراف فرکانس طبیعی تیر انجام می‌شود و همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، در اطراف فرکانس ولتاژ نتایج قرابت قابل قبولی دارند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که حل حاضر در اطراف فرکانسی که ولتاژ در آن حداکثر است، قابل پذیرش است. به‌علاوه در طراحی برداشت کننده‌های انرژی پیزوالکتریک، هدف برداشت کننده‌ای است که بیشترین ولتاژ و توان را تولید نماید، که این امر در اطراف فرکانس طبیعی اتفاق می‌افتد. بنابراین حل حاضر را می‌توان در طراحی برداشت کننده‌های انرژی پیزوالکتریک استفاده نمود.

### 3-2- بررسی پارامتر ضریب باریک شونده‌گی (c) در ناحیه غیرخطی

پس از اطمینان از حل ارائه شده در محاسبه ولتاژ تولید شده در برداشت

در این آزمایش، شیکر از فرکانس 10 تا 100 هرتز با جاروب سینوسی تحریک را انجام می‌دهد. این فرآیند 10 بار انجام شده و در نهایت بین نتایج این 10 آزمایش میانگین‌گیری شده تا نویزها حذف شوند. به‌علاوه تحریک در شتاب‌های 1g، 7.6g و 8g انجام شده تا روند غیرخطی شدن نتایج نشان داده شوند.

مشخصات تیر پیزوالکتریک مورد بررسی در این آزمایش در "جدول 1" ارائه شده است.

تیر فلزی از جنس فولاد و تیر پیزوالکتریک از جنس PZT4 هستند که خواص ماده آن‌ها در "جدول 2" ارائه شده است.

در مرحله اول، آزمایش با شتاب 1g اعمال شده و پاسخ مکانیکی سیستم یعنی تابع پاسخ فرکانسی شتاب نوک تیر به شتاب تحریک پایه در ناحیه خطی و در حالت اتصال کوتاه<sup>1</sup> اندازه‌گیری شده است. با استفاده از روش نیم‌توان ضریب میرایی خطی سیستم 0.32 به‌دست آمده و نمودار "شکل 4" نشان می‌دهد فرکانس طبیعی اول آن 68.5 هرتز است.

پس از این مرحله، آزمایش برای شتاب‌های 7.6g و 8g که منجر به غیرخطی شدن نمودار ولتاژ می‌شوند انجام می‌شود. با استفاده از حل معادله (30) و نتایج آزمایش ضرایب غیرخطی ماده شناسایی می‌شوند که مقادیر آن‌ها برای ماده پیزوالکتریک PZT 4 در جدول (3) ارائه شده‌اند.

با جایگذاری مقادیر جداول (1)، (2) و (3) در معادله (30) تغییرات ولتاژ در حوزه فرکانس محاسبه می‌شود. نتایج حاصل از روش تجربی و روش تحلیلی ارائه شده در "شکل 5" نشان داده شده است.

"شکل 5" نشان می‌دهد که با افزایش شتاب تحریک، ولتاژ تیر رفتار غیرخطی نرم‌شونده از خود نشان می‌دهد. این رفتار نشان می‌دهد که غیرخطینگی ماده که رفتار نرم‌شونده ایجاد می‌نماید، در معادلات، غالب بوده

جدول 1 مشخصات مدل‌سازی تیر برداشت کننده انرژی

Table 1 Energy harvester's modelling parameter

مقدار	پارامتر
68	$L$ (mm)
20	$b_0$ (mm)
0.85	$h_s$ (mm)
0.6	$h_p$ (mm)
21.5	$M$ (gr)
11.55	$c$
100	$R$ ( $\Omega$ )

جدول 2 خواص ماده

Table 2 Material properties

مقدار	خاصیت	نام ماده
81	$C_{1111}$ (GPa)	پیزوالکتریک
-8.939	$e_{311} = e_{113}$	
	$C/m^2$	
$1.306 \times 10^{-8}$	$\epsilon_{33}^s$ (F/m)	فولاد
7960	$\rho_p$ (kg/m <sup>3</sup> )	
200	$E_s$ (GPa)	
7800	$\rho_s$ (kg/m <sup>3</sup> )	

جدول 3 خواص غیرخطی ماده پیزوالکتریک

Table 3 Piezoelectric material nonlinear properties

مقدار	پارامتر
$-6.5 \times 10^{-13}$	$\alpha_1$ (Pa)
$-6 \times 10^{-5}$	$\alpha_2$ (N/V <sup>2</sup> )
$-7 \times 10^{-5}$	$\alpha_3$ (C/m <sup>2</sup> )
$2 \times 10^{-10}$	$\alpha_4$ (C/V <sup>2</sup> )

<sup>1</sup> Short Circuit

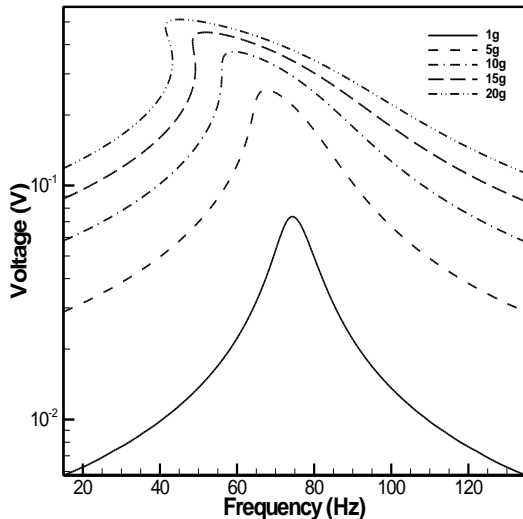


Fig. 8 Voltage,  $L=50\text{mm}$ ,  $c=20$

شکل 8 نمودار ولتاژ برای طول 50 میلی‌متر، ضریب باریک شونده‌گی 20

با افزایش ضریب باریک‌شوندگی، جرم کل تیر نیز علاوه بر ولتاژ کاهش می‌یابد. بنابراین باید بررسی را با پارامتر جدیدی انجام داد که در آن باید بررسی کرد که آیا با افزایش ضریب باریک‌شوندگی می‌توان ولتاژ بیشتر با وزن کمتری را برداشت نمود. اگر بتوان به این هدف دست یافت، می‌توان ولتاژ به وزن را بهینه کرد و در هزینه و وزن صرفه‌جویی نمود. برای بررسی این پارامتر، برای طول‌های 50، 68 و 80 میلی‌متر، نمودار بک بون<sup>1</sup> در شکل‌های 9، 10 و 11 نشان داده شده‌اند.

در شکل 9 تا 11 مشاهده می‌شود که تغییرات سطح مقطع بصورت نمایی در حوزه خطی می‌تواند منجر به بهینه شدن نسبت ولتاژ خروجی به وزن برداشت‌کننده انرژی پیزوالکتریک شود. در نتیجه با باریک نمودن سطح مقطع تیر به صورت نمایی، با صرف وزن و هزینه کمتر می‌توان ولتاژ و توان بیشتری را در یک فرکانس تحریک یکسان استخراج نمود. در ناحیه خطی در طول 68 میلی‌متر ضریب باریک شونده‌گی 20 کمترین و 10 بیشترین نسبت

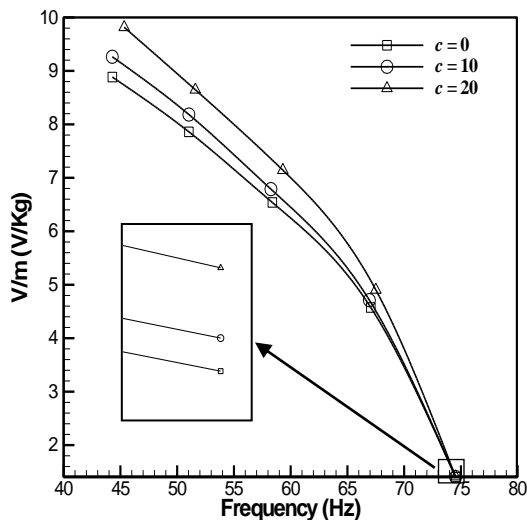


Fig. 9 Backbone curve,  $L=50\text{mm}$

شکل 9 نمودار بک بون برای طول 50 میلی‌متر

کننده انرژی پیزوالکتریک غیرخطی با مقطع متغیر نمایی، تاثیر ضریب باریک شونده‌گی در رفتار غیرخطی برداشت کننده انرژی بررسی می‌شود. برای حل، تمام پارامترهای تیر مطابق با جداول (1) تا (3) هستند، غیر از ضرایب باریک شونده‌گی که مقادیر 0، 10 و 20 و طول تیر که 68، 50 و 80 میلی‌متر هستند. برای بررسی تاثیر افزایش شتاب تحریک، این شتاب نیز 1g، 5g، 10g، 15g و 20g در نظر گرفته شده‌اند. به علاوه مقادیر جرم نوک بنحوی انتخاب شده‌اند که فرکانس طبیعی تمام تیرها در حالت خطی 74.5 هرتز باشد، چرا که برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک باید برای حالتی طراحی شود که فرکانس طبیعی آن برابر با فرکانس تحریک باشد.

تغییرات ولتاژ برای طول تیر 50 میلی‌متر برای ضرایب باریک شونده‌گی 0، 10 و 20 به ترتیب در شکل‌های 6، 7 و 8 نمایش داده شده‌اند.

شکل‌های 6 تا 8 نشان می‌دهند که با افزایش شتاب تحریک، تیر رفتار غیرخطی نرم‌شونده از خود نشان می‌دهد تا حدی که برای شتاب‌های بزرگتر از 15g پدیده پرش نیز مشاهده می‌شود. به علاوه با افزایش ضریب باریک شونده‌گی ولتاژ به دست آمده از تیر کاهش می‌یابد. لازم به ذکر است که

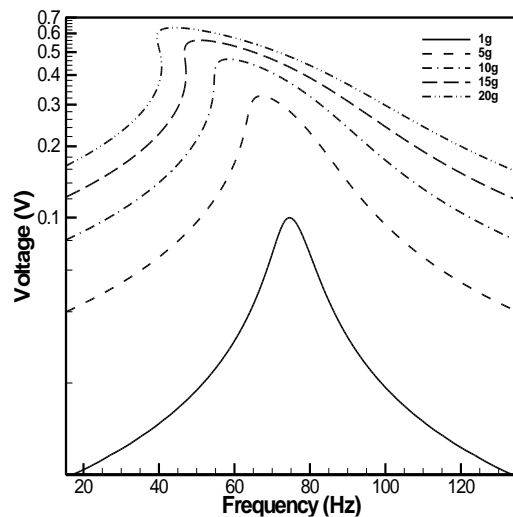


Fig. 6 Voltage,  $L=50\text{mm}$ ,  $c=0$

شکل 6 نمودار ولتاژ برای طول 50 میلی‌متر، ضریب باریک شونده‌گی 0

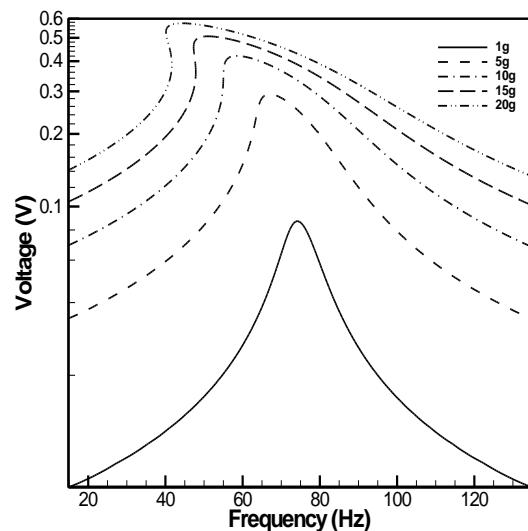


Fig. 7 Voltage,  $L=50\text{mm}$ ,  $c=10$

شکل 7 نمودار ولتاژ برای طول 50 میلی‌متر، ضریب باریک شونده‌گی 10

<sup>1</sup> Backbone curve

جدول 4 مقایسه حل خطی و غیرخطی

Table 4 Linear and nonlinear results comparison			
اختلاف (%)	حل غیرخطی	حل خطی	ضریب باریک شونده‌گی
214.94	8.89	27.98	0
202.92	9.26	28.06	10
187.67	9.82	28.24	20
157.58	16.66	42.92	0
138.73	18.04	43.06	10
117.77	19.25	41.93	20
132.38	21.26	49.41	0
112.11	22.97	48.73	10
85.34	24.06	44.60	20

پدیده افزایش غیرخطی‌نگی به‌واسطه وجود جرم نوک بیشتر برای تنظیم فرکانس و در نتیجه بارگذاری بیشتر در سازه با طول کمتر است.

#### 4- نتیجه‌گیری

در این مقاله، برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک با مقطع متغیر نمایی با در نظر گرفتن غیرخطی‌نگی هندسی، میرایی، ماده و اینرسی مورد بررسی قرار گرفته است. پس از توسعه روابط و ارائه حل با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، نتایج روش تحلیلی با روش تجربی مقایسه شده و نزدیکی نتایج دو روش صحت روابط ارائه شده را تایید نمود. پس از اطمینان از روابط ارائه شده، تیرهایی با ضرایب باریک شونده‌گی 0، 10 و 20 و طول 50، 68 و 80 میلی‌متر مدل‌سازی و در شتاب‌های 1g، 5g، 10g، 15g و 20g حل شده‌اند. به‌علاوه مقادیر جرم نوک به‌نحوی انتخاب شده‌اند که فرکانس طبیعی تمام تیرها در حالت خطی 74.5 هرتز باشد. در نمودار ولتاژ برای طول تیر 50 میلی‌متر، برای شتاب‌های بزرگتر از 15g پدیده پرش مشاهده می‌شود. دلیل این پدیده این است که در طول تیر کمتر، جرم نوک بیشتری موردنیاز است تا بتوان به فرکانس طبیعی 74.5 هرتز دست یافت. بنابراین طبق رابطه (10) مقدار  $A_1$  بیشتر شده و نیروی حجمی بیشتری به سازه اعمال می‌شود، که در نتیجه آن سازه بیشتر وارد ناحیه غیرخطی می‌شود.

در مرحله بعد پارامتر ولتاژ به وزن برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک به‌عنوان پارامتر مقایسه مورد بررسی قرار گرفت. در تمامی مدل‌ها، افزایش ضریب باریک‌شونده‌گی منجر به افزایش ولتاژ به وزن برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک در ناحیه غیرخطی می‌شود. در ناحیه خطی این پدیده متفاوت است و در طول‌های زیاد تیر افزایش ضریب باریک شونده‌گی نسبت ولتاژ به وزن برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک با مقطع متغیر نمایی را کاهش می‌دهد. به‌علاوه در دامنه تحریک 20g اختلاف روش غیرخطی و روش خطی به حدود 215 درصد می‌رسد. بنابراین چنانچه هدف طراحی برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک با مقطع متغیر نمایی است، باید در دامنه‌های تحریک بالا حتماً از حل غیرخطی استفاده نمود تا تأثیر ضریب باریک شونده‌گی را واقعی‌تر مشاهده نمود.

#### 5- تقدیر و تشکر

تمامی آزمایش‌ها در "آزمایشگاه مواد وسازه‌های هوشمند و مودال دانشکده مهندسی هوافضا دانشگاه صنعتی شریف" انجام شده است. از آقای دکتر سید علی حسینی کردخیلی بواسطه در اختیار قرار دادن این آزمایشگاه قدردانی می‌نمایم.

#### 6- فهرست علائم

$b$  عرض تیر (m)

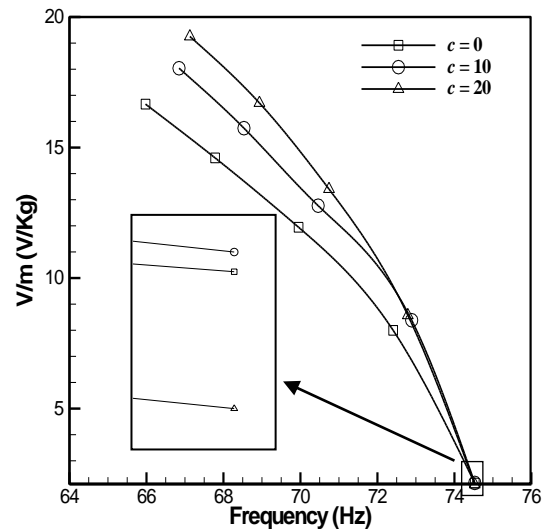


Fig. 10 Backbone curve,  $L=68\text{mm}$

شکل 10 نمودار بک بون برای طول 68 میلی‌متر

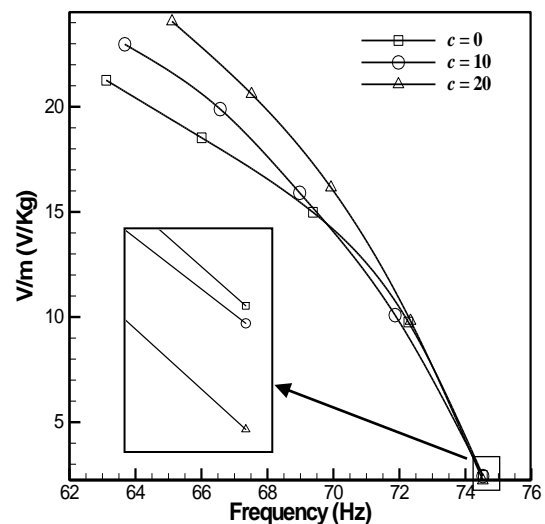


Fig. 11 Backbone curve,  $L=80\text{mm}$

شکل 11 نمودار بک بون برای طول 80 میلی‌متر

ولتاژ به وزن را ایجاد می‌نمایند. در طول 80 میلی‌متر، تیر یکنواخت بیشترین مقدار ولتاژ به وزن و ضریب باریک شونده‌گی 20 کمترین مقدار آن را دارد. در طول 50 میلی‌متر عکس این قضیه حاکم است و تیر مقطع متغیر با ضریب باریک شونده‌گی 20 بیشترین ولتاژ به وزن را تولید می‌کند. علی‌رغم نتایج تحلیل خطی، در حالت غیرخطی با افزایش شتاب تحریک، در هر سه طول تیر بررسی شده، افزایش ضریب باریک شونده‌گی منجر به افزایش نسبت ولتاژ به وزن می‌شود. بنابراین چنانچه در شتاب‌های بالا نیاز به طراحی باشد، حتماً باید از حل غیرخطی استفاده نمود و می‌توان انتظار داشت که افزودن ضریب باریک شونده‌گی منجر به افزایش نسبت ولتاژ به وزن برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک با مقطع متغیر نمایی شود.

به‌منظور تأثیر حل غیرخطی در محاسبه ولتاژ به وزن برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک، حل خطی و غیرخطی در شتاب 20g در جدول 4 با هم مقایسه شده‌اند.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در طول‌های کم اختلاف بین روش خطی و غیرخطی حداکثر و در طول‌های زیاد این اختلاف کمتر می‌شود. دلیل این



7, pp. 75015, Jul. 2013.

[5] J. Park, S. Lee, B. M. Kwak, Design optimization of piezoelectric energy harvester subject to tip excitation, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 26, No. 1, pp. 137–143, Jan. 2012.

[6] J. M. Diel, E. Garcia, Beam Shape optimization for power harvesting, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 21, No. 6, pp. 633–646, Mar. 2010.

[7] D. Benasciutti, L. Moro, S. Zelenika, E. Brusa, Vibration energy scavenging via piezoelectric bimorphs of optimized shapes, *Microsystem Technologies*, Vol. 16, No. 5, pp. 657–668, Dec. 2009.

[8] M. F. Mateu, Optimum piezoelectric bending beam structures for energy harvesting using shoe inserts, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 16, No. 10, pp. 835–845, Oct. 2005.

[9] M. Asgharzadeh, K. Jahani, A. Kianpoor, M. Sadeghi, Energy harvesting investigation from unimorph trapezoidal beam vibrations using distributed parameters method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 96–102, 2015.

[10] H. Salmani, G. H. Rahimi, S. A. Hosseini Kordkheili, An exact analytical solution to exponentially tapered piezoelectric energy harvester, *Shock and Vibration*, Vol. 2015, No. 1, pp. 1–13, 2015.

[11] U. Von Wagner, P. Hagedorn, Piezo-beam systems subjected to weak electric field: experiments and modelling of non-linearities, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 256, No. 5, pp. 861–872, 2002.

[12] M. Arafa, A. Baz, On the nonlinear behavior of piezoelectric actuators, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 10, No. 3, pp. 387–398, 2004.

[13] M. F. Daqaq, C. Stabler, Y. Qaroush, T. Seuciuc-Osorio, Investigation of power harvesting via parametric excitations, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 20, No. 5, pp. 545–557, 2008.

[14] S. C. Stanton, A. Erturk, B. P. Mann, D. J. Inman, “Resonant manifestation of intrinsic nonlinearity within electroelastic micropower generators, *Applied Physics Letters*, Vol. 97, No. 25, pp. 254101, 2010.

[15] S. C. Stanton, A. Erturk, B. P. Mann, D. J. Inman, Nonlinear piezoelectricity in electroelastic energy harvesters: Modeling and experimental identification, *Journal of Applied Physics*, Vol. 108, No. 7, pp. 1–9, 2010.

[16] R. Masana, M. F. Daqaq, Electromechanical modeling and nonlinear analysis of axially loaded energy harvesters, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 133, No.1, February 2011, p. 11007, 2011.

[17] A. Abdelkefi, A. H. Nayfeh, M. R. Hajj, Effects of nonlinear piezoelectric coupling on energy harvesters under direct excitation, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 67, No. 2, pp. 1221–1232, 2012.

[18] A. Abdelkefi, A. H. Nayfeh, M. R. Hajj, Global nonlinear distributed-parameter model of parametrically excited piezoelectric energy harvesters, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 67, No. 2, pp. 1147–1160, 2012.

[19] S. C. Stanton, a. Erturk, B. P. Mann, E. H. Dowell, D. J. Inman, Nonlinear nonconservative behavior and modeling of piezoelectric energy harvesters including proof mass effects, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 23, No. 2, pp. 183–199, 2012.

[20] S. Leadham, A. Erturk, Global nonlinear electroelastic dynamics of a bimorph piezoelectric cantilever for energy harvesting, sensing, and actuation, *Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems*, Vol. 9057, No. 1, pp. 905702, 2014.

[21] A. Garg, S. K. Dwivedy, Nonlinear dynamics of axially loaded piezoelectric energy harvester, *Procedia Engineering*, Vol. 144, No.1, pp. 592–599, 2016.

[22] C. J. Silva, M. F. Daqaq, Nonlinear flexural response of a slender cantilever beam of constant thickness and linearly-varying width to a primary resonance excitation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 389, No.1, pp. 438–453, 2016.

[23] Ali H. Nayfeh, P. F. Pai, *Linear and Nonlinear Structural Mechanics*, Wiley-VCH, pp. 183–226, 2004

[24] M. Arefi, A. M. Zenkour, Size-dependent vibration and bending analyses of the piezomagnetic three-layer nanobeams, *Applied Physics A: Materials Science & Processing*, Vol. 123, No. 3, pp. 0, 2017.

[25] M. Arefi, A. M. Zenkour, Influence of micro-length-scale parameters and inhomogeneities on the bending, free vibration and wave propagation analyses of a FG Timoshenko’s sandwich piezoelectric microbeam, *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 2017.

[26] K. Jahani, P. Aghazadeh, Investigating the performance of piezoelectric energy harvester including geometrical, damping and material nonlinearities with the method of multiple scales, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 4, pp. 354–360, 2016.

c	ضریب بارک شونددگی
$C_a$	میرایی خطی
$C_{an}$	میرایی غیرخطی
e	ضریب کوپلینگ پیزوالکتریک ( $C/m^2$ )
E	مدول الاستیسیته (GPa)
$E_3$	میدان الکتریکی
F	شتاب تحریک پای ( $m/s^2$ )
g	شتاب جاذبه زمین معادل $9.81 (m/s^2)$
h	ضخامت (m)
L	طول (m)
$m_0$	جرم بر واحد طول تیر (Kg/m)
M	جرم (Kg)
R	مقاومت التریکی ( $\Omega$ )
u	جابجایی طولی تیر (m)
V	ولتاژ (V)
w	جابجایی عرضی تیر (m)

#### علائم یونانی

$\alpha$	ضرایب غیرخطی ماده
$\epsilon_{11}$	کرنش در راستای طولی تیر
$\epsilon$	گذردهی پیزوالکتریک (F/m)
$\rho$	چگالی ( $kg/m^3$ )
$\varphi$	شکل مود
$\zeta$	ضریب میرایی
$\omega$	فرکانس (Hz)

#### زیر نویس‌ها

p	پیزوالکتریک
r	مربوط به مود r ام
s	سازه فلزی
t	نوک تیر

#### 7- مراجع

[1] A. Erturk, D. J. Inman, An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations, *Smart Materials and Structures*, Vol. 18, No. 2, pp. 25009, Feb. 2009.

[2] J. Baker, S. Roundy, P. Wright, Alternative geometries for increasing power density in vibration energy scavenging for wireless sensor networks, *3rd International Energy Conversion Engineering Conference*, pp. 1–12, August 2005.

[3] M. Rosa, C. De Marqui Junior, Modeling and analysis of a piezoelectric energy harvester with varying cross-sectional area, *Shock and Vibration*, Vol. 2014, No. 1, pp. 1–9, 2014.

[4] S. P. Matova, M. Renaud, M. Jambunathan, M. Goedbloed, R. Van Schaijk, Effect of length/width ratio of tapered beams on the performance of piezoelectric energy harvesters, *Smart Materials and Structures*, Vol. 22, No.