



## تحلیل دینامیکی یک کوادروتور در شرایط کاری متغیر

رامین افهمی<sup>1</sup>، رسول فشارکی فرد<sup>2\*</sup>، محمداعظم خسروی<sup>3</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی رباتیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

3- استادیار، مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

\* تهران، کدپستی 1591633311، fesharaki@aut.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 15 آذر 1396

پذیرش: 05 بهمن 1396

ارائه در سایت: 04 اسفند 1396

کلید واژگان:

کوادروتور

مدل سازی دینامیکی

نیروهای آیرودینامیکی

شرایط کاری

دوربین متصل

### چکیده

در این مقاله روی مدل سازی دینامیکی کوادروتور با توجه به تغییرات در شرایط کاری آن تمرکز شده است. هدف اصلی این پژوهش ارائه ی معادلات دینامیکی کامل حاکم بر کوادروتور با استفاده از روش اویلر-لاگرانژ و با در نظر گرفتن تمامی نیروهای آیرودینامیکی که بر حرکت آن تاثیر می گذارند می باشد. در مقالات پیشین، معادلات دینامیکی هیچگاه به طور جامع در نظر گرفته نشده است. مطالعه دینامیک کوادروتور به شناخت فیزیک و رفتار آن کمک می کند و به حصول یک مدل دقیق از سیستم می انجامد. با حصول چنین مدلی کنترل کوادروتور را به مراتب ساده تر از مدل های غیر دقیق موجود می شود. جهت در نظر گرفتن مجموعه نیروها و گشتاورهای دخیل در دینامیک کوادروتور، از مطالعات انجام شده پیشین استفاده می شود و پس از شرح دادن هر یک از نیروها و روابط دقیق آن ها، مدل دینامیکی کامل کوادروتور ارائه می شود. در انتها عملکرد سیستم در دو شرایط کاری متفاوت یکی بدون در نظر جسم متصل خارجی به کوادروتور و دیگری در شرایط کوپل شده با یک دوربین، به صورت عددی شبیه سازی می گردد و به کمک آن ها مدل دینامیکی حاصل صحت گذاری می شود. در شرایط کاری اول در دو آزمون متفاوت به بررسی و مقایسه معادلات دینامیکی کار حاضر با کارهای پیشین پرداخته خواهد شد. در شرایط کاری دوم عملکرد کوادروتور تحت تاثیر دوربین متصل به آن که با حرکت خود معادلات دینامیکی سیستم را به صورت پیوسته تغییر می دهد، بررسی می شود.

## Dynamic Analysis of a Quadrotor in Variable Operating Conditions

Ramin Afhami<sup>1</sup>, Rasul Fesharakifard<sup>2\*</sup>, Mohammad Azam Khosravi<sup>3</sup>

1- Department of Robotic Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

3- Department of Electrical Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

\* P.O.B 1591633311, Tehran, fesharaki@aut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 06 December 2017

Accepted 25 January 2018

Available Online 23 February 2018

#### Keywords:

Quadrotor

Dynamic modeling

Aerodynamic forces

Operating conditions

Connected camera

### ABSTRACT

This paper focuses on the dynamic modeling of quadrotor with respect to changes in operating conditions. The main objective of this investigation is to provide complete governing quadrotor dynamic equations using the Euler-Lagrange method considering all aerodynamic forces which affect its motion. In previous papers, dynamical equations are never considered comprehensively. The study of quadrotor's dynamics permits to understand its physics and behavior and provides a precise model of the system. Once such a model is obtained, the control of quadrotor turns much simpler than current inaccurate models. In order to take into account, the set of forces and torques involved in quadrotor dynamics, the previous studies are used and after describing each of the forces and their precise terms, the complete dynamic quadrature model is presented. At the end, the system's performance is simulated in two different operating conditions, one regardless of the external object coupled with quadrotor, and the other in the coupled condition with a camera, and by this means, the achieved dynamic model is validated. In the first operating conditions in two different tests, the dynamic equations of the present work will be compared against the previous ones. In the second operating conditions, the quadrotor performance under influence of a connected camera whose motion changes continuously the system dynamic equations is studied.

### 1- مقدمه

کاربردهای فراوانی در زمینه ی رباتیک شامل نظارت، جستجو و نجات، کمک های اضطراری، کسب اطلاعات و تصویربرداری از اهداف و... دارند. با این حال این وسایط، تجهیزاتی با دینامیک بسیار پیچیده و به تبع آن نیازمند طراحی کنترل کننده مناسب بوده و موضوعات مهمی در این زمینه تاکنون باز مانده است. یافتن دینامیک دقیق سیستم جهت طراحی کنترل کننده مناسب از اهمیت بالایی برخوردار است. به گونه ای که وجود تفاوت های اندک

در سال های اخیر شاهد پیشرفت هایی قابل توجه در زمینه ی وسایل نقلیه ی خودکار بدون سرنشین بوده ایم که در میان آن ها مالتی روتورها به صورت گسترده در کاربردهای نظامی و غیرنظامی به کار می روند. کوادروتورها دسته ای از مالتی روتوها هستند که به دلیل مزایایی مانند اندازه ی کوچک، چابکی، شناور ماندن، هزینه ی تعمیر و نگهداری کم و مانورپذیری بالا

### Please cite this article using:

R. Afhami, R. Fesharakifard, M. A. Khosravi, Dynamic Analysis of a Quadrotor in Variable Operating Conditions, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 03, pp. 145-145, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

چرخشی حول مرکز جرم تقسیم نمود. بنابراین جهت توصیف حرکت آن در فضا، در هر لحظه به 6 درجه‌ی آزادی نیاز است. از این تعداد سه درجه برای حرکت انتقالی در راستای محورهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  و سه درجه برای حرکت چرخشی حول محورهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  که به رول<sup>1</sup> ( $\phi$ )، پیچ<sup>2</sup> ( $\theta$ ) و یاو<sup>3</sup> ( $\psi$ ) نامیده می‌شوند، به کار می‌رود [3].

همان‌طور که در "شکل 1" مشاهده می‌شود، برای کنترل این شش درجه آزادی تنها چهار ورودی وجود دارد. به همین علت سیستم ساختاری با تحریک ناقص دارد. اما از طرفی با توجه به کوپلینگ موجود در ساختار کوادروتور، کنترل هر شش درجه آزادی به کمک زوایای رول و پیچ ممکن می‌گردد. کنترل این شش درجه آزادی با تنظیم سرعت چرخش چهار روتور کوادروتور انجام می‌شود. چرخش روتورها به صورت دو به دو مخالف هم باعث می‌گردد تا از چرخش مداوم سیستم حول محور  $z$  اجتناب شود. بنابراین در صورتی که سرعت روتورها یکسان باشد، چرخشی حول محور  $z$  نخواهیم داشت. اما اگر بین سرعت روتورها عدم توازن ایجاد شود، سیستم شروع به چرخش حول محور  $z$  می‌کند. برای حرکت عمودی باید سرعت چرخش هر چهار پروانه به صورت همزمان کم یا زیاد شود (شکل 2-a). برای چرخش حول محور  $x$  باید سرعت چرخش روتور 2 زیاد (کم) و سرعت چرخش روتور 4 به همان اندازه کم (زیاد) شود (شکل 2-b) و به طور مشابه برای چرخش حول محور  $y$  باید سرعت چرخش روتور 1 زیاد (کم) و سرعت چرخش روتور 3 به همان اندازه کم (زیاد) شود (شکل 2-c). در نهایت برای چرخش حول محور  $z$  باید سرعت روتورهای 1 و 3 به یک اندازه افزایش (کاهش) و سرعت روتورهای 2 و 4 به همان اندازه کاهش (افزایش) یابد (شکل 2-d) [5,4].

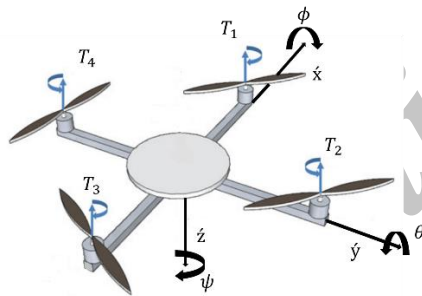


Fig.1 Free body diagram of a quadrotor [1]

شکل 1 دیاگرام آزاد کوادروتور [1]

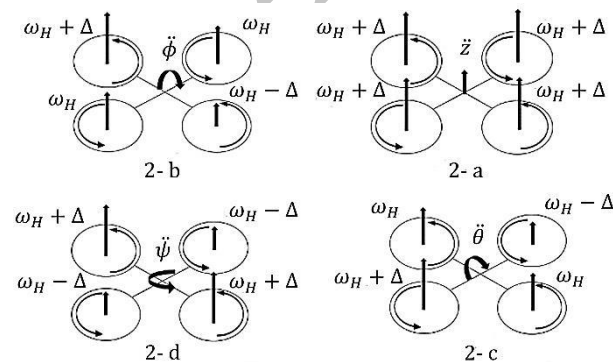


Fig. 2 Mechanism of quadrotor manoeuvres

شکل 2 مکانیزم مانور کوادروتور

در دینامیک استخراج شده و دینامیک واقعی سیستم به نتایج کاملاً متفاوتی در پیاده‌سازی تئوری و عملی منتج می‌شود. انعطاف‌پذیری بال‌ها، دینامیک داخلی موتورها، محل قرارگیری مرکز جرم، تغییر متغیرها و ... مدل‌سازی دینامیکی سیستم را کاملاً دشوار کرده است. این معادلات به دلیل چند متغیره بودن، مشخصات به شدت کوپل شده سیستم، رفتارهای غیرخطی، نقص در تحریک و ... دارای چالش‌های بزرگی بوده که باید راه‌کارهای مناسبی برای مواجهه با آن‌ها آزمود. به این ترتیب و با توجه به اهمیت شناخت دینامیک ربات، این دینامیک باید تا حد امکان دقیق مدل‌سازی گردد [2,1]. حرکت یک جسم صلب در فضا را می‌توان با در نظر گرفتن 6 درجه‌ی آزادی توصیف کرد که در این میان سه درجه برای بیان حرکت انتقالی و سه درجه دیگر برای بیان حرکت چرخشی جسم استفاده می‌شود. در یک کوادروتور با تنظیم سرعت چرخشی چهار پروانه که مستقل از هم هستند، می‌توان به هر دو نوع حرکت انتقالی و چرخشی در فضا دست یافت. می‌توان با توجه به زمینه‌ی تحقیقات و کاربرد وسیله، دینامیک سیستم را در سطوح متفاوتی از پیچیدگی استخراج نمود. به طور کلی دینامیک کوادروتور مشتق شده از مجموعه‌ی معادلات حرکت کوادروتور هستند که هم شامل حرکت انتقالی و هم شامل حرکت چرخشی آن می‌شود [3,2].

مهم‌ترین مسأله در مدل‌سازی دینامیکی کوادروتور، استخراج نیروها و گشتاورهایی است که به ربات وارد می‌شوند. وابسته به میزان دقت مورد نیاز در مدل‌سازی دینامیکی کوادروتور باید تاثیر تعداد نیروها و گشتاورهای خارجی بیشتری را بررسی کرد و در معادلات گنجانده. بر همین اساس ساده‌ترین مدل دینامیکی [4-1] تنها با در نظر گرفتن نیروهای تراست و درگ روتورها بدست می‌آید. حرکت کوادروتور ناشی از همین دو نوع نیرو می‌باشد و سایر نیروها و گشتاورها در معادلات نوعی اغتشاش به حساب می‌آیند. در کار [2] نیروی مقاومت هوایی که در درحین حرکت به کوادروتور اعمال می‌شود، در معادلات آمده است که این نیرو به صورت خطی در نظر گرفته شده است. در [5,3] اثرات ژيروسکوپ بدنه و در [6-10] اثرات ژيروسکوپ بدنه و روتورها نیز به معادلات دینامیکی افزوده شده است. در مقاله [11] اثر نیروی مقاومت هوای خطی و اثرات ژيروسکوپ در مدل‌سازی دینامیکی کوادروتور لحاظ شده است. همچنین در [12] اثر گرانش ناشی از تغییرات مرکز جرم کوادروتور و در [13,14] اثر زمین به صورت مستقل مورد بررسی قرار گرفته است. پژوهش [15] نسبت به دیگر کارهای مشابه، ترم‌های نیرویی و گشتاوری بیشتری را در مدل‌سازی دینامیکی کوادروتور در نظر گرفته است. هدف از مقاله حاضر مدل‌سازی دینامیکی کامل کوادروتور با در نظر گرفتن تمامی نیروهای آیرودینامیکی دخیل در حرکت می‌باشد و خیلی روی کنترل‌کننده مانور داده نمی‌شود و برای این قسمت از یک کنترل‌کننده LQR که در کارهای پیشین ارائه شده است و به خوبی برای کوادروتور جواب می‌دهد استفاده می‌شود. در بخش 2 به معرفی ساختار کوادروتور و ارتباط بین سرعت روتورها با حرکت سیستم در فضا پرداخته می‌شود. در بخش 3 تعریفی از زوایای اوپلر و ماتریس‌های دوران که برای استخراج معادلات دینامیکی ربات مورد نیاز هستند، ارائه می‌گردد. سپس در بخش 4 مقاله، تمامی نیروهای آیرودینامیکی که بر حرکت سیستم تاثیر می‌گذارند به صورت مجزا مورد بررسی قرار می‌گیرند. در نهایت شبیه‌سازی و نتایج حاصل از آن در بخش 5 آورده شده است.

## 2- معرفی ساختار سیستم

حرکت کوادروتور را می‌توان به دو بخش حرکت خطی مرکز جرم و حرکت

<sup>1</sup> Roll  
<sup>2</sup> Pitch  
<sup>3</sup> Yaw

### 3- زوایای اویلر

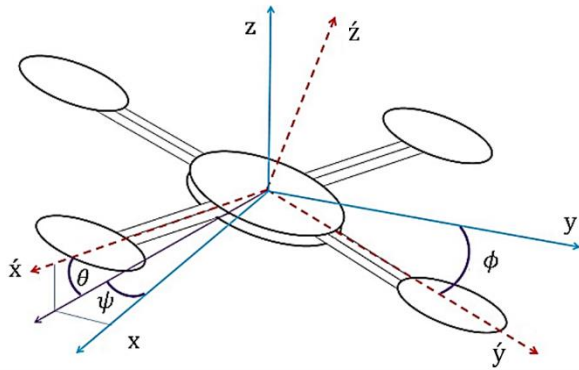


Fig. 4 Euler Angles

شکل 4 زوایای اویلر

که در این رابطه  $q$  بردار مختصات تعمیم یافته کوادروتور (با جهت های شکل 1) در هر لحظه بوده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$q = [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T \quad (4)$$

همچنین  $Q$  مجموع نیروها و گشتاورهای اعمالی به سیستم می باشد.

لاگرانژین سیستم  $L(q, \dot{q})$  از رابطه زیر بدست می آید:

$$L(q, \dot{q}) = T_{trans} + T_{rot} - U \quad (5)$$

که در این رابطه  $T_{trans}$  انرژی جنبشی حاصل از حرکت انتقالی،  $T_{rot}$  انرژی جنبشی حاصل از حرکت چرخشی،  $U$  انرژی پتانسیل سیستم ناشی از تغییر ارتفاع سیستم می باشد. با جای گذاری این ترم ها، لاگرانژین سیستم به صورت زیر بدست می آید. در این محاسبات جهت مثبت دستگاه های مختصات بدنه و جهانی به صورت "شکل 5" انتخاب شده است.

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} (I_{xx}\dot{\phi}^2 + I_{yy}\dot{\theta}^2 + I_{zz}\dot{\psi}^2) + mgz \quad (6)$$

سمت چپ معادله اویلر-لاگرانژ به صورت زیر است:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ m\ddot{z} - mg \\ I_{xx}\ddot{\phi} + \dot{I}_{xx}\dot{\phi} \\ I_{yy}\ddot{\theta} + \dot{I}_{yy}\dot{\theta} \\ I_{zz}\ddot{\psi} + \dot{I}_{zz}\dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (7)$$

نیروها و گشتاورهایی که به ربات وارد می شوند در ترم  $Q$  معادلات لاگرانژ ظاهر می شوند و در ادامه به صورت مجزا بررسی خواهند شد.

#### 4-1- نیروی تراست<sup>1</sup> و گشتاورهای حاصل از آن

برآیند نیروهای وارد بر تیغه های یک پروانه در راستای عمود بر آن، نیروی تراست روتور گفته می شود (شکل 5). این نیرو براساس ترکیب تئوری های المان پره و اندازه حرکت برای روتور نام از رابطه زیر قابل محاسبه است [18,10]:

$$T_i = b\omega_i^2, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (8-الف)$$

در این رابطه  $\omega_i$  سرعت زاویه ای روتور نام و  $b$  فاکتور تراست نامیده می شود و از رابطه زیر بدست می آید [16]:

$$b = C_T \rho A R^2 \quad (8-ب)$$

$$\frac{C_T}{\sigma a} = \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \mu^2 \right) \theta_{10} - (1 + \mu^2) \frac{\theta_{tw}}{8} - \frac{\lambda}{4} \quad (8-ج)$$

با جمع کردن نیروهای تراست مجزای ایجاد شده در هر کدام از روتورها،

پیش از معرفی ساختار کوادروتور به بررسی دستگاه های مختصاتی که برای بیان حرکت کوادروتور لازم است پرداخته می شود. جهت توصیف حرکت کوادروتور از دو دستگاه مختصاتی، یکی دستگاه مختصات اینرسی و دیگری دستگاه مختصات بدنه استفاده می گردد (شکل 3). دستگاه مختصات اینرسی که دستگاه مختصات جهانی نیز نامیده می شود، ثابت می باشد و در آن قانون دوم نیوتون برقرار است. دستگاه مختصات بدنه که در اکثر مقالات جهت ساده سازی روابط مبدأ آن منطبق با مرکز جرم کوادروتور است، همراه با کوادروتور تغییر می کند. اما در مقاله حاضر این فرض انجام نشده و در ادامه اثر این عدم تطابق در معادلات سیستم مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

جهت برقراری ارتباط بین دو دستگاه مختصاتی که در "شکل 3" آمده است از زوایای اویلر استفاده می شود. با استفاده از زوایای اویلر برای توصیف چرخش یک جسم سه بعدی در فضا به سه پارامتر چرخش حول  $x$  (رول)، چرخش حول محور  $y$  (پیچ) چرخش حول محور  $z$  (یاء) نیاز داریم که این زوایا به طور مطلق نسبت به مختصات جهانی بیان می شوند. اگر به ترتیب به اندازه  $\phi$  حول محور  $x$ ، به اندازه  $\theta$  حول محور  $y$  و به اندازه  $\psi$  حول محور  $z$  چرخش داشته باشیم (شکل 4)، به کمک این سه زاویه که ماتریس های دوران آن ها به صورت زیر است، می توان هر نوع دوران را در فضا را تفسیر نمود [7,6].

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{bmatrix}, \quad \phi \in (-\pi, \pi) \quad (1-الف)$$

$$R_y = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix}, \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (1-ب)$$

$$R_z = \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \psi \in (-\pi, \pi) \quad (1-ج)$$

که در روابط بالا  $s_\theta = \sin(\theta)$  و  $c_\theta = \cos(\theta)$  می باشد. حال با ترتیب دوران ذکر شده، ماتریس دوران  $R_{zyx}$  که دستگاه های اینرسی و بدنه را به هم مرتبط می سازد براساس ماتریس های بالا به صورت زیر تعریف می شود [17,16]:

$$R_{zyx} = R_z \cdot R_y \cdot R_x \quad (2-الف)$$

$$R_{zyx} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\theta s_\theta c_\psi - c_\theta s_\psi & c_\theta s_\theta c_\psi + s_\theta s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\theta s_\theta s_\psi + c_\theta c_\psi & c_\theta s_\theta s_\psi - s_\theta c_\psi \\ -s_\theta & s_\theta c_\theta & c_\theta c_\theta \end{bmatrix} \quad (2-ب)$$

#### 4- معادلات دینامیکی سیستم

جهت استخراج معادلات دینامیکی سیستم از روش اویلر-لاگرانژ بدون استهلاک انرژی به صورت زیر استفاده می کنیم [4]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q \quad (3)$$

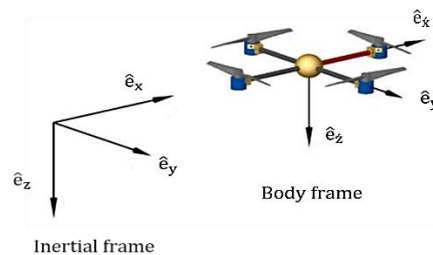


Fig.3 Inertial frame and body frame [3]

شکل 3 دستگاه مختصات بدنه و جهانی [3]

<sup>1</sup> Thrust force

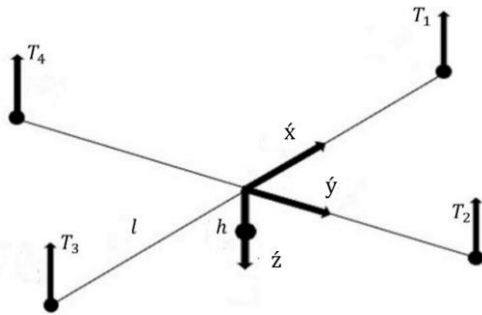


Fig. 6 The Thrust Force of propeller

شکل 6 نیروی تراست پروانه‌های کوادروتور

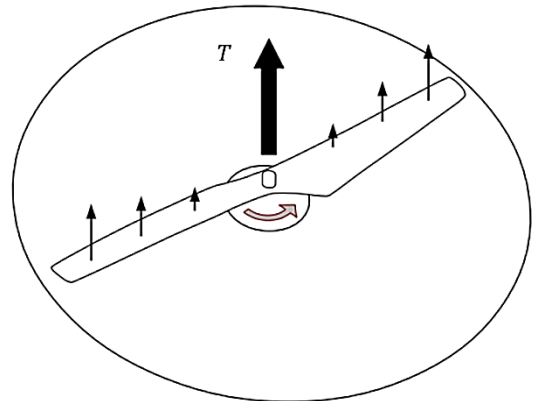


Fig. 5 The Thrust Force of propeller [10]

شکل 5 نیروی تراست پروانه [10]

مجموع نیروی تراست اعمال شده بر کوادروتور از سوی روتورها به دست می‌آید. این نیرو همواره در راستای z دستگاه مختصات بدنه می‌باشد. با فرض یکسان بودن تمامی پارامترهای دخیل در نیروی تراست روتورها، مقدار فاکتور تراست برای هر چهار روتور یکسان خواهد بود، پس:

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \end{bmatrix} \quad (9-الف)$$

$$u_1 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = b(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \quad (9-ب)$$

با استفاده از ماتریس دوران، نگاشت این نیرو در دستگاه مختصات

اینرسی به دست می‌آیند:

$$F_I = R_{xyz}F \quad (10-الف)$$

$$F_I = \begin{bmatrix} (c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi)u_1 \\ (c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi)u_1 \\ c_\phi c_\theta u_1 \end{bmatrix} \quad (10-ب)$$

اما این نیروها موجب ایجاد گشتاورهایی حول محورهای x و y می‌شود که براساس شکل از روابط زیر به دست می‌آیند که l طول بال کوادروتور می‌باشد (شکل 6).

$$M_T = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11-الف)$$

$$u_2 = l(T_4 - T_2) \quad (11-ب)$$

$$u_3 = l(T_1 - T_3) \quad (11-ج)$$

#### 2-4- گشتاور درگ<sup>1</sup>

گشتاور حول شفت روتور که ناشی از نیروهای آیرودینامیکی وارد شده بر تیغه‌های پروانه است را گشتاور درگ می‌گویند و براساس تئوری المان پره برای روتور نام درجهت عکس سرعت چرخشی پروانه به صورت زیر قابل محاسبه است (شکل 7):

$$D_i = d\omega_i^2 \quad (12-الف)$$

d فاکتور درگ نامیده می‌شود و از رابطه زیر به دست می‌آید [15]:

$$d = C_D \rho A R^3 \quad (12-ب)$$

$$\frac{C_D}{\sigma a} = \frac{1}{8a} (1 + \mu^2) \overline{C_D} + \lambda \left( \frac{\theta_{I0}}{6} - \frac{\theta_{tw}}{8} - \frac{\lambda}{4} \right) \quad (12-ج)$$

جهت این گشتاور برای همه روتورها در راستای z است. با توجه به این که روتورهای یک کوادکوپتر به صورت دو به دو عکس هم می‌چرخند،

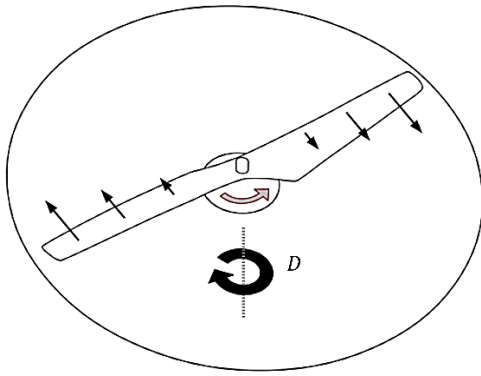


Fig. 7 The Drag Moment of propeller [10]

شکل 7 گشتاور درگ پروانه [10]

گشتاورهای درگ حاصل نیز دو به دو علامت عکس هم دارند. پس با توجه به راستای مثبتی که برای محور z دستگاه مختصات بدنه کوادروتور در نظر گرفتیم، حاصل این گشتاورها حول این محور به صورت زیر است:

$$M_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (13-الف)$$

$$u_4 = \sum_{i=1}^4 (-1)^i D_i \quad (13-ب)$$

#### 3-4- نیروی هاب<sup>2</sup>

برآیند نیروهای وارد بر تیغه‌های یک پروانه در صفحه روتور، نیروی هاب روتور گفته می‌شود (شکل 8). با توجه به تقارن تیغه‌های یک پروانه و در نتیجه آن متقارن و معکوس بودن نیروی افقی وارده بر پروانه‌ها، جمع برداری این نیروها باید صفر باشد. بر همین اساس در غالب مقاله‌های قبلی از این نیرو صرف نظر شده است. اما توزیع بار روی تیغه‌ها یکسان نیست و منجر به ایجاد نیرویی در صفحه روتور می‌شود. عامل ایجاد این نیرو یکسان نبودن سرعت نسبی تیغه‌های یک پروانه در حرکت افقی کوادروتور است. نیروی هاب برای روتور نام به صورت زیر است [10]:

$$H_i = C_H \rho A \omega_i^2 R^2 \quad (14-الف)$$

$$C_H = \frac{1}{4} \sigma \mu C_D + \frac{1}{4} \sigma a \mu \lambda (\theta_{tw} - \theta_{I0}) \quad (14-ب)$$

$$\mu = \frac{V_{hor}}{\omega_i R} \quad (14-ج)$$

همان‌طور که در رابطه (14) مشاهده می‌شود، مقدار  $\mu$  (گام پیشرو روتور<sup>3</sup>) به سرعت افقی  $V_{hor}$  کوادروتور وابسته است. بنابراین اگر کوادروتور

<sup>2</sup> Hub force

<sup>3</sup> Rotor advance ratio

<sup>1</sup> Drag moment

$$C_R = \sigma a \mu \left( \frac{\theta_{10}}{6} - \frac{\theta_{tw}}{8} - \frac{\lambda}{4} \right) \quad (17-ب)$$

گشتاور حاصل از چهار روتور بر کوادروتور به صورت زیر در معادلات دینامیکی اعمال می شود:

$$M_R = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} R_{i,x} \\ \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} R_{i,y} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

#### 5-4- نیروی مقاومت هوا

در حین حرکت یک جسم درون سیال نیرویی در خلاف جهت حرکت از سوی سیال به جسم وارد می شود. برای جسمی که در هوا در حال حرکت است این نیرو به عنوان نیروی مقاومت یا نیروی درگ معرفی می شود. این نیرو را در سه راستای  $x$ ,  $y$  و  $z$  با معادلات غیرخطی، به صورت زیر در نظر می گیریم [11]:

$$F_R = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} c \rho A_x \dot{x} |\dot{x}| \\ -\frac{1}{2} c \rho A_y \dot{y} |\dot{y}| \\ -\frac{1}{2} c \rho A_z \dot{z} |\dot{z}| \end{bmatrix} \quad (19)$$

#### 6-4- اثر زمین<sup>۲</sup>

به هنگام پرواز کوادروتور در ارتفاع کم، جریان های گردابی هوای ایجاد شده ناشی از چرخش روتورها، حرکت کوادروتور را تحت تاثیر قرار می دهند. این پدیده باعث تحت تاثیر قرار دادن نیروی تراست تولیدی توسط روتورها می شود و در ارتفاع های کمتر از شعاع روتور بیشتر نمود می یابد که به آن اثر زمین گفته می شود. مدلی که برای تخمین نیروی تراست روتور تحت تاثیر اثر زمین ارائه می شود به صورت زیر است که در آن  $T_{IGE}$  و  $T_{OGE}$  به ترتیب نیروی تراست با تاثیر اثر زمین و خارج از محدوده تاثیر آن (رابطه 8-الف) می باشند [14]:

$$T_{IGE} = \frac{1}{1 - \frac{R^2}{16z^2}} T_{OGE} \quad (20)$$

#### 7-4- اثر گرانش<sup>۳</sup>

در صورتی که مرکز دستگاه مختصات بدنه با مرکز جرم کوادروتور یکسان نباشد، نیروی گرانش زمین در معادلات پیچشی تاثیرگذار می شود. اگر مختصات مرکز جرم کوادروتور را نسبت به مرکز مختصات بدنه معادل  $r_G = [x_G \ y_G \ z_G]^T$  باشد و  $\hat{e}_z$  را بردار یکه در راستای  $z$  مختصات اینرسی در نظر بگیریم، گشتاور حاصل از نیروی وزن کوادروتور از رابطه زیر قابل محاسبه است [12]:

$$F_G = R_{xyz}^T m g \hat{e}_z = m g \begin{bmatrix} -s_\theta \\ c_\theta s_\phi \\ c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \quad (21-الف)$$

$$M_G = r_G \times F_G \quad (21-ب)$$

$$M_G = m g \begin{bmatrix} y_G c_\theta c_\phi - z_G c_\theta s_\phi \\ -z_G s_\theta - x_G c_\theta c_\phi \\ x_G c_\theta s_\phi + y_G s_\theta \end{bmatrix} \quad (21-ج)$$

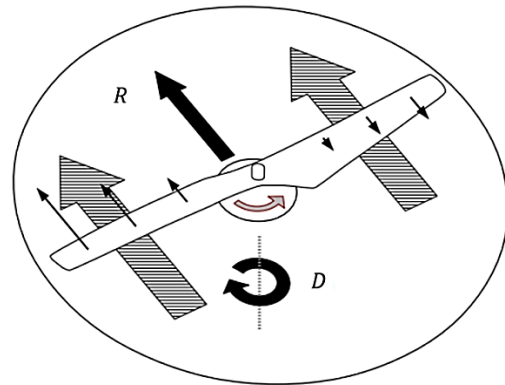


Fig. 8 The hub Force of propeller [10]

شکل 8 نیروی هاب پروانه [10]

در راستای افقی حرکتی نداشته باشد مقدار نیروی هاب و گشتاور رول که در ادامه بررسی می شود (رابطه 17-الف) صفر خواهد بود [19].

با در نظر گرفتن پارامتر  $h$  به عنوان فاصله بین مرکز جرم ربات با صفحه روتورها و  $l$  به عنوان طول هر بال که در "شکل 6" مشخص شده اند، گشتاور  $M_H$  و نیروی  $F_H$  حاصل از نیروی هاب روتورها از رابطه زیر قابل محاسبه اند:

$$M_H = \begin{bmatrix} h \sum_{i=1}^4 H_{i,y} \\ -h \sum_{i=1}^4 H_{i,x} \\ l(H_{1,y} - H_{3,y} + H_{4,x} - H_{2,x}) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$F_H = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 H_{i,x} \\ \sum_{i=1}^4 H_{i,y} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

#### 4-4- گشتاور رول<sup>۱</sup>

گشتاور رول کاملاً مشابه نیروی هاب است و عامل ایجاد آن تولید نیروی لیفت بزرگتر تیغه جلو نسبت تیغه عقبی است و برای روتور نام به صورت زیر است (شکل 9):

$$R_i = C_R \rho A \omega_i^2 R^3 \quad (17-الف)$$

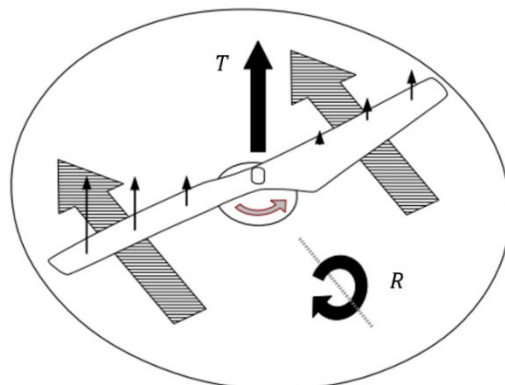


Fig. 9 The rolling moment Force of propeller [10]

شکل 9 گشتاور رول پروانه [10]

<sup>3</sup> Ground effect  
<sup>۱</sup> Gravity effect

<sup>۲</sup> Rolling moment



8-4- اثرات ژيروسکوپ<sup>1</sup>

در معادلات حرکت چرخشی کوادروتور ترم‌های دیگری نیز دخیل هستند. شتاب‌های زاویه‌ای مربوط به اثر ژيروسکوپ بدنه نیز می‌باشند. اثر ژيروسکوپ بدنه ناشی از سرعت زاویه‌ای مختصات بدنه می‌باشد و همانطور که در معادلات زیر می‌بینیم، شتاب یک زاویه با سرعت‌های دو زاویه دیگر نسبت مستقیم دارد [20]. اثرات ژيروسکوپی بدنه را می‌توان به صورت مستقیم از معادلات اوایلر-لاگرانژ نیز استخراج کرد. اما در این پژوهش آن را به صورت جداگانه و در کنار سایر اثرات ژيروسکوپی به شکل زیر بیان می‌کنیم:

$$\theta \dot{\psi} (I_{yy} - I_{zz}) \text{ اثر ژيروسکوپ بدنه زاویه رول}$$

$$\dot{\phi} \dot{\psi} (I_{yy} - I_{zz}) \text{ اثر ژيروسکوپ بدنه زاویه پیچ}$$

$$\dot{\theta} \dot{\phi} (I_{yy} - I_{zz}) \text{ اثر ژيروسکوپ بدنه زاویه یاو}$$

مجموعه دیگر گشتاورها اثرات ژيروسکوپ روتور می‌باشند. اثر ژيروسکوپ روتور ناشی از اینرسی روتور، جمع جبری سرعت زاویه روتورها می‌باشد [21].

$$\Omega_r = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 \quad (22)$$

$$J_r \dot{\theta} \Omega_r \text{ اثر ژيروسکوپ روتور زاویه رول}$$

$$J_r \dot{\phi} \Omega_r \text{ اثر ژيروسکوپ روتور زاویه پیچ}$$

همچنین گشتاور مقاوم اینرسی حول محور Z مشابه اثر ژيروسکوپ روتور حول محورهای X و Y می‌باشد [22].

$$J_r \dot{\Omega}_r \text{ گشتاور مقاوم اینرسی}$$

ترم‌هایی که در این بخش به معادلات دینامیکی چرخشی اضافه می‌شوند به صورت زیر هستند.

$$M_{gyro} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \dot{\psi} (I_{yy} - I_{zz}) + J_r \dot{\theta} \Omega_r \\ \dot{\phi} \dot{\psi} (I_{zz} - I_{xx}) - J_r \dot{\phi} \Omega_r \\ \dot{\theta} \dot{\phi} (I_{xx} - I_{yy}) + J_r \dot{\phi} \Omega_r \end{bmatrix} \quad (23)$$

9-4- معادلات کلی حاکم

حال معادلات حرکت سیستم را با در نظر گرفتن تمامی ترم‌های ذکر شده در بخش‌های پیشین و با استفاده از معادلات اوایلر-لاگرانژ به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= (c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi) u_1 - F_{H,x} - F_{R,x} + F_{W,x} \\ m\ddot{y} &= (c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi) u_1 - F_{H,y} - F_{R,y} + F_{W,y} \\ m\ddot{z} &= mg - c_\phi c_\theta u_1 - F_{R,z} + F_{W,z} \\ I_{xx} \ddot{\phi} &= u_2 - \dot{I}_{xx} \dot{\phi} + M_{gyro,x} - M_{H,x} + M_{R,x} + M_{G,x} + \tau_{W,x} \\ I_{yy} \ddot{\theta} &= u_3 - \dot{I}_{yy} \dot{\theta} + M_{gyro,y} - M_{H,y} + M_{R,y} + M_{G,y} + \tau_{W,y} \\ I_{zz} \ddot{\psi} &= u_4 - \dot{I}_{zz} \dot{\psi} + M_{gyro,z} - M_{H,z} + M_{R,z} + M_{G,z} + \tau_{W,z} \end{aligned} \quad (24)$$

که در این معادلات  $\tau_{W,x}$ ،  $\tau_{W,y}$  و  $\tau_{W,z}$  به ترتیب مولفه‌های اول، دوم و سوم بردار  $\tau_{W,j}$  هستند. همچنین  $F_{W,j}$  نیروی باد در راستای  $j$  و  $\tau_{W,j}$  گشتاور باد حول محور  $j$  می‌باشد ( $j = x, y, z$ ) [3].

5- شبیه سازی و نتایج

صحت معادلات دینامیکی استخراج شده را در دو شرایط کاری متفاوت، یکی بدون در نظر جسم متصل خارجی به کوادروتور و دیگری در شرایط کوپل شده با یک دوربین و با بهره‌گیری از کنترل کننده LQR بررسی می‌کنیم. تمامی نتایج در این مثال‌ها در مختصات جهانی می‌باشند. لیست پارامترها و ثابت‌هایی که برای شبیه‌سازی استفاده شده‌اند در جدول 1 آمده است [22].

1-1- شرایط کاری 1

در این قسمت به بررسی و مقایسه پاسخ ورودی پله و همچنین رفتار

دینامیکی معادلات دینامیکی رابطه (24) و معادلات دینامیکی استخراج شده در کارهای [6-10] پرداخته می‌شود. این معادلات به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= (c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi) u_1 \\ m\ddot{y} &= (c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi) u_1 \\ m\ddot{z} &= mg - c_\phi c_\theta u_1 \\ I_{xx} \ddot{\phi} &= u_2 + \dot{\theta} \dot{\psi} (I_{yy} - I_{zz}) + J_r \dot{\theta} \Omega_r \\ I_{yy} \ddot{\theta} &= u_3 + \dot{\phi} \dot{\psi} (I_{zz} - I_{xx}) - J_r \dot{\phi} \Omega_r \\ I_{zz} \ddot{\psi} &= u_4 + \dot{\theta} \dot{\phi} (I_{xx} - I_{yy}) \end{aligned} \quad (25)$$

برای تمامی شبیه‌سازی‌ها از کنترل کننده ارائه شده در [17] استفاده شده است. ماتریس‌های Q و R را به صورت زیر تعریف کردیم:

$$Q = I_{12 \times 12} \quad (26)$$

$$R = 10^{-4} I_{4 \times 4} \quad (27)$$

و ماتریس گین K را به صورت زیر بدست آوردیم (شکل 10):

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 70.71 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -70.71 & 0 & 55.46 & 0 & 0 \\ 22.03 & 0 & 0 & 0 & 53.68 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 18.47 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -30.61 & 0 & -0.94 & 0 & 0 \\ 21.08 & 0 & 0 & 0.93 & 0.93 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10.01 \end{bmatrix} \quad (28)$$

5-1-1- رفتار دینامیکی مدل در پاسخ پله

برای بررسی رفتار کوادروتور در پاسخ به ورودی پله، مقدار مطلوب 1 متر به عنوان ورودی کنترلی در جهت‌های x، y و z و 1 رادیان به زاویه یاو ( $\psi$ ) سیستم "شکل 10" اعمال گردید -یک بار برای معادلات دینامیکی ارائه شده در این مقاله یعنی روابط 24 و بار دیگر برای معادلات کارهای قبلی یعنی روابط (25) و نتایج 11 تا 19 حاصل شد.

$$X_{ref} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (29)$$

به‌عنوان یک معیار راستی آزمایشی شبیه‌سازی‌های انجام شده، با مقایسه سرعت روتورها در حالت شناور بودن ربات در "شکل 17" با نتایج عملی کار

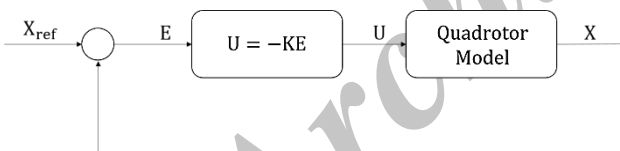


Fig. 10 Control loop

شکل 10 حلقه کنترلی

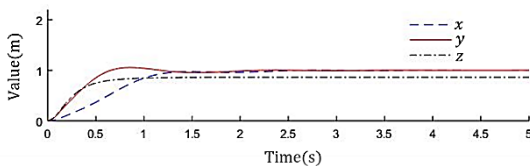


Fig. 11 Position result of previous work

شکل 11 نتیجه موقعیت کار قبلی

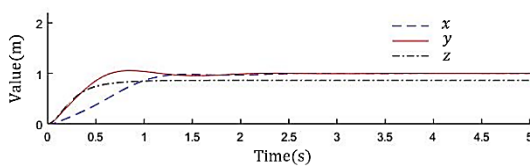


Fig. 12 Position result of present work

شکل 12 نتیجه موقعیت کار حاضر

<sup>2</sup> Gyroscopic effects

جدول 1 لیست ثابت‌ها

نام پارامتر	نماد	واحد	مقدار
ممان اینرسی کوادروتور به ترتیب حول محور x، y و z	$I_{xx}$ $I_{yy}$ $I_{zz}$	$\text{kgm}^2$ $\text{kgm}^2$ $\text{kgm}^2$	$8.1 \times 10^{-3}$ $8.1 \times 10^{-3}$ $14.2 \times 10^{-3}$
مشتق ممان اینرسی کوادروتور به ترتیب حول محور x، y و z	$\dot{I}_{xx}$ $\dot{I}_{yy}$ $\dot{I}_{zz}$	$\text{kgm}^2\text{s}^{-1}$ $\text{kgm}^2\text{s}^{-1}$ $\text{kgm}^2\text{s}^{-1}$	0 0 0
جرم کوادروتور	$m$	kg	1
شتاب گرانش زمین	$g$	$\text{ms}^{-2}$	9.81
نسبت جماد <sup>1</sup>	$\sigma$	-	0.0821
ضریب درگ	$C_D$	-	0.05
شیب ضریب برآ <sup>2</sup>	$a$	$\text{rad}^{-1}$	6.283
نسبت جریان ورودی <sup>3</sup>	$\lambda$	-	0.11
زاویه نصب <sup>4</sup>	$\theta_{i0}$	rad	0.67
زاویه پیچش اولیه <sup>5</sup>	$\theta_{tw}$	rad	0.29
چگالی هوا	$\rho$	$\text{kgm}^{-3}$	1.2
مساحت روتور	$A$	$\text{m}^2$	$75.5 \times 10^{-3}$
شعاع روتور	$R$	m	0.155
ارتفاع مرکز جرم کوادروتور در دستگاه بدنه	$h$	m	0.05
فاصله مرکز روتور تا مرکز دستگاه بدنه	$l$	m	0.024
مساحت مؤثر کوادروتور در راستای محور x، y و z	$A_x$ $A_y$ $A_z$	$\text{m}^2$ $\text{m}^2$ $\text{m}^2$	0.1 0.1 0.2
ضریب لزجت هوا	$c$	$\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$	0.8
ممان اینرسی روتور	$J_r$	$\text{kgm}^2$	$1.08 \times 10^{-6}$
موقعیت مرکز جرم در دستگاه بدنه	$x_G$ $y_G$ $z_G$	m m m	0.05 0.04 0.06

زاویه یاو، نتیجه کنترلی کار حاضر با کار قبلی تقریباً مشابه است. اما با مقایسه "شکل‌های 17 تا 19" می‌توان دید که بهای کنترلی که برای رسیدن کوادروتور به اهداف تعیین شده پرداخت می‌شود، کاملاً در این دو کار کاملاً نابرابر است. چرا که برای رسیدن به این اهداف باید به نیروهای آیرودینامیکی

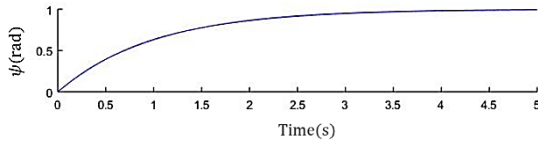


Fig. 15 Yaw angle result of present work

شکل 15 نتیجه زاویه یاو کار حاضر

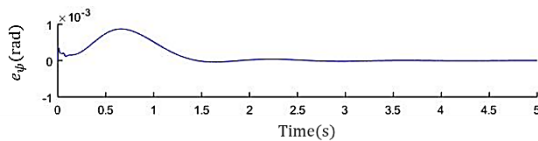


Fig. 16 Yaw angle difference of present work and previous work ( $e_{\psi} = \psi_{\text{present work}} - \psi_{\text{previous work}}$ )

شکل 16 تفاوت زاویه یاو کار حاضر و کار قبلی

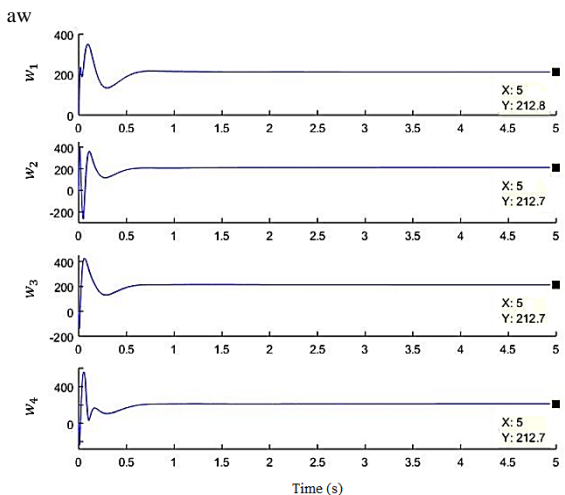


Fig. 17 Rotor velocity results of previous work

شکل 17 نتیجه سرعت روتورها در کار قبلی

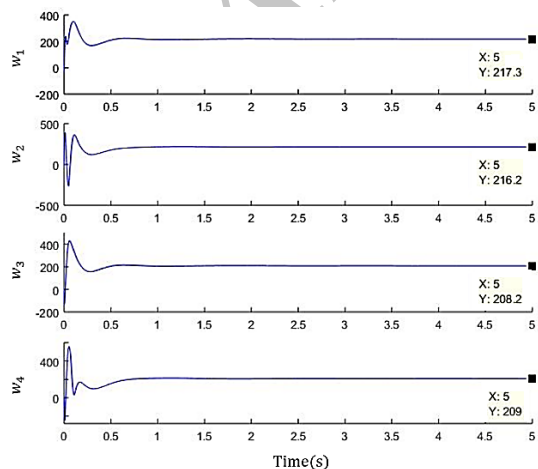


Fig. 18 Rotor velocity results of present work

شکل 18 نتیجه سرعت روتورها در کار حاضر

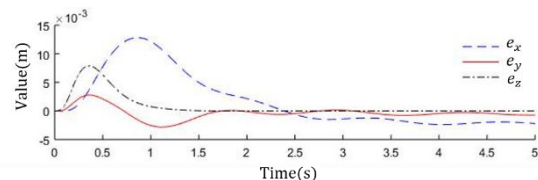


Fig. 13 Position difference of present work and previous work

( $e_x = x_{\text{present work}} - x_{\text{previous work}}$ ,  $e_y = y_{\text{present work}} - y_{\text{previous work}}$  and  $e_z = z_{\text{present work}} - z_{\text{previous work}}$ )

شکل 13 تفاوت موقعیت کار حاضر و کار قبلی

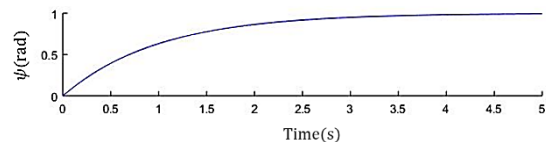


Fig. 14 Yaw angle result of previous work

شکل 14 نتیجه زاویه یاو کار قبلی

[22] ملاحظه می‌شود که نتایج به دست آمده اختلاف بسیار ناچیزی دارند. در "شکل‌های 11 تا 16" ملاحظه می‌شود هم برای موقعیت و هم برای

<sup>1</sup> Solidity ratio  
<sup>2</sup> Lift slope  
<sup>3</sup> Inflow ratio  
<sup>4</sup> Zero angle of incidence  
<sup>5</sup> Twist angle of incidence

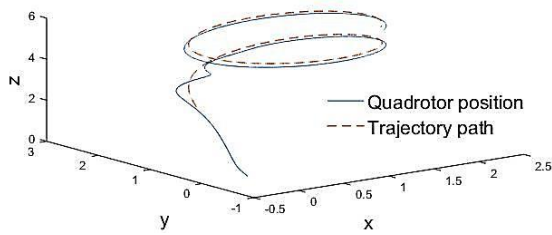


Fig. 20 Position result in 3D trajectory tracking of present work  
 شکل 20 نتیجه موقعیت کار حاضر در ردیابی مسیر سه بعدی

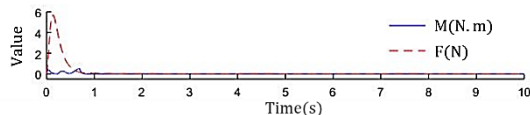


Fig. 21 Aerodynamic forces result in 3D trajectory tracking of present work  
 شکل 21 نتیجه اندازه نیروهای آیرودینامیکی کار حاضر در ردیابی مسیر سه بعدی

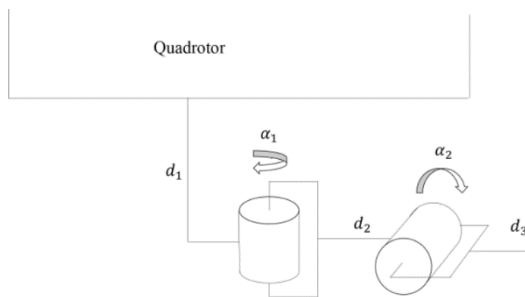


Fig. 22 Diagram of camera connection arm  
 شکل 22 دیاگرام بازوی اتصال دوربین

جدول 2 مشخصات بازوی رباتیک

نام پارامتر	نماد	واحد	مقدار
جرم لینک 1	$m_1$	kg	0.25
جرم لینک 2	$m_2$	kg	0.25
جرم لینک 3	$m_3$	kg	0.2
طول لینک 1	$d_1$	m	0.1
طول لینک 2	$d_2$	m	0.05
طول لینک 3	$d_3$	m	0.02

و سوم  $r_3$  در دستگاه بدنه به صورت زیر است:

$$r_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (31-الف)$$

$$r_2 = \begin{bmatrix} \frac{d_2}{2} \cos(\alpha_2) \\ \frac{d_2}{2} \sin(\alpha_2) \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (31-ب)$$

$$r_3 = \begin{bmatrix} \left(\frac{d_2}{2} + \frac{d_3}{2} \cos(\alpha_3)\right) \cos(\alpha_2) \\ \left(\frac{d_2}{2} + \frac{d_3}{2} \cos(\alpha_3)\right) \sin(\alpha_2) \\ d_1 + \frac{d_3}{2} \sin(\alpha_3) \end{bmatrix} \quad (31-ج)$$

حرکت بازو باعث تغییر مداوم اینرسی و مرکز جرم مجموعه ربات و بازو

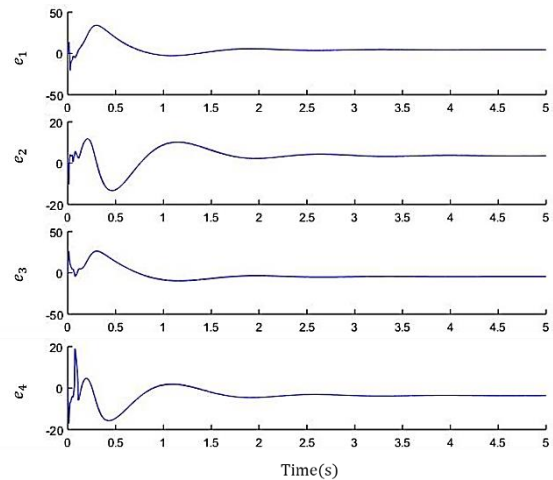


Fig. 19 Rotor velocity difference of present work an previous work  
 شکل 19 تفاوت سرعت روتورها در کار حاضر و کار قبلی

که در حین پرواز به کوادروتور اعمال می شود غلبه گردد. در "شکل های 17 و 18" ملاحظه می شود که سرعت روتورها در حالت دینامیک ساده رابطه (24) و دینامیک کامل رابطه (25) بسیار متفاوت هستند و عامل این تفاوت از نیروهای آیرودینامیکی است که در مدل استفاده شده در کارهای پیشین از آن ها صرف نظر شده است. همچنین در حالت پایدار "شکل 18" می بینیم که سرعت نهایی روتورها به هنگام شناور بودن ربات برابر نیستند. این نتیجه حاصل از عدم تقارن ساختار کوادروتور و منطبق نبودن مرکز جرم کوادروتور با مرکز هندسی و مبدأ مختصات بدنه آن است. این درحالی است که این عدم تطابق کاملاً منطقی است و در صورتی که بتوان در صفحه X-Y به این مهم دست یافت در راستای Z امری محال است.

### 5-1-2- رفتار دینامیکی مدل در ردیابی مسیر

جهت بررسی رفتار دینامیکی کوادروتور و نیروهای آیرودینامیکی (بجز نیروی تراست و گشتاور درگ) که در طول زمانی کوادروتور یک مسیر مشخص را دنبال می کند، مسیر زیر به عنوان ورودی به سیستم "شکل 10" برای مدل بدست آمده در این مقاله (رابطه 24) اعمال شد و نتایج 20 و 21 حاصل شد. ملاحظه می شود زمانی که کنترلر درحال تلاش برای کم کردن اختلاف موقعیت کوادروتور با مسیر تعبیه شده است، نیروهای آیرودینامیکی و گشتاورهای حاصل از آن ها اندازه قابل ملاحظه ای دارند و با کم شدن این اختلاف و با قرار گرفتن کوادروتور روی مسیر، نیروهای آیرودینامیکی کمتر می شوند، اما هرگز صفر نمی شوند.

$$x = \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + 1 \quad (30-الف)$$

$$y = \sin\left(\frac{t}{2}\right) + 1 \quad (30-ب)$$

$$z = \frac{\log(t+1)}{10} + 3 \quad (30-ج)$$

### 5-2- شرایط کاری 2

در این حالت فرض می گردد دوربینی به کوادروتور متصل شده است و اثر آن مورد بررسی قرار می گیرد. دوربین با یک بازوی رباتیک سه لینکی مطابق "شکل 19" و با مشخصات جدول 3 معادل سازی می شود. لینک اول ثابت و در مرکز مختصات بدنه، به بدنه کوادروتور متصل می باشد. برای اجتناب از پیچیدگی مدل سازی دینامیکی این ربات، جرم هر لینک متمرکز در وسط آن فرض می گردد. با عنایت به این موضوع، مختصات لینک های اول  $r_1$ ، دوم  $r_2$



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = I_{zz} \ddot{\psi} + I_{zz} \dot{\psi} + I_{1,z} \ddot{\phi} + I_{1,z} \dot{\phi} + I_{2,z} (\ddot{\phi} + \ddot{\alpha}_2) + I_{2,z} (\dot{\phi} + \dot{\alpha}_2) + I_{3,z} (\ddot{\phi} + \ddot{\alpha}_2) + I_{3,z} (\dot{\phi} + \dot{\alpha}_2) \quad (41)$$

براساس روابط بالا و همچنین اثر زمین، رابطه (28-ج) و سایر نیروهای آیرودینامیکی که در بخش 4 آمده است، معادلات دینامیکی مجموعه به صورت است:

$$\begin{aligned} M_t \ddot{x} &= (c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi) u_1 - F_{H,x} - F_{R,x} + F_{w,x} \\ M_t \ddot{y} &= (c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi) u_1 - F_{H,y} - F_{R,y} + F_{w,y} \\ M_t \ddot{z} &= M_t g - c_\phi c_\theta u_1 - F_{R,z} + F_{w,z} \\ I_x \ddot{\phi} &= S_\phi + u_2 + M_{gyro,x} - M_{H,x} + M_{R,x} + M_{G_2,x} + \tau_{w,x} \\ I_y \ddot{\theta} &= S_\theta + u_3 + M_{gyro,y} - M_{H,y} + M_{R,y} + M_{G_2,y} + \tau_{w,y} \\ I_z \ddot{\psi} &= S_\psi + u_4 + M_{gyro,z} - M_{H,z} + M_{R,z} + M_{G_2,z} + \tau_{w,z} \end{aligned} \quad (42)$$

که در روابط بالا  $I_x$ ،  $I_y$  و  $I_z$  به ترتیب اینرسی مجموعه حول محورهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  و به صورت زیر است. همچنین  $s_\phi$ ،  $s_\theta$  و  $s_\psi$  جهت اجتناب از پیچیدگی معادلات به صورت زیر تعریف شده است.

$$I_x = I_{xx} + I_{1,x} + I_{2,x} + I_{3,x} \quad (43-الف)$$

$$I_y = I_{yy} + I_{1,y} + I_{2,y} + I_{3,y} \quad (43-ب)$$

$$I_z = I_{zz} + I_{1,z} + I_{2,z} + I_{3,z} \quad (43-ج)$$

$$S_\phi = -\dot{I}_{xx} \dot{\phi} - \dot{I}_{1,x} \dot{\phi} - \dot{I}_{2,x} \dot{\phi} - I_{3,x} (\ddot{\alpha}_3 \cos(\alpha_2) - \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \sin(\alpha_2)) - \dot{I}_{3,x} (\dot{\phi} + \dot{\alpha}_3 \cos(\alpha_2)) \quad (44-الف)$$

$$S_\theta = -\dot{I}_{yy} \dot{\theta} - \dot{I}_{1,y} \dot{\theta} - \dot{I}_{2,y} \dot{\theta} - I_{3,y} (\ddot{\alpha}_3 \sin(\alpha_2) - \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \cos(\alpha_2)) - \dot{I}_{3,y} (\dot{\theta} + \dot{\alpha}_3 \sin(\alpha_2)) \quad (44-ب)$$

$$S_\psi = -\dot{I}_{zz} \dot{\psi} - \dot{I}_{1,z} \dot{\psi} - \dot{I}_{2,z} \dot{\psi} - \dot{I}_{3,z} \dot{\psi} - I_{3,z} \ddot{\alpha}_2 - \dot{I}_{2,z} \dot{\alpha}_2 - \dot{I}_{3,z} \dot{\alpha}_2 - \dot{I}_{3,z} (\dot{\psi} + \dot{\alpha}_2) \quad (44-ج)$$

برای بررسی رفتار کوادروتور کوپل با بازو در پاسخ به ورودی پله، مقدار مطلوب 1 متر به عنوان  $s$  ورودی کنترلی در جهت‌های  $x$ ،  $y$  و  $z$  و 1 رادیان به زاویه یو ( $\psi$ ) سیستم "شکل 10" اعمال گردید. برای معادلات روابط (42) و نتایج "شکل‌های 23 و 24" حاصل شد. همچنین موقعیت زاویه‌ای بازوی "شکل 22" براساس معادلات (45 و 46) در حال تغییر هستند.

$$\alpha_2 = \sin(2t) \quad (45)$$

$$\alpha_3 = \sin\left(0.5t + \frac{\pi}{6}\right) \quad (46)$$

ملاحظه می‌شود که در این حالت چون ترم‌های موجود در معادلات زاویه‌ای نسبت به حالت قبل یعنی معادلات (24) بیشتر شده است، اندازه گشتاورهایی که در فاصله رسیدن کوادروتور به مقادیر داده شده در ورودی کنترلی به کوادروتور اعمال می‌شوند بسیار بیشتر است.

### 6- نتیجه گیری

در این مقاله مدل‌سازی دینامیکی کوادروتور با توجه به تغییرات در شرایط محیطی انجام شد. برای استخراج معادلات حاکم بر کوادروتور، از روش

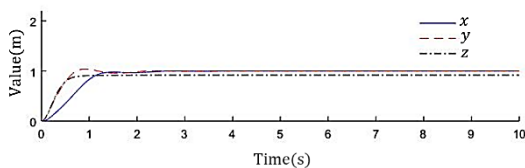


Fig. 23 Position results for step response of arm-carrying quadrotor  
شکل 23 نتیجه موقعیت در پاسخ پله کوادروتور حامل بازو

می‌گردد. به منظور بررسی اثر مرکز جرم مجموعه، مختصات مرکز جرم جدید را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$r_{G_2} = \frac{mr_G + m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3}{m_t} \quad (32-الف)$$

$$= m + m_1 + m_2 + m_3 \quad (32-ب)$$

$$F_{G_2} = R_{xyz}^T m_t g \hat{e}_z = m_t g \begin{bmatrix} -s_\theta \\ c_\theta s_\phi \\ c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \quad (33-الف)$$

$$M_{G_2} = r_{G_2} \times F_{G_2} \quad (33-ب)$$

$$M_{G_2} = m_t g \begin{bmatrix} y_{G_2} c_\theta c_\phi - z_{G_2} c_\theta s_\phi \\ -z_{G_2} s_\theta - x_{G_2} c_\theta c_\phi \\ x_{G_2} c_\theta s_\phi + y_{G_2} s_\theta \end{bmatrix} \quad (33-ج)$$

همچنین به منظور بررسی اثر اینرسی، بار دیگر معادلات لاگرانژین بازنویسی می‌شوند.  $T_{trans}$  و  $U$  به ترتیب انرژی جنبشی انتقالی و پتانسیل مجموعه،  $T_{rot}$  انرژی جنبشی چرخشی کوادروتور و  $T_{rot_1}$  و  $T_{rot_2}$  و  $T_{rot_3}$  به ترتیب انرژی جنبشی لینک‌های اول، دوم و سوم بازوی "شکل 19" به صورت زیر هستند:

$$T_{trans} = \frac{1}{2} M_t (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (34)$$

$$U = -mgz - m_1 gz - m_2 gz - m_3 g \left( z - \frac{d_3}{2} \sin(\alpha_3) \right) \quad (35)$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I_{xx} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \dot{\psi}^2 \quad (36)$$

$$T_{rot_1} = \frac{1}{2} I_{1,x} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_{1,y} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{1,z} \dot{\psi}^2 \quad (37)$$

$$T_{rot_2} = \frac{1}{2} I_{2,x} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_{2,y} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{2,z} (\dot{\psi} + \dot{\alpha}_2)^2 \quad (38)$$

$$T_{rot_3} = \frac{1}{2} I_{3,x} (\dot{\phi}^2 + \dot{\alpha}_3 \cos(\alpha_2))^2 + \frac{1}{2} I_{3,y} (\dot{\theta}^2 + \dot{\alpha}_3 \sin(\alpha_2))^2 + \frac{1}{2} I_{3,z} (\dot{\psi}^2 + \dot{\alpha}_2^2) \quad (39)$$

که در روابط بالا برای  $k = 1, 2, 3$   $I_{k,x}$ ،  $I_{k,y}$  و  $I_{k,z}$  به ترتیب اینرسی لینک  $k$  حول محورهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  می‌باشد. بنابراین لاگرانژین سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$L = T_{trans} + T_{rot} + T_{rot_1} + T_{rot_2} + T_{rot_3} - U \quad (40)$$

حال سمت چپ معادله‌ی اولر-لاگرانژ (رابطه 3) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = M_t \ddot{x} \quad (41-الف)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = M_t \ddot{y} \quad (41-ب)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = M_t \ddot{z} - M_t g \quad (41-ج)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= I_{xx} \ddot{\phi} + \dot{I}_{xx} \dot{\phi} + I_{1,x} \ddot{\phi} + \dot{I}_{1,x} \dot{\phi} \\ &+ I_{2,x} \ddot{\phi} + \dot{I}_{2,x} \dot{\phi} \\ &+ I_{3,x} (\ddot{\phi} + \dot{\alpha}_3 \cos(\alpha_2)) \\ &- \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \sin(\alpha_2) \\ &+ \dot{I}_{3,x} (\dot{\phi} + \dot{\alpha}_3 \cos \alpha_2) \end{aligned} \quad (41-د)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= I_{yy} \ddot{\theta} + \dot{I}_{yy} \dot{\theta} + I_{1,y} \ddot{\theta} + \dot{I}_{1,y} \dot{\theta} \\ &+ I_{2,y} \ddot{\theta} + \dot{I}_{2,y} \dot{\theta} \\ &+ I_{3,y} (\ddot{\theta} + \dot{\alpha}_3 \sin(\alpha_2)) \\ &- \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \cos(\alpha_2) \\ &+ \dot{I}_{3,y} (\dot{\theta} + \dot{\alpha}_3 \sin(\alpha_2)) \end{aligned} \quad (41-ه)$$

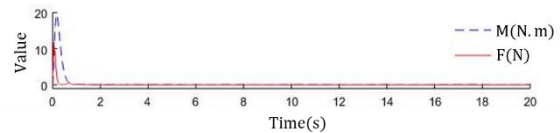


Fig. 24 Aerodynamic forces result

شکل 24 نتیجه اندازه نیروهای آیرودینامیکی

اولر-لاگرانژ استفاده شد و تمامی نیروهای آیرودینامیکی که بر حرکت آن تاثیر می‌گذارند در نظر گرفته شدند. در مقالات پیشین، معادلات دینامیکی به طور جامع در نظر گرفته نشده‌است. بنابراین پس از تشریح هر یک از نیروهای دخیل در حرکت کوادروتور، مدل دینامیکی جامع برای آن ارائه شد. در انتها عملکرد سیستم در دو شرایط کاری متفاوت با بهره‌گیری از کنترل‌کننده LQR، به صورت عددی شبیه‌سازی شده و به کمک آن‌ها مدل دینامیکی به دست آمده صحت‌گذاری شد.

در شرایط کاری اول در دو آزمون متفاوت به بررسی و مقایسه معادلات دینامیکی کار حاضر با کارهای پیشین پرداخته شد. در آزمون پاسخ به ورودی پله، رفتار دینامیکی کوادروتور براساس معادلات دینامیکی کار قبلی با مدل دینامیکی ارائه شده در کار حاضر مقایسه شد و مشاهده شد که با وجود خروجی کنترلی تقریباً مشابه دو سیستم رفتاری متفاوت دارند و سرعت روتورها به ازای ورودی‌های برابر کاملاً متفاوت هستند. همچنین در آزمون ردیابی مسیر تأثیر نیروهای آیرودینامیکی استخراج شده در این مقاله، زمانی که کوادروتور مسیر از پیش تعیین شده را دنبال می‌کند ملاحظه شد و دیدیم زمانی که کنترلر تلاش می‌کند اختلاف موقعیت کوادروتور و مسیر را کاهش دهد، این نیروها اندازه قابل ملاحظه‌ای دارند. همچنین با قرار گرفتن کوادروتور روی مسیر این ترم‌ها همچنان روی حرکت تأثیر گذار هستند. در شرایط کاری دوم نیز عملکرد کوادروتور تحت تأثیر دوربین متصل به آن که با حرکت خود معادلات دینامیکی سیستم را به صورت پیوسته تغییر می‌دهد، بررسی شد. در این شرایط نیز نتایج حاصل از رفتار دینامیکی، تأثیر نیروهای آیرودینامیکی و نیروها و گشتاورهای حاصل از حرکت بازوی رباتیک ارائه شد.

### 7- فهرست علائم

در این قسمت،  $\hat{I}$  نشان‌دهنده روتور اول، دوم، سوم و یا چهارم،  $k$  نشان‌دهنده لینک یک، دو و یا سه بازوی رباتیک و  $\hat{z}$  نشان‌دهنده محور  $x$ ،  $y$  و یا  $z$  می‌باشد.

$\hat{e}_z$	بردار یکه در راستای $z$ مختصات اینرسی
$\hat{e}_x$	بردار یکه در راستای $x$ مختصات بدنه
$\hat{e}_y$	بردار یکه در راستای $y$ مختصات بدنه
$\hat{e}_z$	بردار یکه در راستای $z$ مختصات بدنه
$e$	تفاضل
$E$	خطای ردیابی
$F_H$	بردار نیروی هاب (N)
$F_I$	بردار نیروی کوادروتور در دستگاه اینرسی (N)
$F_G$	بردار نیروی وزن در دستگاه بدنه (N)
$F_R$	بردار نیروی مقاومت هوا (N)
$F_{w,j}$	نیروی باد در راستای محور $j$ (N)
$H_i$	نیروی هاب روتور (N)
$I$	اینرسی ( $\text{kgm}^2$ )
$L$	لاگرانژین (J)
$m$	جرم کوادروتور (kg)
$m_k$	جرم لینک $k$ ام (kg)
$m_t$	مجموع جرم کوادروتور و بازو (kg)
$M_D$	بردار گشتاور حاصل از نیروهای درگ (Nm)
$M_G$	بردار گشتاور اثر زمین (Nm)
$M_{gyro}$	بردار گشتاور اثر ژيروسکوپ (Nm)
$M_H$	بردار گشتاور هاب (Nm)
$M_R$	بردار گشتاور رول (Nm)
$M_T$	بردار گشتاور حاصل از نیروهای تراست (Nm)
$Q$	نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی (N)
$Q$	بردار حالت
$Q_i$	گشتاور روتور (Nm)
$R_i$	گشتاور رول روتور (Nm)
$r_G$	بردار موقعیت مرکز جرم کوادروتور در دستگاه بدنه (m)
$r_k$	بردار موقعیت مرکز جرم لینک $k$ ام در دستگاه بدنه (m)
$T_i$	نیروی تراست روتور $i$ ام (N)
$T_{IGE}$	نیروی تراست با در نظر گرفتن اثر زمین (N)
$T_{OGE}$	نیروی تراست بدون در نظر گرفتن اثر زمین (N)
$T_{rot}$	انرژی جنبشی حرکت چرخشی (J)
$T_{rot_1}$	انرژی جنبشی چرخشی لینک 1 (J)
$T_{rot_2}$	انرژی جنبشی چرخشی لینک 2 (J)
$T_{rot_3}$	انرژی جنبشی چرخشی لینک 3 (J)
$T_{trans}$	انرژی جنبشی حرکت انتقالی (J)
$U$	انرژی پتانسیل (J)
$u_1$	مجموع نیروی تراست پروانه‌ها (N)
$u_2$	گشتاور حاصل از نیروهای تراست حول محور $x$ دستگاه بدنه (Nm)
$u_3$	گشتاور حاصل از نیروهای تراست حول محور $y$ دستگاه بدنه (Nm)
$V$	سرعت خطی ( $\text{ms}^{-1}$ )
$x$	موقعیت خطی کوادروتور در راستای $x$ دستگاه اینرسی (m)
$X$	بردار موقعیت
$y$	موقعیت خطی کوادروتور در راستای $y$ دستگاه اینرسی (m)

$A$	مساحت ( $\text{m}^2$ )
$A_x$	مساحت مؤثر کوادروتور در راستای محور $x$ ( $\text{m}^2$ )
$A_y$	مساحت مؤثر کوادروتور در راستای محور $y$ ( $\text{m}^2$ )
$A_z$	مساحت مؤثر کوادروتور در راستای محور $z$ ( $\text{m}^2$ )
$b$	فاکتور تراست ( $\text{Ns}^2$ )
$C_H$	ضریب نیروی هاب
$C_Q$	ضریب گشتاور روتور
$C_T$	ضریب تراست
$C_T^{IGE}$	ضریب نیروی تراست با در نظر گرفتن اثر زمین
$C_T^{OGE}$	ضریب نیروی تراست بدون در نظر گرفتن اثر زمین
$d$	فاکتور درگ ( $\text{Nms}^2$ )
$d_k$	طول لینک $k$ ام (m)
$\hat{e}_x$	بردار یکه در راستای $x$ مختصات اینرسی
$\hat{e}_y$	بردار یکه در راستای $y$ مختصات اینرسی

[3] F. Sabatino, *Quadrotor Control: Modeling, Nonlinear Control Design, and Simulation*, Master's Degree Project, KTH Electrical Engineering, Stockholm, Sweden, 2015.

[4] Y. Naidoo, R. Stopforth and G. Bright, Quad-Rotor Unmanned Aerial Vehicle Helicopter Modelling & Control, *International Journal of Advanced Robotic Systems*, Vol. 8, No. 4, pp. 45, 2011.

[5] Zhenyue Jia, Jianqiao Yu, et al. Integral backstepping sliding mode control for quadrotor helicopter under external uncertain disturbances, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 68, pp. 299-307, 2017.

[6] Y. R. Tang, X. Xiao, Y. Li, Nonlinear dynamic modeling and hybrid control design with dynamic compensator for a small-scale UAV quadrotor, *Measurement*, Vol. 109, pp. 51-64, 2017.

[7] Y. C. Choi, H. S. Ahn, Nonlinear control of quadrotor for point tracking: actual implementation and experimental tests, *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, Vol. 20, No. 3, pp. 1179-1192, 2015.

[8] M. Nourimotlagh, P. Safarpour, M. Pourgholi, Dynamic modeling, simulation and control of a quadrotor using feedback linearization and PID controller based on MEMS sensors experimental data, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 12, pp. 175-185, 2016. (in Persian فارسی)

[9] P. S. Gohari, S. Taghvaei, H. Mohammadi, Boundary surveillance using chaotic motion planning and control for a quadrotor robot, Vol. 16, No. 11, pp. 217-223, 2016. (in Persian فارسی)

[10] R. Norouzi, H. Shahbazi, K. Jamshidi, Design and implementation of a neural intelligent controller and a hybrid PD controller for quadrotor, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 10, pp. 194-204, 2017. (in Persian فارسی)

[11] J.J. Xiong, G. B. Zhang, Global fast dynamic terminal sliding mode control for a quadrotor UAV, *ISA transactions*, Vol. 66, pp. 233-240, 2017.

[12] Palunko, Ivana, and Rafael Fierro, Adaptive control of a quadrotor with dynamic changes in the center of gravity, *IFAC Proceedings Volumes* 44.1, pp. 2626-2631, 2011.

[13] D. Bernard, F. Riccardi, M. Giurato, M. Lovera, A dynamic analysis of ground effect for a quadrotor platform, *IFAC-PapersOnLine*, Vol. 50, Issue 1, pp. 10311-10316, 2017.

[14] I. Sharf et al., Ground effect experiments and model validation with Draganflyer X8 rotorcraft, *2014 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, Orlando, FL, pp. 1158-1166, 2014.

[15] S. Bouabdallah, *Design and control of quadrotors with application to autonomous flying*, PhD Thesis, State Engineer, Aboubekr Belkaid University, Tlemcen, Algeria, Vol. 3727, 2007.

[16] J. Diebel, Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors, *Matrix* 58.15-16, pp. 1-35, 2006.

[17] S. Khatoun, D. Gupta, an L. K. Das, PID & LQR control for a quadrotor: Modeling and simulation," *Proc. 2014 Int. Conf. Adv. Comput. Commun. Informatics, ICACCI 2014*, pp. 796-802, 2014.

[18] Benallegue, Abdelaziz, Abdellah Mokhtari, and Leonid Fridman. "High-order sliding-mode observer for a quadrotor UAV." *International journal of robust and nonlinear control* 18.4-5, pp. 427-440, 2008.

[19] J. M. Seddon, and S. Newman. *Basic helicopter aerodynamics*. Vol. 40, pp. 78-89 John Wiley & Sons, 2011.

[20] S. Bouabdallah and R. Siegwart, Full control of a quadrotor, *2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, San Diego, CA, pp. 153-158, 2007.

[21] S. Bouabdallah, R. Siegwart, Design and Control of a Miniature Quadrotor, *Valavanis K.P. (eds) Advances in Unmanned Aerial Vehicles. Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering*, vol 33. Springer, Dordrecht, 2007.

[22] Bresciani, Tammaso, *Modelling, identification and control of a quadrotor helicopter*, MSc Theses, Department of Automatic Control, Lund University, Sweden, 2008.

z	موقعیت خطی کوادروتور در راستای Z دستگاه اینرسی (m)
علایم یونانی	
$\alpha_2$	موقعیت زاویه‌ای لینک 2 (rad)
$\alpha_3$	موقعیت زاویه‌ای لینک 3 (rad)
$\Delta$	عدد کوچک و مثبت ( $\text{rads}^{-1}$ )
$\theta$	موقعیت زاویه‌ای کوادروتور در راستای y دستگاه اینرسی (rad)
$\mu$	گام پیشرو روتور
$\tau_{w,z}$	گشتاور باد در راستای محور z (Nm)
$\phi$	موقعیت زاویه‌ای کوادروتور در راستای x دستگاه اینرسی (rad)
$\psi$	موقعیت زاویه‌ای کوادروتور در راستای Z دستگاه اینرسی (rad)
$\Omega_r$	جمع جبری سرعت زاویه روتورها ( $\text{rads}^{-1}$ )
$\omega_H$	سرعت چرخش زاویه‌ای روتورها برای شناور ماندن کوادروتور ( $\text{rads}^{-1}$ )
$\omega_i$	سرعت چرخش زاویه‌ای روتور ( $\text{rads}^{-1}$ )
بالانویس‌ها	
T	ترانهاده
زیرنویس‌ها	
G	مرکز جرم
gyro	ژیروسکوپ
hor	افقی
IGE	در محدوده اثر زمین
i	اعداد 1 تا 4
j	محور x، y و یا z
k	اعداد 1 تا 3
OGE	خارج از محدوده اثر زمین
ref	مرجع
w	باد

### 8- مراجع

[1] G. Jithu and P. R. Jayasree, Quadrotor modelling and control, *2016 International Conference on Electrical, Electronics, and Optimization Techniques (ICEEOT)*, Chennai, pp. 1167-1172, 2016.

[2] S. Khatoun, M. Shahid, Ibraheem and H. Chaudhary, Dynamic modeling and stabilization of quadrotor using PID controller, *2014 International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI)*, New Delhi, pp. 746-750, 2014.