



## مطالعه شبکه در روش شبکه بولتزمن-حجم محدود در شبیه‌سازی جریان آرام تراکم‌پذیر لزج

حامد جلالی<sup>1</sup>، رامین کمالی مقدم<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، پژوهشگاه هوافضا، تهران

2- استادیار، مهندسی هوافضا، پژوهشگاه هوافضا، تهران

\* تهران، صندوق پستی 14665-834، rkamali@ari.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 06 آذر 1396

پذیرش: 19 بهمن 1396

ارائه در سایت: 19 اسفند 1396

کلید واژگان:

روش شبکه بولتزمن-حجم محدود

مطالعه شبکه

جریان تراکم‌پذیر لزج آرام

شبکه منحنی الخط

### چکیده

نرم‌افزاری به روش شبکه بولتزمن بر مبنای حجم محدود (FVLBM) برای شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر لزج و آرام دوبعدی در شبکه منحنی‌الخط با سازمان توسعه داده شده‌است. در مقاله حاضر، صحت‌سنجی نرم‌افزار توسعه‌یافته و ارزیابی دقت و چهار مدل شبکه جدید دوبعدی D2Q9L2، D2Q13L2، D2Q17L2 و D1Q21L2 به ازای افزایش سرعت‌های گسسته (فازی) شبکه در شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر مورد مطالعه قرار گرفته و شبکه بهینه معین گردیده‌است. جهت شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر در روش شبکه بولتزمن، از روش جدید تابع دایروی بجای بسط یا تصحیح تابع ماکسول به منظور محاسبه توابع تعادلی استفاده و روش حجم محدود به همراه روش MUSCL مرتبه-3 در گسسته‌سازی عبارت جایجایی برای بهتر شکار کردن ناپیوستگی‌های جریان به کار گرفته شده‌است. جهت بررسی عملکرد روش و مطالعه پارامتری ارائه شده، جریان تراکم‌پذیر لزج و آرام پیرامون ایرفویل NACA0012 در دستگاه منحنی‌الخط با سازمان در زوایای حمله صفر و 10 درجه شبیه‌سازی شده‌است. مسائل شبیه‌سازی شده در رژیم جریان پیوسته با نتایج عددی معتبر حل معادلات ناویر-استوکس مقایسه شده‌است. با وجود این که نتایج عددی در مقایسه با حل عددی متناظر از دقت بسیار مناسبی برخوردار است، محدودیت‌های روش حل حاضر و ارزیابی نتایج حاصل از شبکه‌های مختلف مورد تحلیل قرار گرفته‌است.

## Lattice Study of the Finite Volume-Lattice Boltzmann Method in Simulation of Laminar Viscous Compressible Flow

Hamed Jalali, Ramin Kamali-Moghadam\*

Department of Aerospace Engineering, Aerospace Research Institute, Tehran, Iran

\* P.O.B. 14665-834, Tehran, Iran, rkamali@ari.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 27 November 2017  
Accepted 08 February 2018  
Available Online 10 March 2018

#### Keywords:

Finite Volume-Lattice Boltzmann Method  
Lattice Study  
Viscous Laminar Compressible Flow  
Curvilinear Grid System

### ABSTRACT

A Finite Volume-Lattice Boltzmann Method (FVLBM) for simulation of viscous laminar compressible flows in 2-D structured curvilinear coordinate system has been developed. In the present study, validation of the presented software and accuracy assessment of four new 2D lattices D2Q9L2, D2Q13L2, D2Q17L2 and D2Q21L2 based on increasing discrete velocities of lattice has been studied and the optimum lattice has been introduced. The presented LBM has developed using new method of circular function idea instead of expansion or correction of Maxwellian function for evaluation of equilibrium distribution functions. Moreover, in order to capture discontinuities in the flow field, 3rd order MUSCL scheme has been implemented for approximation of convective term. The laminar compressible viscous flow over the NACA0012 airfoil has been simulated in the curvilinear coordinate system for two angle of attacks, 0 and 10 Deg. The obtained results have been compared with validated N.S. solutions. Although the results have desirable accuracy in comparison of those of the N.S. solutions, limitation of the presented method and results assessment obtained by the different lattices have been investigated.

### 1- مقدمه

که همان معادله بولتزمن<sup>3</sup> می‌باشد- دینامیک جریان سیال شبیه‌سازی می‌شود. هنگام حل عددی معادله بولتزمن، می‌توان درست مانند حل عددی معادلات حاکم در مقیاس ماکروسکوپی<sup>4</sup> یعنی معادلات اوپلر یا ناویر-استوکس رفتار کرد. اما به علت ویژگی‌های خاص روش شبکه بولتزمن در مقایسه با روش‌های متداول CFD از قبیل قابلیت موازی‌سازی ذاتی، معادله

روش شبکه بولتزمن در حال حاضر به عنوان یک روش قدرتمند در دینامیک سیالات محاسباتی<sup>1</sup> (CFD) برای شبیه‌سازی جریان سیال در رژیم‌های مختلف جریان مورد توجه ویژه قرار گرفته است [1,2]. در روش شبکه بولتزمن با گسسته‌سازی معادله حاکم جریان سیال در مقیاس موزوسکوپی<sup>2</sup>-

<sup>3</sup> Boltzmann equation

<sup>4</sup> Macroscopic scale

<sup>1</sup> Computational Fluid Dynamics

<sup>2</sup> Mesoscopic scale

#### Please cite this article using:

H. Jalali, R. Kamali-Moghadam, Lattice Study of the Finite Volume-Lattice Boltzmann Method in Simulation of Laminar Viscous Compressible Flow, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 03, pp. 417-428, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله ذیل استفاده نمایید:

مولفه‌های همراه با سه سطح انرژی، ارائه دادند. از روی این مدل می‌توان معادلات اویلر را بازیابی کرد. در این روش، مدل شبکه D2Q9 می‌باشد اما به علت تعریف دو سطح انرژی مدل به صورت D2Q9L2 معرفی می‌شود [10].

شی و همکارانش نیز یک مدل دوبعدی 9-مولفه‌ای که از روی آن معادلات اویلر بازیابی می‌شود، ارائه دادند. در این روش نیز شبکه و تابع توزیع همانند مدل D2Q9 است. ایشان مدل خود را با سه سطح انرژی معرفی کردند و به خوبی توانستند مدل-BGK را با روش تفاضل محدود همراه با روش کاهش مجموع تغییرات<sup>6</sup> تحلیل و امواج ضربه‌ای را آشکار سازند [11]. کیو و همکاران روشی جدید و آسان، برای محاسبه توابع توزیع احتمالی بدون محدودیت عدد ماخ ارائه کردند [12]. ایشان از یک تابع موسوم به تابع دایروی<sup>7</sup> در شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌ناپذیر استفاده نمودند. آن‌ها بجای اصلاح و توسعه تابع ماکسول که از نقطه نظر عملیات ریاضی یک تابع پیچیده می‌باشد، استفاده از یک تابع دایروی با فرم بسیار ساده را پیشنهاد دادند. این روش یک روش بسیار موثر برای ارائه مدل‌های جدید شبکه می‌باشد.

در این مقاله از روش تابع دایروی برای محاسبه توابع توزیع احتمالی استفاده شده تا محدودیت روش استاندارد شبکه بولتزمن برطرف شود و جریان تراکم‌پذیر لزج به خوبی شبیه‌سازی گردد. از طرفی، با توجه به اینکه روش حجم محدود<sup>8</sup>، روشی بر مبنای حفظ قوانین بقای فیزیکی می‌باشد، این روش برای شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌پذیر که معمولاً همراه با ناپیوستگی‌هایی چون موج ضربه‌ای و ناپیوستگی تماسی هستند، مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مقاله، با استفاده از روش حجم محدود در تحلیل عددی معادله بولتزمن، عدم انعطاف‌پذیری روش شبکه استاندارد بولتزمن نسبت به شبکه‌های پیچیده و منحنی‌الخط بر طرف گردیده است. همچنین برای گسسته‌سازی عبارت جابجایی خطی معادله بولتزمن-BGK، از روش ماسل<sup>9</sup> مرتبه-3 استفاده می‌شود.

در این تحقیق، صحت‌سنجی چهار مدل شبکه جدید دو بعدی D2Q13L2، D2Q9L2، D2Q17L2 و D1Q21L2 در تحلیل جریان تراکم‌پذیر لزج و آرام حول ایرفویل NACA0012 در دستگاه منحنی‌الخط باسازمان مطالعه شده و شبکه بهینه معین گردیده‌است. به علت قابلیت روش شبکه بولتزمن در شبیه‌سازی جریان در دامنه وسیعی از اعداد نادسن<sup>10</sup>، نرم‌افزار توسعه یافته، به خوبی در شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌پذیر، در دو زمینه صنعتی کاربرد عملی دارد؛ ابتدا در شبیه‌سازی جریان‌های کم-چگالی به عنوان مثال شبیه‌سازی جریان پیرامون اجسام بازگشت به جو در ارتفاعات بالا که در اعداد نادسن بزرگ (1~10) حرکت می‌کنند؛ دوم، در شبیه‌سازی جریان در مقیاس میکرو، مانند میکروکانال‌ها، میکروکمپرسورها، میکرونازل‌ها، میکرو-پرنده‌ها که عدد نادسن به سمت جریان مولکولی آزاد (ناپیوسته) میل می‌کند وجود دارد. اما تمرکز اصلی نویسندگان مقاله حاضر مطالعه شبکه<sup>11</sup> در دقت شبیه‌سازی است و مسئله شبیه‌سازی جریان‌های رقیق مدنظر نمی‌باشد. به عبارت دیگر؛ در این مقاله به ارائه آرایش‌های جدید شبکه (4) شبکه جدید) و مقایسه دقت این روش‌ها در تحلیل میدان جریان تراکم‌پذیر لزج و آرام پرداخته شده‌است. مطابق تحقیقات به عمل آمده مطالعه آرایش‌های جدید شبکه در روش مدل تابع دایروی تاکنون صورت نگرفته

حاکم ساده‌تر، دسترسی به حل آسان میدان فشار، مواجه بودن با عبارت خطی جابجایی به جای عبارت غیرخطی متناظر در معادلات اویلر/ناویر-استوکس<sup>1</sup>، اعتبار در گستره وسیعی از عدد نادسن و غیره، همه و همه باعث روی آوری محققین به این روش شده‌است. یکی دیگر از برتری‌های روش شبکه بولتزمن نسبت روش‌های متعارف CFD، ایجاد فضای جدیدی در دینامیک سیالات محاسباتی است که اصطلاحاً به آن «روش‌های بدون-شبکه»<sup>2</sup> گفته می‌شود. بر این اساس روش شبکه بولتزمن نیاز به تولید شبکه متداول ندارد و با توزیع یکنواخت شبکه در یک میدان کارترین و سپس تعیین مرز هندسه و تطبیق مرز با شبکه‌های ریزتر فاز تولید شبکه را به اتمام می‌رساند. اما ما در این پژوهش در بخش تولید شبکه از روش متداول استفاده کرده‌ایم و با تولید شبکه<sup>3</sup> باسازمان<sup>4</sup> منطبق بر هندسه از روش حجم محدود در روش شبکه بولتزمن بهره برده‌ایم.

بر همین اساس استفاده از روش شبکه بولتزمن برای شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌پذیر و آشکارسازی پدیده‌های فیزیکی مانند امواج ضربه‌ای و امواج تماسی جذاب خواهد بود. معادله بولتزمن با روش‌های مختلف عددی از قبیل حجم محدود، تفاضل محدود و المان محدود قابل حل است. در سال‌های اخیر تلاش‌های فراوانی برای شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌پذیر به روش شبکه بولتزمن صورت گرفته است. کاربرد روش شبکه بولتزمن استاندارد محدود به تحلیل جریان‌های تراکم‌ناپذیر می‌باشد چرا که مدل‌های شبکه بولتزمن بر مبنای عبارت تابع ماکسول در اعداد ماخ کوچک پایه‌ریزی شده‌است. بنابراین در میان پژوهش‌های جدید در حوزه دینامیک سیالات عددی، تحقیقات فراوانی برای پوشش رژیم‌های جریان گذر صوتی و مافوق صوتی مشاهده می‌شود و تاکنون چندین مدل شبکه بولتزمن برای پوشش جریان‌های تراکم‌پذیر ارائه گردیده است [3-13]. اولین قواعد برخورد ذرات در روش شبکه بولتزمن توسط فریش و همکارانش ارائه شد [3]. الکساندر و همکارانش در سال 1991 روش شبکه بولتزمن را برای جریان تراکم‌پذیر به کار بردند و معادله برگرز<sup>4</sup> را شبیه‌سازی کردند [4]. کونکسو از طریق وارد نمودن یک جمله غیرتعدادی در توابع توزیع ذرات، مدل ساده شده بهاتناگر-گروس-کروک<sup>5</sup> را برای جریان لزج تعمیم داد. وی عنوان نمود که نتیجه این کار تقریب دقیق‌تر معادلات ناویر-استوکس می‌باشد و همچنین بیان کرد که مدل مذکور برای حل جریان لایه مرزی و البته برای مدل کردن موج ضربه‌ای، مناسب است [5].

کینگ لی با ارائه روش تابع توزیع دوگانه مدلی برای شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر ارائه کرد [6]. چنگهای سان با افزودن سرعت سیال به سرعت حرکت ذرات روش را به‌گونه‌ای اصلاح نمود که می‌تواند جریان سیال تراکم‌پذیر را در دامنه وسیعی از اعداد ماخ شبیه‌سازی کند. سان با این روش مسائلی نظیر مساله پخش موج ضربه‌ای و انعکاس آن در اعداد ماخ بزرگ را شبیه‌سازی نمود [7]. چنگهای سان و هسو در سال 2003 روش سان را برای جریان‌های سه بعدی توسعه دادند و جریان روی سیلندر داخل یک کانال و جریان گذر صوتی روی NACA0012 را با آن تحلیل کردند [8]. یالینگ هیو و همکاران، در سال 2013 توانستند یک مدل سه‌بعدی مبتنی بر روش اختلاف محدود روش شبکه بولتزمن در جریان تراکم‌پذیر با رویکرد تابع توزیع دوگانه، را تحلیل کنند [9]. یان چن و هیو، یک مدل دوبعدی 9-

<sup>6</sup> Total variation diminishing (TVD)

<sup>7</sup> Circular Function (CF)

<sup>8</sup> Finite Volume Method (FVM)

<sup>9</sup> Monotone Upstream-Centered Schemes for Conservation Laws (MUSCL)

<sup>10</sup> Knudsen number

<sup>11</sup> Lattice

<sup>1</sup> Euler/Navier-Stokes equations

<sup>2</sup> Meshless methods

<sup>3</sup> Grid generation

<sup>4</sup> Bergures equation

<sup>5</sup> Bhatnagar-Gross-Krook (BGK)

$$\lambda_c = \frac{2(\gamma - 1)\rho e}{\rho_c} \quad (8)$$

با استفاده از رابطه  $\rho_c = \rho/\gamma$  و بسط چایمن-انسکوگ و با تعاریف فوق معادله بولتزمن-BGK، معادلات ناویر-استوکس قابل بازیابی است. برخی خواص ماکروسکوپیکی سیال به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mu = \tau p \quad (9)$$

$$\mu_b = \left(\frac{5}{3} - \gamma\right)\mu \quad (10)$$

$$k = \tau p C_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \tau p R \quad (11)$$

که در آن  $\mu$ ، لزجت دینامیکی،  $\mu_b$ ، لزجت حجمی،  $\tau$ ، زمان آرامش،  $k$ ، ضریب انتقال حرارت گاز،  $C_p$ ، ظرفیت گرمایی در فشار ثابت و  $R$ ، ثابت جهانی گازها است. نکته قابل توجه این است که لزجت و ضریب انتقال حرارت مستقل از هم نیستند (به عبارت دیگر عدد پراتل برابر 1 ثابت می‌شود) و از طرفی در جریان تراکم‌پذیر لزجت حجمی صفر نمی‌شود چرا که در جریان تراکم‌پذیر برخلاف جریان تراکم‌ناپذیر که مولکول‌ها تک-اتمی در نظر گرفته می‌شوند، به علت افزایش درجات آزادی و فعال شدن مد انرژی دورانی مولکولی، الزاما باید مولکول‌ها دو-اتمی در نظر گرفته شوند و بنابراین لزجت حجمی صفر نخواهد بود. این نکته در رابطه (10) به خوبی نمایان است به نحوی که اگر درجات آزادی اضافی مولکولی با  $K$  نشان داده شود و ابعاد مسئله با  $D$  مشخص شود، همچنین چنانچه  $b$  معرف تعداد کل درجات آزادی مولکولی باشد (برای مولکول تک-اتمی  $b = 3$ ، مولکول دو-اتمی  $b = 5$  و 7 و 6 به ترتیب برای مولکول گاز سه-اتمی خطی و غیرخطی):

$$K = b - D \quad (12)$$

از طرفی تعداد کل درجات آزادی مولکولی گاز نسبت گرمایی ویژه گاز را تعیین می‌کند:

$$\gamma = \frac{b + 2}{b} \quad (13)$$

اگر  $b = 3$  باشد یعنی مولکول تک-اتمی در نظر گرفته شود (جریان تراکم‌ناپذیر)،  $\gamma = 5/3$  خواهد بود و لزجت حجمی برابر صفر خواهد شد. بنابراین در مدل حاضر، برای گاز با مولکول دو-اتمی یا چند-اتمی، لزجت حجمی غیرصفر هم مرتبه با لزجت دینامیکی می‌شود در صورتی که در اکثر مسائل مهندسی  $\mu_b$  به اندازه کافی نسبت به  $\mu$  کوچک است و قابل صرف‌نظر می‌باشد. به هر حال برای برخی از مسائل (هنگام وجود جدایش جریان لایه مرزی روی سطح) وجود  $\mu_b$  در مدل حاضر باعث بروز خطای عددی می‌شود. بنابراین در جریان تراکم‌پذیر وجود این دو خطا یعنی  $Pr = 1$  و صفر نبودن لزجت حجمی در این مدل وجود دارد که هر دو ناشی از مدل برخورد مولکولی BGK می‌باشد، زیرا در مدل برخورد BGK تنها یک پارامتر  $\tau$  وجود دارد که سه پارامتر انتقالی  $\mu$ ،  $\mu_b$  و  $k$  را تنظیم نماید. پیش از این نیز در

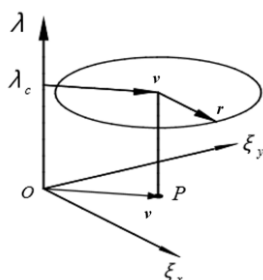


Fig. 1 Viscous Circular Function schematic.

شکل 1 شماتیک تابع دایروی لزج [14].

است و تحقیق حاضر گام جدیدی در بررسی پارامتریک شبکه در روش تابع دایروی محسوب می‌شود.

## 2- روابط حاکم

معادله استاندارد شبکه بولتزمن تنها برای جریان‌های کم سرعت (تراکم‌ناپذیر) معتبر می‌باشد [8]. بنابراین برای پوشش جریان‌های تراکم‌پذیر نیاز به تصحیح این روش می‌باشد. در این مقاله، ابتدا به محاسبه توابع توزیع تعادلی و سپس به بیان نحوه گسسته‌سازی معادله بولتزمن پرداخته خواهد شد.

## 2-1- تابع دایروی

توابع توزیع تعادلی در روش استاندارد شبکه بولتزمن، توسط معادله ماکسول به دست می‌آید:

$$g = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{\frac{K+D}{2}}} \exp\left[-\frac{(\xi - u)^2 + \sum_{i=1}^K \xi_i^2}{2RT}\right] \quad (1)$$

ایده تابع دایروی بجای بسط و توسعه تابع ماکسول ارائه شد تا از پیچیدگی اصلاح این تابع برای اعداد ماکز بزرگ جلوگیری شود. باید توجه داشت که عملاً تابع ماکسول نمی‌تواند در شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر مورد استفاده قرار گیرد به علت این‌که این تابع برای مولکول‌های دو-اتمی یا چند-اتمی، درجه آزادی چرخشی<sup>1</sup> را در نظر نگرفته است و این درجه آزادی در جریان تراکم‌پذیر فعال می‌شود. بنابراین استفاده از یک تابع ساده پیشنهاد می‌شود که در بردارنده همه درجات آزادی مولکول باشد. این تابع برای مسائل دوبعدی، به صورت زیر تعریف می‌شود [13]:

$$g = \begin{cases} \frac{\rho_c}{2\pi r} & \text{اگر } |\xi - u| = r \text{ و } \lambda = \lambda_c \\ \rho_p & \text{اگر } \xi = u \text{ و } \lambda = 0 \end{cases} \quad (2)$$

که در آن  $\xi$ ، سرعت ذره،  $\lambda$ ، انرژی داخلی یا پتانسیل ذره،  $c$ ، سرعت ویژه ذره سیال و  $u$ ، سرعت متوسط جریان (ماکروسکوپیکی) می‌باشد. تعبیر ریاضی تابع دایروی برای جریان لزج به این صورت است که، چگالی به دو قسمت تقسیم می‌شود؛  $\rho_c$  بر روی دایره‌ای به شعاع  $r$  با انرژی  $\lambda_c$  متمرکز شده است. و قسمت دیگر  $\rho_p$  در تصویر نقطه مرکز دایره روی صفحه  $\xi_x - \xi_y$  قرار می‌گیرد (شکل 1). بنابراین کل انرژی داخلی روی دایره‌ای که تنها کسری از چگالی را داراست، توزیع می‌شود.  $\rho_c$ ،  $\rho_p$ ،  $r$  و  $\lambda_c$  باید روابط زیر را ارضا کنند:

$$\rho = \rho_c + \rho_p \quad (3)$$

$$\rho e = \rho_c \left(\frac{1}{2} r^2 + \lambda_c\right) \quad (4)$$

$$P = (\gamma - 1)\rho e = \frac{1}{2} \rho_c r^2 \quad (5)$$

که در آن،  $e$ ، انرژی استاتیکی،  $P$ ، فشار استاتیکی و  $\gamma$ ، نسبت گرمایی ویژه گاز است.

با این روابط، چگالی، انرژی داخلی و فشار بدون تغییر باقی می‌ماند چون  $\rho_c$  به صورت یکنواخت در راستای دایره توزیع شده است و تصویر مرکز این دایره در صفحه سرعت‌های فازی برابر سرعت متوسط جریان  $v$  است. مومنتم نیز مشابه چگالی بدون تغییر باقی می‌ماند. با استفاده از رابطه (3) تا (5) روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\rho_p = \rho - \rho_c \quad (6)$$

$$r = \sqrt{\frac{2(\gamma - 1)\rho e}{\rho_c}} \quad (7)$$

<sup>1</sup> Rotational degrees of freedom

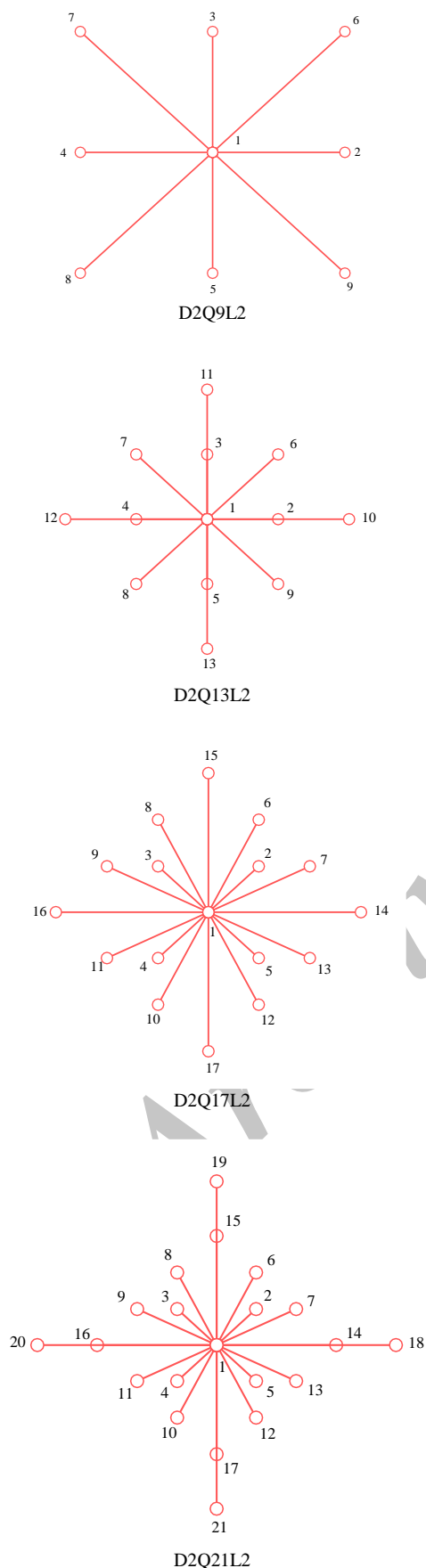


Fig. 2 Four 2D new lattices

شکل 2 چهار شبکه جدید دو-بعدی

معادله ناویر-استوکس با فرض تراکم‌ناپذیر بودن جریان ( $\nabla \cdot V = 0$ ) لزجت حجمی لحاظ نمی‌شد.

$$\rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + \left( \frac{1}{3} \mu + \mu_b \right) \nabla (\nabla \cdot V) + F \quad (14)$$

به دلیل این‌که عدد پراتل تنها معادل 1 می‌تواند باشد، این مدل نمی‌تواند برای شبیه‌سازی جریان‌های لزج حرارتی با پراتل غیرواحد استفاده شود. اما زمانی که عدد ماخ جریان آزاد زیاد نباشد و اثرات آیرودینامیکی مهم نباشد، نیروهای آیرودینامیکی نسبت به دما حساس نیستند و نتایج مناسبی به دست می‌آید. تابع دایروی قادر است تمام معادلات بقا را ارضا نماید. توابع توزیع تعادلی برای هر سرعت گسسته می‌تواند توسط رابطه (15) و با استفاده از یک تابع وزنی به دست آید:

$$f_{i1}^{eq} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_c}{2\pi} \varphi_i(u + r_c \cos\theta, v + r_c \sin\theta) \frac{\lambda_2 - \lambda_c}{\lambda_2} d\theta + P_p \varphi_i(u, v)$$

$$f_{i2}^{eq} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_c}{2\pi} \varphi_i(u + r_c \cos\theta, v + r_c \sin\theta) \frac{\lambda_c}{\lambda_2} d\theta \quad (15)$$

می‌توان تضمین نمود که تابع وزن  $\varphi_i(\lambda, \xi)$ ، تمام قیود بقا را برآورد می‌سازد [14]. حال می‌توان تمام توابع توزیع تعادلی را توسط یک مجموعه چند جمله‌ای میانیاب لاگرانژی<sup>1</sup> به دست آورد چرا که این چندجمله‌ای تمام قیود تابع وزن را ارضا می‌کند. برای سادگی می‌توان با جداسازی دو سطح انرژی به صورت  $\lambda_1 = 0$  و  $\lambda_2 > \lambda_c$ ، فقط تابع سرعت ذرات در نظر گرفته شود، یعنی  $\varphi_i(\xi)$  و در ادامه با در نظر گرفتن چندجمله‌ای لاگرانژی، یک شبکه<sup>2</sup> دو بعدی با فرم D2AQML2 ایجاد شود. باید توجه داشت که نیاز نیست همه مولفه‌های سرعت فازی شبکه عدد صحیح باشند چرا که در این مقاله از روش حجم-محدود برای حل معادله بولتزمن استفاده می‌شود. به علت ساده بودن تابع دایروی، معادله (15) به صورت تحلیلی انتگرال‌گیری می‌شود. توابع توزیع تعادلی به دست آمده توسط این روش، محدودیت عدد ماخ توزیع ماکسول را ندارند و به راحتی می‌توان از آن‌ها برای شبیه‌سازی جریان‌های لزج تراکم‌پذیر آرام استفاده نمود [14].

## 2-2- ارائه مدل‌های شبکه جدید دو بعدی

استفاده از یک تابع وزن در نسبت دادن یک متغیر به چندین نقطه به طور گسترده در روش‌های ذرات، مانند روش ذره در سلول<sup>3</sup>، روش گردابه<sup>4</sup>، و روش گردابه در سلول<sup>5</sup> مورد استفاده قرار می‌گیرد. یک چند جمله‌ای میانیابی لاگرانژی یک-بعدی با  $M$  عبارت به فرم زیر می‌باشد:

$$P(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^2y + a_7xy^2 + a_8x^2y^2 + \dots + a_M + \dots \quad (16)$$

این چند جمله‌ای  $M$ -نقطه‌ای می‌تواند به فرم معادله زیر نوشته شود:

$$\varphi_i(x, y) = [a_t][t] \quad (17)$$

که در آن

$$[a_t] = [a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,M}]$$

$$[t] = [1 + x + y + x^2 + xy + y^2 + x^2y + xy^2 + x^2y^2, \dots] \quad (18)$$

مشخص شود، توابع میانیابی یا همان توابع وزن  $[a_i]$  حال اگر بردار ضرایب

<sup>1</sup> Lagrangian interpolation polynomial

<sup>2</sup> Lattice

<sup>3</sup> Particle in cell method

<sup>4</sup> Vortex method

<sup>5</sup> Vortex in cell method

جدول 3 بردارهای سرعت شبکه D2Q13L2

Table 3 velocities vector of D2Q13L2 lattice.

$e_1 = (0,0)$	برای $\alpha = 1$
$e_\alpha = \text{cyc} : (\pm 1,0)$	برای $\alpha = 2 \dots 5$
$e_\alpha = \text{cyc} : \sqrt{2}(\pm 1, \pm 1)$	برای $\alpha = 6 \dots 9$
$e_{10} = (2,0)$	$e_{11} = (0,2)$
$e_{12} = (-2,0)$	$e_{13} = (0,-2)$

جدول 4 بردارهای سرعت شبکه D2Q17L2

Table 4 velocities vector of D2Q17L2 lattice

$e_1 = (0,0)$	برای $\alpha = 1$
$e_\alpha = \text{cyc} : (\pm 1,0)$	برای $\alpha = 2 \dots 5$
$e_\alpha = \text{cyc} : \sqrt{2}(\pm 1, \pm 1)$	برای $\alpha = 14 \dots 17$
$e_6 = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$	$e_8 = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$
$e_{10} = (-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$	$e_{12} = (\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$
$e_7 = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$	$e_9 = (-\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$
$e_{11} = (-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$	$e_{13} = (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$

جدول 5 بردارهای سرعت شبکه D2Q21L2

Table 5 velocities vector of D2Q21L2 lattice

$e_1 = (0,0)$	برای $\alpha = 1$
$e_\alpha = \text{cyc} : (\pm 1,0)$	برای $\alpha = 2 \dots 5$
$e_\alpha = \text{cyc} : \sqrt{2}(\pm 1, \pm 1)$	برای $\alpha = 14 \dots 17$
$e_\alpha = \text{cyc} : 2(\pm 1,0)$	برای $\alpha = 18 \dots 21$
$e_6 = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$	$e_8 = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$
$e_{10} = (-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$	$e_{12} = (\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$
$e_7 = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$	$e_9 = (-\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$
$e_{11} = (-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$	$e_{13} = (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$

که در کلیه جداول بالا، cyc معرف جایگشت چرخه‌ای<sup>1</sup> است. در نهایت به‌عنوان مثال تابع وزن برای مولفه 1 به‌دست آمده برای مدل‌های شبکه D2Q9L2 تا D2Q21L2 به ترتیب صورت زیر است:

$$\varphi_1 = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 \quad (22)$$

$$\varphi_1 = 1 - (5/4)x^2 - (5/4)y^2 + (1/4)x^4 + x^2y^2 + (1/4)y^4 \quad (23)$$

$$\varphi_1 = 1 - (7/4)x^2 - (7/4)y^2 + (3/8)x^4 + (33/16)x^2y^2 + (3/8)y^4 \quad (24)$$

$$\varphi_1 = 1 - (1517/880)x^2 - (15157/880)y^2 + (643/1408)x^4 + (317/176)x^2y^2 + (643/1408)y^4 - (621/28160)x^6 - (621/28160)y^6 \quad (25)$$

تابع توزیع تعادلی مولفه 1 نیز برای شبکه‌های نام برده به ترتیب به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f_{1,1}^{eq} = \frac{\rho}{16\theta} (5c^2 + 20c^2u^2 + 4c^2v^2 + 8u^2v^2 - 8c^2 - 8u^2 - 8v^2 + 8)(1 - \text{epy}) + \frac{\rho(\gamma - 1)}{\gamma} (u^2v^2 - u^2 - v^2 + 1) \quad (26)$$

$$f_{1,1}^{eq} = \frac{\rho}{16\theta} (5c^4 + 20c^2u^2 + 20 + 4u^4 - 16u^2v^2 + 4v^4 - 20c^2 - 20c^2 - 20u^2 - 20v^2 + 16) \quad (27)$$

نیز مشخص خواهند شد. از طرفی  $\varphi_i(x,y)$  یک چند جمله‌ای میانیاب لاگرانژی است که دارای خاصیت  $\delta$  است، یعنی؛

$$\varphi_i(x_i, y_i) = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, M \quad (19)$$

دستگاه معادلات (19) می‌تواند در فرم ماتریسی به‌صورت زیر نوشته شود:

$$[A][T] = [I] \quad (20)$$

که در آن

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,M} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M,1} & a_{M,1} & \dots & a_{M,M} \end{bmatrix}, \quad [T] = [t(x_1, y_1), t(x_2, y_2), \dots, t(x_M, y_M)] \quad (21)$$

[I]، بردار همانی و  $(x_i, y_i)$  مختصات هر سرعت گسسته شبکه می‌باشد. در این تحقیق چهار نوع شبکه مقارن دو-بعدی جدید (شکل 2) با مختصات سرعت ارائه شده در جدول 1 ارائه شده‌است. با حل دستگاه (20) (همان‌طور که مشاهده می‌شود ماتریس [A] معکوس ماتریس [T] است) بردار ضرایب به‌دست خواهد آمد و به‌واسطه آن توابع وزن از رابطه (17) محاسبه خواهد شد. و سپس با استفاده از رابطه (15) و با یک انتگرال‌گیری تحلیلی توابع توزیع تعادلی به راحتی محاسبه می‌شود. باید توجه داشت که در انتخاب تابع چند جمله‌ای لاگرانژی جملاتی باید انتخاب شوند که ماتریس [A] تکین نشود. برای این منظور این تابع چندجمله‌ای میانیاب برای چند درجه متفاوت در شکل 3 ارائه شده است.

توابع چندجمله‌ای به شکل زیر هستند.

بردارهای سرعت فازی هر کدام از شبکه‌های تولید شده در جدول 2 تا جدول 5 ارائه شده است.

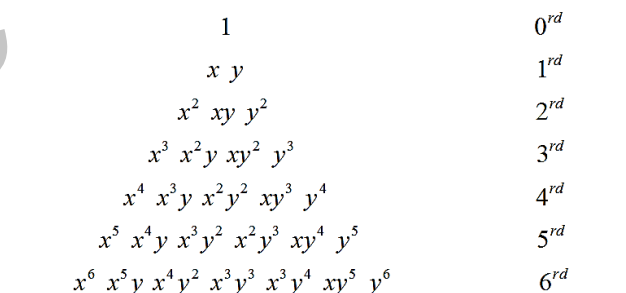


Fig. 3 Lagrangian interpolation polynomial coefficients

شکل 3 ضرایب چند جمله‌ای میانیاب لاگرانژی

جدول 1 توابع چند جمله‌ای لاگرانژی برای چهار شبکه جدید

Table 1 Lagrangian polynomial functions for four new lattices

شبکه	تابع چند جمله‌ای لاگرانژی
D2Q9L2	$P(x, y) = 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^2y, xy^2, x^2y^2$
D2Q13L2	$P(x, y) = 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^4, x^2y^2, y^4$
D2Q17L2	$P(x, y) = 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4, x^5, y^5$
D2Q21L2	$P(x, y) = 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4, x^5, x^3y^2, x^2y^3, y^5, x^6, y^6$

جدول 2 بردارهای سرعت شبکه D2Q9L2

Table 2 velocities vector of D2Q9L2 lattice

$e_1 = (0,0)$	برای $\alpha = 1$
$e_\alpha = \text{cyc} : (\pm 1,0)$	برای $\alpha = 2 \dots 5$
$e_\alpha = \text{cyc} : \sqrt{2}(\pm 1, \pm 1)$	برای $\alpha = 6 \dots 9$

<sup>1</sup> Cyclic permutation

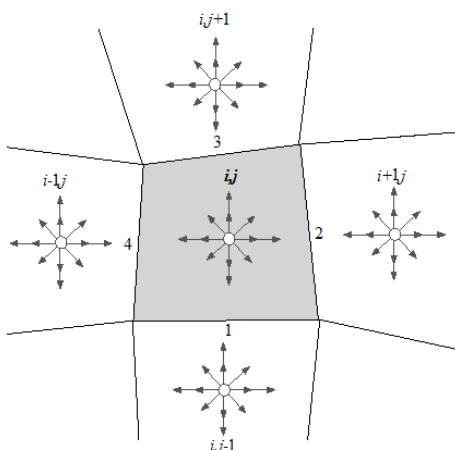


Fig. 4 General 2D finite volume structured cell

شکل 4 حجم محدود دو-بعدی و عمومی با سازمان

روش عددی اختیار می‌شود. لزجت مولکولی مدل BGK در عبارت برخورد مولکولی و زمان آرامش لحاظ می‌شود:

$$\tau = \frac{\mu}{P} \quad (32)$$

دومین اتلاف باید از طریق روش عددی مناسب ایجاد گردد.

### 3-1- گسسته سازی عبارت مکانی

برای تخمین مقادیر شار عبوری از سطوح سلول، از مقادیر مرکز سلول استفاده شده و میانمایی توسط روش ماسل مرتبه 3 همراه با هموار کننده حدی<sup>2</sup> به منظور میانمایی مقدار  $\check{f}_\alpha$  بر روی دو طرف سطح تماس سلول صورت می‌گیرد.

$$F_{\alpha, i+1/2, j}^n = \begin{cases} (f_L)_{\alpha, i+1/2, j} (e_\alpha \cdot N_{i+1/2, j}) & \text{اگر } (e_\alpha \cdot N_{i+1/2, j}) \geq 0 \\ (f_R)_{\alpha, i+1/2, j} (e_\alpha \cdot N_{i+1/2, j}) & \text{اگر } (e_\alpha \cdot N_{i+1/2, j}) \leq 0 \end{cases} \quad (33)$$

که در آن  $N_{i+1/2, j}$  بردار عمود بر سطح  $i + 1/2, j$  و  $\check{f}_L$  و  $\check{f}_R$  به ترتیب توابع توزیع سمت چپ و راست این سطح می‌باشد. این توابع به صورت زیر قابل محاسبه‌اند:

$$\begin{cases} (\check{f}_L)_{k, i+1/2, j} = \check{f}_{\alpha, i, j} + \left\{ \frac{s}{4} [(1 - ks)\Delta_- + (1 + ks)\Delta_+] \right\}_i \\ (\check{f}_R)_{k, i+1/2, j} = \check{f}_{\alpha, i+1, j} - \left\{ \frac{s}{4} [(1 - ks)\Delta_+ + (1 + ks)\Delta_-] \right\}_{i+1} \end{cases} \quad (34)$$

پارامتر  $k$  می‌تواند مقادیر متفاوتی با توجه به دقت میانمایی موردنیاز داشته باشد. به عنوان مثال اگر  $k = 1/3$  باشد یک میانمایی سه-نقطه‌ای با مرتبه-3 مدنظر است، حال اگر مقدار آن برابر 0 یا 1- قرار داده شود، یک روش بسمت باد<sup>3</sup> مرتبه-2 لحاظ خواهد شد و اگر به آن مقدار 1 تخصیص داده شود، روش به یک روش مرکزی<sup>4</sup> ساده تبدیل می‌شود. در عمل مقادیر  $k = 0, 1/3$  متداول‌ترند. پارامتر  $s$  تابع حدی ون البادا<sup>5</sup> نام دارد [14].

$$s = \frac{2\Delta_+\Delta_+ + \varepsilon^2}{\Delta_+^2 + \Delta_-^2 + \varepsilon} \quad (35)$$

که در آن  $\varepsilon$  یک عدد کوچک (در حدود  $10^{-6}$ ) است.

$$f_{1,1}^{eq} = \frac{\rho}{128} (69c^4 + 276c^2u^2 + 276c^2v^2 + 48u^4 + 264u^2v^2 + 48v^4 - 224c^2 - 224v^2 + 128) \frac{1 - ep\gamma}{\gamma} + \frac{\rho(\gamma - 1)}{\gamma} (1 - (7/4)u^2 - (7/4)v^2 + (3/8)u^4 + (33/16)u^2v^2 + (3/8)v^4) \quad (28)$$

$$f_{1,1}^{eq} = \frac{\rho}{225280} (3105c^6 + 27945c^4u^2 + 27945c^4v^2 + 37260c^2u^4 + 37260c^2v^4 + 4968u^6 + 4968v^6 - 127880c^4 - 511520c^2u^4 - 511520c^2v^2 - 102880u^4 - 405760u^2v^2 - 102880v^4 + 388352c^2 + 388352u^2 + 388352v^2 - 225280) \frac{1 - ep\gamma}{\theta} + \frac{\rho(\gamma - 1)}{\gamma} (1 - (1517/880)u^2 - (1517/880)v^2 + (643/1408)u^4 + (317/176)u^2v^2 + (643/1408)v^4 - (621/28160)u^6 - (621/28160)v^6) \quad (29)$$

که در آن  $\theta$  پارامتر سوئیچ و  $ep$  انرژی ویژه است. این دو پارامتر به شکل  $ep = (D - \gamma)e$  و  $\theta = \gamma/Pr$  می‌باشد. به علت طولانی بودن روابط از آوردن همه روابط در این مقاله خودداری می‌شود چرا که روند محاسباتی توابع با یک متن کوتاه در نرم‌افزار میپل یا ممتیکا به راحتی قابل حصول است.

### 3- روش شبکه بولتزمن-حجم محدود

به منظور استفاده از روش حجم محدود، معادله بولتزمن در فرم بقایی و در فضای دو بعدی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial \check{f}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \check{F}_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \check{G}_\alpha}{\partial y} = \check{\Omega}_\alpha \quad (30)$$

$$\check{\Omega}_\alpha = \frac{\check{f}_\alpha^{eq} - \check{f}_\alpha}{\check{\tau}}$$

که در آن  $\alpha$ ، نمایشگر سرعت‌های گسسته شبکه موردنظر،  $\check{f}_\alpha$  تابع توزیع چگالی،  $\Omega_\alpha$  تابع برخورد،  $\check{f}_\alpha^{eq}$  تابع توزیع تعادلی،  $\tau$  زمان آرامش و  $G$  و  $F$  به ترتیب معرف شار جابجایی در دو جهت دستگاه مختصات می‌باشند. فرم گسسته حجم محدود معادله (30) عبارت است از:

$$f_{\alpha, i, j}^{n+1} = f_{\alpha, i, j}^n - \frac{\Delta t}{\nabla_{i, j}} [(F_{\alpha, i+1/2, j}^n \Delta s_{\alpha, i+1/2, j} + F_{\alpha, i-1/2, j}^n \Delta s_{i-1/2, j}) + (G_{\alpha, i, j+1/2}^n \Delta s_{\alpha, i, j+1/2} + G_{\alpha, i, j-1/2}^n \Delta s_{i, j-1/2})] + \Delta t \check{\Omega}_{\alpha, i, j} \quad (31)$$

که در آن  $i, j$  شمارنده مراکز سلول و  $\nabla_{i, j}$  معرف حجم سلول (برای فضای دو بعدی، سطح) ست.  $F_{\alpha, i\pm 1/2, j}^n$  و  $G_{\alpha, i, j\pm 1/2}^n$  شارهای عددی عبوری از سطوح سلول و  $\Delta s$  بیانگر مساحت سطوح سلول است. شارهای عددی می‌توانند توسط حلگر ریمان و با روش‌های متداول میانمایی محاسبه شوند. نکته بسیار مهم این‌که در شبیه‌سازی عددی جریان تراکم‌پذیر، پخش عددی<sup>1</sup> یا لزجت مصنوعی موردنیاز برای آشکارسازی امواج ضربه‌ای یا از طریق معادلات حاکم به حل عددی اعمال می‌شود و یا از طریق

<sup>2</sup> Smooth limiter

<sup>3</sup> Upwind

<sup>4</sup> Central

<sup>5</sup> Van Albada limiter function

<sup>1</sup> Numerical dissipation

بازگشتن به عقب<sup>1</sup> بیان می‌شود. برای حل به روش شبکه بولتزمن روی شبکه منحنی الخط یا بی سازمان، این روش همچنان پا برجاست. اما برای مدل‌های چند سرعت حرارتی، این قانده تنها برای شرط مرزی عدم لغزش و دیواره آدیاباتیک صادق است. در مقاله حاضر از روش مرتبه 2 گو و همکاران<sup>2</sup> و برونمایی قسمت غیرتعادلی توابع توزیع استفاده می‌شود [15]. مطابق شکل 5" چنانچه  $x_b$  یک گره مرزی روی دیواره باشد، و  $x_f$  نزدیکترین گره همسایه واقع در سلول‌های داخل جریان باشد، تابع توزیع در مرز ( $x_b$ ) برابر خواهد بود با:

$$f_i(x_b) = f_i^{eq}(x_b) + [f_i(x_f) - f_i^{eq}(x_f)] = f_i^{eq}(x_b) + f_i^{neq}(x_f) \quad (39)$$

که در آن  $f_i^{eq}(x_b)$  با استفاده از متغیرهای ماکروسکوپی متوسط جریان ( $e_b$  و  $v_b, \rho_b$ ) به دست می‌آید. در تئوری جنبشی گازها، تنش لزج، پخش و اتلاف انرژی تنها از بخش غیرتعادلی تابع توزیع نشأت می‌گیرد. با توجه به شرط فشار  $\partial p / \partial n|_b = 0$ ، به شکل زیر به دست می‌آید:

$$P_b = \frac{9p_1 - p_2}{8} \quad (40)$$

اگر دیوار همدم باشد،  $e_b$  مقدار ثابتی است و اگر شار حرارتی  $q_b$  مشخص باشد، گرادیان عمود بر سطح انرژی داخلی  $\partial e / \partial n|_b$  ثابت است و  $e_b$  شبیه به  $p_b$  از گره‌های داخل جریان برونمایی می‌شود:

$$e_b = \frac{9e_1 - e_2}{8} - \frac{3\partial e}{8\partial n}|_b \quad (41)$$

چگالی دیواره  $\rho_b$  نیز از معادله حالت  $e_b$  محاسبه می‌شود. روش دوم که یک راه ساده‌تر است، آن است که مطابق روش‌های متداول دینامیک سیالات محاسباتی که خواص در سلول‌های مجازی دیواره به نحوی حساب می‌شود که شرط عدم لغزش روی دیواره برآورد شود، توابع توزیع تعادلی براساس این خواص در سلول‌های مجازی به دست آیند و سپس توابع توزیع این سلول‌ها معادل توابع توزیع تعادلی در نظر گرفته شود. در این مقاله از روش اول استفاده شده است. در نهایت، در یک نگاه کلی روند نمای شبیه‌سازی جریان با استفاده از روش شبکه بولتزمن در تحقیق حاضر در "شکل 6" قابل توصیف است.

### 5- نتایج عددی

در این بخش به شبیه‌سازی عددی دو مسئله کاربردی پرداخته شده و نتایج با داده‌های عددی ناویر-استوکس مقایسه شده‌است. در هر دو مسئله جریان تراکم‌پذیر حول ایرفویل NACA0012 تحلیل شده‌است که یکی دارای زاویه حمله بوده و دیگری در زاویه حمله صفر مورد بررسی قرار گرفته است.

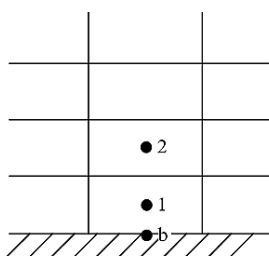


Fig. 5 No slip boundary condition

شکل 5 شرط مرزی عدم لغزش

در معادله (20)،  $\epsilon$  از تقسیم بر صفر شدن در ناحیه بدون گرادیان جلوگیری می‌کند، و همچنین داریم:

$$\begin{aligned} (\Delta_+)_i &= \check{f}_{\alpha,i+1,j} - \check{f}_{\alpha,i,j} \\ (\Delta_-)_i &= \check{f}_{\alpha,i,j} - \check{f}_{\alpha,i-1,j} \end{aligned} \quad (36)$$

بنابراین شار عددی تمام سطوح سلول به صورت مشابه محاسبه می‌شود.

### 3-2- بی‌بعدسازی و محاسبه خواص ماکروسکوپی

به منظور بیان مسئله شبیه‌سازی شده در مقیاس شبکه، باید از روابط بدون بعد استفاده شود. در این جا سه متغیر مستقل مرجع، چگالی مرجع  $\rho_{ref}$ ، طول مرجع،  $L_{ref}$  و انرژی استاتیکی داخلی مرجع  $e_{ref}$  برای بی بعد کردن متغیرها استفاده می‌شود.

$$\begin{cases} U_{ref} = \sqrt{e_{ref}}, & t_{ref} = \frac{L_{ref}}{U_{ref}}, & \check{t} = \frac{t}{t_{ref}} \\ \check{x} = \frac{x}{L_{ref}}, & \check{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{ref}}, & \check{e} = \frac{e}{e_{ref}} \\ \check{\tau} = \frac{\tau}{t_0}, & \check{\lambda}_2 = \frac{\lambda}{e_{ref}}, & \check{u} = \frac{u}{U_{ref}} \end{cases} \quad (37)$$

نماد ( $\check{\alpha}$ ) بیانگر متغیرهای بدون بعد است. مقدار  $e_{ref}$  اهمیت ویژه‌ای دارد، چرا که این پارامتر، مقدار  $u_{ref}$  را معین می‌کند و همچنین بی بعد کردن انرژی استاتیکی با استفاده از  $e_{ref}$  صورت می‌گیرد. برای اطمینان، این مقدار می‌تواند کمی بزرگتر از بیشینه انرژی سکون داخلی، یعنی  $e_{ref} > \max(e_0)$  طریق رابطه  $e_0 = e_{\infty}(1 + (\gamma - 1)/2 M_{\infty}^2)$  محاسبه می‌شود. بنابراین،  $\check{\lambda}_2$  نیز باید به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود. برای سادگی می‌توان  $\check{\lambda}_2 = ep$  باشد. در نتیجه،  $\check{\lambda} = 1.0$  و در پی آن خواص ماکروسکوپی در فضای دو بعدی از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \check{\rho} = \sum_{i=1}^{13} \sum_{v=1}^2 \check{f}_{iv} \\ \check{\rho}\check{u} = \sum_{i=1}^{13} \sum_{v=1}^2 \check{f}_{iv} e_i \\ \check{\rho}\check{E} = \sum_{i=1}^{13} \left[ \sum_{v=1}^2 \frac{\check{f}_{iv} e_i^2}{2} + \check{f}_{iz} \right] \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \check{e} = \check{E} - \frac{\|\check{u}\|^2}{2} \\ \check{\rho} = (\gamma - 1)\check{\rho}\check{e} \end{cases} \quad (38)$$

### 4- شرایط مرزی

روش اعمال تمام شرایط مرزی ورودی و خروجی، دیواره غیرلزج، شرط تقارن و ... بدین صورت است که ابتدا متغیرهای جریان ( $\check{\rho}, \check{u}, \check{v}, \check{e}$ ) توسط روابط متداول دینامیک سیالات محاسباتی به دست می‌آید سپس مقادیر تابع تعادلی  $\check{f}_{\alpha v}^{eq}$  روی مرز با استفاده از ( $\check{\rho}, \check{u}, \check{v}, \check{e}$ ) محاسبه می‌شوند. بنابراین استفاده از مقادیر  $\check{f}_{\alpha v}^{eq}$  روی مرز بجای مقادیر دقیق است. به عنوان مثال برای جریان زیرصوت ابتدا با اعمال روش ریمان براساس مشخصه‌ها، متغیرهای جریان روی مرز به دست می‌آید و سپس با استفاده از آن‌ها مقادیر تابع توزیع تعادلی به دست خواهد آمد و در نهایت معادل مقادیر تابع توزیع در مرز قرار داده می‌شود. در این حالت مقادیر در سلول‌های مجازی معادل مقادیر مرز در نظر گرفته می‌شود.

### 4-1- شرط عدم لغزش

در روش شبکه بولتزمن استاندارد، شرط عدم لغزش با استفاده از قانده

<sup>1</sup> Bounce-back rule

<sup>2</sup> Guo et al

$10^{-3}$  است. "شکل 8" اختلاف به وجود آمده در توزیع ضریب فشار روی سطح ایرفویل را به خوبی نشان می‌دهد. توزیع فشار روی سطح پایینی ایرفویل به خوبی با نتایج مرجع معتبر<sup>1</sup> [16] مطابقت دارد، اما سطح بالایی که محل جدایش لایه مرزی است اختلافی در حدود 30 درصدی دارد. دلیل این امر، عدم تطبیق عدد پرانتل با مقدار واقعی آن و محدودیت BGK می‌باشد. زمانی که لزجت حجمی به درستی توسط مدل BGK استفاده شده در این تحقیق، اعمال نمی‌شود، اختلاف در توزیع فشار نمایان می‌گردد.

همچنین توزیع  $C_f$  در "شکل 9" نمایش داده شده است که دقت بسیار خوبی در مقایسه با نتایج حاصل از نایور-استوکس دارد. محل جدایش روی سطح فوقانی یعنی  $x_s = 0.41c$  به خوبی تخمین زده شده است. "شکل 10" مقایسه کانتور توزیع عدد ماخ حول NACA0012 در زاویه حمله 10 درجه را نشان می‌دهد. گردابه بالای سطح که محل افت فشار کل است به خوبی قابل ملاحظه بوده و مطابق با حل مرجع [16] است. به منظور ارزیابی کمی، ضریب آیرودینامیکی برآ برای شرایط مساله فوق در جدول 6 ارائه گردیده است. ضریب برآی به دست آمده از حل حاضر حدود 14.3 درصد خطا نسبت به مرجع [16] دارد که این امر به دلیل مسئله لزجت حجمی است.

**5-2- شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله صفر درجه  $M_\infty = 0.5, Re_\infty = 5000, Kn_\infty = 1.5 \times 10^{-4}, \alpha = 0^\circ$**   
هدف از ارائه این مسئله، بررسی دقت و کارایی شبکه‌های مختلف تولید شده در حل جریان است. مقادیر مرجع  $L_{ref} = 1.0, \rho_{ref} = 1.0$  و  $e_{ref} = 2.5$

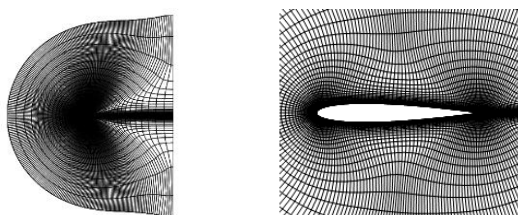


Fig. 7 C-type structured grid around NACA0012 airfoil  
شکل 7 شبکه با سازمان نوع C-پیرامون ایرفویل NACA0012

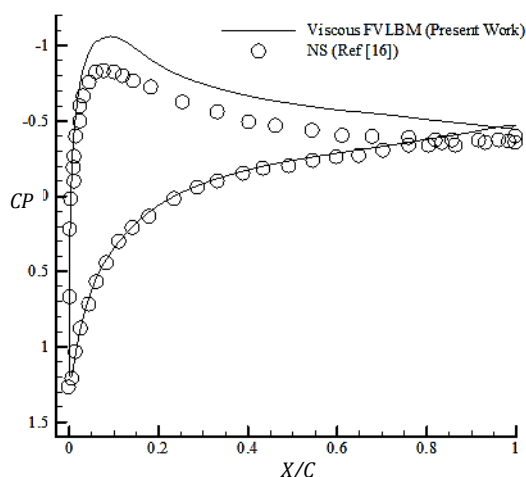


Fig. 8 Pressure coefficient distribution comparison of flow over NACA0012 in 10 degree angle of attack

شکل 8 مقایسه توزیع ضریب فشار جریان حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله 10 درجه

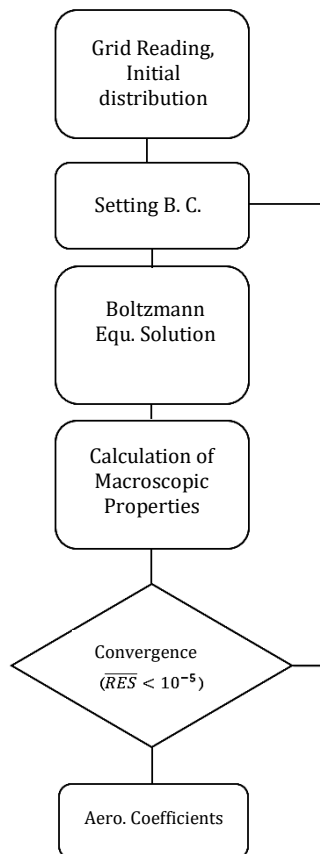


Fig. 6 Lattice Boltzmann method flow simulation flowchart

شکل 6 روند نمای کلی شبیه‌سازی به روش شبکه بولتزمن

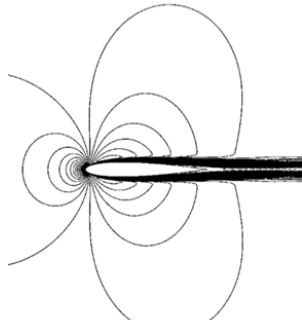
**5-1- شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله 10 درجه  $M_\infty = 0.8, Re_\infty = 500, Kn_\infty = 2.3 \times 10^{-3}, \alpha = 10^\circ$**

جهت شبیه‌سازی مسائل عملی و ارزیابی توانمندی روش شبکه بولتزمن در دستگاه منحنی‌الخط، مطابق "شکل 7" جریان پیرامون ایرفویل NACA0012، در یک دستگاه شبکه منحنی‌الخط با ابعاد  $281 \times 70$  شبیه‌سازی می‌شود. شبکه نوع-C که برای صحت‌سنجی مدل‌های عددی استفاده شده است معادل با شبکه ایست که استقلال حل از آن توسط محققین به اثبات رسیده است [16]. شبکه بولتزمن استفاده شده در این حل D2Q13L2 می‌باشد.

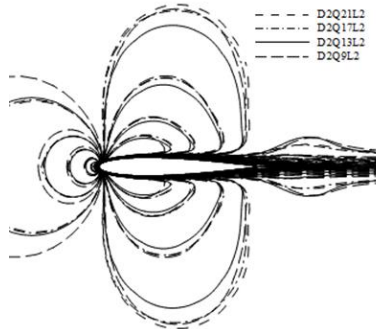
هدف از ارائه حل عددی این بخش، نمایش اختلاف عددی به وجود آمده به علت عدم انطباق مدل استفاده شده در صورت وجود جدایش جریان است. همان‌طور که گفته شد مدل BGK در مدل‌سازی لزجت حجمی ناتوان است، و نیاز به اصلاح دارد که در کارهای آینده به عنوان یک زمینه علمی مناسب قابل عرضه می‌باشد. در صورت وجود جدایش لایه مرزی وجود  $\mu_b$  در مدل حاضر باعث بروز خطای عددی می‌شود. بنابراین در جریان تراکم‌پذیر وجود خطای کوچک نبودن لزجت حجمی باعث بروز اختلاف توزیع فشار در سطح بالایی ایرفویل شده است. در مدل برخورد BGK تنها یک پارامتر  $T$  وجود دارد که سه پارامتر انتقالی  $\mu$ ،  $\mu_b$  و  $k$  را تنظیم نماید. بنابراین نیاز به تعریف یک پارامتر جدید در معادله بولتزمن می‌باشد تا بتوان لزجت حجمی (و عدد پرانتل) را به صورت دقیق تنظیم نمود. در این مسئله، مقادیر مرجع  $L_{ref} = 1.0, \rho_{ref} = 1.0$  و  $e_{ref} = 3.51$  در نظر گرفته می‌شود. زمان آرامش در این مسئله با توجه به عدد ماخ و رینولدز جریان آزاد برابر با  $\tilde{\tau} = 2.24 \times$

<sup>1</sup> GAMM workshop in 1985





(a) Navier-Stokes Solution of Ref. [16]



(b) Present solution (four new lattice results)

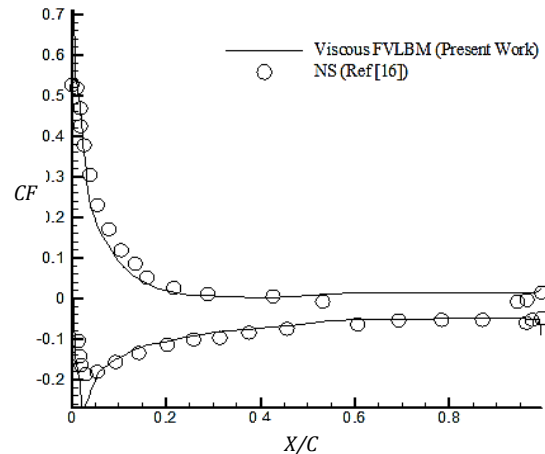
(ب) حل حاضر (نتایج چهار شبکه جدید)

**Fig. 11** Mach No. comparison of flow field over NACA0012 in 0 degree angle of attack. (a) Ref. [16], (b) Present solution.

شکل 11 مقایسه کانتور عدد ماخ برای جریان حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله صفر درجه. (الف) حل نایور-استوکس مرجع [16]، (ب) حل حاضر.

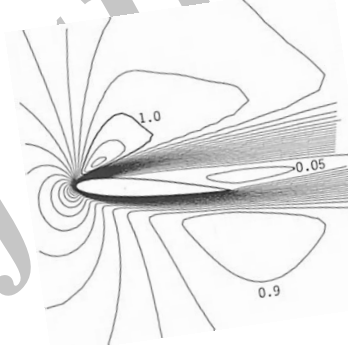
در نظر گرفته می‌شود. زمان آرامش در این مسئله برابر با  $\tau = 1.4 \times 10^{-4}$  و  $p_{\infty} = 1/\gamma$  است. مقایسه کانتور عدد ماخ برای چهار شبکه تولید شده در حل حاضر با نتایج حاصل از نایوراستوکس [16] برای جریان حول NACA0012 در زاویه حمله صفر در "شکل 11" نشان داده شده‌است. مشابهت کانتورها نشان‌دهنده صحت روند حل حاضر می‌باشد. نتایج نشان می‌دهند که شبکه‌های مختلف اختلاف ناچیزی از نظر کیفی دارند. برای مقایسه دقیق‌تر، توزیع ضریب فشار  $C_p$  و ضریب اصطکاک پوستی  $C_f$  برای شبکه‌های مختلف به ترتیب در "شکل 12 و شکل 13" آورده شده‌اند. در این شبیه‌سازی توزیع‌های  $C_p$  و  $C_f$  برای هر چهار شبکه (خطوط مختلف) با نتایج عددی معادلات نایور-استوکس از مرجع [16] (نقاط دایره توخالی)، مقایسه شده است. این نتایج، دقت مناسب کار حاضر را نمایش می‌دهد. جریان آرام زیرصوت در زاویه حمله صفر درجه که در آستانه حد بالایی جریان پایای آرام است. تحت این شرایط جدایش جریان در نزدیکی لبه فرار ایرفویل اتفاق می‌افتد که باعث ایجاد یک حباب چرخشی<sup>1</sup> می‌شود. همان‌طور که از نتایج توزیع فشار مشخص است در انتهای لبه فرار دقت کاهش می‌یابد و فشار بیشتر تخمین زده شده است. نقطه جدایش در مرجع [16] برابر با 0.97 به‌دست آمده است در حالی که در حل عددی حاضر حدود 0.824 تخمین زده شده‌است. دو شبکه D2Q13L2 و D2Q9L2 دارای دقت بیشتری نسبت به دیگر شبکه‌ها هستند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که: «در روش شبکه بولتزمن همواره با افزایش تعداد سرعت‌های فازی شبکه، دقت شبیه‌سازی عددی بیشتر نخواهد شد». نتایج کار حاضر نشان می‌دهد، افزایش دقت

<sup>1</sup> Recirculation bubble



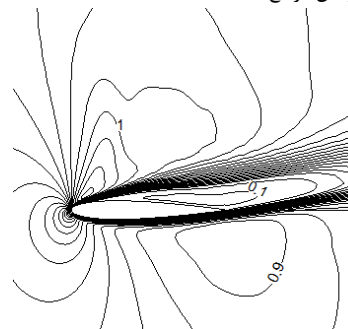
**Fig. 9** Skin friction coefficient distribution comparison of flow over NACA0012 in 10 degree angle of attack

شکل 9 مقایسه توزیع ضریب اصطکاک پوستی جریان حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله 10 درجه



(a) Navier-Stokes solution of Ref. [16].

(الف) حل نایور-استوکس مرجع [16]



(b) Present solution

(ب) حل حاضر

**Fig. 10** Mach No. comparison of flow field over NACA0012 in 10 degree angle of attack. (a) Ref. [16], (b) Present solution

شکل 10 مقایسه کانتور عدد ماخ جریان حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله 10 درجه. (الف) مرجع [16]، (ب) کار حاضر.

**جدول 6** مقایسه ضریب آیرودینامیکی برای جریان حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله 10 درجه

**Table 6** Lift aerodynamic coefficient comparison of flow over NACA0012 in 10 degree angle of attack

ضریب برآ $(C_l)$	روش عددی
0.51	روش شبکه بولتزمن (کار حاضر)
0.446	نایور-استوکس (مرجع [17])
14.3	درصد خطای نسبی

همگرایی چهار شبکه در "شکل 15" نشان داده شده است. شبکه D2Q13L2 و شبکه D2Q9L2 دارای همگرایی مطلوبی هستند اما دو شبکه D2Q21L2 و D2Q17L2 از یک تکرار به بعد نوسانی شده و همگرایی مطلوبی نداشته‌اند. اما علت احتمالی این مسئله آن است که شرط زیر برای پایداری مدل تابع-دایروی در شبکه D2Q13L2 بهتر است در نظر گرفته شود تا دایره داخل میدان میانمایی باشد و از برونمایی جلوگیری شود (شکل 16).

$$|u| + r < \sqrt{2} \quad (43)$$

اما در دو شبکه D2Q21L2 و D2Q17L2 نوع چینش سرعت‌های فازی به نحوی است که نیاز به برونمایی است و لذا این امر باعث کاهش پایداری و نوسانی شدن باقیمانده‌ها می‌شود. برای این شبکه‌ها پایداری به شکل زیر است:

$$|u| + r < \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (44)$$

اما برای سرعت‌های فازی 7 یا 6 در این دو شبکه (شکل 2)، دایره خارج از فضای میانمایی قرار می‌گیرد و به همین خاطر احتمالاً پایداری کاهش یافته است. به عبارت دیگر سرعت‌های فازی 2، 3، 4 و 5 باید بزرگتر بوده به صورتی که با سرعت‌های 6 تا 13 در راستای یک خط مورب قرار بگیرند.

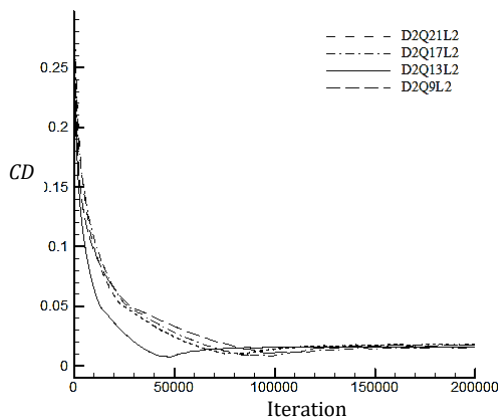


Fig. 14 Comparison of drag coefficient convergence for flow over NACA0012 in 0 degree angle of attack.

شکل 14 مقایسه روند همگرایی ضریب پسا برای جریان حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله صفر درجه.

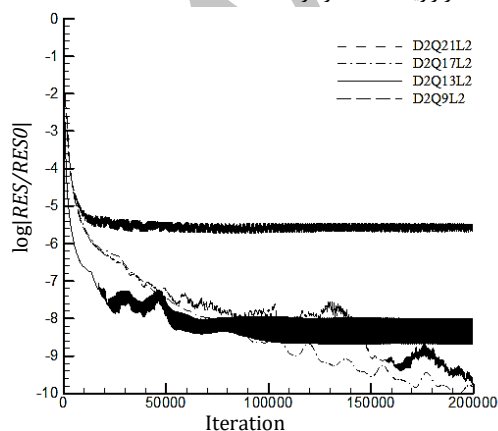


Fig. 15 Comparison of Residual convergence for flow over NACA0012 in 0 degree angle of attack

شکل 15 مقایسه همگرایی باقیمانده چهار شبکه برای جریان حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله صفر درجه

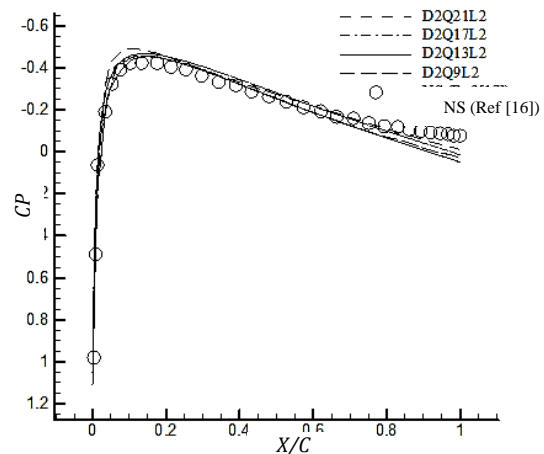


Fig. 12 Pressure coefficient distribution comparison of flow over NACA0012 in 0 degree angle of attack for four new lattice solutions.

شکل 12 مقایسه توزیع ضریب فشار حل چهار شبکه جدید برای جریان حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله صفر درجه.

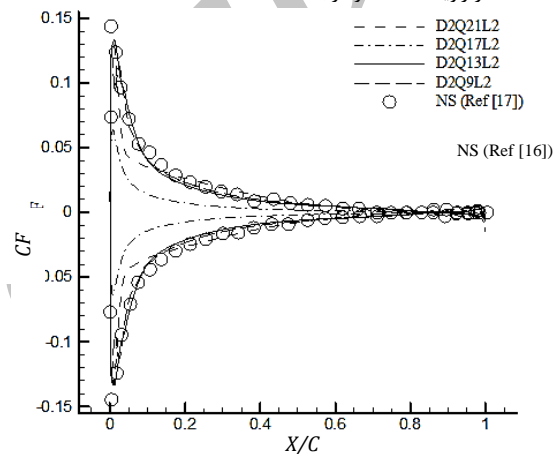


Fig. 13 Comparison of skin friction coefficient distribution of four new lattice solutions for flow over NACA0012 in 0 degree angle of attack.

شکل 13 مقایسه توزیع ضریب اصطکاک پوستی حل چهار شبکه جدید برای جریان حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله صفر درجه.

شبیه‌سازی از 9 سرعت فازی به 13 سرعت، امکان‌پذیر است اما با افزایش آن از 13 به 17 یا 21، علاوه بر این که هزینه محاسباتی را زیاد می‌کند، به افزایش دقت عددی کمک نخواهد کرد. علت اصلی این اتفاق؛ کاهش پایداری عددی با افزایش تعداد سرعت‌های فازی شبکه است که در بخش بعدی تشریح می‌شود.

### 6- روند همگرایی

به‌منظور اطمینان از همگرایی حل، نمودار تاریخچه همگرایی ضریب پسا و باقیمانده مسئله 2-5، در "شکل 14 و شکل 15" آورده شده‌است. پارامتر باقیمانده توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$RES = \frac{\sqrt{\sum (p^{n+1} - p^n / \Delta t)^2}}{N \times M} \quad (42)$$

که در آن  $P$  فشار استاتیکی،  $N$  تعداد سلول‌های شبکه در راستای  $i$ ،  $M$  معرف تعداد سلول‌های شبکه در راستای  $z$ ،  $n$  و  $n + 1$  به ترتیب معرف زمانی گذشته و زمان حال و در نهایت RES باقیمانده می‌باشد. این مقدار معمولاً با تقسیم نمودن بر مقدار باقیمانده در لحظه اول،  $RES_0$  بی‌بعد می‌شود و به‌صورت مقیاس لگاریتمی برحسب تکرار رسم می‌شود. تاریخچه

$f_\alpha$	توابع توزیع چگالی ( $\text{kgm}^{-3}$ )
$f_\alpha^{eq}$	توابع توزیع تعادلی ( $\text{kgm}^{-3}$ )
$F$	شار توابع توزیع در راستای $x$
$g$	تابع دایروی یا تابع ماکسول
$G$	شار توابع توزیع در راستای $y$
$k$	پارامتر تابع حدی ون البادا
$Kn$	عدد نادسن
$K$	تعداد کل درجات آزادی مولکولی
$L$	طول (m)
$M_\infty$	عدد ماخ جریان آزاد
$N$	بردار عمود بر سطح سلول
$N$	تعداد کل سلول شبکه
$P$	فشار ( $\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$ )
$Pr_\infty$	عدد پراوتل جریان آزاد
$R$	ثابت جهانی گاز ( $\text{kJ/kg}\cdot\text{K}$ )
$Re_\infty$	عدد رینولدز جریان آزاد
$Res$	باقیمانده
$r$	شعاع تابع دایروی (m)
$s$	تابع حدی ون البادا
$t$	زمان (sec)
$T$	دمای استاتیکی (K)
$u$	بردار سرعت متوسط سیال ( $\text{ms}^{-1}$ )
$x, y$	راستای محور کارترین
$z$	بردار از هر نقطه تابع دایروی به سرعت‌های فازی شبکه
$\alpha$	شمارنده سرعت‌های فازی شبکه
$\gamma$	نسبت حرارتی ویژه گاز
$\Delta$	تفاضل متناهی
$\Delta s$	طول وجه سلول (m)
$\Delta t$	گام زمانی (sec)
$\varepsilon$	عدد نادسن
$\theta_s$	پارامتر سویچ
$\lambda$	انرژی پتانسیل ذرات ( $\text{kJ/kg}$ )
$\xi$	بردار سرعت ذرات ( $\text{ms}^{-1}$ )
$\xi_x$	بردار سرعت ذرات در راستای محور $x$
$\xi_y$	بردار سرعت ذرات در راستای محور $y$
$\rho$	چگالی ( $\text{kgm}^{-3}$ )
$\tau$	زمان آرامش (عدد نادسن)
$\mu$	لزجت سیال
$\varphi$	تابع وزن (تابع مشخصه)
$\Omega$	عبارت برخورد
$\varepsilon$	پارامتر تابع حدی
$\forall$	مساحت سلول ( $\text{m}^2$ )
بالانویس‌ها	
eq	تعادلی
n	مرحله زمانی

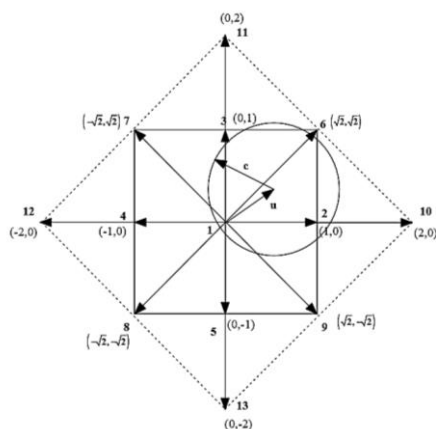


Fig. 16 Numerical stability criteria of lattice in CF method

شکل 16 شرط پایداری عددی شبکه در روش تابع دایروی

### 7- بحث و نتیجه‌گیری

در این تحقیق به شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر لزج با استفاده از روش شبکه بولتزمن پرداخته شد. در کار حاضر، به‌منظور به‌دست آوردن توابع توزیع تعادلی از یک روش جدید موسوم به روش تابع دایروی به جای بسط و استفاده از تابع ماکسول استفاده شد و از این طریق محدودیت عدد ماخ حذف گردید. چهار مدل شبکه دوبعدی جدید  $D2Q13L2$ ،  $D2Q9L2$ ،  $D2Q21L2$  و  $D2Q17L2$  براساس چند جمله‌ای میانیاب لاگرانژی توسعه داده شده است. جهت اعتبارسنجی، جریان تراکم‌پذیر آرام پیرامون ایرفویل NACA0012 شبیه‌سازی و نتایج عددی به‌دست آمده صحت‌سنجی شد. در شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر، در صورت نبود جدایش جریان، و کاهش اثرات لزجت حجمی که در مدل BGK لحاظ نمی‌شود، دقت نتایج بسیار مناسب است. با وجود جدایش جریان و افزایش شدید اثر لزجت حجمی و خطای مدل BGK دقت نتایج کاهش می‌یابد.

با توجه به مطالعه ای که بر روی انواع شبکه‌های بولتزمن دوبعدی صورت گرفت، نتایج به‌دست آمده برای شبکه  $D2Q13L2$  و  $D2Q9L2$  از دقت مناسبی برخوردار است و دقت به‌دست آمده در تخمین ضریب اصطکاک پوستی برای دو مدل شبکه  $D2Q17L2$  و  $D2Q21L2$  به ترتیب کمتر است، از طرفی به علت سرعت‌های فازی کمتر دو شبکه  $D2Q13L2$  و  $D2Q9L2$  زمان اجرای آن به مراتب از این دیگر شبکه‌ها کمتر است. از میان دو شبکه  $D2Q13L2$  و  $D2Q9L2$ ، شبکه  $D2Q13L2$  بازدهی بهتری نسبت به دیگری دارد و دقت مناسب را به‌دست می‌دهد. در ادامه به‌منظور پیشبرد حل عددی دقیق‌تر با استفاده از روش شبکه بولتزمن، توسعه روش حاضر و رفع نقاط ضعف مدل BGK برای تخمین دقیق‌تر لزجت حجمی موضوع‌های جذاب دیگری است که در این زمینه پیشنهاد می‌شود.

### 8- فهرست علائم

$b$	تعداد درجات آزادی اضافی مولکولی
$c$	بردار سرعت ویژه ذرات (در تابع دایروی) ( $\text{ms}^{-1}$ )
$D$	بعد فضای شبیه‌سازی (m)
$e_\alpha$	بردار سرعت‌های فازی شبکه ( $\text{ms}^{-1}$ )
$e$	انرژی استاتیکی ( $\text{kJ/kg}$ )
$ep$	انرژی ویژه ذرات ( $\text{kJ/kg}$ )
$e_{0,E}$	انرژی سکون ( $\text{kJ/kg}$ )

- [6] L. Qing, Y. L. He, Y. Wang, W. Q. Tao, Coupled double-distribution-function lattice Boltzmann method for the compressible Navier-Stokes equations, *Physical Review E*, Vol. 76, No. 5, pp. 056705, 2007.
- [7] S. Chenghai, Lattice-Boltzmann models for high speed flows, *Physical Review E*, Vol. 58, No. 6, pp. 7283, 1998.
- [8] S. Chenghai, A. T. Hsu, Three-dimensional lattice Boltzmann model for compressible flows, *Physical Review E*, Vol. 68, No. 1, pp. 016303, 2003.
- [9] H. Ya-Ling, Q. Liu, Q. Li, Three-dimensional finite-difference lattice Boltzmann model and its application to inviscid compressible flows with shock waves, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 392, No. 20, pp. 4884-4896, 2013.
- [10] G. Yan, Ch. Yaosong, H. Shouxin, Simple lattice Boltzmann model for simulating flows with shock wave, *Physical Review E*, Vol. 59, No. 1, pp. 454, 1999.
- [11] Sh. Weiping, W. Shyy, R. Mei, Finite-difference-based lattice Boltzmann method for inviscid compressible flows, *Numerical Heat Transfer: Part B: Fundamentals*, Vol. 40, No. 1, pp. 1-21, 2001.
- [12] Q. Kun, Ch. Shu, Y. T. Chew, Lattice Boltzmann and finite volume simulation of inviscid compressible flows with curved boundary, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 2, No. 05, pp. 573-586, 2010.
- [13] Q. Kun, C. Shu, Y. T. Chew, Alternative method to construct equilibrium distribution functions in lattice-Boltzmann method simulation of inviscid compressible flows at high Mach number, *Physical Review E*, Vol. 75, No. 3, pp. 036706, 2007.
- [14] J. Blazek, *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications: Principles and Applications*, pp. 94, Kidlington, Oxford, Elsevier, 2001.
- [15] Z. Guo, C. Zheng, An extrapolation method for boundary conditions in lattice Boltzmann method, *Physics of Fluids*, Vol. 14, No. 6, pp. 1-4, 2002.
- [16] M. Bristeau, Ed. Odile, Numerical simulation of compressible Navier-Stokes flows: A GAMM workshop, *Springer Science & Business Media*, Vol. 18, pp. 21, 2013.

(~) پارامتر بدون بعد

زیرنویس‌ها

ref پارامتر مرجع

L سمت چپ

R سمت راست

$i, j$  شمارنده سلول

$\nu$  شمارنده سطوح انرژی شبکه

b لزجت حجمی

## 9- مراجع

- [1] L. P. Kadanoff, G. R. McNamara, G. Zanetti, From automata to fluid flow: Comparisons of simulation and theory, *Physical Review A*, Vol. 40, No. 8, pp. 4527, 1989.
- [2] J. Hardy, Y. Pomeau, O. D. Pazzis, Time evolution of a two-dimensional model system. I. Invariant states and time correlation functions, *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 14, No. 12, pp. 1746-1759, 1973.
- [3] F. Uriel, D. d'Humieres, B. Hasslacher, P. Lallemand, Y. Pomeau, J. P. Rivet, Lattice gas hydrodynamics in two and three dimensions, *Complex Systems*, Vol. 1, No. 4, pp. 649-707, 1987.
- [4] F. J. Alexander, H. Chen, Sh. Chen, G. D. Doolen, Lattice Boltzmann model for compressible fluids, *Physical Review A*, Vol. 46, No. 4, pp. 1967, 1992.
- [5] X. Kun, A gas-kinetic BGK scheme for the Navier-Stokes equations and its connection with artificial dissipation and Godunov method, *Journal of Computational Physics*, Vol. 171, No. 1, pp. 289-335, 2001.

Archive of SID