



Longitudinal Free Vibrations of a Rod with Variable Cross-Section Undergoing Finite Strain

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Pourjafari M.¹ MSc,
Fotuhi A.R.*¹ PhD,
Jalili M.M.¹ PhD

How to cite this article

Pourjafari M, Fotuhi A.R., Jalili M.M. Longitudinal Free Vibrations of a Rod with Variable Cross-Section Undergoing Finite Strain. Modares Mechanical Engineering, 2019;19(2):429-437.

ABSTRACT

Vibration of various types of structures such as beam, plate, shell, and rod have been investigated by researchers for their application in a wide range of mechanical systems. The longitudinal vibration of the rods is of great interest, so that the researchers have performed them numerically or analytically and precise or approximate. In this research, the nonlinear longitudinal free vibration of rod with variable cross-section under finite strain has been investigated. First, the governing equations of the rod with variable cross-section were obtained, which are partial differential equations; then, they were transformed to nonlinear ordinary differential equations, using the Galerkin method with considering one mode shape. The problem was investigated for two boundary conditions. Using the multiple scales method, the equations were analytically solved. The differential equations are solved by Runge-Kutta numerical method of order 4, and then compared with the analytical solutions. The effect of the amplitude and rate of changing cross-section on the ratio of linear to nonlinear frequency and also the effect of different initial condition, rate of changing cross-section and coefficient of damper were shown in figure. The results show that the tapered cross-sectional area has a significant effect on the ratio of linear to nonlinear frequency to vibrations amplitude. The coefficient of damper has a little effect and initial condition has a considerable effect on the process of problem.

Keywords Rod; Nonlinear vibration; Finite strain; Tapered cross-section

¹Mechanical Engineering Faculty,
Campus Engineering, Yazd University,
Yazd, Iran

*Correspondence

Address: Daneshgah Boulevard, Safaiyeh, Yazd, Iran. Postal Code: -
Phone: +98 (35) 31232499
Fax: +98 (35) 38212781
afotuhi@yazd.ac.ir

Article History

Received: March 17, 2018
Accepted: October 23, 2018
ePublished: February 01, 2019

CITATION LINKS

[1] Finite-amplitude longitudinal waves in non-uniform bars [2] On analytical solutions of vibrations of rods with variable cross sections [3] Exact solutions for the longitudinal vibration of non-uniform rods [4] Nonlinear longitudinal vibrations of a rod [5] Exact solutions for longitudinal vibration of rods coupled by translational springs [6] Closed-form solutions for the free longitudinal vibration of inhomogeneous rods [7] Free vibration of a rod undergoing finite strain [8] Low-frequency free vibration of rods with finite strain [9] Nonlinear longitudinal forced vibration of a rod undergoing finite strain [10] Nonlinear longitudinal free vibration of a rod undergoing finite strain [11] Introduction to continuum mechanics [12] Vibration of Continuous Systems [13] Nonlinear Oscillations

ارتعاشات آزاد طولی میله با سطح مقطع متغیر تحت کرنش محدود

مهدیه پورجعفری MSc

دانشکده مهندسی مکانیک، پردیس فنی و مهندسی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

علیرضا فتوحی PhD

دانشکده مهندسی مکانیک، پردیس فنی و مهندسی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

محمد مهدی جلیلی PhD

دانشکده مهندسی مکانیک، پردیس فنی و مهندسی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

چکیده

ارتعاش انواع مختلف از سازه‌ها مانند تیر، صفحه، پوسته و میله توسط محققان به‌خاطر کاربرد آنها در محدوده وسیعی از سیستم‌های مکانیکی بررسی شده است. ارتعاش طولی میله‌ها مورد توجه زیادی است به‌طوری که محققان به‌صورت عددی یا تحلیلی و دقیق یا تقریبی به آن پرداخته‌اند. در این تحقیق، ارتعاش آزاد طولی غیرخطی میله با سطح مقطع متغیر تحت کرنش محدود، مورد بررسی قرار گرفته است. ابتدا معادلات حاکم بر میله با سطح مقطع مخروطی که معادلات دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی است به‌دست آمد. سپس معادلات دیفرانسیل معمولی روش گلرکین و با در نظر گرفتن یک شکل مود، به معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی تبدیل شده است. مساله برای شرایط مرزی دوسرگیردار و یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد بررسی شده است. با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، معادله به‌صورت تحلیلی حل شده است. معادله دیفرانسیل معمولی با روش عددی رانگ- کوتای مرتبه چهار هم حل شده و سپس حل تحلیلی با آن مقایسه شده است. تاثیر دامنه و آهنگ تغییر سطح مقطع بر نسبت فرکانس خطی به غیرخطی برای میله و همچنین تاثیر شرایط اولیه مختلف آهنگ تغییر سطح مقطع و ضریب میرایی با شکل نشان داده شده است. نتایج نشان داد که سطح مقطع مخروطی تاثیر قابل توجهی در نسبت فرکانس خطی به غیرخطی به دامنه ارتعاشات دارد. ضریب میرایی تاثیر کم و شرایط اولیه تاثیر قابل ملاحظه‌ای روی روند مساله داشته است.

کلیدواژه‌ها: میله، ارتعاش غیرخطی، کرنش محدود، سطح مقطع مخروطی

تاریخ دریافت: ۹۶/۱۲/۲۶

تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۸/۰۱

نویسنده مسئول: afotuhi@yazd.ac.ir

۱- مقدمه

اهمیت آنالیز ارتعاش میله را می‌توان از کاربردهای آن در بال‌های هواپیما، بازوی ربات‌ها و طراحی برج‌ها و ساختمان‌های بلند پیدا کرد. در بسیاری از موقعیت‌ها، سطح مقطع در راستای محور میله متغیر است. حرکت میله الاستیک با یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی توصیف شده است. وقتی میله‌ها طراحی می‌شوند، باید ساختار، فرکانس طبیعی و ارتعاششان بررسی شود.

نایفه در سال ۱۹۷۵، موج‌های طولی در امتداد لوله‌ای را بررسی کرده است که هندسه و خواص مواد آن در راستای طول آن تغییر می‌کند^[1] و با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، بسط یکنواخت مرتبه اول برای دامنه‌های کوچک محدود را به دست آورده است. رامن در سال ۱۹۸۳، حل تحلیلی ارتعاش خطی میله با سطح مقطع متغیر را بررسی کرده است^[2]. در این بررسی، برای تبدیل معادله حرکت میله به فرم شبیه معادله شرودینگر یک‌بُعدی که شکل سطح مقطع میله به‌وسیله تابع پتانسیل حاصل می‌شود، از دو تبدیل استفاده شده است. کومار و سوچیت در سال ۱۹۹۷، حل دقیق تحلیلی برای ارتعاش طولی میله‌ها با سطح مقطع غیریکنواخت را به دست آوردند^[3]. آنها با استفاده از تبدیل مناسب، معادله حرکت ارتعاش محوری میله با سطح مقطع غیریکنواخت را به معادلات دیفرانسیل استاندارد تغییر دادند و سپس حل نمودند.

ارتعاش محوری میله الاستیک توسط وتیکانین و یوزلاک در سال ۱۹۹۹ تحلیل شده است^[4]. حرکت میله با معادله دیفرانسیل جزئی قوی‌مرتبه دو توصیف شده و حل عددی دقیق به دست آمده است. چهار روش تحلیلی تقریبی برای حل این معادلات توصیف شده و با حل عددی، مقایسه و نمودار دامنه- زمان- مکان و دامنه- فرکانس کشیده شده است. لی و همکاران در سال ۲۰۰۰، حل تحلیلی دقیق برای ارتعاش طولی میله غیریکنواخت با جرم‌های متمرکز را پیدا کردند که به‌وسیله فنر به آنها کوپل شده است^[5]. با استفاده از تبدیل مناسب، معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش طولی میله با سطح مقطع متغیر با حالت‌های خاص مثل تابع توانی و تابع نمایی به معادلات بسط یا معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت کاهش می‌یابد. حل دقیق برای ارتعاش طولی آزاد میله‌ها با سطح مقطع متغیر به دست می‌آید. روش پارامتر اولیه و ماتریس تبدیل، برای به‌دست آوردن معادلات فرکانسی برای ارتعاش طولی دو میله کوپل شده با فنر پیشنهاد شده است. راج و سوچیت در سال ۲۰۰۵، گروهی از حل‌های دقیق برای ارتعاش طولی میله‌ها با سطح مقطع متغیر را ارائه دادند^[6]. فرکانس ویژه میله‌ها با تغییر سطح مقطع مشخص به دست آمده‌اند که با شرایط مرزی مختلف مواجه هستند و فضای پارامتری حل‌های به‌دست آمده مطالعه شده است. ارتعاش آزاد طولی کرنش محدود میله، توسط موسوی و فریبزاد^[7] در سال ۲۰۱۲، با به‌کاربردن تنش پیولا- کیرشهف نوع دو و تانسور کرنش گرین بررسی شده است. آنها معادله حرکت را در پیکربندی مرجع به دست آوردند. معادله دیفرانسیل حاکم برای ارتعاش آزاد میله تحت کرنش محدود به‌وسیله اصل هامیلتون توسط باغستانی و همکاران در سال ۲۰۱۴ به دست آمده است^[8]. معادله آنها، ترم‌های درجه دو و سه غیرخطی را در بر می‌گیرد. سلیمانی‌رودی و همکاران در سال ۲۰۱۸، ارتعاش طولی غیرخطی میله را با شرایط مرزی مختلف تحت کرنش محدود بدون ساده‌کردن رابطه کرنش- جابه‌جایی بررسی کردند^[9]. برای به‌دست آوردن معادلات حاکم از کرنش گرین- لاگرانژ، اصل همیلتون و دمپینگ سازه‌ای استفاده و سپس برای تغییر معادله دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی به معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی از روش گلرکین استفاده شده است. سلیمانی‌رودی و همکاران در سال ۲۰۱۶، به تحلیل ارتعاش آزاد میله با شرایط تکیه‌گاهی متفاوت براساس کرنش محدود پرداخته و برای به‌دست آوردن معادلات حاکم از کرنش گرین- لاگرانژی، میرایی ساختاری و اصل همیلتون استفاده کرده‌اند^[10]. سپس با استفاده از روش گلرکین، معادله غیرخطی پاره‌ای به معادله غیرخطی معمولی تبدیل شده است. تاکنون هیچ مطالعه‌ای به بررسی ارتعاش غیرخطی میله با سطح مقطع متغیر تحت کرنش محدود نپرداخته است. در برخی از آنها کرنش محدود بررسی نشده و در برخی دیگر سطح مقطع میله، ثابت در نظر گرفته شده است. در این تحقیق ارتعاش طولی میله با سطح مقطع متغیر تحت کرنش محدود با شرایط مرزی دوسرگیردار و یک‌سرگیردار- یک‌سر آزاد بررسی شده است. معادلات با استفاده از کرنش گرین- لاگرانژی به دست آمده که شامل ترم درجه دو و سه غیرخطی با ضرایب متغیر است. سپس با استفاده از روش گلرکین، معادلات غیرخطی پاره‌ای به معادلات غیرخطی معمولی تبدیل شده است. سپس معادلات با روش مقیاس‌های چندگانه حل شده و پاسخ ارتعاشی آزاد میله به دست آمده است. پاسخ ارتعاشی میله با روش عددی رانگ- کوتای مرتبه چهار مقایسه شده است. تاثیر شرایط اولیه، آهنگ تغییر سطح مقطع و ضریب میرایی روی پاسخ ارتعاشی میله نیز بررسی شده است.

۲- استخراج معادلات حرکت

۲-۱- معادلات اساسی

زمانی که یک جسم پیوسته تحت تغییر شکل قرار می‌گیرد، ذرات آن در فضا حرکت می‌کنند. این حرکت با معادله‌ای به شکل رابطه ۱ بیان می‌شود[11]:

$$(1)$$

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad i = 1, 2, 3$$

که (X_1, X_2, X_3) موقعیت ذره را در لحظه $t=0$ نشان می‌دهد. این تغییر شکل، بیان لاگرانژی نامیده می‌شود. با مشتق‌گیری نسبت به X_j ، تانسور گرادبان تغییر شکل طبق رابطه ۲ در هیات مرجع به دست می‌آید[11].

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2)$$

همچنین کرنش گرین- لاگرانژی و جابه‌جایی نیز به صورت روابط ۳ و ۴ بیان می‌شوند[11].

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i} \frac{\partial U_k}{\partial X_j} \right) \quad (3)$$

$$U_i = x_i - X_i \quad (4)$$

در نتیجه با توجه به روابط ۲ و ۳، مولفه‌های غیرصفر تانسور گرادبان تغییر شکل و کرنش گرین- لاگرانژی برای حرکت یک‌بُعدی $U_2 = U_3 = 0, U_1 = U(X)$ به صورت روابط ۵ و ۶ به دست می‌آیند[11]:

$$F_{xx} = 1 + \frac{\partial U}{\partial X}, F_{yy} = 1, F_{zz} = 1 \quad (5)$$

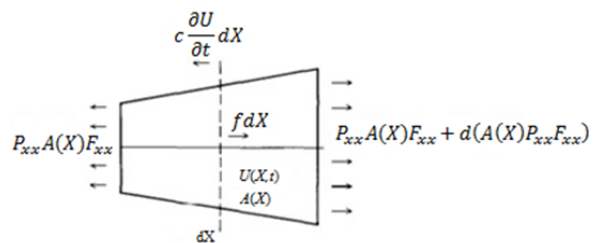
$$E_{xx} = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial X} \right) \frac{\partial U}{\partial X} \quad (6)$$

در هیات مرجع، مولفه تانسور تنش پیولا- کیرشهف نوع دوم (P_{xx}) با مولفه تانسور کرنش گرین- لاگرانژی رابطه دارد. با در نظر گرفتن رابطه خطی به‌عنوان معادله ساختاری برای ماده هموژن با مدول الاستیسیته Y می‌توان رابطه تنش- کرنش را به شکل رابطه ۷ بیان کرد.

$$P_{xx} = Y E_{xx} = Y \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 \right) \quad (7)$$

۲-۲- معادلات حاکم بر مساله

میله با طول l و سطح مقطع متغیر، در حالت پیکربندی مرجع مطابق با شکل ۱ مد نظر است. رابطه ۸، معادله تعادل برای میله را نشان می‌دهد.



شکل ۱ نیروهای وارد بر یک المان میله

طبق تعریف تنش پیولا- کیرشهف نوع دو[11]، المان نیرو برابر با $df = P_{xx} F_{xx} dA$ است. سپس با استفاده از قانون دوم نیوتن و لحاظ نمودن میرایی سازه‌ای به صورت میرایی ویسکوز، رابطه ۸ را می‌توان نوشت که با ساده‌سازی آن، رابطه ۹ به دست می‌آید.

$$P_{xx} A(X) F_{xx} + d(A(X) P_{xx} F_{xx}) - P_{xx} A(X) F_{xx} + f dx = \rho A(X) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} dX + c \frac{\partial U}{\partial t} dX \quad (8)$$

$$\frac{d}{dX} (A(X) P_{xx} F_{xx}) + f = \rho A(X) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + c \frac{\partial U}{\partial t} \quad (9)$$

در روابط فوق، $A(X)$ سطح مقطع میله، P_{xx} مولفه تانسور تنش پیولا- کیرشهف مرتبه ۲، F_{xx} مولفه تانسور گرادبان تغییر شکل، f نیروی حجمی اعمال شده در هیات مرجع بر واحد طول و c ضریب میرایی ویسکوز معادل میله را نشان می‌دهد. با جای‌گذاری روابط ۵ و ۶ در رابطه ۹، رابطه ۱۰ به دست می‌آید.

$$\frac{dA(X)}{dX} \left[\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^3 \right] + A(X) \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \left[1 + 3 \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 \right] + \frac{f}{Y} = \frac{\rho}{Y} A(X) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{c}{Y} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (10)$$

معادله حاکم ۱۰، وابسته به تابع تغییرات سطح مقطع است. سطح مقطع می‌تواند به صورت تابع سینوسی، نمایی، خطی و غیره تغییر کند. اگر سطح مقطع ثابت باشد، معادله ارتعاشی غیرخطی میله با سطح مقطع ثابت به دست می‌آید. در اینجا فرض می‌شود که میله به صورت مخروطی است و در نتیجه سطح مقطع آن به صورت رابطه ۱۱ تغییر می‌کند.

$$A(X) = A_0 + A_1 X + A_2 X^2 \quad (11)$$

با جای‌گذاری رابطه ۱۱ در رابطه ۱۰، رابطه ۱۲ به دست می‌آید.

$$(A_1 + 2A_2 X) \left[\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^3 \right] + (A_0 + A_1 X + A_2 X^2) \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \left[1 + 3 \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 \right] + \frac{f}{Y} = \frac{\rho}{Y} (A_0 + A_1 X + A_2 X^2) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{c}{Y} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (12)$$

نیروی خارجی در حالت ارتعاشات آزاد، صفر فرض می‌شود و با تعریف $\alpha_2 = \frac{A_2 l^2}{A_0}, \alpha_1 = \frac{A_1 l}{A_0}, \tau = \frac{t}{l} \sqrt{\frac{Y}{\rho}}, u = \frac{U}{l}, x = \frac{X}{l}$ و $\mu' = \frac{cl}{A_0 \sqrt{\rho Y}}$ معادله به صورت بی‌بعد ۱۳ به دست می‌آید.

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 x) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 \right] + (1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left[1 + 3 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] = (1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \mu' \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad (13)$$

برای حل معادله ۱۳، ابتدا با استفاده از روش گلرکین معادله دیفرانسیل پاره‌ای به معادله دیفرانسیل معمولی، تبدیل و پس از آن معادله غیرخطی حاصل با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه حل می‌شود. دو شرط مرزی در این تحقیق بررسی می‌شود. تابع مکانی میله دوسرگیردار به صورت $\sin(\pi x)$ و میله یک‌سرگیردار-

یک سرآزاد به صورت $\sin(\frac{\pi x}{2})$ در نظر گرفته شده‌اند که شکل موده‌های خطی این دو مساله هستند. بنابراین جابه‌جایی به صورت رابطه ۱۴ در نظر گرفته می‌شود.

$$u(x, \tau) = W(x)\psi(\tau) \quad (۱۴)$$

سپس با جای‌گذاری رابطه ۱۴ در رابطه ۱۳ و اعمال روش گلرکین [12]، معادله به صورت رابطه ۱۵ به دست می‌آید که ضرایب آن در جدول ۱ آمده است.

$$\ddot{\psi} + \mu\dot{\psi} + \omega_0^2\psi + \beta\psi^2 + \lambda\psi^3 = 0 \quad (۱۵)$$

جدول ۱) ضرایب معادله ۱۵

ضرایب	میله دوسرگیردار	میله یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد
μ	$\frac{\mu'}{2c_2}$	$\frac{\mu'}{2c_2}$
ω_0^2	$\frac{\pi^2}{4}\alpha_1 + (\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{4})\alpha_2 + \frac{\pi^2}{2}$	$\frac{(\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4})\alpha_1 - (\frac{-\pi^2}{24} + \frac{1}{4})\alpha_2 + \frac{\pi^2}{8}}{c_2}$
β	$-\frac{7\pi}{3}(\alpha_1 + \alpha_2)$	$\frac{(\frac{\pi^2}{4} - \frac{7\pi}{12})\alpha_1 + (\frac{\pi^2}{4} - \frac{20}{9})\alpha_2 + \frac{\pi^2}{4}}{c_2}$
λ	$\frac{3\pi^4}{32}\alpha_1 + (\frac{17\pi^2}{128} + \frac{\pi^4}{16})\alpha_2 + \frac{3\pi^4}{16}$	$\frac{(\frac{3\pi^4}{512} - \frac{\pi^2}{32})\alpha_1 - (\frac{15\pi^2}{512} - \frac{\pi^4}{64})\alpha_2 + \frac{3\pi^4}{256}}{c_2}$
c_2	$\frac{\alpha_1}{4} - (\frac{3-2\pi^2}{12\pi^2})\alpha_2 + \frac{1}{2}$	$(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4})\alpha_1 + (\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{6})\alpha_2 + \frac{1}{2}$

در تحلیل ارتعاشی، برخی منابع [1, 3]، معادله غیرخطی را تنها با جمله غیرخطی درجه سه حل نمودند. معادله ۱۵ با قراردادن $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ و بدون در نظر گرفتن ضریب میرایی برای حالت سطح مقطع ثابت، با پژوهش سلیمانی‌رودی و همکاران [10] تطابق کامل دارد.

۳- حل معادلات حاکم بر مساله

برای حل معادله ۱۵ از روش اغتشاش استفاده شده [13] که روش اغتشاش به شکل‌های مختلف بیان شده و روش مقیاس‌های چندگانه برای حل معادله غیرخطی حاضر استفاده شده که یکی از روش‌های قدرتمند در حل معادله‌های غیرخطی است. در این روش مقیاس‌های زمانی به صورت رابطه ۱۶ در نظر گرفته می‌شوند [13].

$$T_n = \varepsilon^n \tau \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots \quad (۱۶)$$

که در آن، T_n پارامتر مقیاس زمانی است و مشتق زمانی به صورت مشتق پاره‌ای نسبت به T_n به شکل روابط ۱۷ و ۱۸ بسط داده می‌شود [13].

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dT_0}{d\tau} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{d\tau} \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (۱۷)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (۱۸)$$

برای حل معادله ۱۵، بسط به صورت رابطه ۱۹ فرض می‌شود.

$$\psi(\tau, \varepsilon) = \psi_0(T_0, T_1) + \varepsilon\psi_1(T_0, T_1) \quad (۱۹)$$

که ε پارامتر اغتشاش است.

با فرض $\beta = \varepsilon\beta$ ، $\lambda = \varepsilon\lambda$ و $\mu = \varepsilon\mu$ و با جای‌گذاری روابط ۱۹-۱۷ در رابطه ۱۵ و صفرقراردادن ضرایب ε^0 ، ε^1 ، روابط ۲۰ و ۲۱ حاصل می‌شوند.

$$\varepsilon^0 : D_0^2\psi_0 + \omega_0^2\psi_0 = 0 \quad (۲۰)$$

$$(۲۱)$$

$$\varepsilon^1 : D_0^2\psi_1 + \omega_0^2\psi_1 = -2D_0D_1\psi_0 - \hat{\mu}D_0\psi_0 - \hat{\beta}\psi_0^2 - \hat{\lambda}\psi_0^3$$

که ω_0 فرکانس خطی میله بوده و حل معادله ۲۰ به صورت رابطه ۲۲ است:

$$\psi_0 = A(T_1)e^{i\omega_0 T_0} + cc \quad (۲۲)$$

که A یک عدد مختلط مجهول، \bar{A} مزدوج مختلط آن و cc مقدار مزدوج مختلط عبارت بیان شده هستند. با جای‌گذاری ψ_0 در معادله ۲۱، رابطه ۲۳ به دست می‌آید که از آن ابتدا جمله نامحدود طبق رابطه ۲۴، حذف و سپس ψ_1 به دست آورده می‌شود.

$$(۲۳)$$

$$D_0^2\psi_1 + \omega_0^2\psi_1 = -2i\omega_0D_1Ae^{i\omega_0 T_0} - \hat{\mu}Ai\omega_0e^{i\omega_0 T_0}$$

$$-\hat{\beta}(A^2e^{2i\omega_0 T_0} + A\bar{A}) - \hat{\lambda}(A^3e^{3i\omega_0 T_0} + 3A^2\bar{A}e^{i\omega_0 T_0}) + cc$$

$$-2i\omega_0A' - \hat{\mu}Ai\omega_0 - 3\hat{\lambda}A^2\bar{A} = 0 \quad (۲۴)$$

برای حل معادله ۲۴، مقدار A به صورت قطبی $A = \frac{1}{2}ae^{ib}$ نوشته می‌شود که در آن a و b تابع حقیقی بر حسب T_1 هستند. با جای‌گذاری شکل قطبی A در رابطه ۲۴ و جداسازی قسمت‌های حقیقی و موهومی، رابطه ۲۵ به دست می‌آید.

$$\begin{cases} a' = -\frac{\hat{\mu}}{2}a \\ b' = \frac{3\hat{\lambda}}{8\omega_0}a^2 \end{cases} \quad (۲۵)$$

با توجه به این که a و b فقط تابع T_1 هستند، پس با انتگرال‌گیری از رابطه ۲۵، رابطه ۲۶ به دست می‌آید:

$$(۲۶)$$

$$\begin{cases} a = a_0 e^{-\frac{\hat{\mu}}{2}T_1} \\ b = \frac{3\hat{\lambda}}{8\omega_0} \left(-\frac{a_0^2}{\hat{\mu}} e^{-\hat{\mu}T_1} \right) + b_0 \end{cases}$$

در نتیجه، A به صورت رابطه ۲۷ می‌شود:

$$A = \frac{a_0}{2} e^{-\frac{\hat{\mu}}{2}T_1} e^{i(-\frac{3\hat{\lambda}a_0^2}{8\omega_0\hat{\mu}}e^{-\hat{\mu}T_1} + b_0)} \quad (۲۷)$$

که a_0 و b_0 ضرایب ثابت هستند. با جای‌گذاری رابطه ۲۷ در رابطه ۲۳، ψ_1 به صورت رابطه ۲۸ به دست می‌آید.

$$(۲۸)$$

$$\psi_1(\tau) = \frac{\hat{\beta}}{3\omega_0^2}A^2e^{2i\omega_0\tau} - \frac{\hat{\beta}}{\omega_0^2}A\bar{A} + \frac{\hat{\lambda}}{8\omega_0^2}A^3e^{3i\omega_0\tau} + cc$$

رابطه ۲۸ با قراردادن $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ و بدون در نظر گرفتن ضریب میرایی با پژوهش سلیمانی‌رودی و همکاران [10] مطابقت دارد. شرایط اولیه به صورت روابط ۲۹ و ۳۰ در نظر گرفته می‌شود:

$$u(x, 0) = \sin\frac{\pi x}{n} \psi(0) = D_1 \sin\frac{\pi x}{n} \quad (۲۹)$$

$$\dot{u}(x, 0) = \sin\frac{\pi x}{n} \dot{\psi}(0) = D_2 \sin\frac{\pi x}{n} \quad (۳۰)$$

$$A(\tau = 0) = \frac{a_0}{2} e^{i(-\frac{3\hat{\lambda}a_0^2}{8\omega_0\hat{\mu}} + b_0)} \quad (۳۱)$$

که در رابطه ۲۹ و ۳۰، $n = 1$ برای میله دوسرگیردار و $n = 2$ برای میله یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد است و D_2 و D_1 هم عدد هستند که برای شرایط جابه‌جایی اولیه، $D_2 = 0$ و برای شرایط

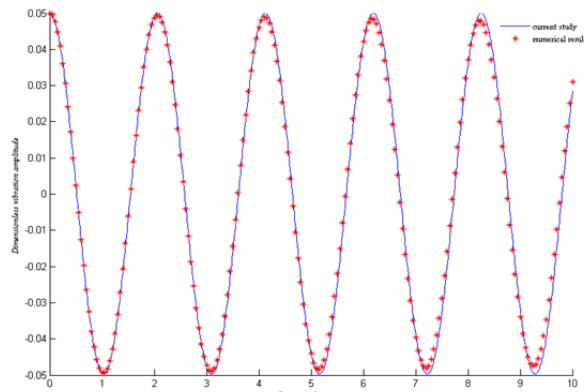
۴- نتایج

شرایط اولیه به صورت دو حالت جابه‌جایی اولیه یا سرعت اولیه به اندازه D با توجه به روابط ۲۹ و ۳۰، طبق رابطه ۳۹ و ۴۰ در نظر گرفته می‌شوند.

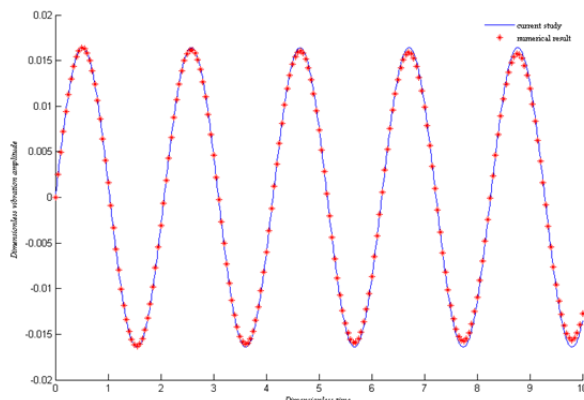
$$\psi(0) = D, \dot{\psi}(0) = 0 \quad (۳۹)$$

$$\psi(0) = 0, \dot{\psi}(0) = D \quad (۴۰)$$

اگر $X_1 = a_0$ و $X_2 = -\frac{3\lambda a_0^2}{8\omega_0\mu} + b_0$ فرض شود، با جای‌گذاری این روابط در رابطه ۳۹ یا ۴۰، سیستم معادلات با دو معادله و دو مجهول به دست می‌آید که می‌توان مجهولات a_0 و b_0 را به دست آورد و سپس پاسخ سیستم را رسم کرد. مقدار D در اینجا ۰/۰۵ فرض شده است. در نمودار ۱، جابه‌جایی وسط میله دوسرگیردار با شرایط جابه‌جایی اولیه و نمودار ۲، جابه‌جایی وسط میله دوسرگیردار تحت سرعت اولیه را نشان می‌دهد. این نمودارها با حل عددی رانگ- کوتای مرتبه چهار مقایسه شده است که حدود ۳٪ اختلاف دارند و تطابق بسیار خوبی با این حل عددی دارد.



نمودار ۱) مقایسه حل تحلیلی و عددی میله دوسرگیردار با شرایط جابه‌جایی اولیه



نمودار ۲) مقایسه حل تحلیلی و عددی میله دوسرگیردار با شرایط سرعت اولیه

نمودارهای ۳ و ۴ نیز جابه‌جایی انتهای میله یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد را به ترتیب تحت جابه‌جایی اولیه و سرعت اولیه نشان می‌دهد. در این نمودارها نیز حل تحلیلی با رانگ- کوتای مرتبه چهار تطابق خوبی دارد و حدود ۳٪ اختلاف دارند. نتایج ارائه شده نشان می‌دهند که فرکانس نوسانات میله دوسرگیردار از میله یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد بیشتر است. به طور مثال برای $\alpha_1=0/1$ ، فرکانس خطی میله دو سرگیردار $\omega_0=3/0.448$ و فرکانس خطی میله یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد $\omega_0=1/0.54$ است.

سرعت اولیه، $D_1 = 0$ در نظر گرفته می‌شود. رابطه ۳۱ نیز A را در زمان بی‌بعد صفر بیان می‌کند. با جای‌گذاری روابط ۲۲ و ۲۸ در رابطه ۱۹، به صورت رابطه ۳۲ به دست می‌آید.

$$\psi(\tau) = Ae^{i\omega_0\tau} + \frac{\beta}{3\omega_0^2} A^2 e^{2i\omega_0\tau} - \frac{\beta}{\omega_0^2} A\bar{A} + \frac{\lambda}{8\omega_0^2} A^3 e^{3i\omega_0\tau} + cc \quad (۳۲)$$

برای اعمال شرط مرزی جابه‌جایی اولیه، $\psi(0)$ به صورت رابطه ۳۳ نوشته می‌شود:

$$\psi(0) = \frac{a_0}{2} e^{i\left(-\frac{3\lambda a_0^2}{8\omega_0\mu} + b_0\right)} + \frac{\beta}{3\omega_0^2} \frac{a_0^2}{4} e^{2i\left(-\frac{3\lambda a_0^2}{8\omega_0\mu} + b_0\right)} - \frac{\beta}{\omega_0^2} \frac{a_0^2}{4} + \frac{\lambda}{8\omega_0^2} \frac{a_0^3}{8} e^{3i\left(-\frac{3\lambda a_0^2}{8\omega_0\mu} + b_0\right)} + cc \quad (۳۳)$$

با مشتق‌گرفتن از رابطه ۳۲، $\dot{\psi}(\tau)$ به صورت رابطه ۳۴ می‌شود.

$$\dot{\psi}(\tau) = \left(-\frac{\mu}{2} + i\frac{3\lambda a_0^2}{8\omega_0} e^{-\mu\tau} + i\omega_0\right) Ae^{i\omega_0\tau} + \frac{\beta}{3\omega_0^2} \left(-\mu + i\frac{3\lambda a_0^2}{4\omega_0} e^{-\mu\tau} + 2i\omega_0\right) A^2 e^{2i\omega_0\tau} + \frac{\beta a_0^2}{4\omega_0^2} \mu e^{-\mu\tau} + \frac{\lambda A^3 e^{3i\omega_0\tau}}{8\omega_0^2} \left(i\frac{9\lambda a_0^2 e^{-\mu\tau}}{8\omega_0} + 3i\omega_0 - \frac{3\mu}{2}\right) + cc \quad (۳۴)$$

برای اعمال شرط مرزی سرعت اولیه، $\dot{\psi}(0)$ به صورت رابطه ۳۵ به دست می‌آید.

$$\dot{\psi}(0) = \left(-\frac{\mu}{2} + i\frac{3\lambda a_0^2}{8\omega_0} + i\omega_0\right) \frac{a_0}{2} e^{i\left(-\frac{3\lambda a_0^2}{8\omega_0\mu} + b_0\right)} + \frac{\beta}{3\omega_0^2} \left(-\mu + i\frac{3\lambda a_0^2}{4\omega_0} + 2i\omega_0\right) \frac{a_0^2}{4} e^{2i\left(-\frac{3\lambda a_0^2}{8\omega_0\mu} + b_0\right)} + \frac{\beta a_0^2 \mu}{4\omega_0^2} + \frac{\lambda}{8\omega_0^2} \left(i\frac{9\lambda a_0^2}{8\omega_0} + 3i\omega_0 - \frac{3\mu}{2}\right) \frac{a_0^3}{8} e^{3i\left(-\frac{3\lambda a_0^2}{8\omega_0\mu} + b_0\right)} + cc \quad (۳۵)$$

طبق رابطه ۱۹ می‌توان نوشت:

$$\psi = Ae^{i\omega_0\tau} + \dots = \frac{a_0}{2} e^{-\frac{\mu}{2}\tau} \cos\left[\omega_0\tau - \frac{3\lambda a_0^2}{8\omega_0\mu} e^{-\mu\tau} + b_0\right] + \dots \quad (۳۶)$$

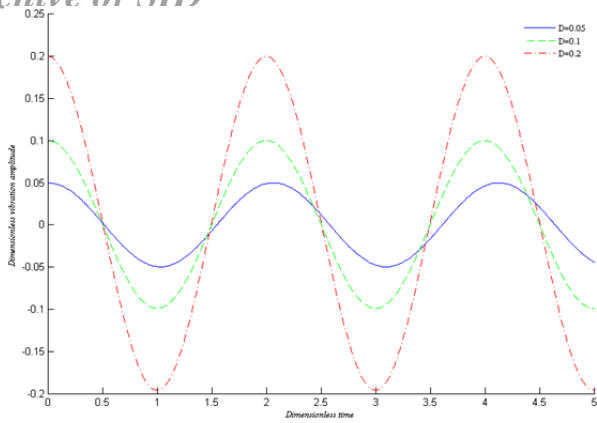
با استفاده از بسط تیلور می‌توان نوشت:

$$e^{-\mu\tau} = 1 - \mu\tau + \dots \quad (۳۷)$$

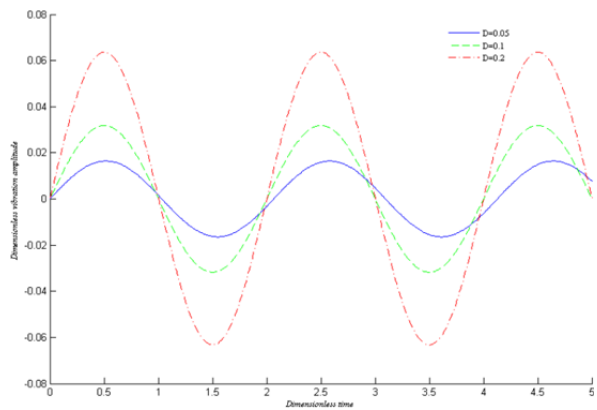
با جای‌گذاری رابطه ۳۷ در رابطه ۳۶، ω که فرکانس غیرخطی است، طبق رابطه ۳۸ به دست می‌آید.

$$\omega = \omega_0 + \frac{3\lambda a_0^2}{8\omega_0} \quad (۳۸)$$

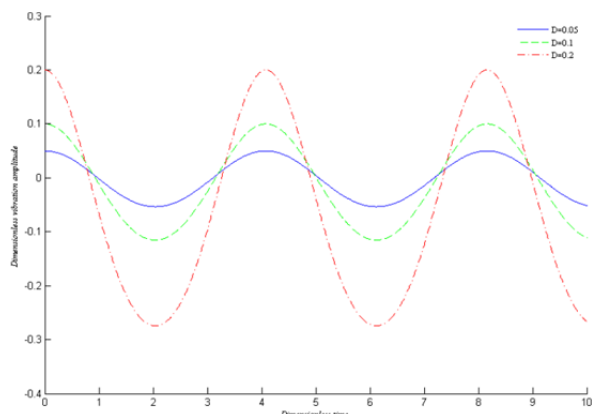
از رابطه ۳۸ می‌توان دریافت که فرکانس غیرخطی با مجذور دامنه ارتعاشات رابطه مستقیمی دارد و به هندسه سطح مقطع و طول میله نیز وابسته است که در بحث نتایج اثرات آن بررسی می‌شود.



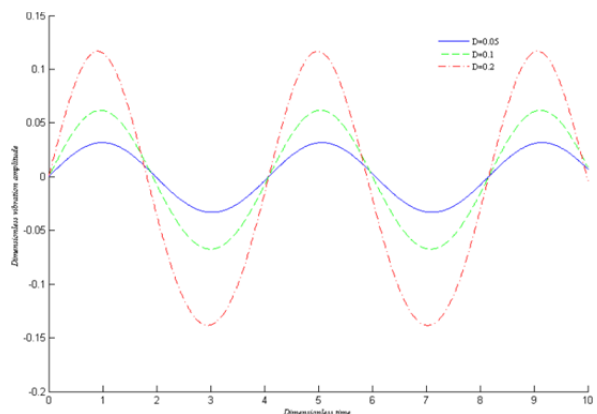
نمودار ۵) جابه‌جایی وسط میله دوسرگیردار تحت جابه‌جایی اولیه متفاوت



نمودار ۶) جابه‌جایی وسط میله دوسرگیردار تحت سرعت اولیه متفاوت

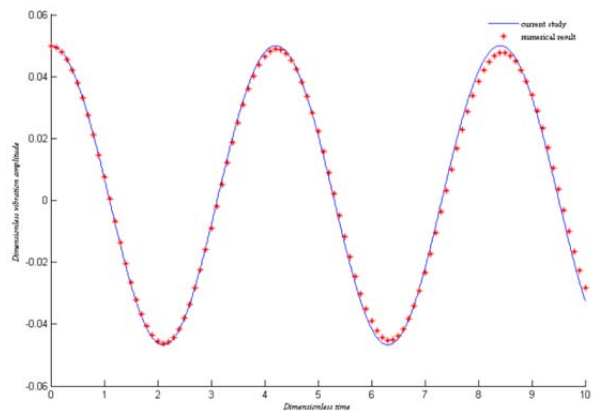


نمودار ۷) جابه‌جایی انتهای میله یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد تحت جابه‌جایی اولیه متفاوت

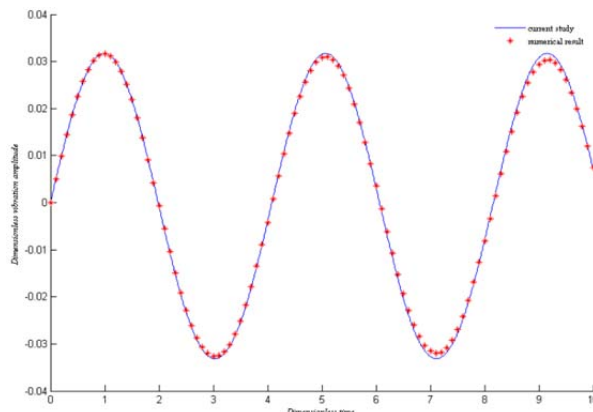


نمودار ۸) جابه‌جایی انتهای میله یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد تحت سرعت اولیه متفاوت

همچنین با توجه به نمودارهای ۲ و ۴، شرایط سرعت اولیه، دامنه ارتعاش را در میله یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد نسبت به میله دوسرگیردار بیشتر کرده، بدین صورت که دامنه در میله یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد حدود ۰/۰۳ و در میله دو سرگیردار حدود ۰/۰۱۶ است.



نمودار ۹) مقایسه حل تحلیلی و عددی میله یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد با شرایط جابه‌جایی اولیه

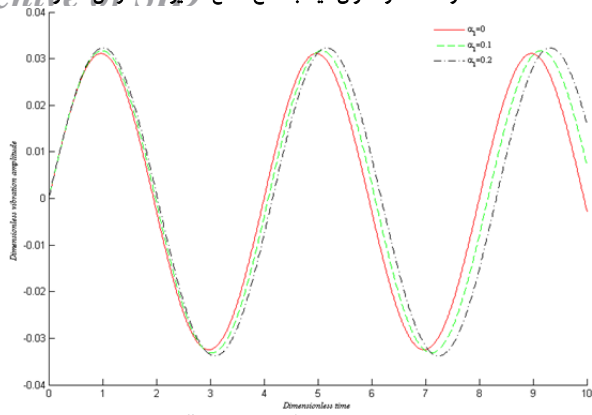


نمودار ۱۰) مقایسه حل تحلیلی و عددی میله یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد با شرایط سرعت اولیه

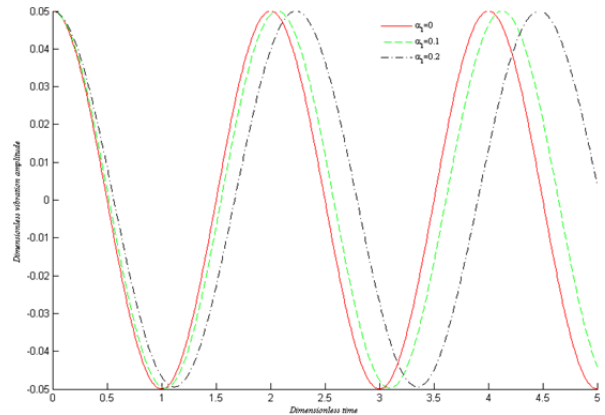
نمودارهای ۵ و ۶، ارتعاش آزاد میله دوسرگیردار تحت شرایط جابه‌جایی اولیه و سرعت اولیه مختلف را نشان می‌دهد. فرکانس و دامنه در هر دو شرط اولیه، با افزایش شرایط اولیه افزایش می‌یابد. مقدار افزایش فرکانس کم است. با افزایش شرایط جابه‌جایی اولیه از ۰/۰۵ به ۰/۱، فرکانس حدود ۴٪ افزایش و با افزایش شرایط سرعت اولیه از ۰/۰۵ به ۰/۱، فرکانس حدود نیم‌درصد افزایش می‌یابد.

نمودارهای ۷ و ۸ نیز ارتعاش آزاد میله یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد را تحت شرایط جابه‌جایی اولیه و سرعت اولیه مختلف نشان می‌دهد. فرکانس و دامنه در هر دو شرط اولیه با افزایش شرایط اولیه افزایش می‌یابد. با افزایش شرایط جابه‌جایی اولیه از ۰/۰۵ به ۰/۱، فرکانس حدود ۲٪ افزایش و با افزایش شرایط سرعت اولیه از ۰/۰۵ به ۰/۱، فرکانس حدود نیم‌درصد افزایش می‌یابد.

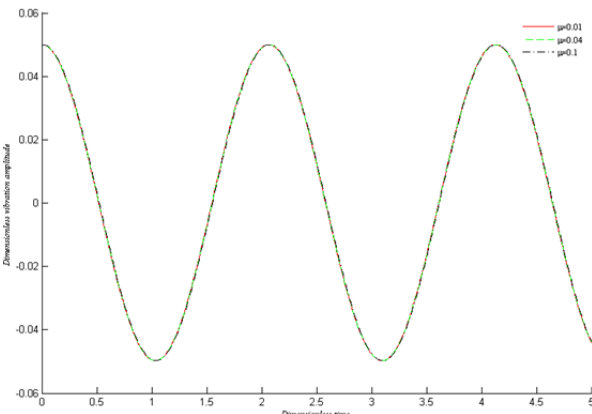
نمودارهای ۹ و ۱۰، ارتعاش آزاد میله دوسرگیردار را با شرایط جابه‌جایی اولیه و سرعت اولیه، تحت α_1 های مختلف نشان می‌دهد. با افزایش α_1 ، در هر دو شرایط اولیه، فرکانس نوسانات حدود ۸٪ کاهش و دامنه در شرایط جابه‌جایی اولیه به مقدار اندکی کاهش و در شرایط سرعت اولیه افزایش می‌یابد.



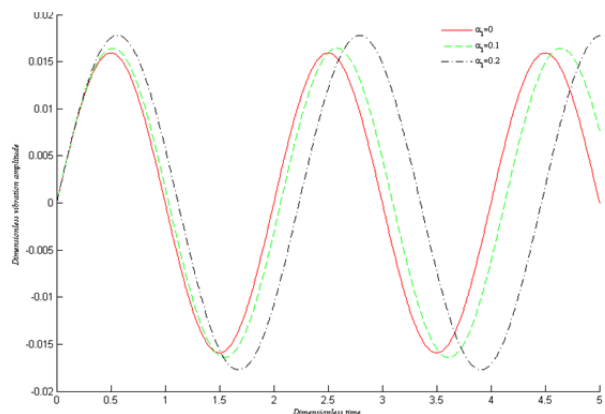
نمودار ۱۲) جابه‌جایی انتهای میله یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد تحت سرعت اولیه با α_1 های مختلف



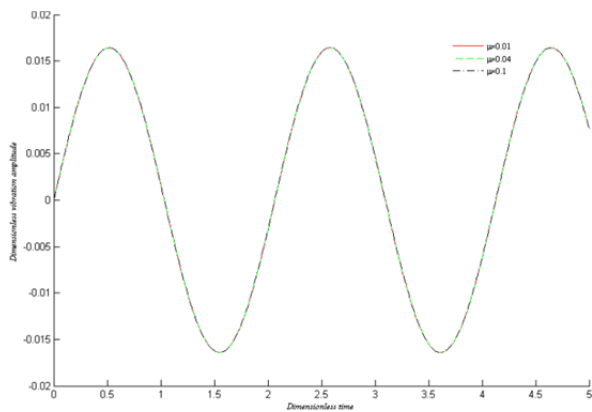
نمودار ۹) جابه‌جایی وسط میله دوسرگیردار تحت جابه‌جایی اولیه با α_1 های مختلف



نمودار ۱۳) جابه‌جایی وسط میله دوسرگیردار تحت جابه‌جایی اولیه با ضریب میرایی مختلف

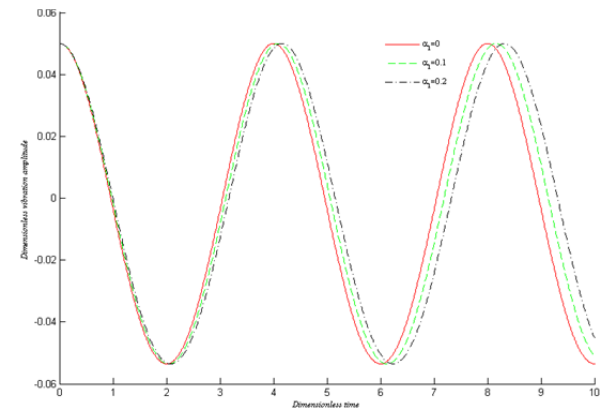


نمودار ۱۰) جابه‌جایی وسط میله دوسرگیردار تحت سرعت اولیه با α_1 های مختلف



نمودار ۱۴) جابه‌جایی وسط میله دوسرگیردار تحت سرعت اولیه با ضریب میرایی مختلف

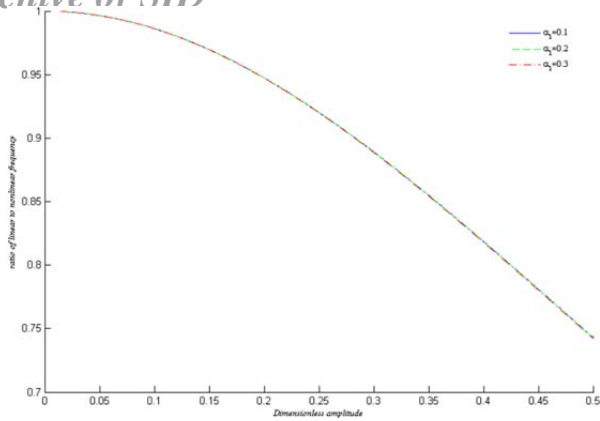
نمودارهای ۱۱ و ۱۲، ارتعاش آزاد میله یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد با شرایط جابه‌جایی اولیه و سرعت اولیه را تحت α_1 های مختلف نشان می‌دهد. با افزایش α_1 فرکانس نوسانات در هر دو شرط اولیه، حدود ۲٪ کاهش می‌یابد. دامنه در شرایط جابه‌جایی اولیه به مقدار اندکی کاهش و در شرایط سرعت اولیه افزایش می‌یابد. نمودارهای ۱۳ و ۱۴، ارتعاش آزاد میله دوسرگیردار را تحت جابه‌جایی اولیه و سرعت اولیه با ضریب میرایی مختلف نشان می‌دهد. ضریب میرایی تاثیر ناچیزی روی روند مساله دارد و در شرایط جابه‌جایی اولیه با افزایش ضریب میرایی از ۰/۰۱ به ۰/۰۴، فرکانس نوسانات حدود نیم‌درصد کاهش می‌یابد.



نمودار ۱۱) جابه‌جایی انتهای میله یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد تحت جابه‌جایی اولیه با α_1 های مختلف

همچنین نمودارهای ۱۵ و ۱۶، ارتعاش آزاد میله یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد را تحت جابه‌جایی اولیه و سرعت اولیه با ضریب میرایی مختلف نشان می‌دهد. ضریب میرایی تاثیر ناچیزی روی مساله می‌گذارد، به طوری که در شرایط جابه‌جایی اولیه با افزایش ضریب میرایی از ۰/۰۱ به ۰/۰۴، فرکانس نوسانات حدود ۳٪ کاهش می‌یابد.

نمودارهای ۱۷ و ۱۸، نسبت فرکانس خطی به غیرخطی بر حسب دامنه بی‌بعد به‌زای α_1 های مختلف را نشان می‌دهد. با افزایش α_1 ، فرکانس خطی و غیرخطی در هر دو شرط مرزی، از هم فاصله می‌گیرند و فرکانس غیرخطی از خطی بزرگ‌تر می‌شود. این اهمیت



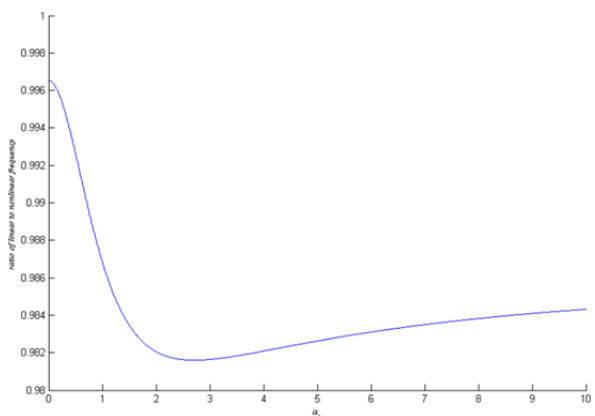
نمودار ۱۸ نسبت فرکانس خطی به غیرخطی به دامنه بی‌بعد به ازای α_1 های مختلف برای میله یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد

در جدول ۲، نتایج فرکانس خطی و غیرخطی میله دوسرگیردار، با سطح مقطع ثابت و سطح مقطع متغیر با شرایط یکسان برای مقایسه آورده شده است. مشاهده می‌شود که در دامنه‌های بی‌بعد کوچک، فرکانس‌های غیرخطی در یک دامنه بی‌بعد تقریباً برابرند، ولی با بزرگ‌تر شدن دامنه بی‌بعد، فرکانس‌های غیرخطی از هم فاصله می‌گیرند و با بیشتر شدن شیب مخروط نیز فرکانس غیرخطی بزرگ‌تر می‌شود. فرکانس غیرخطی به دامنه بی‌بعد وابسته بوده، در حالی که فرکانس خطی برای یک سطح مقطع، ثابت است.

جدول ۲ فرکانس خطی و غیرخطی میله دوسرگیردار

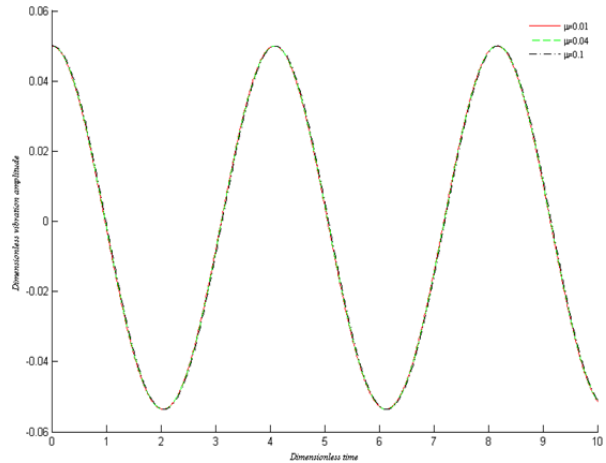
دامنه بی‌بعد	میله سطح مقطع ثابت $\alpha_1 = 0$		میله مخروطی $\alpha_1 = 0.1$	
	فرکانس خطی	فرکانس غیرخطی	فرکانس خطی	فرکانس غیرخطی
۰/۱	۳/۱۴۱۵	۳/۳۱۶	۳/۱۴۱۹	۳/۳۱۶
۰/۲	۳/۱۴۱۵	۳/۸۳۹	۳/۱۴۱۹	۳/۸۴
۰/۳	۳/۱۴۱۵	۴/۷۱	۳/۱۴۱۹	۴/۷۱
۰/۴	۳/۱۴۱۵	۵/۹۳	۳/۱۴۱۹	۶/۲۱
۰/۵	۳/۱۴۱۵	۷/۵۰	۳/۱۴۱۹	۷/۷۸

در نمودارهای ۱۹ و ۲۰، نسبت فرکانس خطی به غیرخطی به α_1 برای دو شرط مرزی میله رسم شده است. با افزایش α_1 ، فرکانس خطی و غیرخطی در هر دو شرط مرزی، از هم فاصله می‌گیرند و فرکانس غیرخطی از خطی بزرگ‌تر می‌شود. در میله دوسرگیردار، این نسبت ابتدا کاهش و از $\alpha_1 = 3$ ، نسبت فرکانس خطی به غیرخطی افزایش می‌یابد. در میله یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد، این نسبت همواره کاهش می‌یابد.

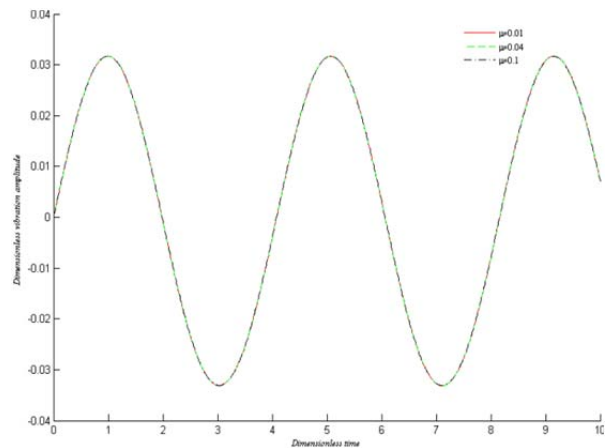


نمودار ۱۹ نسبت فرکانس خطی به غیرخطی به α_1 برای میله دوسرگیردار

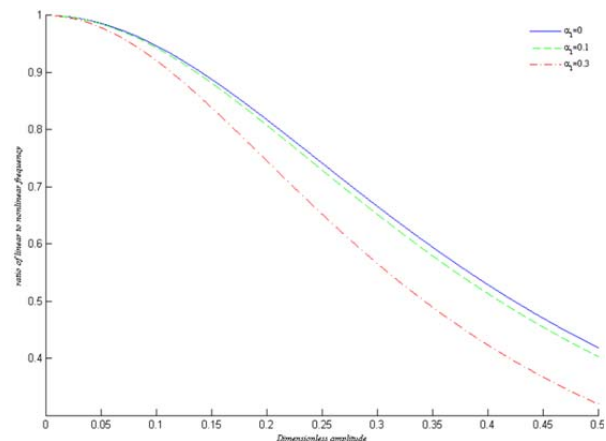
بررسی پدیده ارتعاشی میله با سطح مقطع متغیر را در دامنه زیاد نشان می‌دهد. در یک دامنه مشخص، اختلاف فرکانس خطی و غیرخطی، در میله یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد کمتر از میله دوسرگیردار است. در دامنه بی‌بعد ۰/۲، با افزایش α_1 از ۰/۱ به ۰/۳، اختلاف نسبت فرکانس خطی به غیرخطی برای میله دوسرگیردار حدود ۸٪ است.



نمودار ۱۵ جابه‌جایی انتهای میله یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد تحت جابه‌جایی اولیه با ضریب میرایی مختلف



نمودار ۱۶ جابه‌جایی انتهای میله یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد تحت سرعت اولیه با ضریب میرایی مختلف



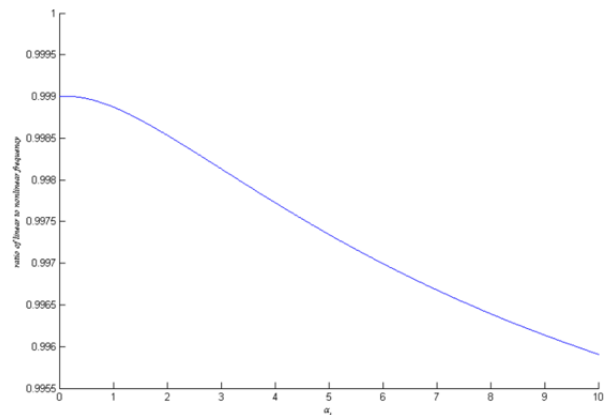
نمودار ۱۷ نسبت فرکانس خطی به غیرخطی به دامنه بی‌بعد به ازای α_1 های مختلف برای میله دوسرگیردار

سهم نویسندگان: مهدیه پورجعفری (نویسنده اول)، نگارنده مقدمه/پژوهشگر کمکی/نگارنده بحث (۳۴٪)؛ علیرضا فتوحی (نویسنده دوم)، نگارنده مقدمه/روش شناس/پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۳۳٪)؛ محمدمهدی جلیلی (نویسنده سوم)، نگارنده مقدمه/روش شناس/پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۳۳٪)

منابع مالی: منابع مالی خاصی برای انجام این تحقیق استفاده نشده است.

منابع

- 1- Nayfeh AH. Finite-amplitude longitudinal waves in non-uniform bars. *Journal of Sound and Vibration*. 1975;42(3):357-361.
- 2- Raman VM. On analytical solutions of vibrations of rods with variable cross sections. *Applied Mathematical Modelling*. 1983;7(5):356-361.
- 3- Kumar BM, Sujith RI. Exact solutions for the longitudinal vibration of non-uniform rods. *Journal of Sound and Vibration*. 1997;207(5):721-729.
- 4- Cveticanin L, Uzelac Z. Nonlinear longitudinal vibrations of a rod. *Journal of Vibration and Control*. 1999;5(6):827-849.
- 5- Li QS, Li GQ, Liu DK. Exact solutions for longitudinal vibration of rods coupled by translational springs. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2000;42(6):1135-1152.
- 6- Raj A, Sujith RI. Closed-form solutions for the free longitudinal vibration of inhomogeneous rods. *Journal of Sound and Vibration*. 2005;283(3-5):1015-1030.
- 7- Mousavi SM, Fariborz SJ. Free vibration of a rod undergoing finite strain. *Journal of Physics: Conference Series*. 2012;382(1):012011.
- 8- Baghestani AM, Fariborz SJ, Mousavi SM. Low-frequency free vibration of rods with finite strain. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*. 2014;3(1):85-93.
- 9- Soleimani Roody B, Fotuhi AR, Jalili MM. Nonlinear longitudinal forced vibration of a rod undergoing finite strain. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2018;232(12):2229-2243.
- 10- Soleimani Roody B, Fotuhi AR, Jalili MM. Nonlinear longitudinal free vibration of a rod undergoing finite strain. *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*. 2017, December. [Persian]
- 11- Lai WM, Rubin D, Krempl E. Introduction to continuum mechanics. 4th Edition. Amsterdam: Elsevier; 2009.
- 12- Rao SS. Vibration of continuous systems. Hoboken: John Wiley & Sons; 2007.
- 13- Nayfeh AH, Mook DT. Nonlinear Oscillations. Hoboken: John Wiley & Sons; 1995.



نمودار ۲۰) نسبت فرکانس خطی به غیرخطی به α_1 برای میله یک سرگیردار-یک سرآزاد

۵- نتیجه گیری

در این پژوهش، ارتعاش آزاد طولی غیرخطی میله با سطح مقطع متغیر تحت کرنش محدود بررسی شده است. معادلات حاکم بر مساله که معادلات دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی بوده، به دست آمده است. سپس به وسیله روش گلرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی تبدیل شده است. ارتعاش آزاد برای دو شرط مرزی دوسرگیردار و یک سرگیردار-یک سرآزاد بررسی شده‌اند. مهم‌ترین نتایج این پژوهش به شرح زیر است:

- ۱- تحت شرایط سرعت اولیه یکسان، دامنه نوسانات در میله یک سرگیردار-یک سرآزاد بیشتر است.
- ۲- پاسخ زمانی میله به آهنگ تغییر سطح مقطع بستگی دارد و با افزایش این آهنگ، فرکانس نوسانات در هر دو شرط مرزی کاهش می‌یابد.
- ۳- پاسخ زمانی میله به ضریب میرایی وابستگی کمی دارد و با افزایش ضریب میرایی تقریباً یکسان است.
- ۴- در هر دو شرط مرزی، فرکانس غیرخطی از فرکانس خطی بیشتر است و نسبت این دو فرکانس به شرایط اولیه و آهنگ تغییر سطح مقطع وابسته است و در میله یک سرگیردار-یک سرآزاد همواره با افزایش آهنگ تغییر سطح مقطع، نسبت فرکانس خطی به غیرخطی کاهش می‌یابد.

تشکر و قدردانی: موردی گزارش نشد.

تأییدیه اخلاقی: این مقاله تاکنون به‌طور کامل در نشریه دیگری به چاپ نرسیده است. ضمناً محتویات علمی مقاله حاصل فعالیت علمی نویسندگان بوده و صحت و اعتبار نتایج بر عهده نویسندگان است.

تعارض منافع: مقاله حاضر هیچ گونه تعارض منافی با سازمان‌ها و اشخاص دیگر ندارد.