



مدل سازی شکست مواد شکل پذیر براساس مدل دراگر-پراگر و روش میدان فاز

حجت‌الله بادنوا

استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خاتم‌الانبیاء، بهبهان
* بهبهان، صندوق پستی 6361647189، badnava@bkatu.ac.ir

چکیده	اطلاعات مقاله
در این مقاله با ترکیب مدل رفتار پلاستیک و روش میدان فاز مدلی جهت شبیه‌سازی شکست مواد شکل‌پذیر پیشنهاد شده است. مدل پلاستیسیته دراگر-پراگر که هم برای فلزات و هم برای پلیمرها، فوم‌ها، خاک، بتن و دیگر مواد وابسته به فشار قابل استفاده است، با روش میدان فاز ترکیب شده است. به عبارت دیگر مدل توانایی در نظر گرفتن اثرات فشار در فرآیند تسلیم و شکست مواد شکل‌پذیر را دارد. چگونگی استخراج معادلات حاکم از کمینه‌سازی انرژی کل، پیاده‌سازی اجزای محدود مدل، گسسته‌سازی و دیگر جزئیات حل تشریح شده است. الگوریتم‌های انتگرال‌گیری ارائه شده و چگونگی ترکیب رفتار ماده با متغیر میدان فاز جهت در نظر گرفتن اثرات ترک شرح داده شده است. جهت کنترل فرآیند شکست، متغیری جهت کنترل نیروی محرکه میدان فاز، معرفی شده است. در انتها با کمک شبیه‌سازی عددی، چگونگی تقریب ترک به روش میدان فاز بررسی شده و محدوده ثابت طول برای تقریب دقیق ترک به دست آمده است. نمونه‌هایی با هندسه و بارگذاری مختلفی انتخاب شده که صحت و دقت مدل و الگوریتم انتگرال‌گیری پیشنهادی با مقایسه با مقایسه آن‌ها با اطلاعات تجربی موجود تأیید شده است. در نهایت توانایی مدل در پیش‌بینی مسیر ترک در مدهای مختلف شکست با استفاده از نمونه آرکان نشان داده شده است.	مقاله پژوهشی کامل دریافت: 14 دی 1396 پذیرش: 23 بهمن 1396 ارائه در سایت: 11 اسفند 1396 کلید واژگان: شکست نرم روش میدان فاز اجزای محدود دراگر-پراگر الگوریتم انتگرال‌گیری

Ductile fracture modelling based on the Drucker-Prager plasticity and phase field approach

Hojjat Badnava

Department of Mechanical Engineering, Behbahan Khatam Alanbia University of Technology, Behbahan, Iran
* P.O.B. 6361747189, Behbahan, Iran, badnava@bkatu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 04 January 2018
Accepted 12 February 2018
Available Online 02 March 2018

Keywords:

Ductile fracture
Phase field method
Finite element
Drucker-Prager
Integration algorithm

ABSTRACT

In this paper, a coupled plasticity-phase field model for ductile fracture is proposed. The Drucker-Prager plasticity model, which have been applied to metals, concrete, polymers, foams, and other pressure-dependent materials, is coupled with the phase field method. The governing equations are determined by a minimization principle that results in balance laws for the coupled displacement-fracture phase field problem. Furthermore, the finite element implementation, discretization and integration algorithms for the proposed model are presented for three-dimensional, plane strain and plane stress states. In addition, to control the influence of the plastic work and its effect on the crack propagation process, a threshold variable is introduced. Using a numerical example, it is demonstrated that a specific length scale and a certain minimum element size is necessary such that the regularized crack surface converges to the sharp crack. The accuracy of the proposed model and integration algorithm is verified by comparing the obtained results with existing experimental data. In addition, the Arcan sample, by means of a special test setup, allows to load a sample at different direction, and thus performing mixed mode fracture investigation using the model.

1- مقدمه

ترک و المان‌بندی^۱ مجدد هندسه جدید و روش اجزای محدود توسعه یافته^۲ اشاره کرد [1-4]. با این حال براساس این روش‌ها شبیه‌سازی انحنای ترک و چند شاخه‌ای شدن ترک در حالت سه‌بعدی با دشواری همراه است. همچنین پیاده‌سازی حل اجزای محدود با در نظر گرفتن تغییر هندسه با رشد ترک دارای انحنای و احتمال به هم پیوستن ترک‌ها بسیار دشوار است. علت اصلی دشواری این روش‌ها وابستگی ترک به هندسه و تغییرات هندسه اولیه با تغییر ترک است. برای رفع این مشکل بوردین و همکاران [5-7] روش میدان

شکست مواد شکل‌پذیر به‌طور عمده ناشی از تغییر شکل پلاستیک است. پیش‌بینی شکست مواد، در طراحی مهندسی اهمیت زیادی دارد از این‌رو تحقیقات زیادی در این زمینه انجام شده است. مدل‌سازی پدیده‌های مختلف در فرآیند شکست مواد شکل‌پذیر از جمله اثر حالت‌های تنش، شکل‌پذیری، گلوپی شدن، الگوی شکست، رشد ترک و ظرفیت ماده چالش‌های موجود در شبیه‌سازی عددی هستند. در حل اجزای محدود، فرآیند شبیه‌سازی ترک به‌صورت یک گسستگی با تغییر دادن هندسه اولیه دشوار است. روش‌های مختلفی در این زمینه پیشنهاد شده که می‌توان به المان‌های چسبنده، ایجاد

¹ Remeshing

² Extended finite element method

Please cite this article using:

H. Badnava, Ductile fracture modelling based on the Drucker-Prager plasticity and phase field approach, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 03, pp. 351-360, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

www.mme.modares.ac.ir

میدان فاز در کنار دیگر مدل‌های رفتار پلاستیک از جمله مور-کلمب و دراگر-پراگر تاکنون مطالعه نشده است. همچنین تحقیقاتی که جزئیات انتگرال‌گیری رفتار پلاستیک همراه با شکست را بیان کنند، بسیار اندک است. از این رو در این تحقیق براساس مدل پیوسته دراگر-پراگر و ترکیب آن با روش میدان فاز، مدل شکست مواد شکل‌پذیر با قابلیت در نظر گرفتن اثرات فشار در تسلیم ماده، ارائه شده است. در این مدل نیروی محرکه میدان فاز، که رشد ترک نرم را کنترل می‌کند، براساس انرژی الاستیک و کار پلاستیک از معادلات ساختاری محاسبه می‌شوند. جهت کنترل شروع فرآیند شکست، متغیر کنترل کار پلاستیک در محاسبه نیروی محرکه میدان فاز تعریف شده است. در ادامه فرآیند انتگرال‌گیری مدل پیوسته دراگر-پراگر با میدان فاز ارائه شده و چگونگی حل معادلات میدان‌های فاز و جابجایی با روش اجزای محدود تشریح شده است. در نهایت توانایی مدل پیشنهادی در شبیه‌سازی فرآیند شکست مواد شکل‌پذیر و نیز توانایی روش حل عددی پیشنهادی با بررسی نمونه‌های مختلف سنجیده شده است.

2- روابط حاکم بر مدل

2-1- مدل سازی ترک با روش میدان فاز

پایه و اساس مدل‌سازی ترک به روش میدان فاز محاسبه تقریبی ناپیوستگی ترک است. در این روش ناپیوستگی Γ به صورت تقریب Γ_l بیان می‌شود که در آن l ثابت مقیاس طول بوده که مشخص می‌کند ترک در چه محدوده‌ای گسترده شود. به عبارتی در حالتی که $l \rightarrow 0$ باشد، Γ به Γ_l نزدیک می‌شود. در "شکل 1" در حالت یک‌بعدی توزیع ترک گسسته و تقریب آن نشان داده شده است. در حالت یک‌بعدی از تابع نمایشی جهت تقریب زدن حالت گسسته ترک به شکل زیر استفاده می‌شود.

$$d(x) = e^{-|x|/l} \quad (1)$$

در رابطه (1) متغیر d میدان فاز را نشان می‌دهد. تابع نمایشی فوق دارای شرایط $d(0) = 0$ و $d(\pm\infty) = 0$ است. در حالتی که $d = 0$ است ماده بدون آسیب بوده و $d = 1$ نشان می‌دهد که ماده به‌طور کلی دچار آسیب شده است. رابطه (1) حل معادله دیفرانسیلی همگن زیر است:

$$d - l^2 d_{xx} = 0 \quad (2)$$

که در آن علامت k کاما بیان‌کننده مشتق است. به کمک رابطه (2) می‌توان Γ را با تابع Γ_l تقریب زد:

$$\Gamma_l = \int_{\Omega} \gamma_l dV = \int_{\Omega} \frac{1}{2l} (d^2 + l^2 d_{xx}^2) dV = 0 \quad (3)$$

که در آن γ_l تابع چگالی سطح ترک است. در حالت چند بعدی γ_l را می‌توان به شکل زیر تعریف کرد.

$$\gamma_l = \frac{1}{2l} (d^2 + l^2 d_{i,i} d_{i,i}) \quad (4)$$

در حالتی که متغیر آسیب به‌عنوان متغیر غیرمحلّی انتخاب شده باشد، رابطه (4) شباهت زیادی با مدل غیرمحلّی گرادینانی ضمنی دارد [8,11]. مدل غیرمحلّی گرادینانی ضمنی اغلب جهت از بین بردن حساسیت به تراکم شبکه در حل اجزای محدود مدلی‌هایی که ناپایداری دارند استفاده می‌شود. برای نمونه در مدل‌سازی آسیب و پلاستیسیته همراه با کرنش نرمی، از مدل غیرمحلّی به‌عنوان محدودکننده محلّی شدن و روش گرادینانی در راستای استقلال نتایج حل اجزای محدود از اندازه المان‌ها استفاده می‌شود [9,10]. البته مدل‌سازی غیرمحلّی گرادینانی ضمنی برای تقریب زدن ترک مناسب نیست [11]. در مدل غیرمحلّی اگر ثابت طول کوچک شود $l \rightarrow 0$ مدل غیرمحلّی به مدل محلّی نزدیک شده و اثر آن در جلوگیری از محلّی شدن

فاز¹ با در نظر گرفتن ترک به‌صورت تقریبی را پیشنهاد کرده‌اند. در مدل‌سازی به روش میدان فاز ترک به‌صورت گسسته شبیه‌سازی نمی‌شود. ایده اصلی در روش میدان فاز جایگزین کردن ترک تیز و گسسته با یک تابع هموار است که منجر به ایجاد مؤلفه‌های گرادینانی در مدل شده که شباهت زیادی به مدل آسیب گرادینانی دارد [8]. در روش آسیب گرادینانی، استفاده از مؤلفه‌های گرادینانی برای از بین بردن حساسیت حل اجزای محدود به اندازه المان در حضور نرم شوندگی بوده، درحالی‌که روش میدان فاز هدف مدل‌سازی ترک در بخش کوچک و محدودی است که گرادینانی بزرگی دارد [9,11].

در سال‌های اخیر امیه و همکاران [12,13] از روش میدان فاز جهت مدل‌سازی ترک در مواد شکننده استفاده کرده‌اند. آن‌ها با ایده گرفتن از مکانیک آسیب، تابع کاهش‌دهنده استحکام و متغیر تاریخچه بارگذاری را معرفی کرده‌اند. با توجه به آن که متغیر میدان فاز، که نشان‌دهنده ترک است، مستقل از هندسه، المان و گره‌ها در حل اجزای محدود است، یا به‌عبارتی هندسه اصلی تغییر نمی‌کند، پیاده‌سازی روش میدان فاز در مدل‌سازی فرآیند شکست، دشواری‌های ذکر شده را ندارد. از این‌رو این روش توانایی پیش‌بینی و شبیه‌سازی فرآیندهای پیچیده از جمله جوانه‌زنی، گسترش ترک، چند شاخه‌ای شدن و به هم پیوستن ترک‌ها را دارد.

هافکار و امیه [14] و بوردن و همکاران [15] کاربرد روش میدان فاز در شکست دینامیکی مواد شکننده را نشان داده‌اند. عبدالرزاق و همکاران [16] براساس روش میدان فاز شکست مواد مرکب شکننده را بررسی کرده‌اند. با توجه به این‌که در این روش انرژی موردنیاز برای رشد ترک می‌تواند از روش‌های مختلفی ایجاد شود، امکان در نظر گرفتن اثرات فیزیکی مختلف از جمله اثر دما، میدان مغناطیسی و رفتار پلاستیک وجود دارد. بادنوا و همکاران [17] با ترکیب میدان جابجایی، میدان فاز و معادله انرژی، چگونگی جوانه‌زنی و رشد ترک در اثر تغییرات دمایی را مدل‌سازی کرده‌اند. همچنین امیه و همکاران [18] با ترکیب میدان مغناطیسی با میدان‌های فاز و جابجایی، اثرات رشد ترک را در مواد پیزوالکتریک را شبیه‌سازی کرده و متغیر میدان فاز را برای کاهش رسانایی و ایجاد عایق در محل ترک استفاده کرده‌اند. مدل‌سازی شکست در مواد شکل‌پذیر که با تغییر شکل پلاستیک همراه هستند، توسط امیه و همکاران [19] برای رفتار ماده بر پایه مدل میزز، معرفی شده است. آن‌ها اثرات کار پلاستیک را در متغیر کنترل‌کننده تاریخچه در نظر گرفته و از این طریق تأثیر رفتار پلاستیک در رشد ترک را مدل‌سازی کرده‌اند. آمباتی و همکاران [20,21] با تغییر تابع کاهش‌دهنده استحکام و در نظر گرفتن کرنش پلاستیک معادل در تعریف آن، اثرات رفتار پلاستیک را در شکست مدل‌سازی کرده‌اند. به عبارتی در مدل پیشنهادی آن‌ها تعریف نیروی محرکه تغییر نداشته و اثرات تغییر شکل پلاستیک تنها از طریق تابع کاهش‌دهنده استحکام در نظر گرفته شده است. بادنوا و همکاران [22] با استفاده از روش میدان فاز، مدلی برای شبیه‌سازی شکست مواد شکل‌پذیر با در نظر گرفتن اثرات نرخ بارگذاری ارائه کرده‌اند. در مدل پیشنهادی آن‌ها از ترکیب مدل ویسکو پلاستیک بر پایه مدل پلاستیک میزز با روش میدان فاز بهره گرفته شده است.

در مدل‌های ذکر شده رفتار پلاستیک بر پایه مدل میزز شبیه‌سازی شده است. همچنین بیشتر تحقیقات بر تابع کاهش‌دهنده استحکام، چگونگی ترکیب میدان فاز و مدل پلاستیک میزز و چگونگی تعریف انرژی لازم جهت رشد ترک در مواد شکل‌پذیر متمرکز بوده و به‌عبارت دیگر استفاده از روش

¹ Phase field method

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad (10)$$

$$\frac{g_c}{l} (d - l^2 \Delta d) = 2(1 - d) [\beta_e \psi_0^{el} (\varepsilon - \varepsilon^p) + \beta_p \langle \psi^p(\alpha) - W_0 \rangle] \quad (11)$$

که در آن σ تانسور تنش کوشی است. نیروی محرکه میدان فاز در سمت راست رابطه (11) تعریف شده است. بخشی از نیروی محرکه ناشی از کار پلاستیک بوده که قابل بازگشت نیست. اما بخش دیگر انرژی الاستیک ماده بدون آسیب است که بازگشت پذیری دارد. از این رو ممکن است که بخشی از ترک پس از باربرداری از بین رود که از نظر فیزیکی قابل قبول نیست. روش‌های مختلفی برای جلوگیری از این فرآیند پیشنهاد شده است. در این تحقیق از روش پیشنهادی میه و همکاران [13] استفاده شده که از متغیر تاریخیچه بارگذاری در مکانیک آسیب ایده گرفته است. در این روش متغیر تاریخیچه نیروی محرکه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{H} = \beta_e \max_{[0, l]} (\psi_0^{el} (\varepsilon - \varepsilon^p)) + \beta_p \langle \psi^p(\alpha) - W_0 \rangle \quad (12)$$

با توجه به دائمی بودن بخش پلاستیک، در رابطه (12) قید بازگشت ناپذیری فقط روی انرژی الاستیک تعریف شده است. براساس این تعریف، معادله ساختاری میدان فاز به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{g_c}{l} (d - l^2 \Delta d) = 2(1 - d) \mathcal{H} \quad (13)$$

روش دیگری که برای حفظ تاریخیچه بارگذاری است، قید بازگشت ناپذیری را روی درجات آزادی میدان فاز به صورت مستقیم اعمال می‌کند [23]. برای مطالعه بیشتر اثرات استفاده از روش‌های مختلف حفظ بازگشت ناپذیری میدان فاز، مقاله لینس و همکاران [24] پیشنهاد می‌شود.

2-2- مدل دراگر-پراگر پیوسته با میدان فاز

در مدل دراگر-پراگر فرض بر این است که تسلیم زمانی اتفاق می‌افتد که نامتغیر J_2 تنش انحرافی و ضریبی از تنش هیدرواستاتیک P به مقدار بحرانی برسد:

$$f(\sigma) = \sqrt{J_2(s(\sigma))} + \eta P(\sigma) - g(d) \xi c \quad (14)$$

که در آن c ثابت چسبندگی است. همچنین با توجه به این که مدل دراگر-پراگر حالت هموار تابع تسلیم مور-کلمب است، دو ثابت ماده ξ و η جهت تقریب زدن مدل مور-کلمب استفاده می‌شوند. سطح تسلیم دراگر-پراگر در فضای تنش‌های اصلی مخروطی شکل است. اگر $\eta = 0$ شود، اثر فشار هیدرواستاتیک در تسلیم از بین رفته و مدل تبدیل به مدل ون میز می‌شود. همچنین در رابطه فوق چسبندگی c با استفاده از تابع $g(d)$ کاهش داده شده تا فرآیند شکست و نرم شوندگی ناشی از آن در مدل ایجاد گردد. لازم به ذکر است که تنش انحرافی s و تنش فشاری P در این تعریف، تنش‌های ماده آسیب دیده هستند. به عبارتی در محاسبه آن‌ها اثر کاهش استحکام بر اثر رشد ترک در نظر گرفته می‌شود.

در این تحقیق فرض کرنش‌های کوچک در نظر گرفته شده و بر همین اساس کرنش ε به دو بخش الاستیک ε^e و پلاستیک ε^p تقسیم می‌شود:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (15)$$

همچنین فرض شده است که رفتار الاستیک، خطی و همسانگرد باشد که براساس آن تنش کوشی به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\sigma = g(d) D^e : \varepsilon^e = 2g(d) G \varepsilon_d^e + g(d) K \varepsilon_v^e \quad (16)$$

که در آن علامت $(:)$ برای تانسوری مانند σ به صورت $\sigma = \sigma_{ij} \sigma_{ij}$ تعریف می‌شود، D^e تانسور الاستیک همسانگرد و G و K به ترتیب مدول برشی و حجمی است. همچنین تانسور ε_d^e بخش انحرافی تانسور کرنش الاستیک و $\varepsilon_v^e = tr(\varepsilon^e)$ کرنش حجمی الاستیک است. واضح است که به تدریج با افزایش متغیر میدان فاز، تابع $g(d)$ تنش را کاهش می‌دهد.

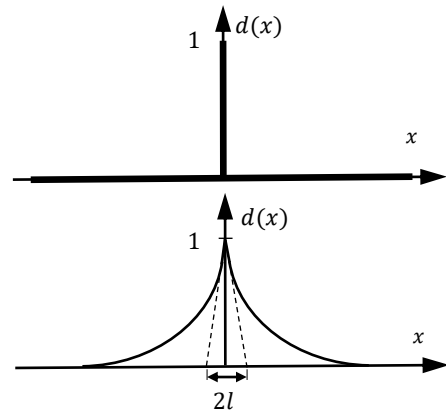


Fig. 1 Sharp (top) and diffusive crack (bottom)

شکل 1 ترک تیز (بالا) و تقریب ترک (پایین)

تغییر شکل و جلوگیری از ایجاد رفتار غیر فیزیکی ناشی از آن، کاهش می‌یابد.

جهت مدل سازی رشد ترک در مواد شکل پذیر، انرژی کل به صورت تابعی از میدان جابه‌جایی u و میدان فاز d به صورت زیر بیان می‌شود:

$$E(u, d) = \int_{\Omega} g_c \gamma_l dV + \int_{\Omega} g(d) \{ \beta_e \psi_0^{el} (\varepsilon - \varepsilon^p) + \beta_p \langle \psi^p(\alpha) - W_0 \rangle \} dV \quad (5)$$

که در آن اولین بخش از سمت راست معادله، انرژی شکست بوده که با رشد ترک تولید می‌شود و بخش دوم انرژی الاستیک-پلاستیک است. همچنین β_e و β_p به ترتیب متغیرهای کنترل شکست شکننده ناشی از بخش الاستیک و شکست نرم ناشی از بخش پلاستیک رفتار ماده هستند. در رابطه (5) متغیر g_c انرژی مورد نیاز برای تولید سطح واحدی از ترک و ψ^p کار معادل پلاستیک است که براساس رابطه زیر تعریف می‌شود

$$\psi^p = \gamma \|s\| \quad (6)$$

که در آن s تانسور تنش انحرافی و علامت $\| \cdot \|$ نرم تانسور است. همچنین، W_0 حد بحرانی شروع شکست نرم است. این متغیر جهت کنترل شروع فرآیند شکست نرم تعریف شده است. در رابطه (5) علامت $\langle \cdot \rangle$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{اگر } x \geq 0 \\ 0 & \text{اگر } x < 0 \end{cases} \quad (7)$$

به عبارتی رشد ترک نرم زمانی شروع می‌شود که کار پلاستیک معادل به حد بحرانی کار پلاستیک رسیده باشد. در نهایت $g(d)$ تابع کاهش دهنده استحکام ماده است. در این تحقیق از تابع مرتبه دوم به شکل زیر بهره گرفته شده است:

$$g(d) = (1 - d)^2 \quad (8)$$

برای رسیدن به حالت تعادل، لازم است که انرژی کل $E(u, d)$ کمینه شود:

$$\delta E(u, d) = \frac{\partial E(u, d)}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \frac{\partial E(u, d)}{\partial d} \delta d + \frac{\partial E(u, d)}{\partial \dot{d}} \delta \dot{d} = 0 \quad (9)$$

شرط لازم برای کمینه شدن انرژی این است که تغییرات انرژی کل برای تمامی مقادیر $\delta \varepsilon$ و δd صفر شود. بر همین اساس، شکل قوی معادلات حاکم بر میدان‌های جابه‌جایی و فاز به دست می‌آیند:

با توجه به تعریف J_2 ، تنش انحرافی آزمایشی و تنش انحرافی به‌روز شده دارای شرایط زیر هستند:

$$\frac{s}{J_2(s)} = \frac{s^{\text{trial}}}{J_2(s^{\text{trial}})} \quad (27)$$

با استفاده از رابطه (27)، رابطه (26) مجدداً بازنویسی می‌شود،

$$\sigma = \sigma^{\text{trial}} - g(d)\Delta\gamma \left(\frac{G}{\sqrt{J_2(s^{\text{trial}})}} s^{\text{trial}} + \frac{K\eta}{3} I \right) \quad (28)$$

می‌توان به‌روزرسانی تنش را به دو بخش انحرافی و هیدرواستاتیک تقسیم کرد:

$$s = \left(1 - \frac{g(d)\Delta\gamma G}{\sqrt{J_2(s^{\text{trial}})}} \right) s^{\text{trial}} \quad (29)$$

$$P = P^{\text{trial}} - g(d)\Delta\gamma K\eta \quad (30)$$

واضح است که اگر $\Delta\gamma$ به دست آید، تنش آزمایشی براساس روابط (29) و (30) تصحیح می‌شود. جهت محاسبه $\Delta\gamma$ از شرط سازگاری استفاده می‌شود:

$$f = \sqrt{J_2(s)} + \eta P - g(d)c(\bar{\epsilon}^p) = 0 \quad (31)$$

که در آن کرنش پلاستیک معادل به‌روز شده به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\bar{\epsilon}^p = \bar{\epsilon}_n^p + \Delta\bar{\epsilon}^p \quad (32)$$

$$\Delta\bar{\epsilon}^p = \xi \Delta\gamma \quad (33)$$

با جایگذاری رابطه‌های (29)، (30)، (32) و (33) در رابطه (31) داریم:

$$f(\Delta\gamma) = \sqrt{J_2(s^{\text{trial}})} + \eta(P^{\text{trial}} - g(d)\Delta\gamma K\eta) - g(d)c(\bar{\epsilon}_n^p + \xi \Delta\gamma) \quad (34)$$

اگر سخت‌شوندگی غیرخطی باشد، رابطه غیرخطی (34) به کمک روش نیوتن و فرآیند حل تکراری حل شده و $\Delta\gamma$ محاسبه می‌شود. اگر سخت‌شوندگی خطی به صورت $c(\bar{\epsilon}^p) = c_0 + H\bar{\epsilon}^p$ در نظر گرفته شود، که در آن H شیب سخت‌شوندگی است، مقدار $\Delta\gamma$ به‌صورت مستقیم و بدون تکرار قابل محاسبه است. پس از محاسبه $\Delta\gamma$ لازم است که صحت فرض اولیه یعنی بازگشت به سطح صاف مخروط، بررسی شود. در این راستا که اگر شرط،

$$\sqrt{J_2(s^{\text{trial}})} - g(d)G\Delta\gamma \geq 0 \quad (35)$$

برقرار باشد، فرض بازگشت به سطح صاف مخروط صحیح بوده و در غیر این صورت لازم است که مرحله بازگشت به رأس مخروط در نظر گرفته شود. در مرحله بازگشت به رأس مخروط شرط سازگاری به‌صورت زیر است:

$$g(d)c(\bar{\epsilon}_n^p + \Delta\bar{\epsilon}^p) \frac{\xi}{\eta} - P^{\text{trial}} + g(d)K\Delta\epsilon_v^p = 0 \quad (36)$$

که در آن $\Delta\bar{\epsilon}^p = \Delta\epsilon_v^p \xi / \eta$ و با حل معادله فوق برحسب $\Delta\epsilon_v^p$ به‌روزرسانی متغیرها انجام می‌شود،

$$\bar{\epsilon}^p = \bar{\epsilon}_n^p + \frac{\xi}{\eta} \Delta\bar{\epsilon}^p \quad (37)$$

$$\sigma = (P^{\text{trial}} - g(d)K\Delta\epsilon_v^p) I \quad (38)$$

روابط ارائه شده برای انتگرال‌گیری در حالت‌های سه بعدی، کرنش صفحه‌ای و متقارن محوری برقرار است. این امکان وجود دارد که با استفاده از روش انتگرال‌گیری ارائه شده، رفتار ماده در حالت تنش صفحه‌ای نیز محاسبه شود. یکی از روش‌ها، استفاده از یک حلقه تکرار نیوتن-رافسون در هر نقطه انتگرال‌گیری برای مقید کردن حالت تنش به قید تنش صفحه‌ای ($\sigma_{33} = 0$) است. در حالت‌های کرنش صفحه‌ای، سه مؤلفه کرنش (یا کرنش الاستیک) به عنوان ورودی به نقطه انتگرال‌گیری ارسال شده و مؤلفه خارج از صفحه صفر است. اما در حالت تنش صفحه‌ای، مؤلفه خارج از صفحه کرنش (یا کرنش الاستیک) صفر نیست. اولین فرض برای کرنش خارج از صفحه، استفاده از

سطح تسلیم مدل دراگر-پراگر یک مخروط است. از این‌رو در رأس این مخروط تابع تسلیم نقطه تکین دارد. به همین دلیل لازم است که دو حالت مختلف در محاسبه قانون پلاستیک در نظر گرفته شود. در سطح مخروط تابع تسلیم دراگر-پراگر مشتق پذیر است و بردار جریان پلاستیک به‌صورت زیر است:

$$N = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{1}{J_2(s)} s + \frac{\eta}{3} I \quad (17)$$

قانون جریان پلاستیک بر اساس بردار جریان پلاستیک به شکل زیر:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} N \quad (18)$$

برقرار است که در آن $\dot{\gamma}$ ضریب پلاستیک است. واضح است که در بردار جریان پلاستیک مدل دراگر-پراگر علاوه بر تنش انحرافی، بخش حجمی نیز وجود دارد. اما در رأس مخروط بردار جریان پلاستیک به‌صورت زیر است:

$$N \in \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (19)$$

به عبارتی بردار جریان پلاستیک در رأس مخروط در درون مخروطی که بر مخروط دراگر-پراگر عمود است، قرار می‌گیرد. برای تکمیل رفتار پلاستیک لازم است که سخت‌شوندگی ماده پس از تسلیم تعریف گردد. در مدل پیشنهادی از سخت‌شوندگی همسانگرد استفاده شده است:

$$c = c(\bar{\epsilon}^p) \quad (20)$$

که در آن $\bar{\epsilon}^p$ کرنش پلاستیک معادل است.

2-3- الگوریتم انتگرال‌گیری

در این بخش چگونگی انتگرال‌گیری مدل پیشنهادی ارائه می‌شود. این الگوریتم براساس روش نگاشت برگشتی با پیش‌بینی الاستیک و تصحیح پلاستیک است. با توجه به آن‌که بردار جریان پلاستیک روی سطح تسلیم مخروطی شکل مدل دراگر-پراگر متفاوت از بردار جریان پلاستیک در رأس مخروط است، ممکن است دو حالت در الگوریتم انتگرال‌گیری ایجاد شود. حالت اول برگشت پلاستیک روی سطح صاف مخروط و حالت دوم برگشت به رأس مخروط است.

در مرحله پیش‌بینی الاستیک فرض بر آن است که رفتار ماده در بازه زمانی $[t_n, t_{n+1}]$ الاستیک است که در این وضعیت:

$$\epsilon^{\text{trial}} = \epsilon_n^e + \Delta\epsilon \quad (21)$$

$$\epsilon^{\text{trial}} = \epsilon_n^p \quad (22)$$

$$\bar{\epsilon}^{\text{trial}} = \bar{\epsilon}_n^p \quad (23)$$

$$\sigma^{\text{trial}} = g(d)De: \epsilon^{\text{trial}} \quad (24)$$

لازم به ذکر است در این مقاله برای ساده‌تر شدن روابط، اندیس $n+I$ از متغیر به روز شده در انتهای گام حل حذف شده است. در رابطه (24) مشخص است که تابع $g(d)$ استحکام ماده را کاهش داده و پس از شروع ترک، نرم‌شوندگی در محدوده ترک اتفاق می‌افتد. تنش محاسبه در رابطه (24) که تنش آزمایشی نامیده می‌شود، در معادله سطح تسلیم (14) جهت بررسی تسلیم قرار می‌گیرد. چنانچه ماده تسلیم نشده باشد، تنش آزمایشی صحیح بوده و ماده رفتار الاستیک دارد. در غیر این صورت لازم است که تصحیح پلاستیک صورت گیرد. در ابتدا فرض می‌شود که بازگشت به سطح صاف مخروط دراگر-پراگر باشد که در این صورت:

$$\Delta\epsilon^p = \Delta\gamma N = \Delta\gamma \left(\frac{1}{2\sqrt{J_2(s)}} s + \frac{\eta}{3} I \right) \quad (25)$$

که براساس آن تنش به‌روزرسانی شده در انتهای گام حل با رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \sigma^{\text{trial}} - g(d)\Delta\gamma \left(\frac{G}{\sqrt{J_2(s)}} s + \frac{K\eta}{3} I \right) \quad (26)$$

کرنش به دست آمده در انتهای گام قبل است:

$$\varepsilon_{33}^{e \text{ trial}} = (\varepsilon_{33}^e)_n \quad (39)$$

بنابراین کرنش (یا کرنش الاستیک) مرحله قبل در کنار سه مؤلفه دیگر کرنش، به عنوان ورودی های نقطه انتگرال گیری فرستاده می شوند. به عبارت دیگر بردار کرنش به صورت زیر است:

$$[(\varepsilon^e \text{ trial})^T \quad \varepsilon_{33}^{e \text{ trial}}]^T \quad (40)$$

با استفاده از الگوریتم انتگرال گیری پیشنهادی و کرنش داده شده در رابطه (40)، مؤلفه های تنش به صورت زیر به دست می آید:

$$[\sigma^T \quad \sigma_{33}]^T \quad (41)$$

اگر تنش σ_{33} به اندازه کافی کوچک باشد ($\sigma_{33} < \varepsilon_{tol}$)، در آن صورت حل به دست آمده صحیح است. در غیر این صورت باید تکرار نیوتن رافسون در نقطه انتگرال گیری ادامه یابد که در آن فرض جدید کرنش خارج از صفحه به صورت زیر خواهد بود:

$$\varepsilon_{33}^{e \text{ trial}} = \varepsilon_{33}^{e \text{ trial}} - \frac{\sigma_{33}}{D_{22}} \quad (42)$$

که در آن D ماتریس مماسی سازگار است.

2-4- فرآیند حل به روش اجزای محدود

در فرآیند حل به روش اجزای محدود لازم است که معادلات حاکم به شکل ضعیف نوشته شوند. معادلات (10) و (13) به ترتیب شکل قوی میدان جابجایی و میدان فاز هستند. شکل ضعیف میدان جابجایی، معادله تعادل، به شک زیر است:

$$\int_{\Omega} (\nabla^s \delta u)^T : \sigma \, dV = \int_{\partial \Omega} (\delta u)^T t_N \, dS \quad (43)$$

که در آن $\nabla^s \delta u$ بخش متقارن گرادیان جابجایی است. همچنین می توان با ضرب δd در رابطه (13)، انتگرال گیری از آن و سپس استفاده از شرط مرزی $\nabla d \cdot n = 0$ on $\partial \Omega$ به شکل ضعیف معادله حاکم بر میدان فاز رسید.

$$\int_{\Omega} \delta d \left\{ \frac{g_c}{l} (d - l^2 \Delta d) - 2(1-d)\mathcal{H} \right\} dV = 0 \quad (44)$$

برای حل معادلات (43) و (44) به روش اجزای محدود لازم است که از شکل گسسته این معادلات استفاده کرد. گسسته سازی براساس تعاریف زیر صورت می پذیرد:

$$u = N_u u^e, \delta u = N_u \delta u^e, \varepsilon = B_u u^e \quad (45)$$

$$d = N_d d^e, \delta d = N_d \delta d^e, \nabla d = B_d d^e \quad (46)$$

که در آن N_u و N_d به ترتیب توابع شکل میدان جابجایی و میدان فاز بوده و B_u و B_d ماتریس های دربرگیرنده مشتقات توابع شکل میدان جابجایی و میدان فاز هستند. با جایگذاری گسسته سازی (45) و (46) در روابط (43) و (44) معادلات زیر به دست می آید:

$$(\delta u)^T \int_{\Omega} \underbrace{B_u^T \sigma}_{f_{int}} dV - (\delta u)^T \int_{\partial \Omega} \underbrace{N_u^T t_N}_{f_{ext}} dS = 0 \quad (47)$$

$$(\delta d)^T \int_{\Omega} \left\{ \frac{g_c}{l} (N_d^T N_d + B_d^T l^2 B_d) d - 2 N_d^T (1-d)\mathcal{H} \right\} dV = 0 \quad (48)$$

معادلات (47) و (48) کاملاً غیرخطی هستند که پس از خطی سازی به روش تکرار نیوتن-رافسون حل شده اند. دو روش جهت حل معادلات فوق وجود دارد. روش اول حل پیوسته و هم زمان دو میدان جابجایی و فاز است. روش دوم حل جداگانه هر میدان است که همگرایی در آن سهولت دارد و این

مکان وجود دارد که میدان جابجایی به روش ضمنی یا صریح حل شود. در مرحله رشد ترک، فرآیند گسترش ترک در حل به روش تفکیک شده کمی کندتر از حالت حل با روش کاملاً پیوسته می شود. برای رفع این مشکل لازم است که گام زمانی حل در مرحله گسترش ترک، کوچک تر باشد. اگر در تمامی مراحل، گام کوچک در نظر گرفته شود، هزینه محاسبات افزایش می یابد که راه حل آن، استفاده از گام های حل تطبیقی است. در این روش با دنبال کردن انرژی اتلافی ناشی از گسترش ترک، می توان تشخیص داد که رشد ترک در چه مرحله ای بوده و گام زمانی حل را تنها در مواقع لازم، کوچک در نظر گرفت. در این تحقیق از روش حل جداگانه استفاده شده که در ابتدا میدان فاز با فرض ثابت بودن جابجایی حل شده و سپس میدان جابجایی براساس میدان فاز به روز شده، حل می شود. الگوریتم روش استفاده شده برای حل معادلات میدان های فاز و جابجایی در کد اجزای محدود غیرخطی گسترش داده شده در "شکل 2" ارائه شده است.

3- نتایج عددی

کارایی و دقت مدل پیشنهادی که در بخش های قبل تشریح گردید و همچنین روش حل عددی پیشنهاد شده، در این بخش با استفاده از نمونه های حل عددی سنجیده می شود. جهت محک زدن حل عددی، در هر مورد از نتایج تجربی موجود استفاده شده است. در اولین بخش، همگرایی سطح ترک گاما بررسی شده است. جهت این امر معادله حاکم بر میدان فاز، برای مدل سازی ترکی با طول مشخص شبیه سازی شده است. پس از آن کارایی مدل پیشنهادی در شبیه سازی کرنش صفحه ای و تنش صفحه ای بررسی شده است. این دو شبیه سازی صحت و دقت روش انتگرال گیری پیشنهادی را نیز مورد سنجش قرار می دهد. در انتها نیز رشد ترک در مدهای مختلف و در بارگذاری پیچیده بررسی شده است.

3-1- تقریب ناپیوستگی ترک

در بخش های قبل اشاره شد که در روش مبتنی بر میدان فاز، ناپیوستگی ترک به صورت تقریبی مدل سازی می شود. از این رو همگرایی گاما، به عبارتی همگرایی سطح ترک تقریبی به سطح ترک گسسته و تیز، در روش میدان فاز اهمیت فراوانی دارد. در این مثال همگرایی گاما بررسی شده است. در حل اجزای محدود، تقریب ترک تابعی از اندازه المان، h ، در محدوده رشد ترک است. به عبارت دیگر لازم است که در مدل سازی به روش میدان فاز، اندازه المان به میزان کافی در محدوده جوانه زنی و گسترش ترک کوچک در نظر گرفته شود. مهم تر از آن مطابق "شکل 1"، اندازه ثابت بوده کنترل کننده محدوده تقریب ترک است و به عبارتی میزان خطای تقریب ترک به این متغیر وابسته است. جهت بررسی دقت فرآیند تقریب ترک و اثر ثابت طول در آن، در این بخش ترک با طول مشخص در محدوده ای دایره ای شکل بررسی شده است. محدوده مورد بررسی، مکان و اندازه ترک در "شکل 2" نشان داده شده است. در "شکل 3" محدوده با علامت Ω نشان داده شده که دارای مرز $\partial \Omega$ است. ترک به صورت کاملاً ناپیوسته با شرط دریشه $d = 1$ بر روی Γ ایجاد شده است. در این صورت تقریب ترک در محدوده Ω با حل معادله (40) به دست می آید.

در فرآیند حل اجزای محدود این نمونه از المان های چهار گره ای مربع شکل استفاده شده است. به منظور بررسی همگرایی تقریب ترک، در شرایطی که اندازه المان ها به قدر کافی کوچک باشد، لازم است که اثر ثابت طول بررسی شود. در این راستا، در کل محدوده اندازه المان $h = 0.008 \text{ mm}$

طرفی نتایج نشان می دهد که اگر ثابت طول از دو برابر اندازه متوسط المان کوچک تر شود، مجدداً خطا افزایش می یابد. بنابراین برای دستیابی به همگرایی ترک هموار به ترک تیز، ثابت طول باید بزرگ تر از دو برابر اندازه المان در محدوده ترک بوده ولی به اندازه کافی کوچک انتخاب شود. این نتیجه به وضوح تفاوت مدل میدان فاز برای مدل سازی ترک را با مدل آسیب گرادینتی نشان می دهد. در مدل گرادینتی برخلاف مدل میدان فاز، اندازه ثابت طول باید به مقدار کافی بزرگ باشد تا اثر برهمکنش های فضایی در نظر گرفته شده و مدل سازی حالت غیرمحلی داشته باشد [10,9]. به عبارتی در مدل سازی غیرمحلی رفتار ماده در یک نقطه تابعی از رفتار در نقاط اطراف آن محاسبه می شود. بنابراین در مدل گرادینتی با کاهش ثابت طول، حالت غیرمحلی از بین می رود و مدل دیگر قادر به کاهش حساسیت به اندازه المان در حل اجزای محدود در حضور رفتارهای ناپایدار نخواهد بود [11].

3-2- نمونه شیاردار تحت برش

در این قسمت شکست نرم نمونه شیاردار تنش صفحه ای تحت نیروی کششی

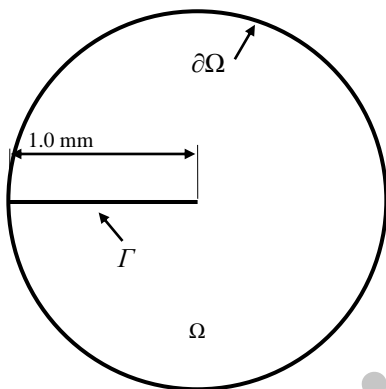


Fig. 3 Circular domain Ω with a crack surface $\Gamma = 1.0$
 شکل 3 محدوده دایره ای Ω با سطح ترک $\Gamma = 1.0$

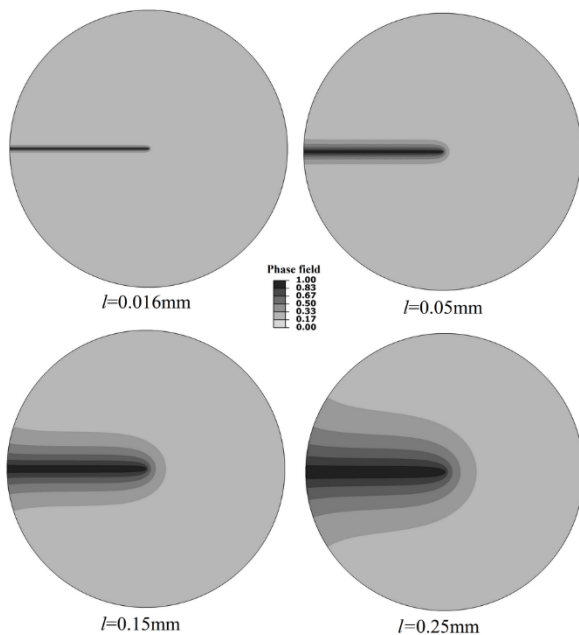


Fig. 4 Regularized crack surfaces governed by the crack phase field variable for different length scales
 شکل 4 تقریب سطح ترک با متغیر میدان فاز برای ثابت طول مختلف

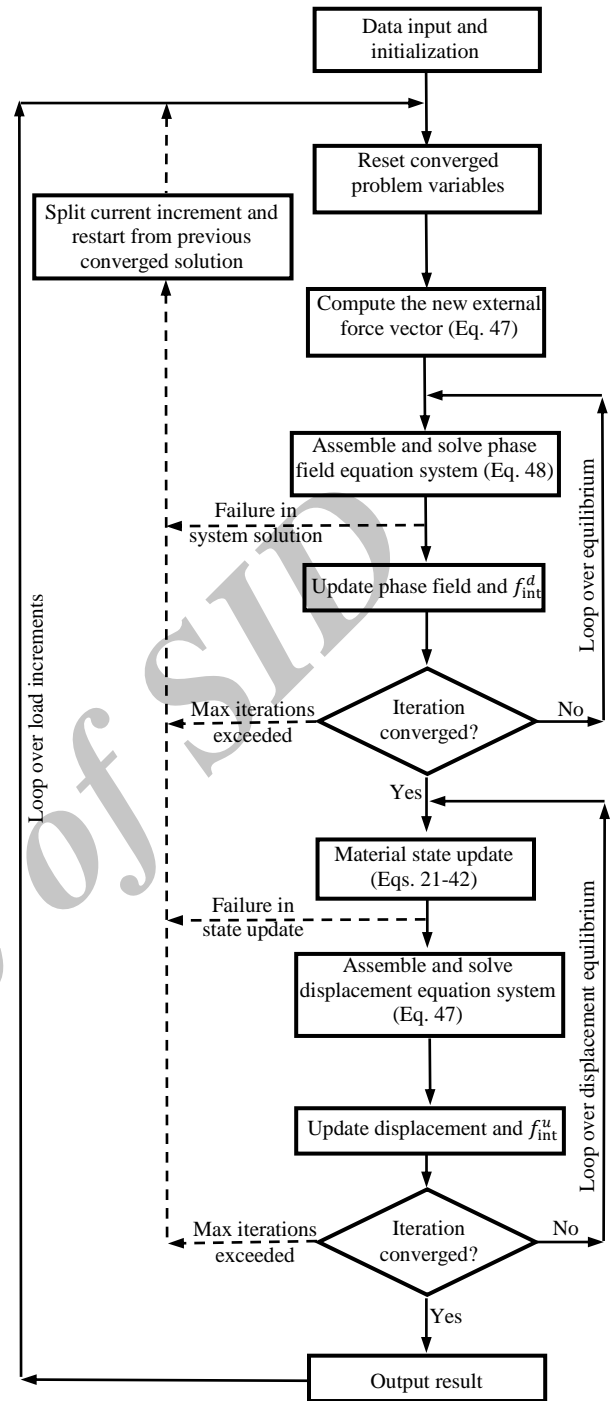


Fig.2 Computational flow for staggered algorithm in the developed non-linear finite element code

شکل 2 مسیر محاسبات برای روش جداگانه در کد اجزای محدود غیرخطی

نظر گرفته شده که به اندازه کافی کوچک بوده و از ثابت طول مختلف استفاده شده است. "شکل 4" نتایج حل عددی با ثابت طول متغیر را نشان می دهد. واضح است که با کاهش ثابت طول، تقریب ترک به ترک گسسته نزدیک می شود. مقایسه کمی ترک تقریبی Γ_l با مقدار دقیق $\Gamma = 1$ در "شکل 5" نشان داده شده است. از این شکل به صورت کمی دقت حل عددی در تقریب ترک با کاهش ثابت طول به خوبی نشان داده شده است. با افزایش مقدار ثابت طول، محدوده تقریب ترک بزرگ تر شده و ترک از حالت فیزیکی خود فاصله می گیرد و اختلاف تقریب ترک با مقدار دقیق، بیشتر می شود. از

آلیاژ آلومینیوم 6061 تحت برش استفاده کرده‌اند. با توجه به مشخصات هندسی نمونه که در آن ضخامت صفحه نسبت به دیگر ابعاد آن کوچک است، در شبیه‌سازی اجزای محدود از فرض تنش صفحه‌ای با المان‌هایی مربعی شکل چهار گره‌ای استفاده شده که در محدوده گسترش ترک دارای اندازه $h = 0.02 \text{ mm}$ هستند. مشخصات رفتار ماده مورد استفاده در جدول 1 ارائه شده که به‌طور مستقیم براساس نتایج تجربی لی و همکاران [25] استخراج شده است. بارگذاری به‌صورت جابجایی کنترل و با اعمال جابجایی در مرز بالای نمونه درحالی‌که مرز پایین آن ثابت شده است، صورت گرفته است. "شکل 7" مراحل مختلف فرآیند رشد ترک در نمونه را نشان می‌دهد. براساس پیش‌بینی اولیه، مسیر ترک خط 45 درجه بین دو شیار را طی می‌کند که همخوانی مناسبی با مسیر دیده شده در نتایج تجربی لی و همکاران [25] دارد. همچنین در "شکل 8" منحنی نیرو و جابجایی به‌دست آمده از حل عددی با نتیجه تجربی مقایسه شده است که نشان می‌دهد در ابتدا حالت الاستیک، سپس تا قبل از شروع گسترش ترک، به عبارتی تا قبل از آن که انرژی ناشی از تغییر شکل پلاستیک به حد بحرانی مشخص شده برسد، افزایش یافته بوده که ناشی از سخت‌شوندگی ماده است. پس از آن نیرو به سرعت کاهش می‌یابد. واضح است که نتایج به‌دست آمده از نظر کمی نیز با نتایج تجربی همخوانی دارد. این شبیه‌سازی بیان می‌کند که مدل پیشنهادی برای شبیه‌سازی فرآیند شکست مواد شکل‌پذیر مناسب بوده و صحت و دقت الگوریتم انتگرال‌گیری پیشنهادی و حل عددی انجام شده را، به ویژه در حالت تنش صفحه‌ای که معمولاً در حل اجزای محدود چالش‌برانگیز است، تأیید می‌کند.

3-3- نمونه شیاردار کرنش صفحه‌ای

در این قسمت شکست نرم نمونه شیاردار تنش صفحه‌ای تحت نیروی کششی مدل‌سازی شده است. شیاردار کرنش صفحه‌ای که نتایج تجربی آن توسط گائو و ژانگ [26] ارائه شده است، در این بخش جهت سنجش توانایی مدل در حالت کرنش صفحه‌ای استفاده شده است. ابعاد کلی نمونه که در "شکل 9" نشان داده شده که براساس نمونه تجربی انتخاب شده است. نمونه از جنس فولاد DH36 بوده و مشخصات رفتار ماده آن در جدول 2 بیان شده است. در شبیه‌سازی این نمونه اندازه المان $h = 0.4 \text{ mm}$ در نظر گرفته شده است.

در "شکل 9" منحنی نیرو - جابجایی به‌دست آمده با نتایج تجربی متناظر آن مقایسه شده که همخوانی نتایج، صحت و دقت حل انجام شده و

جدول 1 ثوابت مدل برای نمونه شیاردار تحت نیروی کششی

Table 1 Model parameters for the shear-induced notched sample

مقدار	ثابت رفتار ماده
68.9 (GPa)	مدول یانگ
0.33	نسبت پواسون
580 (MPa)	چسبندگی اولیه (c_0)
561 (MPa)	مدول سخت‌شوندگی (H)
1.33	ثابت η
0.742	ثابت ζ
18 (N/mm)	انرژی شکست (g_c)
0.28 (mm)	ثابت طول (l)
580.0 (MPa)	حد بحرانی شروع شکست (W_c)
0.0	ثابت β_e
1.0	ثابت β_p

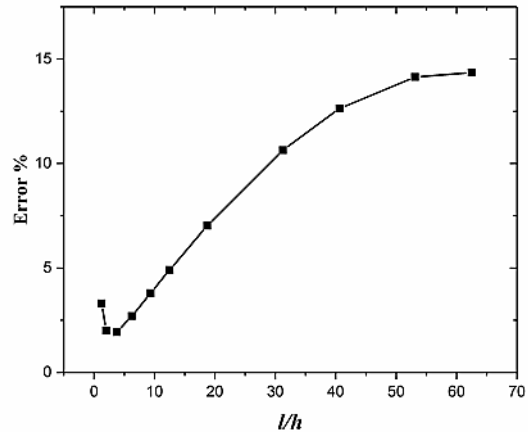


Fig. 5 Convergence study for the crack topology approximation for different length scales

شکل 5 همگرایی سطح ترک برای ثابت طول‌های مختلف

مدل‌سازی شده است. با بررسی این نمونه علاوه بر محک زدن نتایج بر اساس نتایج تجربی، دقت روش انتگرال‌گیری در حالت تنش صفحه‌ای و در مجموع دقت روش حل اجزای محدود پیشنهادی، سنجیده می‌شود. این نمونه جهت مطالعه شکست مواد شکل‌پذیر که تحت تغییر شکل پلاستیک و شکست ناشی از برش قرار دارند، طراحی شده است [25]. بارگذاری نمونه کششی بوده ولی هندسه آن به نحوی طراحی شده که در راستایی با زاویه 45 بین دو شیار، ترک گسترش یابد. ابعاد و مشخصات هندسی نمونه در "شکل 6" نشان داده شده است.

لی و همکاران [25] از این نمونه به‌طور ویژه برای بررسی شکست نرم

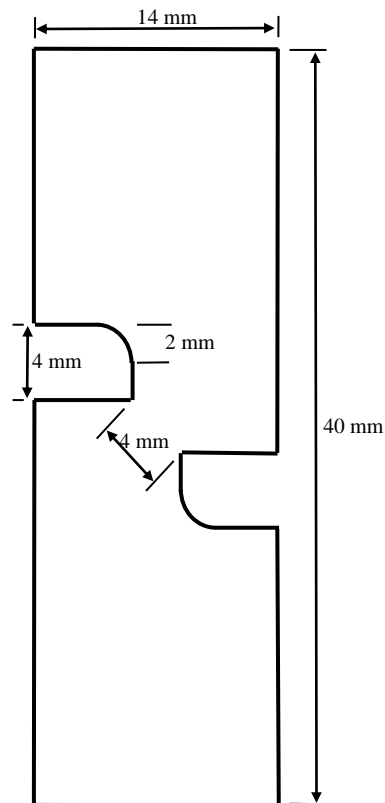


Fig. 6 The geometry and associated dimensions of the notched shear samples

شکل 6 مشخصات هندسی و ابعاد نمونه برش شیاردار

به علت سخت شونده گی ماده است. پس از آن و با رشد متغیر میدان فاز و به عبارتی با گسترش ترک، نیرو به تدریج کاهش یافته و در انتها به صورت ناگهانی افت می کند. روند کلی منحنی نیرو-جابجایی به دست آمده از حل عددی نیز با شکل کلی منحنی نیرو - جابه جایی نتایج تجربی همخوانی دارد. در "شکل 10" توزیع متغیر میدان فاز که مشخص کنند ترک است، در انتهای بارگذاری دیده می شود.

3-4- نمونه آرکان

در این بخش با مقایسه نتایج به دست آمده براساس مدل پیشنهادی با نتایج تجربی آمستاز [27] توانایی مدل در پیش بینی مسیر رشد ترک در مدهای مختلف شکست بررسی شده است. آمستاز و همکاران [27] تغییراتی را در نمونه پیشنهادی آرکان [28] ایجاد کرده اند، به نحوی که با ایجاد گیره های مخصوص، بارگذاری روی نمونه در جهت های مختلف انجام شده است. هندسه نمونه و گیره های طراحی شده است در "شکل 11" نشان داده شده است. در "شکل 11" زاویه β مسیر بارگذاری بوده و ابعاد نمونه مورد بررسی برحسب میلی متر $H=38.1$, $w=38.1$, $r=15.34$, $l=6.3$ است. در تحقیق تجربی، نمونه ها با استفاده از پیچ به صفحات نگه دارنده متصل شده اند، اما در شبیه سازی فرض شده است که این اتصال کامل بوده و حفره های پیچ ها در نظر گرفته نشده است. همچنین اتصال نمونه به صفحات نگه دارنده کامل در نظر گرفته شده است. مرز بیرونی بخش زیرین نمونه ثابت شده و نوار بیرونی بخش فوقانی آن در جهت β بارگذاری شده است.

جدول 3 ثابت مدل برای نمونه آرکان

Table 3 Model parameters for Arcan sample

مقدار	ثابت رفتار ماده
70 (GPa)	مدول یانگ
0.3	نسبت پواسون
345 (MPa)	چسبندگی اولیه (c_0)
130 (MPa)	مدول سخت شونده گی (H)
0.34	ثابت η
0.92	ثابت ξ
32 (N/mm)	انرژی شکست (g_c)
0.5 (mm)	ثابت طول (l)
120 (MPa)	حد بحرانی شروع شکست (W_c)
1.0	ثابت β_e و β_p

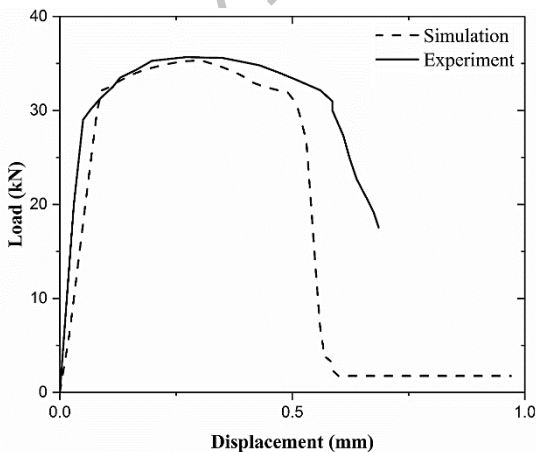


Fig. 9 Load-displacement response for the plane strain notched sample
شکل 9 منحنی نیرو-جابجایی برای نمونه شیاردار کرنش صفحه ای

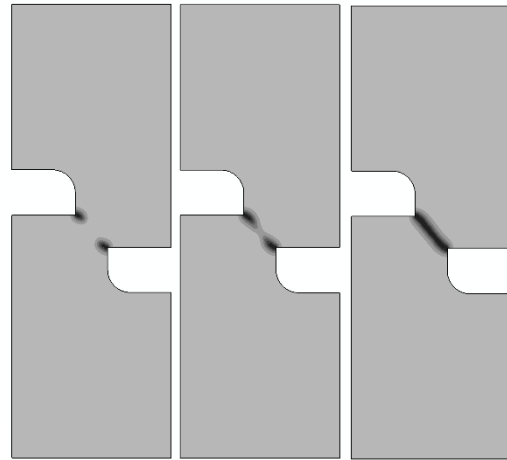
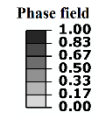


Fig. 7 Contours of the phase field variable on shear-induced notched sample at different loading stages

شکل 7 توزیع متغیر میدان فاز در نمونه شیاردار تحت نیروی کششی در مراحل مختلف بارگذاری

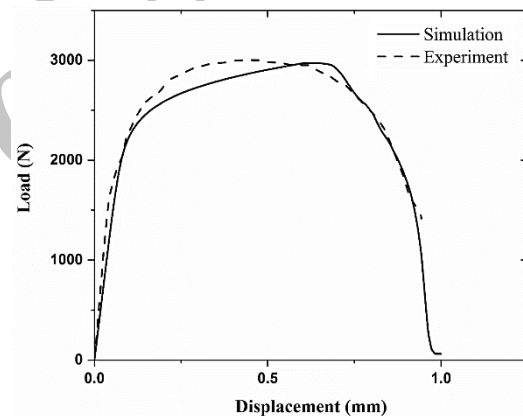


Fig. 8 Load-displacement response for the shear-induced notched sample

شکل 8 منحنی نیرو-جابجایی برای نمونه شیاردار تحت نیروی کششی

جدول 2 ثابت مدل برای نمونه شیاردار کرنش صفحه ای

Table 2 Model parameters for the plane strain notched sample

مقدار	ثابت رفتار ماده
210 (GPa)	مدول یانگ
0.3	نسبت پواسون
480 (MPa)	چسبندگی اولیه (c_0)
1.25 (GPa)	مدول سخت شونده گی (H)
0.34	ثابت η
0.92	ثابت ξ
32 (N/mm)	انرژی شکست (g_c)
0.8 (mm)	ثابت طول (l)
720 (MPa)	حد بحرانی شروع شکست (W_c)
1.0	ثابت β_e و β_p

مدل پیشنهادی را در شبیه سازی رشد ترک در مواد شکل پذیر را نشان می دهد. در منحنی نیرو - جابجایی ابتدا نیرو افزایش یافته که پس از تسلیم

در زوایای مختلف را که از نتایج حل عددی به دست آمده است را با نتایج تجربی مقایسه می کند. واضح است که نتایج عددی با نتایج تجربی همخوانی مناسبی دارند.

4- نتیجه گیری

در این مقاله مدلی برای شبیه سازی فرآیند شکست مواد شکل پذیر ارائه شد. در این راستا با ترکیب مدل رفتار پلاستیک دراگر-پراگر با روش میدان فاز، مدل مورد نظر استخراج شد. انرژی کل به صورت مجموع انرژی الاستیک و

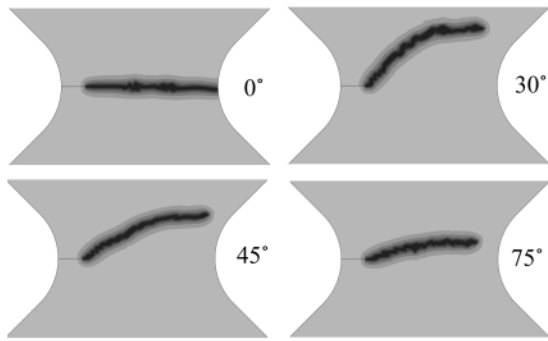


Fig. 12 Contours of the phase field variable on Arcan sample at different loading directions

شکل 12 توزیع متغیر میدان فاز در نمونه آرکان برای زاویه بارگذاری مختلف

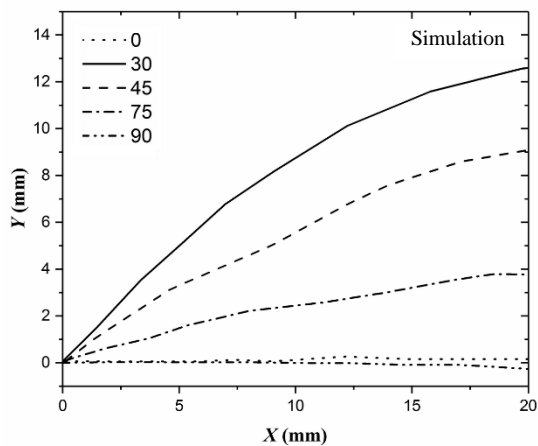
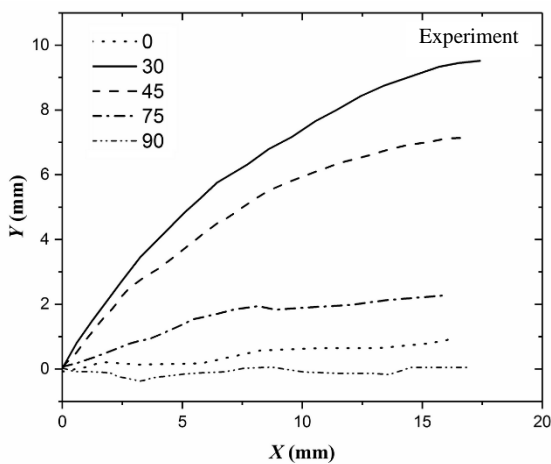


Fig. 13 Crack paths on Arcan sample at different loading angles: experiments (top) and simulations (bottom)

شکل 13 مسیر ترک در نمونه آرکان برای زاویه بارگذاری مختلف: نتایج تجربی (بالا) نتایج شبیه سازی (پایین)

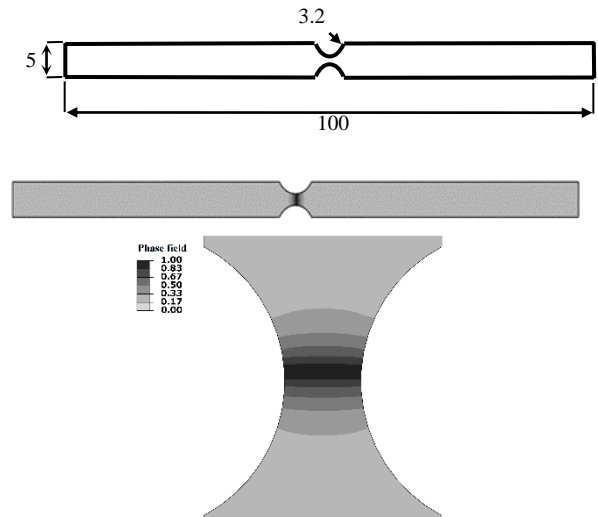


Fig. 10 The geometry and associated dimensions (in mm) of the plane strain notched shear samples (top), contours of the phase field variable on the sample (middle) and close-up view on the center (bottom)

شکل 10 مشخصات هندسی و ابعاد نمونه شیاردار کرنش صفحه ای (بالا) برحسب میلی متر، توزیع متغیر فاز در نمونه (وسط) و نمای نزدیک بخش میانی نمونه (پایین)

المان های استفاده شده در فرآیند حل اجزای محدود به دو بخش گیره ها و نمونه تقسیم شده تا هزینه زمانی حل کمتر شود. در بخش میانی نمونه که منطقه گسترش ترک است، اندازه المان ها $h = 0.25 \text{ mm}$ برای تقریب ترک استفاده شده است. به عبارتی المان ها فقط در بخشی که امکان گسترش ترک در آن ها وجود دارد به اندازه کافی کوچک در نظر گرفته شده است. تمامی المان ها از نوع چهار گره ای بوده و مسئله با فرض کرنش صفحه ای حل شده است. ثوابت رفتار ماده نیز در جدول 3 ارائه شده است. در "شکل 12" توزیع متغیر میدان فاز که نشان دهنده مسیر گسترش ترک است، برای بارگذاری با زوایای مختلف دیده می شود. مشخص است که هنگامی که زاویه های بارگذاری که در محدوده $\beta = 30^\circ - 90^\circ$ قرار دارند، گسترش ترک از نوع مد اول و وقتی که بارگذاری در محدوده $\beta = 0^\circ - 15^\circ$ باشد، از نوع مد دوم است. برای مقایسه با نتایج تجربی، "شکل 13" مسیر نهایی رشد ترک

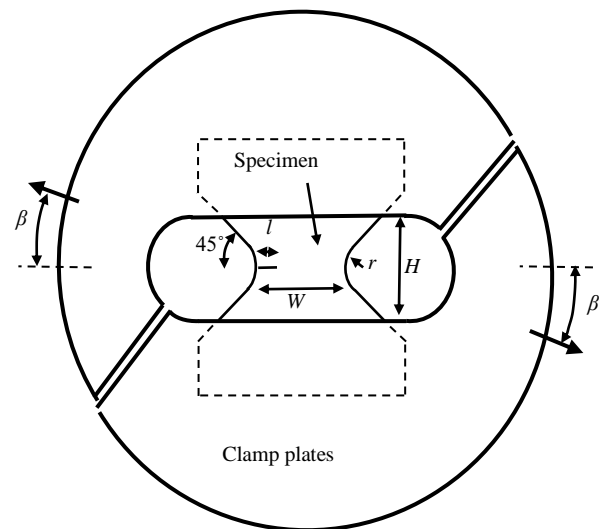


Fig. 11 Sketch of Arcan setup

شکل 11 نما و مشخصات نمونه آرکان

- 51, No. 23-24, pp. 4015-4025, 2014.
- [10] H. Badnava, M. Kadkhodaei, M. Mashayekhi, Modeling of unstable behaviors of shape memory alloys during localization and propagation of phase transformation using a gradient-enhanced model, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 15, No. 18, pp. 2531-2546, 2015.
- [11] H. Badnava, M. Mashayekhi, M. Kadkhodaei, An anisotropic gradient damage model based on microplane theory, *International Journal of Damage Mechanics*, Vol. 25, No. 3, pp. 336-357, 2015.
- [12] C. Miehe, M. Hofacker, F. Welschinger, A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 45-48, pp. 2765-2778, 2010.
- [13] C. Miehe, F. Welschinger, M. Hofacker, Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: Variational principles and multi-field FE implementations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 83, No. 10, pp. 1273-1311, 2010.
- [14] M. Hofacker, C. Miehe, Continuum phase field modeling of dynamic fracture: Variational principles and staggered FE implementation, *International Journal of Fracture*, Vol. 178, No. 1, pp. 113-129, 2012.
- [15] M. J. Borden, C. V. Verhoosel, M. A. Scott, T. J. R. Hughes, C. M. Landis, A phase-field description of dynamic brittle fracture, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 217-220, pp. 77-95, 2012.
- [16] M. A. Msekh, M. Silani, M. Jamshidian, P. Areias, X. Zhuang, G. Zi, P. He, T. Rabczuk, Predictions of J integral and tensile strength of clay/epoxy nanocomposites material using phase field model, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 93, pp. 97-114, 2016.
- [17] H. Badnava, M. A. Msekh, E. Etemadi, T. Rabczuk, An h-adaptive thermo-mechanical phase field model for fracture, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 138, No. Supplement C, pp. 31-47, 2018.
- [18] C. Miehe, F. Welschinger, M. Hofacker, A phase field model of electromechanical fracture, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 58, No. 10, pp. 1716-1740, 2010.
- [19] C. Miehe, F. Aldakheel, A. Raina, Phase field modeling of ductile fracture at finite strains: A variational gradient-extended plasticity-damage theory, *International Journal of Plasticity*, Vol. 84, pp. 1-32, 2016.
- [20] M. Ambati, T. Gerasimov, L. De Lorenzis, Phase-field modeling of ductile fracture, *Computational Mechanics*, Vol. 55, No. 5, pp. 1017-1040, 2015.
- [21] M. Ambati, R. Kruse, L. De Lorenzis, A phase-field model for ductile fracture at finite strains and its experimental verification, *Computational Mechanics*, Vol. 57, No. 1, pp. 149-167, 2016.
- [22] H. Badnava, E. Etemadi, M. Msekh, A phase field model for rate-dependent ductile fracture, *Metals*, Vol. 7, No. 5, pp. 180, 2017.
- [23] T. Heister, M. F. Wheeler, T. Wick, A primal-dual active set method and predictor-corrector mesh adaptivity for computing fracture propagation using a phase-field approach, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 290, pp. 466-495, 2015.
- [24] T. Linse, P. Hennig, M. Kästner, R. de Borst, A convergence study of phase-field models for brittle fracture, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 184, No. 3, pp. 307-318, 2017.
- [25] H. Li, M. W. Fu, J. Lu, H. Yang, Ductile fracture: Experiments and computations, *International Journal of Plasticity*, Vol. 27, No. 2, pp. 147-180, 2011.
- [26] X. Gao, G. Zhang, C. Roe, A study on the effect of the stress state on ductile fracture, *International Journal of Damage Mechanics*, Vol. 19, No. 1, pp. 75-94, 2010.
- [27] B. E. Amstutz, M. A. Sutton, D. S. Dawicke, J. C. Newman, An experimental study of CTOD for mode I/mode II stable crack growth in thin 2024-T3 aluminium specimens, *Fracture Mechanics*, Vol. 26, No. 1, pp. 256-71, 1996.
- [28] M. Arcan, Z. Hashin, A. Voloshin, A method to produce uniform plane-stress states with applications to fiber-reinforced materials, *Experimental Mechanics*, Vol. 18, No. 4, pp. 141-146, 1978.

انرژی های اتلاف شده بر اثر تغییر شکل پلاستیک و فرآیند شکست تعریف شد. براساس کمینه سازی انرژی، روابط حاکم بر میدان جابجایی و میدان فاز استخراج گردید. جهت حل عددی مدل پیشنهادی جزئیات حل اجزای محدود و فرآیند انتگرال گیری رفتار ماده در حالت های سه بعدی، کرنش صفحه ای و تنش صفحه ای ارائه شد. به کمک مدل پیشنهادی و حل اجزای محدود، اثر اندازه المان و ثابت طول در تقریب ترک به روش میدان فاز بررسی شد و لزوم در نظر گرفتن اندازه المان کوچک در محدوده رشد ترک و اندازه ثابت طول برای رسیدن به همگرایی گاما بررسی شد. همچنین از نتایج تجربی موجود جهت نشان دادن صحت و دقت نتایج حل عددی مدل پیشنهادی و توانایی آن در شبیه سازی فرآیند شکست نرم استفاده گردید. نتایج نشان داد که مدل پیشنهادی و روش انتگرال گیری ارائه شده توانایی شبیه سازی فرآیند شکست در مواد شکل پذیر را دارد. همچنین مدل سازی نمونه پیشنهادی آرکان با استفاده از مدل کنونی، توانایی و دقت مدل در شبیه سازی رشد ترک در مواد شکل پذیر تحت بارگذاری پیچیده و مدهای ترکیبی را نشان داد.

5- مراجع

- [1] H. Niasari, G. Liaghat, Numerical investigation of dynamic crack growth in steel pipes under internal detonation loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 9, pp. 214-224, 2017. (in Persian فارسی)
- [2] M. B. Nazari, H. Rajaei, Extended finite element analysis of a stationary crack in hygrothermal isotropic media subjected to thermal shock, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 1, pp. 56-66, 2017. (in Persian فارسی)
- [3] J. Akbaridoost, S. M. H. Mohajerani, A. Torabi, Investigation of fracture trajectory in blunt V-notched specimens under mixed mode I-II loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 3, pp. 161-172, 2016. (in Persian فارسی)
- [4] A. Farrokhbadi, H. R. madadi, Evaluation of the matrix cracking and induced delamination formation in cross-ply composite laminates under tension loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 10, pp. 375-384, 2017. (in Persian فارسی)
- [5] B. Bourdin, G. A. Francfort, J. J. Marigo, Numerical experiments in revisited brittle fracture, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 48, No. 4, pp. 797-826, 2000.
- [6] B. Bourdin, Numerical implementation of the variational formulation for quasi-static brittle fracture, *Interfaces Free Bound*, Vol. 9, No. 3, pp. 411-430, 2007.
- [7] B. Bourdin, G. A. Francfort, J. J. Marigo, The variational approach to fracture, *Journal of Elasticity*, Vol. 91, No. 1, pp. 5-148, 2008.
- [8] R. de Borst, C. V. Verhoosel, Gradient damage vs phase-field approaches for fracture: Similarities and differences, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 312, No. 5, pp. 78-94, 2016.
- [9] H. Badnava, M. Kadkhodaei, M. Mashayekhi, A non-local implicit gradient-enhanced model for unstable behaviors of pseudoelastic shape memory alloys in tensile loading, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.