



Free Vibration Analysis of Functionally Graded Magneto-electro-elastic Plates Resting on Elastic Foundations with Considering Interfacial Imperfections

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Cheraghi N.¹ MSc,
Lezgy-Nazargah M.^{*2} PhD,
Etemadi E.³ PhD

How to cite this article

Cheraghi N, Lezgy-Nazargah M, Etemadi E. Free Vibration Analysis of Functionally Graded Magneto-electro-elastic Plates Resting on Elastic Foundations with Considering Interfacial Imperfections. Modares Mechanical Engineering, 2019;19(3):655-663.

ABSTRACT

In this study, a three-dimensional (3D) Peano series solution is presented for the dynamic analysis of functionally graded (FG). Layered magneto-electro-elastic (MEE) plates resting on elastic foundations with considering imperfect interfacial bonding and the interfacial imperfection is modeled using a generalized spring layer method. Regardless of the number of layers, the equations of motion, Gauss' equations (for electrostatics and magnetostatics), and the boundary and interface conditions are satisfied exactly. In this method, no assumptions on deformations, stresses, magnetic and electric fields along the thickness direction are introduced. Finally, the governing partial differential equations are solved using state-space method. The proposed formulation is validated through comparison with other available results. Effects of a two-parameter elastic foundation, gradient index, bonding imperfection, applied mechanical and electrical loads on the dynamic response of the functionally graded magneto-electro-elastic (FGMEE) plate are discussed. The obtained exact solution can be used to assess the accuracy of the theorems for layered FGMEE plates and validating finite element codes.

Keywords Functionally Materials; Exact Solution; Magneto-electro-elastic Plates; Free Vibration Analysis

¹Civil Engineering Department, Engineering Faculty, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran

²Civil Engineering Department, Engineering Faculty, Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran

³Mechanical Engineering Department, Engineering Faculty, Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran

*Correspondence

Address: Civil Engineering Department, Engineering Faculty, Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran.
Postal Code: 9617976487
Phone: +98 (51) 44012784
Fax: +98 (51) 44012771
m.lezgy@hsu.ac.ir

Article History

Received: March 19, 2018
Accepted: November 13, 2018
ePublished: February 01, 2019

CITATION LINKS

- [1] Free vibrations of simply supported layered and multiphase magneto-electro-elastic ...
[2] Free vibration behaviour of multiphase and layered ... [3] 3D finite element simulation of sandwich panels with a functionally ... [4] Modeling of high velocity impact in sandwich beams ... [5] Layer-wise modelling of magneto-electro-elastic ... [6] Asymptotical construction of a Reissner-like model for multilayer functionally graded ... [7] A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin ... [8] Exact solution for simply supported and multilayered ... [9] Exact solution for functionally graded and layered ... [10] Bending and free vibration analysis of functionally ... [11] Plane analysis for functionally graded magneto-electro-elastic ... [12] Free vibration of simply supported functionally graded ... [13] Effect of shear theories on free vibration ... [14] Natural frequency of F.G. rectangular plate ... [15] Three-dimensional exact analysis of angle-ply laminates ... [16] Three-dimensional analysis of cross-ply laminated ... [17] Bending of multiferroic laminated rectangular ... [18] Three-dimensional semi-analytical model for the static response ... [19] Theory for multilayered anisotropic plates with weakened ... [20] Geometrically nonlinear theory of multilayered plates with interlayer ... [21] Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting ... [22] Free vibration of functionally graded, magneto-electro-elastic ... [23] An exact bending solution for functionally graded ... [24] The theory of matrices ... [25] Methods of matrix algebra ...

تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های مدرج هدفمند چندلایه مگنتو-الکترو-الاستیک واقع روی بستر ارتجاعی با لحاظ اثرات لغزش بین‌لایه‌ای

ناصر چراقی MSc

گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

مجتبی لژی‌نظرگاه* PhD

گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

احسان اعتمادی PhD

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

چکیده

در این مطالعه برای تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های مدرج هدفمند شامل لایه‌های دارای خواص مگنتو-الکترو-الاستیک (FGMEE)، یک روش حل سه‌بعدی با استفاده از سری پیاپی ارائه شده است. ورق مورد نظر روی بستر ارتجاعی قرار گرفته و اثرات لغزش بین‌لایه‌ای نیز در تحلیل با استفاده از مدل فنر بین‌لایه‌ای تعمیم‌یافته لحاظ شده است. بدون توجه به تعداد لایه‌ها، معادلات حرکت، معادلات گوس (برای الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک) و معادلات مربوط به شرایط مرزی و بین‌لایه‌ای به‌طور دقیق ارضا شده است. در این روش هیچ فرضی روی مولفه‌های جابه‌جایی، تنش و میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در طول راستای ضخامت در نظر گرفته نشده است. در نهایت معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم با استفاده از روش فضای حالت حل شده است. فرمولاسیون پیشنهادی از طریق مقایسه با سایر نتایج موجود اعتبارسنجی شده است. با قراردادن ورق تحت ارتعاش آزاد، تأثیر پارامترهای مربوط به سختی بستر ارتجاعی، شاخص تغییرات خواص مواد و لغزش بین‌لایه‌ای روی مقادیر فرکانس‌های ورق مدرج هدفمند ساخته شده از لایه‌های دارای خواص مگنتو-الکترو-الاستیک مورد بررسی قرار گرفته است. روش حل دقیق به‌دست‌آمده برای بررسی دقت تئوری‌های ارائه شده برای ورق‌های FGMEE چندلایه و نیز اعتبارسنجی برنامه‌هایی که به روش‌های المان محدود ارائه می‌شوند، قابل استفاده خواهد بود.

کلیدواژه‌ها: مواد هدفمند، حل دقیق، ورق‌های مگنتو-الکترو-الاستیک، تحلیل ارتعاش آزاد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۲/۲۸

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۸/۲۲

*نویسنده مسئول: m.lezgy@hsu.ac.ir

۱- مقدمه

امروزه از سازه‌های ساخته شده از مواد مرکب چندلایه به‌طور وسیعی در صنایع مختلف استفاده می‌شود. کاهش ارتعاشات این سازه‌ها برای رسیدن به طراحی بهینه سازه‌های با عملکرد مورد نظر امری ضروری است. مواد مدرج هدفمند (FGM) دسته‌ای از مواد هستند که خواص مواد آن به‌طور پیوسته از سطحی به سطح دیگر تغییر می‌کنند. این ویژگی از مواد مدرج باعث کاهش تمرکز تنش در مواد مرکب چندلایه می‌شود. مدرج شدن خواص مواد باعث کاهش تنش‌های حرارتی، تنش پسماند و تمرکز تنش می‌شود.

خواص مواد مدرج هدفمند با توجه به نوع کاربردی که دارند در یک راستا یا چند راستا تحت یک توزیع مشخص به‌طور پیوسته تغییر می‌کند. توزیع خواص مواد هدفمند می‌تواند خطی، توانی یا نمایی باشد. مواد مگنتو-الکترو-الاستیک (MEE) قابلیت تبدیل انرژی‌های مکانیکی، الکتریکی و مغناطیسی به یکدیگر را دارند. در مواد هدفمند مگنتو-الکترو-الاستیک (FGMEE)، ویژگی‌های الکتریکی، مکانیکی و مغناطیسی ماده به‌طور پیوسته در جهت یا جهاتی معین تغییر می‌کند. تاکنون تحقیقات متعددی روی پیش‌بینی رفتار استاتیک و دینامیک ورق‌های مگنتو-الکترو-

الاستیک هدفمند انجام شده است.

آنیگری و همکاران^[1] تحلیل ارتعاش آزاد یک سیلندر FGM را بررسی نمودند که به‌صورت ساده مقید شده است. در این تحقیق نویسندگان برای حل معادلات در راستای شعاعی سیلندر از روش اجزای محدود و در محیط سیلندر از روش سلسله‌ای استفاده کرده‌اند. در مطالعه انجام شده، تأثیر ضرایب کوپلینگ پیزوالکتریک، پیزومگنت و الکترومگنت روی فرکانس‌های سیلندر مورد بررسی قرار گرفته است. آنیگری و همکاران یک تحلیل ارتعاش آزاد را برای تیر مگنتو-الکترو-الاستیک با سه شرایط تکیه‌گاهی متفاوت (گیردار-گیردار، گیردار-آزاد و تکیه‌گاه آزاد) با استفاده از روش المان محدود ارائه نمودند^[2]. اعتمادی و همکاران^[3] و نیز زمانی و همکاران^[4] در دو مقاله به بررسی اثرات ضربه بر سازه ساندویچی با هسته مواد هدفمند به‌ترتیب در سرعت‌های پایین و بالا پرداختند. نتایج آنها نشان می‌دهد که توزیع خواص مواد به‌صورت خطی و نامتقارن، نیروی تماس و مقاومت بیشتری نسبت به حالت توزیع متقارن و همچنین هسته ساندویچی همگن تحمل می‌نماید.

فینکس و همکاران^[5] برای یک ورق چندلایه با لایه‌های دارای خواص الکترومگنت با استفاده از تئوری ترکیب شده رایسنر، یک تحلیل دینامیک و استاتیک را برای مسایل ورق الکترو-مگنتو-الاستیک کوپل شده بسط دادند. مدل ورق رایسنر-مندلین برای ورق‌های چندلایه تابع‌گون ساخته شده از مواد مگنتو-الکترو-الاستیک با استفاده از روش تغییرات مجانبی توسط بیفنگ و همکاران توسعه داده شد^[6]. حسینی‌هاشمی و همکاران برای تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های مدرج هدفمند (FG) از یک روش تحلیلی فرم بسته دقیق براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا استفاده نمودند و نتایج برای شرایط مرزی متفاوت ارائه شده است^[7]. پان یک روش حل دقیق سه‌بعدی را برای ورق‌های مستطیلی چندلایه مگنتو-الکترو-الاستیک خطی که به‌صورت ساده مقید شده است، با استفاده از ترم‌های ماتریس گسترش‌یافته به دست آورد^[8]. پان و هان یک روش حل دقیق سه‌بعدی برای ورق مستطیلی چندلایه ساخته شده از مواد مگنتو-الکترو-الاستیک مدرج هدفمند را ارائه کردند^[9]. بلیفا و همکاران با استفاده از اصل همیلتن و یک تئوری تغییر شکل مرتبه اول (FSDT) اصلاح شده، معادلات حرکت ورق‌های مدرج هدفمند را به دست آوردند^[10]. در مقایسه با سایر فرمولاسیون‌های مشابه، فرمولاسیون پیشنهادی توسط بلیفا و همکاران^[10] دقیق‌تر و در عین حال دارای تعداد پارامترهای مجهول کمتری است.

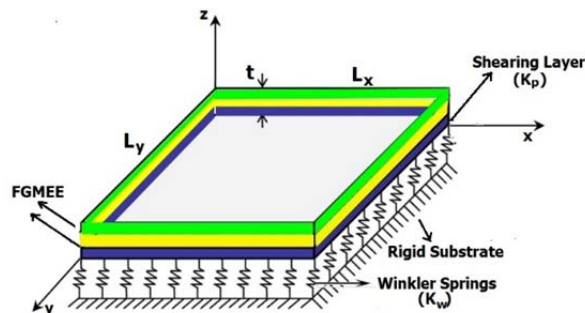
ژائو و چن یک تحلیل مجانبی را با استفاده از اصل همیلتن برای حل مسایل ورق FGMEE ارائه نمودند^[11]. بنگال و گانیسان یک تحلیل ارتعاش آزاد را برای ورق‌های مدرج هدفمند مگنتو-الکترو-الاستیک که خواص مواد به‌صورت تابع نمایی تغییر می‌کند، به دست آوردند. این نویسندگان تأثیر ضرایب کوپلینگ مگنت، الکتریک و الاستیک را روی ارتعاش آزاد مورد بررسی قرار دادند^[12]. کرمی‌خرم‌آبادی و همکاران برای ورق‌های مدرج هدفمند با استفاده از تئوری‌های FOST و TSdT، یک تحلیل ارتعاش آزاد را ارائه دادند و نتایج حاصل شده از این دو تئوری را با یکدیگر مقایسه نمودند^[13]. یک تحلیل ارتعاش آزاد روی ورق مدرج هدفمند که به‌صورت ساده مقید شده، با استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه دوم توسط شهرجردی و همکاران ارائه شده است^[14].

کنترل ارتعاش ورق‌های مدرج هدفمند در شرایط مختلف نیاز به مطالعه و بررسی دارد. در طول زمان خدمت سازه‌های هوشمند ساخته شده از لایه‌های چسبیده به هم، ترک‌های ریزی شروع

جداگانه از مواد FGMEE تشکیل شده است. در اغلب مطالعات انجام شده در زمینه ورق‌های چندلایه، برای سادگی محاسبات اغلب فرض می‌شود که لایه‌ها به‌طور کامل به یکدیگر متصل هستند و هیچ گونه لغزشی در سطح تماس لایه‌ها رخ نمی‌دهد. البته واضح است که این فرض در واقعیت صحیح نیست. در تحقیق حاضر برای افزایش دقت محاسبات، اثرات لغزش بین لایه‌ها نیز در نظر گرفته شده است. لایه n ام دارای ضخامت $Z_{n+1}-Z_n$ است که Z_{n+1} سطح بالایی لایه و Z_n سطح پایینی آن است. بالاترین لایه در ضخامت Z_{N+1} و پایین‌ترین لایه در صفحه $x-y$ ($z=0$) قرار گرفته است.

بر اساس شکل ۱، سازه روی بستر الاستیک وینکلر-پاسترناک قرار گرفته شده است. دو ضریب سفتی وینکلر (K_w) و برشی (K_p) برای ارتباط بین سازه و بستر الاستیک تعریف شده است. بر خلاف مدل تک‌پارامتر وینکلر که تنها قادر است، اثرات تنش‌های قائم موجود در سطح تماس بستر الاستیک و ورق را محاسبه نماید، با استفاده از مدل فونداسیون دو-پارامتر وینکلر-پاسترناک به‌سادگی می‌توان اثرات تنش‌های برشی ایجاد شده در سطح زیربستر و ورق را نیز در نظر گرفت. واضح است که مدل فونداسیون دو-پارامتر وینکلر-پاسترناک به واقعیت نزدیک‌تر است و منجر به نتایج دقیق‌تر می‌شود.

در بخش ۲-۲ تا ۲-۴ معادلات بنیادی، سازگاری و تعادل برای حل مساله الاستیسیته سه‌بُعدی ورق‌های FGMEE ارائه شده است.



شکل ۱) شکل شماتیک از ورق چندلایه، واقع روی بستر ارتجاعی دارای دو پارامتر سختی مشخصات هندسی و دستگاه مختصات انتخابی نیز نشان داده شده است

۲-۲- معادلات بنیادی حاکم

در حالت کلی، معادله بنیادی کوپل شده سه‌بُعدی و خطی برای k امین لایه ورق FGMEE به‌صورت زیر است:

$$\begin{Bmatrix} \sigma^{(n)} \\ D^{(n)} \\ B^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{(n)} & -e^{(n)} & -q^{(n)} \\ e^{(n)} & \chi^{(n)} & d^{(n)} \\ q^{(n)} & d^{(n)} & p^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^{(n)} \\ E^{(n)} \\ H^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

که $\sigma^{(n)}$ ، $D^{(n)}$ و $B^{(n)}$ در طرف چپ رابطه ۱ به‌ترتیب بیانگر مولفه‌های تانسور تنش، بردار جابه‌جایی الکتریکی و جابه‌جایی مغناطیسی در لایه n ام است. این پارامترها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma^{(n)} = \{\sigma_{11}^{(n)} \quad \sigma_{22}^{(n)} \quad \sigma_{33}^{(n)} \quad \sigma_{23}^{(n)} \quad \sigma_{13}^{(n)} \quad \sigma_{12}^{(n)}\}^T \quad (2-الف)$$

$$D^{(n)} = \{D_1^{(n)} \quad D_2^{(n)} \quad D_3^{(n)}\}^T \quad (2-ب)$$

$$B^{(n)} = \{B_1^{(n)} \quad B_2^{(n)} \quad B_3^{(n)}\}^T \quad (2-ج)$$

می‌شوند و رشد می‌کنند که باعث ضعیف شدن و کاهش مقاومت پیوستگی بین لایه‌ها می‌شوند و در این حالت رفتار دینامیک و فرکانس‌های ورق مدرج هدفمند تحت تاثیر لغزش به‌وجود آمده قرار خواهند گرفت. از این رو اخیراً مطالعاتی روی اثر لغزش بین‌لایه‌ای بر رفتار ورق‌های مدرج هدفمند انجام شده است.

چن و لی روش حل دقیق سه‌بُعدی را برای ورق‌های چندلایه با در نظر گرفتن اثر لغزش بین‌لایه‌ای تحت خمش استوانه‌ای توسعه دادند [15]. چن و همکاران در مقاله‌ای دیگر، یک تحلیل سه‌بُعدی را روی پانل‌های استوانه‌ای چندلایه با لحاظ اثر لغزش بین‌لایه‌ای ارائه دادند [16]. چن و همکاران مساله خمش را برای یک ورق مستطیلی مولتی‌فروئیک همراه با اثر کوپلینگ الکترومگنت و لغزش بین‌لایه‌ای با استفاده از یک تئوری دقیق بررسی کردند [17]. لی و لیو یک روش حل دقیق برای مسایل دینامیک و استاتیک ورق‌های چندلایه ارتوتروپیک و دارای خواص پیزوالکتریک و لغزش بین‌لایه‌ای تحت خمش استوانه‌ای معرفی کردند [18]. تاثیر لغزش بین‌لایه‌ای روی رفتار سازه نیز توسط چنگ و همکاران [19] و در تحقیقی دیگر توسط دی‌سیوو [20] و بر اساس تئوری ورق‌ها و پوسته‌های ساده شده مورد بررسی قرار گرفته است.

ورق‌های قرارگرفته روی سطح ارتجاعی در مسایل مهندسی دارای کاربرد فراوانی هستند. تاثیر سطح ارتجاعی که ورق‌ها روی آن قرار می‌گیرند، روی پاسخ سازه دارای اهمیت بوده و به همین دلیل این موضوع در مقالات زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است [21]. چن و همکاران با استفاده از روش فضای حالت، پارامترهای مودال ورق‌های چندلایه مگنتو-الکترو-الاستیک را مورد بررسی قرار دادند که خواص مواد در لایه‌ها به‌صورت نمایی در راستای ضخامت تغییر می‌کند. در این تحقیق تاثیر شاخص تغییرات مواد روی میدان‌های جابه‌جایی، الکتریکی، مغناطیسی و فرکانس‌های ارتعاش آزاد مورد مطالعه قرار گرفته است [22]. چراقی و لرگی‌نظرگاه برای تحلیل استاتیک ورق‌های چندلایه FGMEE دارای خواص مگنتو-الکترو-الاستیک واقع روی بستر ارتجاعی، یک روش حل دقیق را ارائه دادند [23]. در این تحقیق نویسندگان اثرات لغزش‌های بین‌لایه‌ای را نیز بررسی نمودند.

مرور کارهای صورت‌گرفته نشان می‌دهد که هنوز تحلیل دقیق برای ارتعاش آزاد ورق‌های FGMEE چندلایه که اثرات لغزش بین‌لایه‌ای و پارامترهای بستر ارتجاعی را به روی فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار دهد، ارائه نشده است. در این مقاله یک روش حل دقیق سه‌بُعدی در فضای حالت برای تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های FGMEE، بدون هیچ فرضی روی میدان‌های جابه‌جایی و پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی ارائه شده است. در روش حل ارائه شده، معادلات حاکم بر ورق FGMEE، شرایط مرزی انتهایی و شرایط نیرویی در سطح بالایی و سطح پایینی به‌طور دقیق، بدون در نظر گرفتن تعداد لایه‌ها ارضا شده است. لغزش بین‌لایه‌ای در این مقاله با استفاده از روش فنر-لایه تعمیم‌یافته مدل‌سازی شده است. برای توضیح شرایط تکیه‌گاهی بستر ارتجاعی از مدل وینکلر-پاسترناک استفاده شده است. روش حل دقیق ارائه شده خیلی مختصر است و می‌تواند برای تحلیل ورق‌های چندلایه FGMEE با تغییرات اختیاری و دلخواه خواص مواد مفید باشد.

۲- تئوری مساله

۲-۱- مشخصات و فرضیات مساله

شکل ۱ بیانگر شماتیک هندسه سازه مورد بررسی است. این سازه با ابعاد $L_x \times L_y \times t$ شامل N_1 لایه بوده که هر کدام از لایه‌ها به‌صورت

$$k_w u_3^{(1)}(x, y, 0) - k_p \left(\frac{\partial^2 u_3^{(1)}(x, y, 0)}{\partial x^2} \right)$$

$$\sigma_{13}(x, y, t) = 0 \quad , \quad \sigma_{13}(x, y, 0) = 0$$

$$\sigma_{23}(x, y, t) = 0 \quad , \quad \sigma_{23}(x, y, 0) = 0$$

$$\varphi(x, y, t) = \varphi_0^{top} \sin mx \sin ly \quad \text{یا} \quad D_3(x, y, t) = 0$$

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi_0^{bottom} \sin mx \sin ly \quad \text{یا} \quad D_3(x, y, 0) = 0$$

$$\Psi(x, y, t) = \Psi_0^{top} \sin mx \sin ly \quad \text{یا} \quad B_3(x, y, t) = 0$$

$$\Psi(x, y, 0) = \Psi_0^{bottom} \sin mx \sin ly \quad \text{یا} \quad B_3(x, y, 0) = 0$$

که در روابط فوق $m = \frac{\beta\pi}{L_y}$ و $l = \frac{\alpha\pi}{L_x}$ است. همچنین در روابط بالا $\varphi_0^{top}, \varphi_0^{bottom}, \Psi_0^{top}$ و Ψ_0^{bottom} مقادیر ثابتی دارند. مقادیر α و β عدد مثبت صحیح هستند. لازم به ذکر است که مقادیر پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی در مرزها مخالف صفر است. با این وجود، ارایه یک حل دقیق تحلیلی مبتنی بر تئوری سه بُعدی الاستیسیته بدون در نظر گرفتن شرایط مرزی در رابطه ۱۰ روی لبه‌ها امکان پذیر نیست. در برخی منابع^{۸, ۹} فرضیات یکسانی برای روش حل دقیق به دست آمده برای خمش ورق‌های چند لایه به کار گرفته شده است. شرط حل مساله آن است که معادلات بخش‌های ۲-۲ تا ۲-۴ در همه لایه‌های سازه ارضا شود. با در نظر گرفتن لغزش بین لایه‌های، شرایط اتصال بین لایه‌ها نیز باید برآورده شود. برای مدل سازی لغزش بین لایه‌ای در ورق چند لایه FGMEE، از مدل فنر- لایه به صورت زیر استفاده شده است:

$$\sigma_{13}^{(n)}(x, y, z_{n+1}) = \sigma_{13}^{(n+1)}(x, y, z_{n+1}) = [u_1^{(n)}(x, y, z_{n+1}) - u_1^{(n+1)}(x, y, z_{n+1})] / \bar{R}_1^{(n)}$$

$$\sigma_{23}^{(n)}(x, y, z_{n+1}) = \sigma_{23}^{(n+1)}(x, y, z_{n+1}) = [u_2^{(n)}(x, y, z_{n+1}) - u_2^{(n+1)}(x, y, z_{n+1})] / \bar{R}_2^{(n)}$$

$$\sigma_{33}^{(n)}(x, y, z_{n+1}) = \sigma_{33}^{(n+1)}(x, y, z_{n+1}) = [u_3^{(n)}(x, y, z_{n+1}) - u_3^{(n+1)}(x, y, z_{n+1})] / \bar{R}_3^{(n)} \quad (11)$$

$$D_3^{(n)}(x, y, z_{n+1}) = D_3^{(n+1)}(x, y, z_{n+1}) = [\varphi_3^{(n)}(x, y, z_{n+1}) - \varphi_3^{(n+1)}(x, y, z_{n+1})] / \bar{R}_4^{(n)}$$

$$B_3^{(n)}(x, y, z_{n+1}) = B_3^{(n+1)}(x, y, z_{n+1}) = [\Psi_3^{(n)}(x, y, z_{n+1}) - \Psi_3^{(n+1)}(x, y, z_{n+1})] / \bar{R}_5^{(n)}$$

در معادلات فوق $\bar{R}_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, 3$) ضریب سختی الاستیک بین لایه‌ای n امین لایه است. $\bar{R}_4^{(n)}$ و $\bar{R}_5^{(n)}$ به ترتیب ضرایب نفوذ پذیری الکتریکی و نفوذ پذیری مغناطیسی هستند. با استفاده از روش‌های تقریب میکرو مکانیک مناسب می‌توان ضریب سختی الاستیک واقعی بین لایه‌ها را محاسبه نمود. بنابراین ممکن است

$c^{(n)}, e^{(n)}, x^{(n)}, q^{(n)}$ و $d^{(n)}$ نشان داده شده در طرف راست معادله ۱ ضرایبی هستند که به صورت یک تابع اختیاری مانند تابع توانی یا نمایی در راستای ضخامت در یک ورق FGMEE تغییر پیدا می‌کنند.

همچنین $\varepsilon^{(n)}, E^{(n)}$ و $H^{(n)}$ به ترتیب بیانگر تانسور کرنش‌های بسیار کوچک، میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی هستند. این پارامترها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\varepsilon^{(n)} = \{\varepsilon_{11}^{(n)} \quad \varepsilon_{22}^{(n)} \quad \varepsilon_{33}^{(n)} \quad \gamma_{23}^{(n)} \quad \gamma_{13}^{(n)} \quad \gamma_{12}^{(n)}\}^T \quad (۳-ا)$$

$$E^{(n)} = \{E_1^{(n)} \quad E_2^{(n)} \quad E_3^{(n)}\}^T \quad (۳-ب)$$

$$H^{(n)} = \{H_1^{(n)} \quad H_2^{(n)} \quad H_3^{(n)}\}^T \quad (۳-ج)$$

۳-۲- معادلات اساسی

رابطه میدان کرنش بر حسب مولفه‌های میدان جابه‌جایی (u_i) به صورت زیر است:

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^{(n)} + u_{j,i}^{(n)}) \quad (۴)$$

رابطه بین مولفه‌های میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی (φ) به صورت زیر است:

$$E_i^{(n)} = -\varphi_{,i}^{(n)} \quad (۵)$$

همچنین رابطه ۶، بیانگر رابطه بین مولفه‌های میدان مغناطیسی و پتانسیل مغناطیسی (Ψ) است.

$$H_i^{(n)} = -\Psi_{,i}^{(n)} \quad (۶)$$

۴-۲- روابط تعادل

معادلات تعادل در صورت عدم حضور نیروهای حجمی برای n امین لایه ساخته شده از FGMEE در حالت کلی به صورت زیر است:

$$\sigma_{ij,j}^{(n)} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (۷)$$

قوانین گوس در صورت عدم حضور شارژ الکتریکی و مغناطیسی طبق روابط ۸- الف و ب نوشته می‌شوند.

$$B_{,ii}^{(n)} = 0 \quad (۸-الف)$$

$$D_{,ii}^{(n)} = 0 \quad (۸-ب)$$

برای ورق FGMEE دارای تکیه‌گاه ساده در چهار لبه، شرایط مرزی در چهار لبه عمودی طبق روابط زیر است:

$$\sigma_{11}^{(n)}(0, y, z) = \sigma_{11}^{(n)}(L_x, y, z) = \sigma_{22}^{(n)}(x, 0, z) = \sigma_{22}^{(n)}(x, L_y, z) = 0$$

$$u_3^{(n)}(0, y, z) = u_3^{(n)}(L_x, y, z) = u_3^{(n)}(x, 0, z) = u_3^{(n)}(x, L_y, z) = 0 \quad (۹)$$

$$\varphi^{(n)}(0, y, z) = \varphi^{(n)}(L_x, y, z) = \varphi^{(n)}(x, 0, z) = \varphi^{(n)}(x, L_y, z) = 0$$

$$\Psi^{(n)}(0, y, z) = \Psi^{(n)}(L_x, y, z) = \Psi^{(n)}(x, 0, z) = \Psi^{(n)}(x, L_y, z) = 0$$

علاوه بر معادلات فوق، باید شرایط مرزی مکانیکی و الکترومگنت روی سطح پایین و سطح بالای ورق به صورت زیر نیز ارضا شود:

$$\sigma_{33}(x, y, t) = q_0^{top} \sin mx \sin ly \quad , \quad \sigma_{33}(x, y, 0) = 0 \quad (۱۰)$$

$$X^{(n)} = T^{(n)}(z)\delta^{(n)} \quad (18)$$

که در این معادله $T^{(n)}(z) = \text{Ord} \exp[\int_0^z Q^{(n)}(x)dx]$ ماتریس گسترش‌یافته نامیده می‌شود که می‌توان آن را به صورت سری پیاپی زیر بیان کرد [24, 25]:

$$T^{(k)}(z) = I + \int_0^z Q^{(n)}(x)dx + \int_0^z Q^{(n)}(x) \times \int_0^x Q^{(n)}(y_1)dy_1dx + \int_0^z Q^{(n)}(x) \int_0^x Q^{(n)}(y_1) \int_0^x Q^{(n)}(y_2)dy_2dy_1dx + \dots \quad (19)$$

۴- بررسی نتایج و بحث

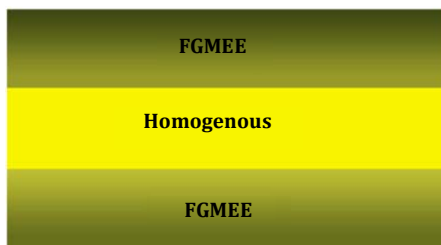
در این قسمت یک ورق سه‌لایه FGMEE در نظر گرفته شده که به صورت ساده در چهار لایه مقید شده و از مواد پیزوالکتریک به نام BaTiO_3 و مواد دارای خواص مغناطیسی به نام CoFe_2O_4 ساخته شده است. ابعاد افقی ورق در دو جهت برابر با $L_x = L_y = 1m$ ضخامت هر لایه مساوی با $1/3m$ متر و ضخامت کل ورق $1/3m$ در نظر گرفته شده است. در این مقاله برای سادگی، BaTiO_3 را به اختصار با B و CoFe_2O_4 را با C نشان می‌دهیم. لایه میانی ورق مطابق با پژوهش چن و همکاران [22] به صورت همگن فرض شده است.

لایه بالایی و پایینی از مواد مدرج هدمند ساخته شده‌اند که خواص آن تحت تابع نمایشی زیر تغییر می‌کند:

$$C_{kl} = C_{kl}^0 e^{az}, e_{ik} = e_{ik}^0 e^{az}, x_{ij} = x_{ij}^0 e^{az} \quad (20)$$

$$q_{ik} = q_{ik}^0 e^{az}, d_{ij} = d_{ij}^0 e^{az}, p_{ij} = p_{ij}^0 e^{az}$$

که در اینجا a شامل پنج مقدار ثابت مشخص است که نشان‌دهنده درجه تغییرات خواص مواد در راستای z هستند. $C_{kl}^0, e_{ik}^0, x_{ij}^0, q_{ik}^0, d_{ij}^0$ و p_{ij}^0 مقادیر خواص مواد در بالای لایه پایینی و پایین لایه بالایی هستند. برای شاخص تغییرات خواص مواد، پنج مقدار مختلف $-10, -5, 0, 5, 10$ در نظر گرفته شده است. در شکل ۲ نوع چینش لایه‌های ورق مورد مطالعه در این مقاله نشان داده شده است. تغییرات خواص مواد در لایه بالایی و پایینی به صورت متقارن است.



شکل ۲) نوع چینش لایه‌های ورق FGMEE مورد مطالعه

این مثال با شرایط ذکر شده قبلاً توسط چن و همکاران مورد مطالعه قرار گرفته است [22]. در مطالعه حاضر برای ارزیابی صحت نتایج به دست آمده از روش حل دقیق پیشنهادی، از نتایج گزارش شده توسط چن و همکاران [22] استفاده شده است.

در جدول ۱ فرکانس‌های حاصل برای ارتعاش آزاد ورق سه‌لایه FGMEE از روش حل دقیق ارائه شده در این مقاله با فرکانس‌های

به علت وجود لغزش بین‌لایه‌ای در پاسخ ورق‌های FGMEE تحت بارگذاری‌های مختلف تغییراتی ایجاد شود. توجه شود که وقتی $\bar{R}_i^{(n)} = 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots, 5$) بوده، مدل فنر- لایه تعمیم‌یافته که در بالا ذکر شده است، ورق FGMEE را بدون لغزش در نظر می‌گیرد.

۳- روش حل دقیق مساله

در روش حل دقیق، مولفه‌های جابه‌جایی، پتانسیل الکتریکی و پتانسیل مغناطیسی به شکل زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$u_1^{(n)}(x, y, z) = U^{(n)}(z) \cos(mx) \sin(ly) e^{iwt}$$

$$u_2^{(n)}(x, y, z) = V^{(n)}(z) \sin(mx) \cos(ly) e^{iwt}$$

$$u_3^{(n)}(x, y, z) = W^{(n)}(z) \sin(mx) \sin(ly) e^{iwt} \quad (21)$$

$$\phi^{(n)}(x, y, z) = \Phi^{(n)}(z) \sin(mx) \sin(ly) e^{iwt}$$

$$\psi^{(n)}(x, y, z) = \Psi^{(n)}(z) \sin(mx) \sin(ly) e^{iwt}$$

واضح است که روابط ۱۲، شرایط مرزی ذکر شده در روابط ۱۰ در چهار لایه ورق FGMEE را ارضا می‌کند. جواب‌های مساله $U^{(n)}(z), V^{(n)}(z), W^{(n)}(z), \Phi^{(n)}(z)$ در معادله ۱۰ هستند که باید تعیین شوند. با قراردادن معادلات ۱۲ در داخل معادلات ۶-۴ و جای‌گذاری نتایج حاصل شده در داخل معادله ۱، عبارتی برای مولفه‌های تنش، جابه‌جایی الکتریکی و جابه‌جایی مغناطیسی به دست می‌آید [23].

با جایگزینی معادلات حاصل شده در معادلات ۷ و ۸، دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم حاصل می‌شود. این دستگاه شامل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خواهد بود که می‌توان برای سادگی، حل آنها را در قالب معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به صورت ماتریسی در فضای حالت به صورت زیر نوشت:

$$F^{(n)} X_{,z}^{(n)} + D^{(n)} X^{(n)} = 0 \quad (22)$$

معادله ۱۳ را می‌توان به شکل زیر نیز بیان نمود:

$$X_{,z}^{(n)} = Q^{(n)} X^{(n)} \quad (23)$$

که در معادله ۱۴:

$$Q^{(n)} = -(F^{(n)})^{-1} D^{(n)} \quad (24)$$

(۱۶)

$$X^{(n)} = \begin{bmatrix} U^{(n)}(z) & V^{(n)}(z) & W^{(n)}(z) & \Phi^{(n)}(z) \\ \Psi^{(k)}(z) & \frac{\partial U^{(n)}(z)}{\partial z} & \frac{\partial V^{(n)}(z)}{\partial z} & \frac{\partial W^{(n)}(z)}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi^{(n)}(z)}{\partial z} & \frac{\partial \Psi^{(n)}(z)}{\partial z} \end{bmatrix}^T$$

مولفه‌های ماتریس‌های $F^{(k)}$ و $D^{(k)}$ در پی‌نوشت ب آورده شده است. برای لایه‌های همگن MEE براساس معادله ۱۳، ماتریس $Q^{(k)}$ به ماتریس ثابت‌های همگن کاهش داده می‌شود. در این حالت حل معادله ۱۳ به صورت زیر است [24, 25]:

$$X^{(n)} = \exp[Q^{(n)} z] \delta^{(n)} \quad (25)$$

در معادله ۱۷، $\delta^{(n)}$ یک بردار 1×10 از ثابت‌های مجهول است. برای لایه‌های FGMEE که دارای ویژگی تغییرات خواص تحت تابع اختیاری هستند، مولفه‌های ماتریس $Q^{(n)}$ در معادله ۱۳ ثابت نیستند و تحت تابعی بر حسب ضخامت (z) تغییر می‌کنند. در این صورت به علت ثابت نبودن مولفه‌های ماتریس $Q^{(n)}$ ، استفاده از معادله ۱۷ برای حل معادله ۱۳ مناسب نیست. در این شرایط پاسخ

جدول‌های ۶-۲ به‌ازای مقادیر مختلف شاخص تغییرات خواص مواد، تاثیر میزان لغزش بین‌لایه‌ای روی فرکانس ورق مورد بررسی قرار گرفته است. فرکانس‌های نشان‌داده‌شده به‌صورت بدون بعد هستند.

در جدول‌های ۶-۲ تاثیر لغزش بین‌لایه‌ای روی فرکانس‌های پنج مود اول به‌ازای مقادیر مختلف شاخص تغییرات خواص مواد نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش ضریب لغزش بین‌لایه‌ای، مقدار فرکانس‌ها کاهش پیدا کرده است. همچنین با توجه به جدول‌ها می‌توان گفت که حساسیت فرکانس‌های موده‌ای اول، سوم، چهارم و پنجم به تغییرات سختی لغزش بین‌لایه‌ای نسبت به فرکانس‌های مود دوم بیشتر است. این نتایج به‌ازای تمام مقادیر شاخص تغییرات خواص مواد صادق است. نتایج حاصل‌شده می‌تواند به‌عنوان یک پارامتر مورد توجه طراحان قرار گیرد.

جدول ۲) فرکانس‌های پنج مود اول بدون بعدشده ورق سه‌لایه FGME با‌ازای مقادیر مختلف لغزش بین‌لایه‌ای و برای شاخص تغییرات خواص مواد برابر با صفر ($a=0$).

مود	$R=0$	$R=0.1$	$R=0.3$	$R=0.6$
نوع چینش لایه‌ها: F/B/F				
۱	۱/۰۵۱۰	۰/۹۲۶۲	۰/۷۸۹۵	۰/۶۸۸۱
۲	۱/۹۳۱۳	۱/۹۳۱۰	۱/۹۳۰۳	۱/۹۲۹۸
۳	۳/۳۴۴۷	۳/۳۴۳۱	۳/۳۴۳۶	۳/۳۴۳۱
۴	۴/۵۵۸۳	۴/۵۵۸۴	۴/۵۵۸۰	۴/۵۵۸۴
۵	۵/۶۶۶۵	۵/۶۶۶۷	۵/۶۶۷۰	۵/۶۶۵۸

جدول ۳) فرکانس‌های پنج مود اول بدون بعدشده ورق سه‌لایه FGME با‌ازای مقادیر مختلف لغزش بین‌لایه‌ای و برای شاخص تغییرات خواص مواد برابر با ۵ ($a=5$).

مود	$R=0$	$R=0.1$	$R=0.3$	$R=0.6$
نوع چینش لایه‌ها: F/B/F				
۱	۱/۰۷۷۷	۰/۹۳۰۲	۰/۷۸۰۴	۰/۶۷۵۶
۲	۱/۹۳۸۷	۱/۹۳۸۴	۱/۹۳۸۰	۱/۹۳۷۲
۳	۳/۳۴۴۷	۳/۳۴۳۱	۳/۳۴۳۶	۳/۳۴۲۸
۴	۴/۶۹۲۰	۴/۶۹۲۴	۴/۶۹۲۲	۴/۶۹۲۶
۵	۵/۴۴۸۳	۵/۴۴۸۶	۵/۴۴۹۱	۵/۴۴۸۵

جدول ۴) فرکانس‌های پنج مود اول بدون بعدشده ورق سه‌لایه FGME با‌ازای مقادیر مختلف لغزش بین‌لایه‌ای و برای شاخص تغییرات خواص مواد برابر با ۱۰ ($a=10$).

مود	$R=0$	$R=0.1$	$R=0.3$	$R=0.6$
نوع چینش لایه‌ها: F/B/F				
۱	۱/۰۶۵۳	۰/۹۱۷۲	۰/۷۵۷۷	۰/۶۵۲۹
۲	۱/۹۴۵۷	۱/۹۴۵۴	۱/۹۴۵۰	۱/۹۴۴۴
۳	۳/۳۴۴۵	۳/۳۴۳۱	۳/۳۴۳۶	۳/۳۴۲۸
۴	۳/۷۶۸۷	۳/۷۶۸۹	۳/۷۶۸۹	۳/۷۶۸۵
۵	۴/۹۱۳۵	۴/۹۱۴۷	۴/۹۱۴۷	۴/۹۱۳۵

جدول ۵) فرکانس‌های پنج مود اول بدون بعدشده ورق سه‌لایه FGME با‌ازای مقادیر مختلف لغزش بین‌لایه‌ای و برای شاخص تغییرات خواص مواد برابر با ۵- ($a=-5$).

مود	$R=0$	$R=0.1$	$R=0.3$	$R=0.6$
نوع چینش لایه‌ها: F/B/F				
۱	۱/۰۱۲۲	۰/۹۰۸۱	۰/۷۸۶۵	۰/۶۹۰۹
۲	۱/۹۲۳۸	۱/۹۲۳۵	۱/۹۲۳۱	۱/۹۲۲۴
۳	۳/۳۴۶۴	۳/۳۴۵۰	۳/۳۴۴۲	۳/۳۴۰۶
۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۸۵	۴/۵۴۲۳	۴/۵۳۸۱
۵	۵/۶۵۳۵	۵/۶۵۰۴	۵/۶۵۰۷	۵/۶۴۸۲

حاصل از چین و همکاران [22] به‌ازای مقدار شاخص تغییرات خواص صفر ($a=0$) مقایسه شده است.

جدول ۱) مقایسه فرکانس‌های پنج مود اول ورق سه‌لایه FGME با استفاده از روش حل حاضر و روش حل مرجع [22]

مود	مطالعه حاضر	چین و همکاران [22]	درصد خطا (%)
نوع چینش لایه‌ها: F/B/F			
۱	۱/۰۵۱۰	۱/۰۳۶۰	۱/۵
۲	۱/۹۳۱۳	۱/۹۰۳۱	۲/۸۲
۳	۳/۳۴۴۷	۳/۲۹۳۱	۵/۱۶
۴	۴/۵۵۸۳	۴/۵۴۶۴	۱/۱۹
۵	۵/۶۶۶۵	۵/۶۵۳۵	۱/۳

$a=0$

فرکانس‌های نشان‌داده‌شده در جدول ۱ و نیز سایر جدول‌ها که در ادامه آمده‌اند با استفاده از رابطه $\omega = \omega^* L_x \sqrt{C_{max} / \rho_{max}}$ مطابق با منبع چین و همکاران [22] بدون بعد شده‌اند که در این رابطه، ω فرکانس نرمال شده و ω^* فرکانس حاصل‌شده از روابط، L_x طول ورق، C_{max} بیشترین مقدار ضریب الاستیک و ρ_{max} حداکثر چگالی مواد استفاده‌شده در ساخت ورق سه‌لایه FGME است. همان طور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود نتایج مطالعه حاضر با نتایج حاصل از منبع چین و همکاران [22] تطابق خوبی دارد. درصد ناچیز اختلاف موجود به‌علت خطا در گردکردن فرکانس‌ها و نیز در نظر گرفتن تعداد جملات محدود برای سری پینانو است.

در قسمت بعد، تاثیرات سختی بستر ارتجاعی و لغزش بین‌لایه‌ای برای ورق مورد نظر، لحاظ و تاثیرات این پارامترها بر فرکانس‌های ورق، مورد مطالعه قرار داده شده است. ورق سه‌لایه FGME با استفاده از روش حل دقیق ارائه‌شده در این مقاله به‌ازای مقادیر مختلف سختی بستر ارتجاعی و لغزش بین‌لایه‌ای تحلیل شده است.

در بیان نتایج عددی این قسمت، ضرایب سختی بستر و ضرایب سختی الاستیک بین‌لایه‌ای به‌صورت زیر نرمال شده‌اند:

(۲۱)

$$K_w = \frac{k_w}{C_{44}^B}, \quad K_p = \frac{k_p}{C_{44}^B}$$

$$R_i^{(n)} = \bar{R}_i^{(n)} C_{44}^B, \quad R_4^{(n)} = \bar{R}_4^{(n)} x_{33}^B, \quad R_5^{(n)} = \bar{R}_5^{(n)} p_{33}^B$$

در اینجا بالانویس B نشان‌دهنده BaTiO3 بوده و $i = 1, 2, 3$ بیانگر راستای ضریب سختی تعمیم‌یافته بین‌لایه‌ای در سه جهت بوده که برای سادگی به‌شکل زیر فرض شده است:

$$R_1^{(n)} = R_2^{(n)} = R_4^{(n)} = R_5^{(n)} = R$$

برای جلوگیری از پدیده توی هم‌رفتگی لایه‌ها مقدار $R_3^{(n)} = 0$ فرض می‌شود. در این مثال، در سه قسمت تاثیر عواملی چون سختی بستر ارتجاعی که ورق روی آن قرار گرفته، لغزش بین‌لایه‌ای و شاخص درجه تغییرات خواص مواد، بر پاسخ ورق سه‌لایه FGME مورد بررسی قرار گرفته است.

۱-۴ بررسی تاثیرات مقادیر مختلف لغزش بین‌لایه‌ای بر فرکانس‌های ورق FGME سه‌لایه

در این بخش تاثیرات لغزش بین‌لایه‌ای روی فرکانس‌های ورق مگنتو-الکترو-الاستیک سه‌لایه مورد مطالعه قرار گرفته است. در

تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های مدرج هدفمند چندلایه مگنتو-الکترو-الاستیک واقع روی بستر (۶) (جدول ۱۰) فرکانس‌های پنج مود اول بدون بعدشده ورق سه‌لایه FGMEE به‌ازای سختی‌های مختلف بستر ارتجاعی و برای شاخص تغییرات خواص مواد برابر با $(a=0)$ -۵

مود	$k_w=0$	$k_w=2$	$k_w=0$	$k_w=2$	$k_w=0$	$k_w=0$
	$k_p=0.5$	$k_p=0$	$k_p=0.5$	$k_p=0.1$	$k_p=0$	$k_p=0.1$
نوع چینش لایه‌ها: F/B/F						
۱	۱/۱۲۲	۱/۳۹۲۹	۱/۶۴۷۸	۱/۹۲۳۸	۱/۹۲۳۸	۱/۹۲۳۸
۲	۱/۹۲۳۸	۱/۹۲۳۸	۲/۱۳۱۴	۲/۱۳۱۴	۲/۱۳۱۴	۲/۱۳۱۴
۳	۳/۳۴۶۴	۳/۳۴۶۴	۳/۳۴۶۴	۳/۳۴۶۴	۳/۳۴۶۴	۳/۳۴۶۴
۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴
۵	۵/۶۵۳۵	۶/۱۲۵۸	۶/۱۲۵۸	۶/۱۲۵۸	۶/۱۲۵۸	۶/۱۲۵۸

جدول (۱۱) فرکانس‌های پنج مود اول بدون بعدشده ورق سه‌لایه FGMEE به‌ازای سختی‌های مختلف بستر ارتجاعی و برای شاخص تغییرات خواص مواد برابر با $(a=10)$ -۱۰

مود	$k_w=0$	$k_w=2$	$k_w=0$	$k_w=2$	$k_w=0$	$k_w=0$
	$k_p=0.5$	$k_p=0$	$k_p=0.5$	$k_p=0.1$	$k_p=0$	$k_p=0.1$
نوع چینش لایه‌ها: F/B/F						
۱	۰/۹۶۶۲	۱/۳۹۹۸	۱/۶۷۷۹	۱/۹۱۶۵	۱/۹۱۶۵	۱/۹۱۶۵
۲	۱/۹۰۳۱	۱/۹۱۶۵	۲/۱۵۷۹	۲/۱۵۷۹	۲/۱۵۷۹	۲/۱۵۷۹
۳	۳/۳۴۵۷	۳/۳۴۵۷	۳/۳۴۵۷	۳/۳۴۵۷	۳/۳۴۵۷	۳/۳۴۵۷
۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴
۵	۵/۶۵۳۵	۶/۱۵۸۶۷	۶/۱۵۸۶۷	۶/۱۵۸۶۷	۶/۱۵۸۶۷	۶/۱۵۸۶۷

همان‌طور که در جدول‌ها مشاهده می‌شود، با افزایش سختی بستر ارتجاعی، فرکانس‌های ارتعاش آزاد ورق نیز افزایش می‌یابد و علت آن، افزایش سختی ورق است. با توجه به رابطه مستقیمی که فرکانس با سختی دارد، این افزایش قابل انتظار بود. با توجه به جدول‌ها کم‌بودن حساسیت مودهای دوم و چهارم نسبت به تغییرات سختی بستر ارتجاعی قابل مشاهده است.

۵- نتیجه‌گیری

برای اولین بار، تحلیل رفتار ارتعاش آزاد یک ورق چندلایه FGMEE که روی بستر ارتجاعی قرار گرفته و با لحاظ لغزش بین‌لایه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. با استفاده از روش فضای حالت، معادلات دیفرانسیلی جزئی حاکم بر رفتار ورق FGMEE حل شده‌اند. صحت روش حل دقیق معرفی شده در این مقاله از طریق مقایسه نتایج به‌دست‌آمده با نتایج مقالات منتشر شده و در دسترس ارزیابی شده است. در بخش نتایج عددی، تاثیر پارامترهای موثر بر فرکانس‌های ورق FGMEE سه‌لایه مورد بررسی قرار گرفته شده است. نتایج حاصل در بخش نتایج عددی نشان داد که سختی بستر ارتجاعی، تاثیر قابل توجهی بر فرکانس‌های ورق FGMEE دارد. همچنین با بررسی نتایج به‌دست‌آمده، اهمیت تاثیر مقادیر ضریب لغزش بین‌لایه‌ای بر فرکانس‌های ورق FGMEE قابل مشاهده بوده است. نتایج کاربردی مهم به‌دست‌آمده از مطالعه حاضر در زیر به‌طور خلاصه ذکر شده است:

۱- با افزایش سختی بستر ارتجاعی، فرکانس‌های حاصل از ارتعاش آزاد به‌جز فرکانس مربوط به مود چهارم که ثابت است، افزایش می‌یابد.

۲- با افزایش مقدار لغزش بین‌لایه‌ای (کاهش سختی بین‌لایه‌ای)، مقادیر فرکانس‌های پنج مود اول نیز کاهش می‌یابد.

۳- با افزایش مقدار شاخص تغییرات خواص مواد (سخت‌تر شدن جنس ورق)، مقادیر فرکانس ورق افزایش می‌یابد.

تشکر و قدردانی: موردی از سوی نویسندگان بیان نشده است.

جدول (۶) فرکانس‌های پنج مود اول بدون بعدشده ورق سه‌لایه FGMEE به‌ازای مقادیر مختلف لغزش بین‌لایه‌ای و برای شاخص تغییرات خواص مواد برابر با $(a=10)$ -۱۰

مود	$R=0$	$R=0.1$	$R=0.3$	$R=0.6$
نوع چینش لایه‌ها: F/B/F				
۱	۰/۹۶۶۲	۰/۸۸۰۲	۰/۷۷۳۷	۰/۶۸۵۷
۲	۱/۹۱۶۵	۱/۹۱۶۵	۱/۹۱۶۵	۱/۹۱۶۵
۳	۳/۳۴۵۷	۳/۳۴۴۵	۳/۳۴۱۹	۳/۳۴۱۳
۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴
۵	۵/۶۵۳۵	۵/۲۹۲۱	۴/۴۴۶۹	۴/۱۲۲۴

۴-۲- بررسی تاثیرات سختی بستر ارتجاعی بر فرکانس‌های ورق سه‌لایه FGMEE

در این قسمت تاثیرات سختی بستر ارتجاعی روی فرکانس‌های ورق سه‌لایه FGMEE بررسی شده است. فرکانس‌های ورق با استفاده از روش حل دقیق ارائه شده در این مقاله محاسبه و نتایج در جدول‌های ۱۱-۷ آورده شده است. این جدول‌ها برای ورق سه‌لایه مگنتو-الکترو-الاستیک که چینش لایه‌ها مطابق با شکل ۲ بوده، حاصل شده است. در هر یک از جدول‌ها، فرکانس‌های پنج مود اول به‌ازای شاخص تغییرات خواص مواد $a=0$ ، 10 ، 5 ، 1 ، -5 ، -10 تحت ارتعاش آزاد به دست آمده است.

جدول (۷) فرکانس‌های پنج مود اول بدون بعدشده ورق سه‌لایه FGMEE به‌ازای سختی‌های مختلف بستر ارتجاعی و برای شاخص تغییرات خواص مواد برابر با $(a=0)$ صفر

مود	$k_w=0$	$k_w=2$	$k_w=0$	$k_w=2$	$k_w=0$	$k_w=0$
	$k_p=0.5$	$k_p=0$	$k_p=0.5$	$k_p=0.1$	$k_p=0$	$k_p=0.1$
نوع چینش لایه‌ها: F/B/F						
۱	۱/۵۱۰	۱/۳۸۲۳	۱/۳۸۵۹	۱/۶۲۴۳	۱/۹۳۱۳	۱/۹۳۱۳
۲	۱/۹۳۱۳	۱/۹۳۱۳	۲/۰۸۰۱	۲/۰۸۷۴	۲/۰۸۷۴	۲/۰۸۷۴
۳	۳/۳۴۶۴	۳/۳۴۶۴	۳/۳۴۶۴	۳/۳۴۶۴	۳/۳۴۶۴	۳/۳۴۶۴
۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴
۵	۵/۶۶۶۵	۵/۶۸۸۰	۵/۶۸۸۳	۵/۷۰۹۴	۵/۷۶۹۱	۵/۷۷۰۲

جدول (۸) فرکانس‌های پنج مود اول بدون بعدشده ورق سه‌لایه FGMEE به‌ازای سختی‌های مختلف بستر ارتجاعی و برای شاخص تغییرات خواص مواد برابر با $(a=0)$

مود	$k_w=0$	$k_w=2$	$k_w=0$	$k_w=2$	$k_w=0$	$k_w=0$
	$k_p=0.5$	$k_p=0$	$k_p=0.5$	$k_p=0.1$	$k_p=0$	$k_p=0.1$
نوع چینش لایه‌ها: F/B/F						
۱	۱/۰۷۷۷	۱/۳۶۱۱	۱/۳۶۴۴	۱/۵۷۷۴	۱/۹۳۸۷	۱/۹۳۸۷
۲	۱/۹۳۸۷	۱/۹۳۸۷	۲/۰۰۴۷	۲/۰۱۱۹	۲/۰۱۱۹	۲/۰۱۱۹
۳	۳/۳۴۶۴	۳/۳۴۶۴	۳/۳۴۶۴	۳/۳۴۶۴	۳/۳۴۶۴	۳/۳۴۶۴
۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴	۴/۵۴۶۴
۵	۵/۶۴۸۳	۵/۲۸۲۹	۵/۲۸۳۱	۵/۲۹۹۴	۵/۳۴۶۲	۵/۳۴۶۲

جدول (۹) فرکانس‌های پنج مود اول بدون بعدشده ورق سه‌لایه FGMEE به‌ازای سختی‌های مختلف بستر ارتجاعی و برای شاخص تغییرات خواص مواد برابر با $(a=10)$ ۱۰

مود	$k_w=0$	$k_w=2$	$k_w=0$	$k_w=2$	$k_w=0$	$k_w=0$
	$k_p=0.5$	$k_p=0$	$k_p=0.5$	$k_p=0.1$	$k_p=0$	$k_p=0.1$
نوع چینش لایه‌ها: F/B/F						
۱	۱/۰۶۵۳	۱/۳۶۲	۱/۳۲۸۹	۱/۵۱۵۵	۱/۹۰۶۱	۱/۹۱۲۸
۲	۱/۹۴۵۷	۱/۹۴۵۷	۱/۹۴۵۷	۱/۹۴۵۷	۱/۹۴۵۷	۱/۹۴۵۷
۳	۳/۳۴۵۷	۳/۳۴۸۳	۳/۳۴۸۵	۳/۳۴۹۳	۳/۳۴۷۱	۳/۳۴۷۱
۴	۴/۵۴۸۷	۴/۵۴۸۷	۴/۵۴۸۷	۴/۵۴۸۷	۴/۵۴۸۷	۴/۵۴۸۷
۵	۴/۹۱۳۵	۴/۹۱۷۶	۴/۹۱۷۷	۴/۹۲۹۳	۴/۹۶۳۳	۴/۹۶۴۲

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} c_{55}^{(n)}(z) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{44}^{(n)}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^{(n)}(z) & e_{33}^{(n)}(z) & q_{33}^{(n)}(z) \\ 0 & 0 & e_{33}^{(n)}(z) & -x_{33}^{(n)}(z) & -d_{33}^{(n)}(z) \\ 0 & 0 & q_{33}^{(n)}(z) & -d_{33}^{(n)}(z) & -p_{33}^{(n)}(z) \end{bmatrix}$$

$$D^{13} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^{21} = \begin{bmatrix} -(m^2 C_{11}(z) + n^2 C_{66}(z)) + \rho \omega^2 & -nm(C_{12}(z) + C_{66}(z)) \\ -nm(C_{12}(z) + C_{66}(z)) & -(n^2 C_{22}(z) + m^2 C_{66}(z)) + \rho \omega^2 \\ -m \frac{\partial C_{13}(z)}{\partial z} & -n \frac{\partial C_{32}(z)}{\partial z} \\ -m \frac{\partial e_{31}(z)}{\partial z} & -n \frac{\partial e_{32}(z)}{\partial z} \\ -m \frac{\partial q_{31}(z)}{\partial z} & -n \frac{\partial q_{32}(z)}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$D^{22} = \begin{bmatrix} m \frac{\partial C_{55}(z)}{\partial z} & m \frac{\partial e_{15}(z)}{\partial z} \\ n \frac{\partial C_{44}(z)}{\partial z} & n \frac{\partial e_{24}(z)}{\partial z} \\ -m^2 C_{55}(z) - n^2 C_{44}(z) + \rho \omega^2 & -(m^2 e_{15}(z) + n^2 e_{24}(z)) \\ -m^2 e_{15}(z) - n^2 e_{24}(z) & m^2 x_{11}(z) + n^2 x_{22}(z) \\ -m^2 q_{15}(z) - n^2 q_{24}(z) & m^2 d_{11}(z) + n^2 d_{22}(z) \\ m \frac{\partial q_{15}(z)}{\partial z} \\ m \frac{\partial q_{24}(z)}{\partial z} \\ -m^2 q_{15}(z) + n^2 q_{24}(z) \\ m^2 d_{11}(z) + n^2 d_{22}(z) \\ m^2 p_{11}(z) + n^2 p_{22}(z) \end{bmatrix}$$

$$D^{23} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_{55}(z)}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial C_{44}(z)}{\partial z} \\ -m(C_{55}(z) + C_{13}(z)) & -n(C_{32}(z) + C_{44}(z)) \\ -m(e_{15}(z) + e_{31}(z)) & -n(e_{24}(z) + e_{32}(z)) \\ -m(q_{15}(z) + q_{31}(z)) & -n(q_{24}(z) + q_{32}(z)) \end{bmatrix}$$

$$D^{24} = \begin{bmatrix} m(C_{13}(z) + C_{55}(z)) & m(e_{15}(z) + e_{31}(z)) \\ n(C_{23}(z) + C_{44}(z)) & n(e_{32}(z) + e_{24}(z)) \\ \frac{\partial C_{33}(z)}{\partial z} & \frac{\partial e_{33}(z)}{\partial z} \\ \frac{\partial e_{33}(z)}{\partial z} & -\frac{\partial x_{33}(z)}{\partial z} \\ \frac{\partial q_{33}(z)}{\partial z} & -\frac{\partial d_{33}(z)}{\partial z} \\ m(q_{31}(z) + q_{15}(z)) \\ n(q_{32}(z) + q_{24}(z)) \\ \frac{\partial q_{33}(z)}{\partial z} \\ -\frac{\partial d_{33}(z)}{\partial z} \\ -\frac{\partial p_{33}(z)}{\partial z} \end{bmatrix}$$

منابع

- 1- Annigeri AR, Ganesan N, Swarnamani S. Free vibrations of simply supported layered and multiphase magneto-electro-elastic cylindrical shells. Smart Materials and Structures. 2006;15(2):459-467.
- 2- Annigeri AR, Ganesan N, Swarnamani S. Free vibration behaviour of multiphase and layered magneto-electro-elastic beam. Journal of Sound and Vibration. 2007;299(1-2):44-63.
- 3- Etemadi E, Afaghi Khatibi A, Takaffoli M. 3D finite

تاییدیه اخلاقی: این مقاله تاکنون در نشریه دیگری (بطور کامل یا بخشی از آن) به چاپ نرسیده است. همچنین برای بررسی یا چاپ به نشریه دیگری ارسال نشده است. ضمناً محتویات علمی مقاله حاصل فعالیت علمی نویسندگان بوده و صحت و اعتبار نتایج بر عهده نویسندگان است.

تعارض منافع: مقاله حاضر هیچ گونه تعارض منافی با سازمانها و اشخاص دیگر ندارد.

سهم نویسندگان: ناصر چراقی (نویسنده اول)، نگارنده مقدمه/پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۴۰٪)؛ مجتبی لژگی نظرگاه (نویسنده دوم)، روش شناس/پژوهشگر کمکی/نگارنده بحث (۳۵٪)؛ احسان اعتمادی (نویسنده سوم)، روش شناس/پژوهشگر کمکی (۲۵٪)

منابع مالی: این پژوهش توسط هیچ شخص یا سازمانی حمایت مالی نشده است.

۶- پی نوشتها

۱-۶- پی نوشت الف

ماتریس مولفه های معادله ۱ به شکل زیر است:

$$C^{(n)} = \begin{bmatrix} c_{11}^{(n)}(z) & c_{12}^{(n)}(z) & c_{13}^{(n)}(z) \\ c_{21}^{(n)}(z) & c_{22}^{(n)}(z) & c_{23}^{(n)}(z) \\ c_{31}^{(n)}(z) & c_{32}^{(n)}(z) & c_{33}^{(n)}(z) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{31}^{(n)}(z) & e_{32}^{(n)}(z) & e_{33}^{(n)}(z) \\ 0 & e_{15}^{(n)}(z) & 0 \\ e_{24}^{(n)}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d^{(n)} = \begin{bmatrix} d_{11}^{(n)}(z) & 0 & 0 \\ 0 & d_{22}^{(n)}(z) & 0 \\ 0 & 0 & d_{33}^{(n)}(z) \end{bmatrix}$$

$$q^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ q_{31}^{(n)}(z) & q_{32}^{(n)}(z) & q_{33}^{(n)}(z) \\ 0 & q_{15}^{(n)}(z) & 0 \\ q_{24}^{(n)}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} x_{11}^{(n)}(z) & 0 & 0 \\ 0 & x_{22}^{(n)}(z) & 0 \\ 0 & 0 & x_{33}^{(n)}(z) \end{bmatrix}$$

$$p^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{11}^{(n)}(z) & 0 & 0 \\ 0 & p_{22}^{(n)}(z) & 0 \\ 0 & 0 & p_{33}^{(n)}(z) \end{bmatrix}$$

۲-۶- پی نوشت ب

ماتریس های $F^{(n)}$ و $D^{(n)}$ در معادله ۱۴ به شکل زیر است:

$$F^{(n)} = \begin{bmatrix} I_{5 \times 5} & 0_{5 \times 5} \\ 0_{5 \times 5} & I_{5 \times 5} \end{bmatrix}_{10 \times 10}$$

$$D^{(n)} = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 2} & 0_{5 \times 3} & D_{5 \times 2}^{13} & D_{5 \times 3}^{14} \\ D_{5 \times 2}^{23} & D_{5 \times 3}^{23} & D_{5 \times 2}^{24} & D_{5 \times 3}^{24} \end{bmatrix}$$

که داریم:

- 14- Shahrjerdi A, Mustapha F, Bayat M, Sapuan SM, Zahari R, Shahzamanian MM. Natural frequency of F.G. rectangular plate by shear deformation theory. Conference on Advanced Materials and Nanotechnology, 3-5 November, 2009, Kuala Lumpur, Malaysia. Bristol: IOP Publishing; 2009.
- 15- Chen WQ, Lee KY. Three-dimensional exact analysis of angle-ply laminates in cylindrical bending with interfacial damage via state-space method. *Composite Structures*. 2004;64(3-4):275-283.
- 16- Chen WQ, Wang YF, Cai JB, Ye GR. Three-dimensional analysis of cross-ply laminated cylindrical panels with weak interfaces. *International Journal of Solids and Structures*. 2004;41(9-10):2429-2446.
- 17- Chen WQ, Zhou YY, Lü CF, Ding HJ. Bending of multiferroic laminated rectangular plates with imperfect interlaminar bonding. *European Journal of Mechanics A Solids*. 2009;28(4):720-727.
- 18- Li D, Liu Y. Three-dimensional semi-analytical model for the static response and sensitivity analysis of the composite stiffened laminated plate with interfacial imperfections. *Composite Structures*. 2012;94(6):1943-1958.
- 19- Cheng ZQ, Jemah AK, Williams FW. Theory for multilayered anisotropic plates with weakened interfaces. *Journal of Applied Mechanics*. 1996;63(4):1019-1026.
- 20- Di Sciuva M. Geometrically nonlinear theory of multilayered plates with interlayer slips. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. 1997;35(11):1753-1759.
- 21- Huang ZY, Lü CF, Chen WQ. Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations. *Composite Structures*. 2008;85(2):95-104.
- 22- Chen J, Chen H, Pan E. Free vibration of functionally graded, magneto-electro-elastic, and multilayered plates. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2006;19(2):160-166.
- 23- Cheraghi N, Lazgy Nazargah M. An exact bending solution for functionally graded magneto-electro-elastic plates resting on elastic foundations with considering interfacial imperfections. *Modares Mechanical Engineering*. 2016;15(12):346-356. [Persian]
- 24- Gantmacher FR. *The theory of matrices*. 1st Edition. 1st Volume. New York: Chelsea Publishing Company; 1960.
- 25- Pease MC. *Methods of matrix algebra*. 16th Volume. New York: Academic Press; 1965.
- element simulation of sandwich panels with a functionally graded core subjected to low velocity impact. *Composite Structures*. 2009;89(1):28-34.
- 4- Zamani J, Etemadi E, Hosseini Safari K, Afaghi Khatibi A. Modeling of high velocity impact in sandwich beams with FGM core. In: Bonora N, Brown E, editors. *Numerical modeling of materials under extreme conditions*. 1st Edition. Heidelberg: Springer; 2014. pp. 107-120.
- 5- Phoenix SS, Satsangi SK, Singh BN. Layer-wise modelling of magneto-electro-elastic plates. *Journal of Sound and Vibration*. 2009;324(3-5):798-815.
- 6- Yifeng Z, Lei Ch, Yu W, Xiaopin Z, Liangliang Z. Asymptotical construction of a Reissner-like model for multilayer functionally graded magneto-electro-elastic plates. *Composite Structures*. 2013;96:786-798.
- 7- Hosseini Hashemi Sh, Fadaee M, Atashipour SR. A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2011;53(1):11-22.
- 8- Pan E. Exact solution for simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*. 2001;68(4):608-618.
- 9- Pan E, Han F. Exact solution for functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates. *International Journal of Engineering Science*. 2005;43(3-4):321-339.
- 10- Bellifa H, Benrahou KH, Hadji L, Houari MSA, Tounsi A. Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2016;38(1):265-275.
- 11- Zhao L, Chen WQ. Plane analysis for functionally graded magneto-electro-elastic materials via the symplectic framework. *Composite Structures*. 2010;92(7):1753-1761.
- 12- Bhangale RK, Ganesan N. Free vibration of simply supported functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates by finite element method. *Journal of Sound and Vibration*. 2006;294(4-5):1016-1038.
- 13- Karami Khorramabadi M, Najafizadeh MM, Alibabaei Shahraki J, Khazaeinejad P. Effect of shear theories on free vibration of functionally graded plates. *The International Conference on Applied Mechanics and Mechanical Engineering (AMME)*, 2008, Bangkok, Thailand. Istanbul: World Academy of Science, Engineering and Technology; 2008.