



## بهینه‌سازی متغیرهای هندسی باتری سرب-اسید به روش صفحه پاسخ برای دست‌یابی به بیشترین ظرفیت، کمترین زمان شارژ و کمترین افزایش دما

طیب نازقلیچی<sup>1</sup>، فرشاد ترابی<sup>2\*</sup>، وحید اصفهانیان<sup>3</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی سیستم‌های انرژی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

3- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

\* تهران، صندوق پستی 19395-1999، ftorabi@kntu.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 15 آذر 1396

پذیرش: 04 اسفند 1396

ارائه در سایت: 24 اسفند 1396

کلید واژگان:

باتری سرب-اسید

بهینه‌سازی

روش صفحه پاسخ

الکتروود

شبیه‌سازی

### چکیده

افزایش ظرفیت باتری‌های سرب-اسید و کاهش زمان شارژ آن‌ها در دمای پایین از چالش‌های اصلی طراحان و سازندگان باتری‌ها است. خصوصیت‌های هندسی صفحه‌های باتری مانند ضخامت و سطح فعال بیشینه از جمله متغیرهای موثر بر عملکرد باتری است. از این رو تعیین بهترین مقدار برای این متغیرهای مستقل، یک مساله مهم برای این صنعت است. در مطالعه حاضر، با استفاده از مدل بی‌بعد باتری‌های سرب-اسید یک کد عددی به روش دینامیک سیالات محاسباتی ایجاد شده است تا رفتار باتری توسط آن شبیه‌سازی شود. در گام بعدی با استفاده از روش صفحه پاسخ، تعداد 50 اجرا برای شبیه‌سازی پیشنهاد شده است. با استفاده از پاسخ‌های به‌دست آمده از اجراها، برای هر پاسخ (ظرفیت، زمان شارژ و دما) یک مدل تجربی به صورت تابعی از متغیرهای مستقل استخراج و از مدل‌های تجربی به عنوان تابع‌های هدف برای بهینه‌سازی استفاده شده است. نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که در ضخامت‌های الکتروود مثبت 0.078 cm، الکتروود منفی 0.053 cm و جداکننده 0.04 cm و همچنین بیشینه سطح فعال  $80 \text{ cm}^{-1}$  برای هر دو الکتروود، بیشترین ظرفیت و کمترین زمان شارژ و کمترین دما به‌دست می‌آید. برای مطالعه بهینه‌سازی حاضر، دقت و صحت آزمایش انجام شده توسط یک آزمون صحت‌سنجی تایید شده است. مطالعه حاضر اثبات کرده است که با تغییر خصوصیت‌های هندسی باتری می‌توان عملکرد آن را بهبود بخشید.

## Optimization of geometrical parameters in a lead-acid battery using response surface method to access of maximum capacity, minimum charge-time and minimum temperature rise

Tayyeb Nazghelichi<sup>1</sup>, Farschad Torabi<sup>1\*</sup>, Vahid esfahanian<sup>2</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Khajeh Nasir Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

2- Department of Mechanical Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

\* P.O.B. 19395-1999, Tehran, Iran, ftorabi@kntu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 06 December 2017  
Accepted 23 February 2018  
Available Online 15 March 2018

#### Keywords:

Lead-acid battery  
Optimization  
Response surface method  
Electrode  
Simulation

### ABSTRACT

Increasing of capacity in lead-acid batteries and reducing charging time in lower temperature are considered as some main challenges of designers and manufacturers. Geometrical properties of battery plates such as thickness and maximum activated area are some of effective parameters on battery performance. Thus, determining of optimum values for independent variables is an important problem for battery industry. In the present study, a numerical solution code is developed using computational fluid dynamic method to simulate battery behavior. Numbers of 50 runs are suggested using response surface method. For each response one empirical model is extracted as a function of independent variables and from these models the optimization process is done. The results shows that in positive electrode thickness of 0.078 cm, negative electrode thickness of 0.53 cm, separator thickness of 0.04 cm and maximum activated areas for positive and negative electrode of  $80 \text{ cm}^{-1}$  is an optimum condition to get maximum capacity, minimum charging time and temperature. A confirmation test is done and it demonstrates that the results are in good agreement to predicted optimum results. In conclusion, the present study shows that by changing geometrical properties of the battery one can improve its performance.

### 1- مقدمه

مورد توجه است. باتری‌ها انرژی الکتریکی وسایل مختلف را برحسب نیازشان، با ذخیره‌سازی و تبدیل انرژی شیمیایی فراهم می‌آورند. ارزیابی بازار باتری نشان می‌دهد که باتری‌های سرب-اسید، بازار باتری‌های قابل شارژ را در اختیار دارند [1]. باتری‌های سرب-اسید در مقایسه با باتری‌های قابل شارژ

آینده اقتصاد و محیط زیست جهان تحت تاثیر تولید انرژی از منابع محدود سوخت‌های فسیلی است. امروزه، انرژی الکتروشیمیایی به‌دلیل مستقل بودن از سوخت‌های فسیلی، نداشتن آلاینده‌گی و پایداری قابل قبول، به‌طور ویژه‌ای

### Please cite this article using:

T. Nazghelichi, F. Torabi, V. esfahanian, Optimization of geometrical parameters in a lead-acid battery using response surface method to access of maximum capacity, minimum charge-time and minimum temperature rise, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 04, pp. 1-10, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

تابع‌های هموار<sup>5</sup> تخمین زده شود تا هم‌گرایی فرآیند بهینه‌سازی بهبود یابد. زیرا که تابع‌های ذکر شده اثر اختلال‌ها را کاهش می‌دهند و به‌علاوه با آن‌ها امکان استفاده از الگوریتم‌های مبتنی بر مشتق میسر است [5].

در مورد مدل‌سازی رفتار دینامیکی باتری مطالعه‌های زیادی صورت گرفته است. نیومن و تیدمن [6] یک تئوری جامع در مورد الکترودهای متخلخل را برای اولین بار ارائه دادند. این دو محقق، از مدل پیشنهادی خود برای شبیه‌سازی رفتار یک سل سرب-اسید در فرآیند دشارژ استفاده کردند. پیشرفت بعدی این مدل ارائه شده، توسط سونو [7] انجام گرفت. مدل سونو توانست تاثیر توزیع غیریکنواخت غلظت اسید را در محفظه الکترولیت در نظر بگیرد. گو و همکاران [8] مدلی ارائه دادند که علاوه بر فرآیند دشارژ، فرآیند شارژ را نیز مدل کرد. گو و همکاران [9] در تحقیقی دیگر، یک مدل یکپارچه با فرمول‌بندی جامع برای اولین بار برای باتری‌ها سرب-اسید ارائه دادند. آن‌ها برای حل معادله‌های حاکم از تکنیک‌های عددی موجود در دینامیک سیالات محاسباتی و از روش حجم محدود استفاده کردند. اصفهانیان و همکاران [10, 11] روش‌های مدل‌سازی باتری‌های سرب اسید را با روش جعبه‌ای-کلر و ترکیب مدل‌های دینامیک سیالات محاسباتی با مدل مدار معادل، بهبود دادند.

علاوه بر مطالعه‌های بالا، تحقیق‌های محدودی در زمینه بهینه‌سازی باتری و سیستم‌های مربوط به آن انجام شده است. مصباحی و همکاران [12] پس از مدل‌سازی الکتریکی یک باتری تحت شرایط واقعی، این مدل مدار معادل پویا را با استفاده از یک الگوریتم دوگانه ازدحام ذرات-نلد-مید<sup>6</sup> بهینه‌سازی کردند. آن‌ها با تطبیق دادن حل عددی و نتایج آزمایشگاهی خطای این مدل را زیر 0.5% ارزیابی کردند. پاجارس و همکاران [13] یک مدل غیرخطی کامل از یک باتری سرب-اسید را با استفاده از یک رویکرد چندهدفی ارائه دادند. این مدل برای فرآیندهای شارژ، دشارژ و خصوصیت‌های حرارتی کاربرد دارد. آن‌ها پایداری و بهینه‌سازی مدل را با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی پارتو<sup>7</sup> تحلیل کردند و بهترین مدل را انتخاب کردند. کویندژیک و همکاران [14] یک الگوریتم برای شارژ بهینه یک مجموعه از باتری‌های سرب-اسید را براساس مدل کنترل پیش‌بینی شده، پیشنهاد دادند. هدف این الگوریتم بیشینه‌سازی سرعت شارژ باتری‌ها بود به طوری که محدودیت‌های مربوط به جریان، ولتاژ و دما را نقض نکنند. الگوریتم پیشنهادی آن‌ها کوژی<sup>8</sup> مساله بهینه‌سازی باتری را بهبود بخشید. علاقه‌بند و همکاران [15] اثر پیکربندی شبکه الکترولیت را روی عملکرد الکتروود مثبت از طریق مدل‌سازی توزیع جریان و ولتاژ بررسی کردند. با این روش، آن‌ها در واقع سبک پیکربندی را بهینه‌سازی کردند. به طوری که یکی از پیکربندی‌ها یکنواختی توزیع جریان را تا 43% بهبود بخشید. پورمیرزاآقا و همکاران [16] رفتار دینامیکی یک سل سرب-اسید را با هدف انرژی بیشتر و ابعاد کمتر بهینه‌سازی کردند. نتایج ایشان نشان داد که می‌توان با تغییر ضخامت اجزا و با انرژی یکسان وزن باتری را 25% کمتر کرد.

با توجه به مرور ادبیات اطلاعات بسیار محدودی در مورد بهینه‌سازی باتری‌های سرب اسید موجود است. به‌خصوص در مورد استفاده از روش صفحه پاسخ در بهینه‌سازی این نوع باتری‌ها مطالعاتی یافت نشد. در تحقیق حاضر سعی بر آن است که از روش صفحه پاسخ برای بهینه‌سازی ضخامت الکترودها، جداکننده و همچنین بیشینه سطح فعال برای دست‌یابی به

دیگر مزایای فراوانی مانند کار در ولتاژهای بالاتر، انرژی ویژه قابل قبول، کار در محدوده وسیعی از دما، هزینه تولید و نگهداری کم و سامانه‌ی بازیافت جالفتاده و موفق را دارند [2].

باتری‌های سرب-اسید در گستره وسیعی به کار برده می‌شوند. این طیف وسیع می‌تواند از پالس‌های سریع جریان بالا تا جریان‌های کم و پایدار و همچنین از موتورهای احتراق داخلی تا توان پشتیبان برای ارتباطات مخابراتی باشند. همچنین انتظار می‌رود این باتری‌ها دشارژ و شارژ عمیق در دوره‌های کوتاه زمانی در وسایل الکتریکی را نیز تحمل کنند. بنابراین انتظار می‌رود باتری توان کافی برای وظیفه تعریف شده‌اش را تامین نماید [3].

برای ماندن در دنیای پر از رقابت باتری‌ها لازم است تا روز به روز پیشرفت‌هایی در تمامی زمینه‌ها، از مدل‌سازی‌های بهتر تا بهینه‌سازی عملکرد باتری‌ها انجام گیرد. بهینه کردن ابعاد باتری و همچنین مساحت سطح فعال آن در جهت افزایش ظرفیت، مدت زمان شارژ کمتر و نیز دمای کاری کمتر چالش قابل توجهی برای محققان در این زمینه است و پیشرفت مهمی برای طراحان در صنعت باتری‌های سرب-اسید به حساب می‌آید. در حال حاضر روش متداول در صنعت، استفاده از سعی و خطا برای بیشتر کردن ظرفیت باتری‌هاست که بسیار پرهزینه و زمان‌بر است. کمبود لوازم آزمایشگاهی از دیگر ایرادهای تست‌های تجربی است که به همین دلیل در عمل محدود می‌شوند. مدل‌سازی ریاضی از دیگر روش‌های تحقیق و بررسی رفتار دینامیکی باتری‌هاست. تاکنون روش‌های متعددی برای این نوع مدل‌سازی‌ها مطرح شده است. هر یک از این روش‌ها مزایا و محدودیت‌های خاص خود را دارند. روش حجم محدود یک روش دقیق و به‌روز برای مدل‌سازی با مقاصد طراحی و بهینه‌سازی است. این روش قادر است با حل عددی معادلات الکترودشیمیایی و حرارتی باتری، تحلیل دقیقی از سیستم مورد مطالعه ارائه دهد.

از دیدگاه ریاضی، بهینه‌سازی به برگزیدن بهترین عضو از یک مجموعه از اعضای دست‌یافتنی اشاره می‌کند. در ساده‌ترین شکل، تلاش می‌شود که با گزینش نظام‌مند داده‌ها از یک مجموعه قابل دست‌یابی و محاسبه مقدار یک تابع حقیقی، مقدار بیشینه و کمینه آن به‌دست آید. روش‌های گوناگونی برای بهینه‌سازی به‌وجود آمده است که هر یک از آن‌ها برای مقاصد خاص خود مورد استفاده قرار می‌گیرند. در مطالعه حاضر روش صفحه پاسخ<sup>1</sup> توسط مولفان برای تحلیل رفتار بهینه باتری، به‌عنوان مناسب‌ترین روش انتخاب شده است. روش صفحه پاسخ مجموعه‌ای از تکنیک‌های ریاضی و آماری برای ساختن یک مدل از روی نتایج آزمایشگاهی است. هدف این روش، بهینه‌سازی یک پاسخ (متغیر خروجی) به‌وسیله یک «طراحی آزمایش‌ها»<sup>2</sup> دقیق است که آن پاسخ(ها) تحت تاثیر متغیرهای مستقل (متغیرهای ورودی) متنوعی باشد. یک آزمایش<sup>3</sup> یک سری از آزمون‌هاست (به هر سری از این آزمون‌ها یک اجرا<sup>4</sup> می‌گویند) که در آن تغییراتی در متغیرهای ورودی به‌منظور شناسایی پاسخ‌ها ایجاد می‌شود. در اصل، روش صفحه پاسخ برای مدل کردن پاسخ‌های آزمایشگاهی ایجاد شد و بعدها از آن برای مدل‌سازی آزمایش‌های عددی استفاده شد [4]. هدف از کاربرد روش صفحه پاسخ برای طراحی بهینه‌سازی، کاهش هزینه‌های روش‌های تحلیل گران‌قیمت و اختلال‌های عددی مربوط به آن‌ها است. مساله بهینه‌سازی می‌تواند با

<sup>5</sup> Smooth function

<sup>6</sup> Particle Swarm-Nelder-Mead

<sup>7</sup> Pareto

<sup>8</sup> Convexity

<sup>1</sup> Response surface method

<sup>2</sup> Experiment

<sup>3</sup> Test

<sup>4</sup> Run

بیشینه ظرفیت، کمینه زمان شارژ و کمینه دمای باتری استفاده شود. برای این منظور یک سل سرب-اسید در حالت یک بعدی با معادلات بی‌بعد الکتروشیمیایی حرارتی حاکم بر رفتار باتری با روش حجم محدود و دینامیک سیالات عددی مدل‌سازی شد. در ابتدا، از روش صفحه پاسخ برای طراحی آزمایش‌ها استفاده شد سپس با تحلیل نتایج حاصل از حل عددی، بهینه‌سازی با روش ذکرشده انجام شد. نتایج حاصل از تحقیق حاضر نشان داد که روش صفحه پاسخ برای بهینه‌سازی باتری‌های سرب-اسید در کنار مدل‌سازی عددی روش مطلوبی است که با کاهش هزینه‌های آزمایش‌ها در صنعت و دقت در حل برای تحلیل‌های تئوری، کفایت لازم برای استفاده‌های بیشتر را دارد. همچنین این روش با حفظ محدودیت‌های عملی و ارائه بهینه‌های نسبی علاوه بر بهینه مطلق و در نتیجه ایجاد حق انتخاب بر سایر روش‌ها برتری دارد.

## 2- شرح مساله

با توجه به اهمیت باتری‌های سرب-اسید در صنعت، روش‌های مختلفی برای ارزیابی این وسیله ذخیره انرژی الکتروشیمیایی وجود دارد. این روش‌ها، عملکرد باتری را با استفاده از پارامترهای مختلفی از جمله ظرفیت باتری، مدت زمان شارژ و دمای کاری مورد سنجش قرار می‌دهند. ظرفیت باتری در واقع، اندازه بار ذخیره شده توسط باتری است و به‌وسیله جرم مواد فعال در محفظه باتری مشخص می‌شود. ظرفیت باتری بیشینه مقدار انرژی قابل استخراج از باتری تحت شرایط مشخص را نشان می‌دهد. با این حال، توانایی واقعی ذخیره انرژی در باتری‌ها می‌تواند به‌طور معنی داری از ظرفیت اسمی آن متفاوت باشد. زیرا ظرفیت باتری به‌شدت به عمر، نرخ‌های شارژ و دشارژ، نحوه استفاده و دمای کاری آن وابسته است. به‌طور معمول واحد اندازه‌گیری ظرفیت باتری آمپر-ساعت است که به‌صورت تعداد ساعت‌هایی که در آن یک باتری می‌تواند یک جریان معادل نرخ دشارژ در ولتاژ اسمی باتری را تامین کند، تعریف می‌شود. با توسعه فناوری در انواع باتری‌ها، مدت زمان شارژ کمتر به یک رقابت تبدیل شده است. باتری‌های سرب اسید نیز از این قاعده مستثنی نیستند. با توجه به این‌که مدت زمان شارژ در باتری‌های سرب-اسید نسبت به سایر باتری‌ها زیاد است اهمیت این امر و لزوم تحقیق‌ها و مطالعه‌ها در این باره محرز می‌شود. دمای باتری حین شارژ و دشارژ افزایش می‌یابد و این دما بر عملکرد باتری و همچنین خصوصیت‌های آن مانند رسانایی الکتروود و الکتروولیت تاثیر می‌گذارد. علاوه بر آن، افزایش دمای باتری به یکی از حالت‌های خرابی باتری به‌نام گریز حرارتی منجر می‌شود. بنابراین، کاهش دمای باتری به‌خصوص حین شارژ از هدف‌های مهم محققان است.

بنابراین، افزایش ظرفیت، کاهش زمان شارژ و کاهش دمای کاری، مطلوب است. حال باید دید با تغییر چه پارامترهایی می‌توان به این مهم دست یافت. این پارامترها باید دو شرط را دارا باشند. اول تغییر آن‌ها امکان‌پذیر باشد و دوم تغییر این پارامترها تا حد امکان راحت باشد. بر این اساس، مولفان نوشتار حاضر پارامترهای ضخامت الکتروود مثبت، ضخامت الکتروود منفی و ضخامت جداکننده و همچنین بیشینه سطح فعال در الکتروودهای مثبت و منفی را به‌عنوان متغیرهای مستقل در نظر گرفتند. باید توجه داشت که اندازه سل متغیر هندسی مهمی در ساختار باتری است که در صنعت ساخت باتری مورد توجه است. به‌علاوه، سطح فعال که در معادله‌های الکتروشیمیایی و حرارتی حاکم بر رفتار باتری به‌صورت جمله چشمه ظاهر می‌شود از سطح فعال بیشینه به‌دست می‌آید. بنابراین متغیرهای مستقل

مورد مطالعه از شرط‌های لازم و کافی برای بهینه‌سازی برخوردارند. باید توجه داشت که در مطالعه آزمایشگاهی باید بعد از تعیین محدوده تغییر برای هر متغیر مستقل، باید تعداد متغیرها را در هم ضرب کرد و به همان تعداد آزمایش انجام داد که تعداد نامتناهی از آزمایش‌ها خواهد بود. واضح است که انجام این کار از نظر تعداد و ساخت و تحلیل غیرممکن است. بنابراین تحقیق حاضر به‌منظور یافتن روشی مناسب برای کم کردن تعداد آزمایش‌ها، کاهش هزینه هر آزمایش و در عین حال دقت قابل قبول در نتایج بهینه‌سازی صورت گرفته است.

## 3- روش حل

در این قسمت، ابتدا مدل بی‌بعد مورد استفاده در حل عددی بررسی می‌شود. سپس، هندسه حل و شرایط مرزی مورد مطالعه قرار می‌گیرند. حل عددی در مطالعه حاضر با روش دینامیک سیالات عددی انجام شده است. در نهایت، طراحی آزمایش‌ها برای مساله حاضر مورد بحث قرار می‌گیرد.

### 3-1- مدل‌سازی ریاضی

در باتری‌های سرب-اسید نسبت طول و عرض صفحه‌های الکتروودها نسبت به ضخامت آن‌ها بزرگ است. در نتیجه می‌توان معادله‌های حاکم بر باتری را در حالت یک‌بعدی شبیه‌سازی کرد. در مطالعه حاضر از معادله‌های بی‌بعد حاکم بر رفتار باتری استفاده شده است که در ادامه آمده است [17]:

$$\nabla \cdot (\sigma^* \nabla \phi_e^*) = A^* j^* \quad (1)$$

معادله (1) در واقع قانون بقای بار در الکتروود است. عنوان تمامی پارامترها و واحد آن‌ها در قسمت فهرست علائم آمده است. پارامترهای بی‌بعد با علامت \* در معادله‌ها مشخص شده‌اند. معادله بقای بار در الکتروولیت به شکل بی‌بعد معادله (2) بیان می‌شود:

$$\nabla \cdot (k^* \nabla \phi_e^*) + \nabla \cdot (k_D^* \nabla \ln c^*) = -A^* j^* \quad (2)$$

معادله (3) بقای گونه‌های شیمیایی را به‌صورت زیر نشان می‌دهد:

$$\epsilon \frac{\partial c^*}{\partial t^*} = \nabla \cdot (D^* \nabla c^*) + \frac{a_2}{2} A^* j^* \quad (3)$$

چگالی جریان انتقالی از معادله باتلر-ولمر به‌دست می‌آید و شکل بی‌بعد آن در معادله (4) نشان داده شده است:

$$j^* = \left( \frac{c}{c_{ref}} \right)^{\gamma} \left\{ \exp \left( \frac{\alpha_a \beta}{T^*} \eta^* \right) - \exp \left( \frac{-\alpha_c \beta}{T^*} \eta^* \right) \right\} \quad (4)$$

که در آن،  $\beta$  عدد بی‌بعد رابطه (5) است:

$$\beta = \frac{FV_{oc,0}}{RT_{ref}} \quad (5)$$

در ادامه، ضرایب بی‌بعد در معادله‌های (1) تا (3) به‌ترتیب آورده شده‌اند. معادله (6) رسانایی بی‌بعد الکتروود است:

$$\sigma^* = \frac{V_{oc,0} \sigma^{eff}}{i_0 A_{max} L^2} \quad (6)$$

به‌همین ترتیب، معادله‌های (7) و (8) رسانایی بی‌بعد در الکتروولیت و رسانایی بی‌بعد پخشی در الکتروولیت که به‌عنوان ضرایب در معادله (2) هستند را نشان می‌دهد:

$$k^* = \frac{V_{oc,0} k^{eff}}{i_0 A_{max} L^2} \quad (7)$$

$$k_D^* = \frac{k_D^{eff}}{i_0 A_{max} L^2} \quad (8)$$

در نهایت ضریب پخش در معادله بقای گونه‌های شیمیایی به‌شکل بی‌بعد به‌صورت معادله (9) است:

$$D^* = \frac{F C_0 D^{eff}}{i_0 A_{max} L^2} \quad (9)$$

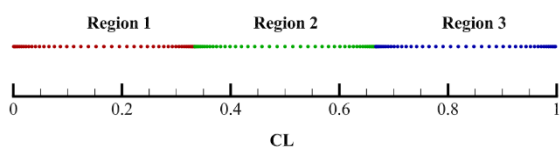


Fig. 1 Schematic of ununiform mesh of the cell

شکل 1 شماتیک مش‌بندی غیریکنواخت یک سل

باتری شروع به کار نکرده است توسط مکانیزم نفوذ جرم، یکنواخت می‌گردد. بنابراین شرط اولیه مناسب برای غلظت،  $c = c_0$  است. هم‌چنین برای محاسبه شرایط اولیه پتانسیل در فاز جامد و مایع از دو روش می‌توان استفاده کرد. اول، با فرض غلظت ثابت برای اسید سولفوریک برای حل معادله‌های بقای بار الکترون و الکترولیت اقدام شود. دوم، کل سیستم معادله‌ها به اندازه یک گام زمانی خیلی کوچک حل شود.

از آن‌جایی که یک باتری از تعدادی سل در کنار هم تشکیل شده است برای تک سل شبیه‌سازی شده در دو طرف می‌توان شرط مرزی تقارن را لحاظ نمود. هم‌چنین برای غلظت اسید و پتانسیل در فاز مایع، از شرط مرزی نیومن استفاده شده است:

$$\frac{\partial \phi_e^*}{\partial x^*} = \frac{\partial c^*}{\partial x^*} = 0 \quad (12)$$

به‌طور کلی در هر باتری، می‌توان فرآیندهای شارژ و دشارژ را تحت ولتاژ ثابت یا جریان ثابت انجام داد. بنابراین، برای شرط مرزی پتانسیل در فاز جامد می‌توان دو حالت را در نظر گرفت. اول، برای ولتاژ ثابت می‌توان نوشت:

$$\phi_s^* = 0 \text{ یا } V \quad (13)$$

دوم، برای حالت جریان ثابت می‌توان از شرط مرزی:

$$\pm \sigma^* \frac{\partial \phi_s^*}{\partial x^*} = I \quad (14)$$

استفاده نمود. که در آن مقادیر مثبت  $I$  معرف فرآیند شارژ و مقادیر منفی آن معرف فرآیند دشارژ است. در این رابطه، علامت  $-$  و  $+$  به ترتیب مربوط به الکترودهای مثبت و منفی است که این اختلاف علامت نیز ناشی از تفاوت در جهت بردار جریان نسبت به جهت بردار نرمال سطح در دو الکترون است. به‌عبارت دیگر، همواره جریان به یک الکترون وارد و از الکترون دیگر خارج می‌شود. در این مطالعه از یک سل نمونه که از پژوهش گو و همکاران [8] استخراج شده استفاده شده است. مقادیرهای مورد استفاده برای این سل در جدول 2 آورده شده است.

### 4-3- طراحی آزمایش‌ها

در مطالعه حاضر از روش صفحه پاسخ و از نرم افزار دیزاین اکسپرت استفاده شده است. یک طراحی مرکب مرکزی کامل وجه-مرکز<sup>1</sup> تشکیل شده از پنج فاکتور ضخامت الکترون مثبت، ضخامت الکترون منفی، ضخامت جداکننده، سطح فعال بیشینه الکترون مثبت و سطح فعال بیشینه الکترون منفی در پنج سطح و هشت تکرار در نقطه مرکزی، در مطالعه حاضر استفاده شده‌است. در این حالت نرم‌افزار دیزاین اکسپرت 50 اجرای متفاوت را با احتساب نقاط تکرار مرکزی پیشنهاد داد. جدول 3 پارامترهای موثر و محدوده بهینه‌سازی را نشان می‌دهد. محدوده‌های مشخص شده برای پارامترهای موثر، با توجه به مطالعه باتری‌های موجود در بازار و ملاحظات صنعتی انتخاب شده‌اند. این محدوده‌ها در بازه‌ای که محصولات صنعتی تولید شده‌اند، قرار گرفته است.

<sup>1</sup> Face centered full central composite design

علاوه بر معادله‌های الکتروشیمیایی ذکر شده، در مطالعه حاضر معادله انرژی نیز به‌صورت کوپل با معادله‌های الکتروشیمیایی حل می‌شوند:

$$(\rho C_p)^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \nabla \cdot (\lambda^* \nabla T^*) + q^* \quad (10)$$

معادله (10) شکل بی‌بعد معادله انرژی است. جمله  $q^*$  در معادله (10) نماینده تولید حرارت است که از سه جزء زیر تشکیل شده است:

$$q^* = -\vec{i}_s^* \cdot \nabla \phi_s^* - \vec{i}_e^* \cdot \nabla \phi_e^* + \sum_{\text{reactions}} A^* j^* (\eta^* + \Pi^*) \quad (11)$$

دو جمله اول معادله (11) به حرارت ژول معروف است و نیز جمله سوم مجموع منبع‌های حرارت برگشت‌پذیر و برگشت‌ناپذیر است. در حل عددی این معادله‌ها به‌روش دینامیک سیالات عددی و روش حجم محدود گسسته‌سازی و به‌صورت کوپل با هم‌دیگر حل می‌شوند. در جدول 1 پارامترهای بی‌بعد معرفی شده است.

### 2-3- هندسه حل

در مساله حاضر از یک سل سرب-اسید که داده‌های آن از مرجع [8] به‌دست آمده است استفاده شده است. در مطالعه حاضر فرض شده است که الکترولیت ژل شده باشد. در "شکل 1" شماتیک مش‌بندی دامنه حل یک سل سرب-اسید نشان داده شده است. در این شکل ناحیه 1 الکترون منفی، ناحیه 2 جداکننده و ناحیه 3 الکترون مثبت است. اندازه ناحیه‌ها به‌صورت بی‌بعد است.

شایان ذکر است که نقطه 0 در مرکز الکترون منفی و نقطه 1 در مرکز الکترون مثبت قرار دارد. زیرا در دوطرف ناحیه حل شرط تقارن برقرار است. در نتیجه در نوشتار حاضر منظور از ضخامت الکترون‌ها همان ضخامت نصف یک الکترون در دنیای واقعی است. مش‌بندی برای هر ناحیه به‌صورت جداگانه و غیریکنواخت انجام شده است. نقطه‌های رنگی در "شکل 1" نماینده مش‌بندی غیریکنواخت در هر ناحیه است.

### 3-3- شرایط مرزی و شرایط اولیه

برای حل دستگاه معادله‌های حاکم، باید شرایط اولیه و مرزی مناسبی با توجه به فیزیک مساله تعیین کرد. غلظت اسید سولفوریک در زمان صفر که هنوز

جدول 1 تعریف پارامترهای بی‌بعد مورد استفاده در مطالعه حاضر

عنوان پارامترهای بی‌بعد	تعریف پارامترهای بی‌بعد
پتانسیل الکتریکی الکترون	$\phi_s^* = \frac{\phi_s}{V_{oc,0}}$
پتانسیل الکتریکی الکترولیت	$\phi_e^* = \frac{\phi_e}{V_{oc,0}}$
غلظت الکترولیت	$c^* = \frac{c}{c_0}$
ضخامت سل	$x^* = \frac{x}{L}$
چگالی جریان انتقالی	$j^* = \frac{j}{i_0}$
سطح فعال	$A^* = \frac{A}{A_{max}}$
زمان	$t^* = \frac{t}{\tau}$
زمان انتقال بار	$\tau = \frac{F C_0}{i_0 A_{max}}$
دما	$T^* = \frac{T}{T_{ref}}$
ظرفیت	$C^* = \frac{I_{app} t}{F C_0 L}$

نتیجه‌های سایر محققان وجود دارد. در طراحی آزمایش‌های انجام شده توسط نرم‌افزار دیزاین اکسپرت تعداد پنجاه اجرا پیشنهاد شد که در جدول 4 نمایش داده شده است. سه ستون سمت چپ جدول 4 متغیرهای پاسخ هستند که از نتایج شبیه‌سازی به دست آمده‌اند.

جدول 2 پارامترهای ورودی برای شبیه‌سازی عددی

پارامترها	مقدارها (مرجع [11])
پارامترهای هندسی (cm)	0.06
ضخامت الکتروود مثبت	0.069
ضخامت جداکننده	0.06
ضخامت الکتروود منفی	0.53
تخلخل $\epsilon$ (بی بعد)	0.73
الکتروود مثبت	0.53
جداکننده	9.38
الکتروود منفی	1.84
چگالی $\rho$ ( $\text{g cm}^{-3}$ )	11.34
دی‌اکسید سرب	10
اسید سولفوریک	10
سرب	100
چگالی جریان تبدالی $i_0$ ( $\text{mA cm}^{-2}$ )	100
الکتروود مثبت	100
الکتروود منفی	5660
سطح فعال بیشینه $A_{\max}$ ( $\text{cm}^2 \text{ cm}^{-3}$ )	5660
الکتروود مثبت	0.5 و 0.5
الکتروود منفی	0.5 و 0.5
ظرفیت بیشینه الکتروود $Q_{\max}$ ( $\text{C cm}^{-3}$ )	1.5
الکتروود مثبت	1.5
الکتروود منفی	$4.9 \times 10^{-3}$
ضریب انتقال آندی و کاتدی $\alpha_c$ و $\alpha_a$	298.15
الکتروود مثبت	0.72
الکتروود منفی	340
توان $\gamma$ در رابطه باتلر-والمر	
الکتروود مثبت	
الکتروود منفی	
غلظت اولیه اسید $c_0$ ( $\text{mol cm}^{-3}$ )	
دمای محیط $T$ (K)	
عدد انتقال یون $t_+$ ( $\text{H}^+$ )	
جریان دشارژ $I_{\text{app}}$ ( $\text{mA cm}^{-2}$ )	

جدول 3 محدوده پارامترها

پارامتر	حد پایین	حد بالا
$RL_1$ : ضخامت الکتروود-Pb [cm]	0.4	0.8
$RL_2$ : ضخامت جداکننده [cm]	0.4	0.8
$RL_3$ : ضخامت الکتروود-PbO <sub>2</sub> [cm]	0.4	0.8
$A_{\max 1}$ : سطح فعال بیشینه الکتروود مثبت [ $\text{cm}^2 \text{ cm}^{-3}$ ]	90	110
$A_{\max 3}$ : سطح فعال بیشینه الکتروود منفی [ $\text{cm}^2 \text{ cm}^{-3}$ ]	90	110

قدم اول در روش صفحه پاسخ یافتن یک رابطه یا تابع مناسب و درست برای تخمین پاسخ با استفاده از مجموعه متغیرهای مستقل است. متغیرهای پاسخ به منظور نزدیک‌تر کردن توزیع‌شان به توزیع نرمال و بهبود تطابق مدل با داده‌ها، به وسیله باکس-کاکس پلات<sup>1</sup> به تابع لگاریتم طبیعی تبدیل شدند. در مطالعه حاضر به دلیل وجود یک انحنا<sup>2</sup> در سیستم، از یک چند جمله‌ای مرتبه دو استفاده شد. بنابراین، مدل عمومی مرتبه دوم برازش شده به صورت معادله (12) است [18]:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} \beta_{ij} x_i x_j + \epsilon \quad (15)$$

که در آن  $y$  پاسخ تولید شده است هم‌چنین  $\beta$  ها که ثابت‌های رابطه و ضرایب رگرسیونی مدل هستند.  $x$  ها متغیرهای مستقل و در نهایت  $k$  تعداد سطح‌ها و  $\epsilon$  خطا یا اغتشاش مشاهده در پاسخ  $y$  است. بیشتر داده‌های تبدیل شده، به وسیله یک تابع توانی می‌توانند تعریف شوند [18] که در معادله (13) مشاهده می‌شود:

$$\sigma = f(\mu^\alpha) \quad (16)$$

که در آن  $\sigma$  انحراف استاندارد،  $\mu$  میانگین و  $\alpha$  توان آن است. در تمام موردها  $\lambda$  برابر  $1 - \alpha$  است. اگر انحراف استاندارد در رابطه با یک مشاهده، متناسب با میانگین افزایش یافته تا توان  $\alpha'$  باشد، آنگاه تبدیل آن مشاهده به وسیله توان  $\lambda$ ، یک مقیاس ارائه می‌دهد که نیاز واریانس معادل را برای مدل آماری ارضا می‌کند. تبدیل‌های مورد استفاده معمول  $\lambda = -1$ ،  $\lambda = 0$ ،  $\lambda = 0.5$  و  $\lambda = 1$  هستند که به ترتیب تابع‌های معکوس، لگاریتم طبیعی، ریشه مربع و بدون تبدیل را نشان می‌دهند.

کفایت<sup>3</sup> مدل به وسیله  $R^2$ ،  $R^2$ -تعدیل شده،  $R^2$ -پیش‌بینی شده، دقت کافی<sup>4</sup>، پریس<sup>5</sup> و ضریب واریانس کنترل می‌شود.  $R^2$ -تعدیل شده اندازه مقدار تغییر از میانگین است که به وسیله مدل تعدیل یافته برای بعضی جمله‌ها بیان می‌شود.  $R^2$ -پیش‌بینی شده اندازه خوبی پیش‌بینی<sup>6</sup> یک پاسخ است. بیشینه مقدار اختلاف مجاز بین  $R^2$  و  $R^2$ -پیش‌بینی شده 0.2 برای مدل قابل قبول است. پریس مدل هم اندازه‌ای است که چگونه این مدل به خصوص با هر نقطه در طراحی سازگار است. دقت کافی اندازه محدوده در پاسخ پیش‌بینی شده در ارتباط با خطای همراهِش است یا به عبارت دیگر، یک نسبت سیگنال به نویز که مقدار مطلوب آن عدد 4 یا بیشتر است. ضریب واریانس ( $C \cdot V\%$ ) خطای بیان شده به صورت درصدی از میانگین است و به شکل زیر محاسبه می‌شود [18]:

$$C \cdot V\% = 100 \left( \frac{SD}{M} \right) \quad (17)$$

که در آن  $SD$  انحراف معیار و  $M$  میانگین است.

#### 4- نتیجه‌ها و بحث

به منظور بررسی درستی نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی در برنامه کامپیوتری که با روش حجم محدود به دست آمد، ولتاژ به دست آمده در فرآیند دشارژ با ولتاژ به دست آمده توسط گو و همکاران [8] و گو و همکاران [9] مقایسه شد که سل مشابهی توسط ایشان شبیه‌سازی شده است. "شکل 2" تغییرات ولتاژ سل را طی فرآیند دشارژ نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود تطابق خوبی بین نتیجه‌های عددی به دست آمده و

<sup>1</sup> Box-Cox plot

<sup>2</sup> Curvature

<sup>3</sup> Adequacy

<sup>4</sup> Adequate precision

<sup>5</sup> PRESS (Predicted Residual Sum of Squares)

<sup>6</sup> Goodness to predict

جدول 4 پاسخ‌های هر اجرا و اندازه‌های هر متغیر مستقل برای هر اجرا

Table 4 Responses of each run according to amounts of independent variables

$T(K)$	$CT(s)$	$C(C\text{ cm}^{-3})$	$A_{\max 3}(cm^{-1})$	$A_{\max 1}(cm^{-1})$	$RL_3(cm)$	$RL_2(cm)$	$RL_1(cm)$	شماره اجرا
1.0726	0.2853	0.26229	95	95	0.06	0.107568	0.06	1
1.079	0.2471	0.311628	95	83.1079	0.06	0.06	0.06	2
1.0881	0.1949	0.347538	95	95	0.0124317	0.06	0.06	3
1.0679	0.2113	0.215742	90	90	0.08	0.08	0.04	4
1.0816	0.2741	0.341592	90	90	0.04	0.08	0.08	5
1.0792	0.2532	0.315623	95	95	0.06	0.06	0.06	6
1.0868	0.2602	0.386538	100	100	0.04	0.04	0.08	7
1.0675	0.2652	0.246489	95	95	0.107568	0.06	0.06	8
1.07	0.1808	0.251699	90	100	0.08	0.04	0.04	9
1.0792	0.2532	0.315623	95	95	0.06	0.06	0.06	10
1.0792	0.2532	0.315623	95	95	0.06	0.06	0.06	11
1.0792	0.2532	0.315623	95	95	0.06	0.06	0.06	12
1.0685	0.217	0.219338	90	100	0.08	0.08	0.04	13
1.085	0.184	0.329606	100	100	0.04	0.04	0.04	14
1.0789	0.2162	0.311628	83.1079	95	0.06	0.06	0.06	15
1.0766	0.2898	0.337996	100	100	0.08	0.04	0.08	16
1.087	0.2303	0.382044	90	100	0.04	0.04	0.08	17
1.0813	0.3088	0.341592	100	90	0.04	0.08	0.08	18
1.0769	0.22	0.274172	100	100	0.04	0.08	0.04	19
1.0761	0.2513	0.327209	90	90	0.08	0.04	0.08	20
1.0767	0.1942	0.269678	90	100	0.04	0.08	0.04	21
1.0766	0.257	0.330805	90	100	0.08	0.04	0.08	22
1.0705	0.2052	0.256194	100	100	0.08	0.04	0.04	23
1.0767	0.2855	0.334401	100	90	0.08	0.04	0.08	24
1.0792	0.2532	0.315623	95	95	0.06	0.06	0.06	25
1.0816	0.3416	0.372893	95	95	0.06	0.06	0.107568	26
1.0813	0.2779	0.341592	90	100	0.04	0.08	0.08	27
1.0792	0.2532	0.315623	95	95	0.06	0.06	0.06	28
1.069	0.1751	0.247205	90	90	0.08	0.04	0.04	29
1.0843	0.1618	0.323613	90	100	0.04	0.04	0.04	30
1.0752	0.3427	0.302638	100	90	0.08	0.08	0.08	31
1.0796	0.2592	0.319618	95	106.892	0.06	0.06	0.06	32
1.0701	0.2009	0.251699	100	90	0.08	0.04	0.04	33
1.0868	0.2559	0.382044	100	90	0.04	0.04	0.08	34
1.0792	0.2532	0.315623	95	95	0.06	0.06	0.06	35
1.0792	0.2532	0.315623	95	95	0.06	0.06	0.06	36
1.0796	0.2917	0.319618	106.892	95	0.06	0.06	0.06	37
1.0687	0.2454	0.222934	100	100	0.08	0.08	0.04	38
1.0753	0.349	0.305635	100	100	0.08	0.08	0.08	39
1.081	0.313	0.345188	100	100	0.04	0.08	0.08	40
1.0751	0.3084	0.302638	90	100	0.08	0.08	0.08	41
1.0837	0.158	0.323613	90	90	0.04	0.04	0.04	42
1.0686	0.2411	0.219338	100	90	0.08	0.08	0.04	43
1.0594	0.1145	0.162908	95	95	0.06	0.06	0.012432	44
1.0765	0.1904	0.265183	90	90	0.04	0.08	0.04	45
1.0844	0.1798	0.323613	100	90	0.04	0.04	0.04	46
1.0662	0.1346	0.320386	95	95	0.06	0.0124317	0.06	47
1.0868	0.2265	0.377549	90	90	0.04	0.04	0.08	48
1.075	0.3027	0.299642	90	90	0.08	0.08	0.08	49
1.0768	0.2157	0.269678	100	90	0.04	0.08	0.04	50

مدل را اندازه‌گیری می‌کند. اگر این نسبت بیشتر از 4 باشد به معنای مطلوب بودن مدل است. برای مدل (14) مقدار «دقت کافی» 80.25 است که نشان می‌دهد این مدل به‌خوبی فضای طراحی را پوشش می‌دهد. در ادامه، زمان شارژ به‌صورت تابعی از متغیرهای مستقل یعنی ضخامت‌ها و سطح‌های فعال بی‌شده مدل شده است. معادله (15) مدل تجربی مربوط به زمان شارژ را نشان می‌دهد:

$$(t^*)^{2.36} = 0.205 - 2.142 \times RL_1 - 0.54 \times RL_3 - 0.818 \times RL_2 + 1.6 \times 10^{-4} \times A_{max1} - 3.607 \times 10^{-3} \times A_{max3} + 4.488 \times RL_1 \times RL_3 + 8.083 \times RL_1 \times RL_2 + 0.02 \times RL_1 \times A_{max3} + 2.402 \times RL_3 \times RL_2 + 7.5 \times 10^{-3} \times RL_3 \times A_{max3} + 0.011 \times RL_2 \times A_{max3} + 1.603 \times RL_1^2 - 2.944 \times RL_3^2 - 3.844 \times RL_2^2 + 1.2 \times 10^{-5} \times A_{max3}^2 \quad (19)$$

اف-والیو مدل مقدار 1159.39 است و نشان می‌دهد مدل (15) معنی‌دار است. در ضمن احتمال این‌که اف-والیو به این بزرگی به‌واسطه نویز ایجاد شود کمتر از 0.01 در صد است. پی-والیو مدل و تمامی جمله‌های آن کمتر از 0.0001 است که حاکی از معنی‌دار بودن آن‌ها است.  $R^2$ -پیش‌بینی شده با مقدار با مقدار 0.9940 برای مدل (15) در مطابقت خوبی با  $R^2$ -تعدیل شده با مقدار 0.9972 است زیرا تفاوت آن‌ها کمتر از 0.2 است. دقت کافی مدل (15) مقدار 137 است که بسیار بیشتر از مقدار حدی قابل قبول آن یعنی 4 است. پریس برای این مدل مقدار  $9.5 \times 10^{-5}$  است. پریس در واقع اندازه این‌که چگونه مدل هر نقطه در طراحی را برازش می‌کند است. پریس تا این اندازه کوچک به‌همراه ضریب تغییر 2.54 نشان از دقت بالای مدل دارد.

رابطه (16) مدل تجربی مربوط به پیش‌بینی دمای سل است. که به صورت توانی با  $\lambda = 3$  مدل شده است:

$$(T^*)^3 = 1.28 + 0.536 \times RL_1 - 0.828 \times RL_3 - 0.198 \times RL_2 \quad (20)$$

اف-والیو این مدل 47.29 است. این مقدار قابل قبولی برای مدل است و نشان می‌دهد احتمال این‌که چنین اف-والیویی ناشی از نویز باشد زیر 0.01% است. با این حال، مقدارهای اف-والیو و پی-والیو برای جمله‌های شامل بیشینه سطح فعال قابل قبول نبودند و از مدل حذف شدند. بنابراین، مدل تجربی دما شکل ساده و خطی (16) را به خود گرفت. سایر متغیرهای مستقل یعنی ضخامت الکترودها و جداکننده به‌ترتیب مقدارهای قابل قبول 0.0001 و 0.02 را داشتند.  $R^2$ -پیش‌بینی شده با مقدار با مقدار 0.6797 برای مدل (16) در مطابقت خوبی با  $R^2$ -تعدیل شده با مقدار 0.7392 است زیرا تفاوت آن‌ها کمتر از 0.2 است. سایر داده‌های به‌دست آمده برای مدل تجربی دما مقدار  $7.4 \times 10^{-3}$  برای پریس مدل و 0.89 برای ضریب تغییر است.

داده‌های حاصل از تحلیل مدل‌ها نشان داد که ظرفیت و زمان شارژ تابع‌هایی قوی از متغیرهای مستقل پیش‌بینی شده هستند. در حالی‌که دما فقط تابعی از ضخامت بود. علت دیگر این امر را می‌توان در طراحی و بار باتری موردنظر جستجو کرد. به این معنی که با طراحی حاضر، افزایش دما مساله اساسی برای باتری مورد مطالعه به حساب نمی‌آید. اما ممکن است در شرایط دیگر با روش مطرح شده در این مطالعه به مدل‌های قدرتمندتری دست یافت.

در نهایت با مدل‌های به‌دست آمده فرآیند بهینه‌سازی انجام شد. این فرآیند، با تعریف متغیرهای مستقل در محدوده‌های تعیین شده در جدول 3 با هدف بیشینه‌سازی ظرفیت بی‌بعد، کمینه‌سازی زمان شارژ و دما انجام شده است. در جدول 5 نتایج بهینه‌سازی نشان داده شده است. ردیف 1 از جدول، بهینه‌سازی تک هدفه بیشینه‌سازی ظرفیت بی‌بعد است. همان‌طور که در

هر کدام از این اجراها در واقع ترکیبی از مقدارهای متفاوت متغیرهای مستقل است که پاسخ هر کدام از این اجراها با دو بار اجرای کد کامپیوتری حل عددی دینامیک باتری به‌دست می‌آید. برای هر مورد از اجراهای جدول 4 سه پاسخ ظرفیت، زمان شارژ و دما وجود دارد که ظرفیت در حالت دشارژ باتری شبیه‌سازی شده و زمان شارژ و دما در حالت شارژ آن به‌دست آمده‌اند. از داده‌های به‌دست آمده از اجراها استفاده کرده و ابتدا مدل تجربی به‌دست آمده برای ظرفیت بی‌بعد را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مدل تجربی مبتنی بر آزمایش‌ها که براساس تحلیل باکس-کاکس بهترین مدلی که به داده‌های آزمایشگاهی منطبق است مدل توان‌دار است، در معادله (14) نشان داده شده است.

$$(C^*)^{2.21} = 0.033 + 1.585 \times RL_1 - 0.343 \times RL_2 - 0.777 \times RL_3 + 1.841 \times A_{max1} + 2.035 \times A_{max3} + 7.769 \times RL_2 \times RL_3 - 5.229 \times RL_1^2 - 2.83 \times RL_3^2 - 4.875 \times RL_2^2 \quad (18)$$

برای ظرفیت بی‌بعد یک مدل چند جمله‌ای درجه دوم تعدیل شده و البته با تبدیل توانی و با  $\lambda = 2.21$  پیشنهاد شده است. اف-والیو<sup>1</sup> مدل مقدار 408.32 است و نشان می‌دهد مدل پیشنهادی معنی‌دار است. احتمال این‌که اف-والیو به این بزرگی به‌واسطه نویز رخ دهد فقط 0.01% است. شایان ذکر است که اف-والیو یک تست برای مقایسه مربع میانگین منبع و مربع میانگین باقی‌مانده است. پی-والیو<sup>2</sup> این مدل کمتر از 0.0001 است و در اصل مقدارهای کوچکتر از 0.05 نشان دهنده معنی‌دار بودن جمله‌های مدل است. پی-والیو احتمال وقوع اف-والیو در صورت درست بودن فرض تهی<sup>3</sup> است. در آمار و احتمالات، برای بررسی یک فرضیه در آغاز فرض تهی پذیرفته می‌شود تا با رد آن فرض مقابل اثبات شود. به بیان دیگر، ابتدا فرض می‌شود که داده‌های شبیه‌سازی شده (مدل تجربی به‌دست آمده) با داده‌های آزمایشگاهی (ناشی از حل عددی) یکسان باشد (فرض تهی). حال اگر با یک آزمون آماری فرض تهی رد شود، می‌توان گفت دو نمونه دارای ناهم‌گونی معنادار هستند در غیر این‌صورت دو نمونه یکسان هستند. به‌زبان ساده اگر پی-والیو کمتر از 0.05 باشد مدل موردنظر معنادار است.  $R^2$ -پیش‌بینی شده با مقدار با مقدار 0.9613 برای مدل (14) در مطابقت خوبی با  $R^2$ -تعدیل شده با مقدار 0.9868 است زیرا تفاوت آن‌ها کمتر از 0.2 است. «دقت کافی» نسبت سیگنال به نویز

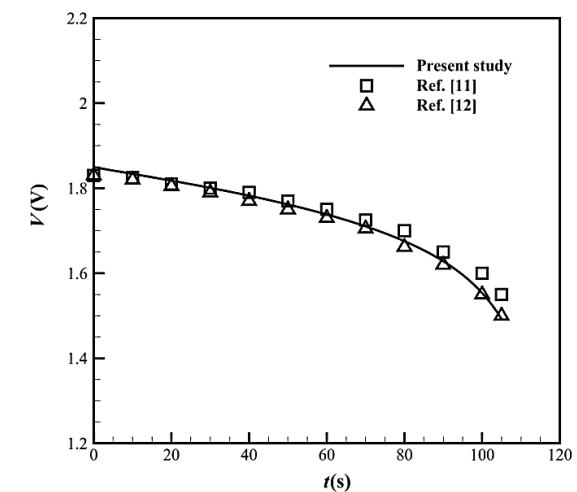


Fig. 2 Validation of discharge voltage

شکل 2 اعتبار سنجی ولتاژ دشارژ در مطالعه‌های مختلف

<sup>1</sup> F-value  
<sup>2</sup> P-value  
<sup>3</sup> Null hypothesis

ضخامت الکترود مثبت برخلاف ضخامت دو ناحیه دیگر در حد بالایی خود قرار دارد. ردیف سوم جدول 5 نتایج بهترین پاسخ برای کمینه سازی دما را نشان می‌دهد.

در ادامه جدول 5 به ترتیب نتایج پهنه‌سازی دو هدفه ظرفیت-زمان شارژ و سه هدفه ظرفیت-زمان شارژ-دما مشاهده می‌شود. با افزودن کمینه‌سازی دما به هدف‌ها مقدار مطلوبیت از 0.77 به 0.57 کاهش می‌یابد. به این معنی که مقدارهای بهینه از مقدارهای به‌دست آمده در ردیف‌های بالاتر فاصله گرفته و نامطلوب‌تر شده است در عین حال متغیرها طور تنظیم شده‌اند که هم‌زمان هر سه هدف با وزن یکسان مطلوب باشند. از آنجایی که افزایش دما در باتری مورد مطالعه قرار گرفته مساله در دسترس‌سازی نیست با حذف این اثر این پاسخ می‌توان در ردیف 4 به مقدارهای بهتری از ظرفیت و زمان رسید. روش صفحه پاسخ علاوه بر مقدار بهینه مطلق، مقدارهای بهینه نسبی را نیز ارائه می‌دهد که در نوشتار حاضر به بیان پاسخ با بیشترین مطلوبیت اکتفا شده‌است.

"شکل 3" خط‌های هم‌تراز ظرفیت را برحسب تغییرات دو متغیر ضخامت الکترود مثبت و منفی نشان می‌دهد. همان‌طور که در "شکل 3" نشان داده شده است با افزایش ضخامت ناحیه 1 به ظرفیت بی‌بعد اضافه شده‌است. این در حالی است که، با افزایش ضخامت ناحیه 3 مقدار ظرفیت بی‌بعد کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر، اگر ضخامت ناحیه 1 و 2 به‌طور هم‌زمان و با یک نسبت درست افزایش یابند آن‌گاه ظرفیت بی‌بعد ثابت باقی می‌ماند. علت این امر افزایش ضخامت سل است که در مخرج کسر ظرفیت بی‌بعد اثر می‌کند (جدول 1). در "شکل 4" خطوط هم‌تراز سطح فعال بیشینه برای پاسخ ظرفیت بی‌بعد نشان داده شده است. با افزایش سطح‌های فعال بیشینه، ظرفیت بی‌بعد افزایش می‌یابد و با کاهش آن‌ها از مقدار ظرفیت کم می‌شود. در واقع سطح فعال بیشینه برای الکترودهای مثبت و منفی به‌طور هم‌زمان با ظرفیت بی‌بعد نسبت مستقیم دارند. همان‌طور که از "شکل 4" مشخص است ظرفیت بی‌بعد تابعی قوی از سطح فعال نیست و با افزایش یا کاهش سطح فعال در دامنه تعریف شده، مقدار ظرفیت تغییر چندانی نمی‌کند. به عبارت دیگر می‌توان گفت این بیان در محدوده طراحی باتری مورد مطالعه صدق می‌کند و ممکن است با افزایش محدوده و در سایر طراحی‌ها این بیان صادق نباشد.

"شکل 5" خط‌های هم‌تراز دمای سل را به‌صورت بی‌بعد برحسب ضخامت الکترودها نشان می‌دهد. با افزایش ضخامت الکترود در ناحیه 1 یا همان الکترود منفی، دمای سل افزایش می‌یابد. در حالی که دمای سل با ضخامت الکترود مثبت در ناحیه 3 نسبت عکس دارد. به‌علاوه با افزایش یا کاهش هم‌زمان ضخامت الکترودها، مقدار دمای بی‌بعد ثابت باقی می‌ماند. این در حالی است که به نظر می‌رسد دمای سل یک پارامتر بحرانی از طراحی برای باتری مورد مطالعه نباشد.

"شکل 6" خط‌های هم‌تراز زمان شارژ بی‌بعد را نشان می‌دهد. از طرفی با افزایش ضخامت ناحیه 1 مدت زمان شارژ باتری افزایش می‌یابد. از طرف دیگر، افزایش ضخامت ناحیه 3 اثر چندانی در افزایش یا کاهش مدت زمان شارژ ندارد و به نظر می‌رسد برای هر مقدار از ضخامت ناحیه 1، یک نقطه بهینه برای ضخامت ناحیه 3 وجود داشته باشد. نتیجه‌های نشان داده شده در "شکل‌های 4 تا 6" مطابقت خوبی با شرایط و فیزیک مساله دارد. آزمون تایید<sup>3</sup> گام نهایی و حیاتی برای صحت‌سنجی نتایج به‌دست آمده از

جدول 5 نشان داده شده است بیشینه مقدار ظرفیت در مقدار حدی بیشینه سطح فعال و ضخامت الکترود منفی و در عین حال کمینه مقدار ضخامت جداکننده و الکترود مثبت است. در این حالت، مطلوبیت<sup>1</sup> پهنه‌سازی 0.93 است. مایرز و مونتگومری [19] در سال 1995 یک روش چند پاسخی را تشریح کردند که مطلوبیت نام داشت. این روش از یک تابع هدف  $D(X)$  که تابع مطلوبیت نام داشت، استفاده می‌کند. خروجی این تابع، محدوده‌های مطلوب برای هر پاسخ ( $d_i$ ) بود که این محدوده‌های مطلوب از مقدار صفر برای کمترین مطلوبیت تا مقدار یک برای بیشترین مطلوبیت متغیر بود. تابع هدف هم‌زمان<sup>2</sup> یک میانگین هندسی از تمام پاسخ‌های تبدیل شده است:

$$D = (d_1 \times d_2 \times \dots \times d_n)^{\frac{1}{n}} = \left( \prod_{i=1}^n d_i \right)^{\frac{1}{n}} \quad (21)$$

که در آن  $n$  تعداد پاسخ‌ها است. اگر هرکدام از پاسخ‌ها خارج از محدوده مطلوبیت قرار گیرد کل تابع صفر می‌شود.

برای پهنه‌سازی هم‌زمان، به هر پاسخ باید یک مقدار بالا و یک مقدار پایین تخصیص داده شود. سپس هدف از پهنه‌سازی به‌صورت کمینه‌سازی، بیشینه‌سازی یا رسیدن به یک حد خاص انتخاب شود. تابع مطلوبیت برای هر پاسخ با توجه به هدف انتخاب شده به‌صورت زیر است:

- بیشینه‌سازی:
  - اگر پاسخ کوچکتر از حد پایین باشد:  $d_i = 0$
  - اگر پاسخ از حد پایین تا حد بالا باشد:  $0 < d_i < 1$
  - اگر پاسخ بزرگتر از حد بالا باشد:  $d_i = 1$
- کمینه‌سازی:
  - اگر پاسخ کوچکتر از حد پایین باشد:  $d_i = 1$
  - اگر پاسخ از حد پایین تا حد بالا باشد:  $1 < d_i < 0$
  - اگر پاسخ بزرگتر از حد بالا باشد:  $d_i = 0$
- حد خاص:
  - اگر پاسخ کوچکتر از حد پایین باشد:  $d_i = 0$
  - اگر پاسخ از حد پایین تا حد خاص باشد:  $0 < d_i < 1$
  - اگر پاسخ از حد خاص تا حد بالا باشد:  $1 < d_i < 0$
  - اگر پاسخ بزرگتر از حد بالا باشد:  $d_i = 0$

با توجه به توضیحات ارائه شده، در جدول 5 ردیف دوم پهنه‌سازی یک پاسخی با هدف کمینه‌سازی زمان شارژ انجام گرفته است. مطلوبیت در این آزمون 0.83 است. یعنی وقتی متغیرهای مستقل مقدارهای عددی نمایش داده شده در ردیف دوم جدول را اختیار می‌کنند، پاسخ زمان شارژ 0.83 مقدار حدی پایین را پوشش می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد که با کم شدن سطح فعال بیشینه در هر دو الکترود، زمان شارژ کاهش می‌یابد. هم‌چنین،

جدول 5 مقدارهای بهینه برای هدف‌های متفاوت

Des.	$T^*$	$t^*$ $10^{-2}$	$C^*$ $10^{-2}$	$A_{\max 3}$	$A_{\max 1}$	$RL_3$ $10^{-2}$	$RL_2$ $10^{-2}$	$RL_1$ $10^{-2}$	$\xi$
0.93			38.3	100	100	4	4	8	1
0.83		14.2		80	80.3	7.9	4	4	2
0.69	1.069			90	100	8	8	4	3
0.77		17.5	36.4	80	80	4	4	7.3	4
0.57	1.072	16.5	27.5	80	80	7.8	4	5.3	5

<sup>1</sup> Desirability

<sup>2</sup> Simultaneous objective function

<sup>3</sup> Confirmation Test



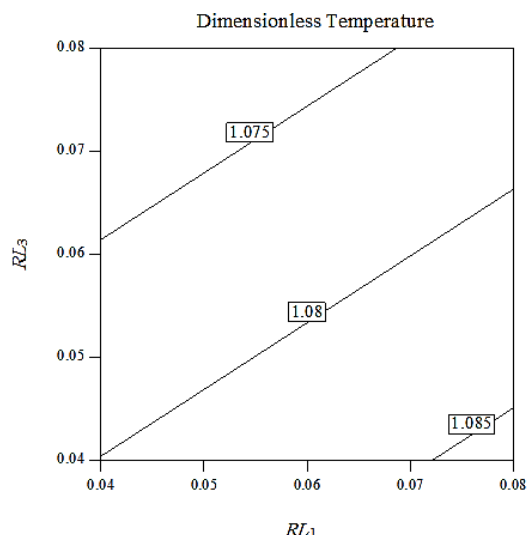


Fig. 5 Contour of dimensionless temperature in thickness of electrodes  
شکل 5 خط‌های هم‌تراز دمای بی‌بعد برحسب ضخامت الکترودها

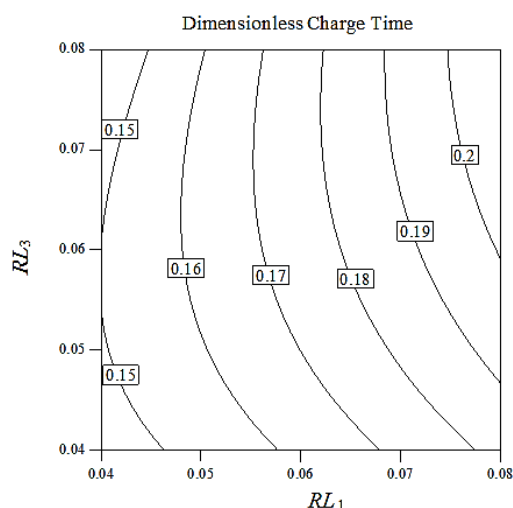


Fig. 6 Contour of charging time in thickness of electrodes  
شکل 6 خط‌های هم‌تراز زمان شارژ برحسب ضخامت الکترودها

### 5- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر بهینه‌سازی یک سل از باتری سرب-اسید به صورت یک بعدی با استفاده از دینامیک سیالات عددی و روش صفحه پاسخ انجام گرفت. تعداد 50 اجرای پیشنهادی توسط روش صفحه پاسخ با کد عددی نوشته شده شبیه‌سازی شد. با توجه به پاسخ‌ها سه مدل تجربی برای ظرفیت بی‌بعد، دمای بی‌بعد و زمان شارژ بی‌بعد به دست آمد که به عنوان تابع هدف برای بهینه‌سازی مورد استفاده قرار گرفت. نتایج تحقیق نشان داد که کاهش ضخامت الکترود منفی و جدا کننده و به طور هم‌زمان افزایش ضخامت الکترود مثبت، سبب ظرفیت‌های بیشتر، مدت زمان کمتر شارژ در دماهای پایین‌تری می‌شود. برای رسیدن به هدف‌های ذکر شده سطح فعال برای هردوی الکترودها باید کمترین مقدار ممکن خود را داشته باشد. این مطالعه نشان داد که استفاده هم‌زمان از روش دینامیک سیالات عددی و روش صفحه پاسخ کارایی بالایی در مسائل بهینه‌سازی خصوصاً در باتری‌ها دارد. نتیجه مهم دیگری که از مطالعه حاضر به دست آمد تاثیر خصوصیت‌های هندسی در افزایش ظرفیت و کاهش زمان شارژ و دما است. این مساله می‌رساند که عامل‌های مهم و تعیین‌کننده‌ای در رقابت شدید صنعت‌های باتری سازی

بهینه‌سازی است. در این آزمون با توجه به شرایط بهینه پیش‌بینی شده توسط روش صفحه پاسخ، یک آزمون تایید به صورت شبیه‌سازی انجام می‌گیرد تا نتایج آن با نتایج پیش‌بینی شده توسط دیزاین اکسپرت مقایسه شود.

با توجه به جدول 5 و ردیف 5 که شرایط بهینه برای حالت سه پاسخی و بهترین پاسخ‌ها را دارد، این پاسخ‌ها با معادل شبیه‌سازی شده آن، مقایسه شده است. در حالت دشارژ مقدار ظرفیت بی‌بعد برای شبیه‌سازی انجام گرفته با شرایط جدول 5 مقدار 0.284 است. در این صورت مقدار خطای محاسبه صفحه پاسخ در مقایسه با شبیه‌سازی انجام گرفته برای آزمون تایید حدود 3% خواهد بود که مقداری قابل قبول است. علاوه بر این، در حالت شارژ نیز یک آزمون اضافی انجام گرفت تا مقدارهای پیش‌بینی شده برای زمان شارژ و دما نیز صحت‌سنجی شود. مقدار 1.078 برای دما و مقدار 0.1761 برای زمان شارژ از شبیه‌سازی نهایی به دست آمد که به ترتیب خطای 0.5% و 6% را نشان دادند. این مقدارها درستی پیش‌بینی انجام شده توسط روش صفحه پاسخ را اثبات می‌کند.

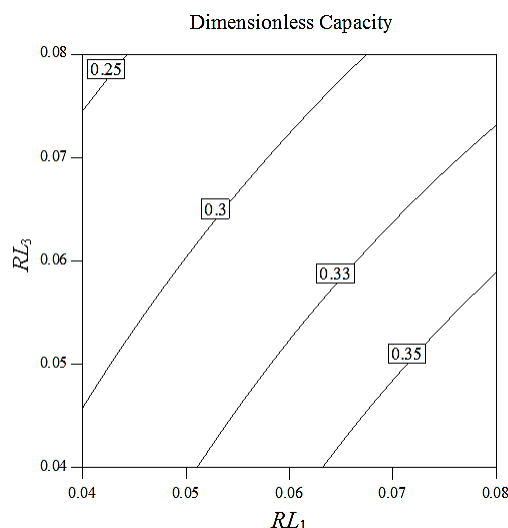


Fig. 3 Contour of capacity in thickness of electrodes  
شکل 3 خط‌های هم‌تراز ظرفیت برحسب ضخامت الکترودها

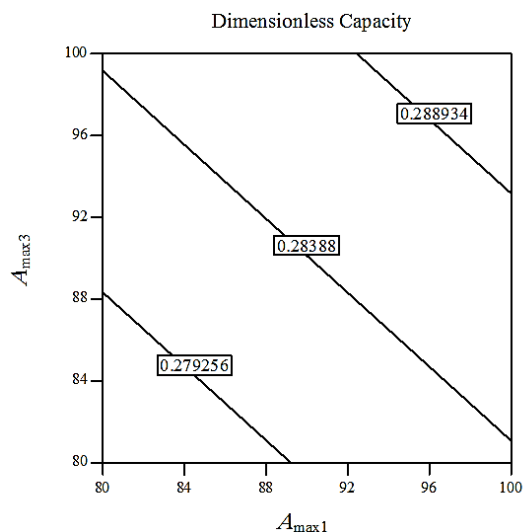


Fig. 4 Contour of capacity in maximum activated area  
شکل 4 خط‌های هم‌تراز ظرفیت برحسب سطح فعال بیشینه

Max  
بیشینه  
app  
اعمال شده

مانند ظرفیت، دما و زمان شارژ نه تنها با تغییر خصوصیت‌های الکتروشیمیایی بلکه با بهینه‌سازی خصوصیت‌های هندسی نیز امکان‌پذیر است.

با توجه به این‌که اطلاعات کمی در زمینه بهینه‌سازی باتری‌های سرب-اسید موجود است و با توجه به نیاز صنعت‌های مختلف به این باتری‌ها و همچنین توسعه روزافزون روش‌های بهینه‌سازی پیشنهاد می‌شود روش بهینه‌سازی بررسی شده در مطالعه حاضر با سایر روش‌های موجود بهینه‌سازی مقایسه شود. برای این منظور و برای مطالعه‌های آتی مقایسه با روش‌های الگوریتم ازدحام ذرات و الگوریتم ژنتیک پیشنهاد می‌شود.

### 7- مراجع

- [1] M. S. Whittingham, R. F. Savinell, T. Zawodzinski, T. Zawodzinski, Batteries and fuel cells, *Chemical Reviews*, Vol. 104, No. 10, pp. 4243-4244, 2004.
- [2] W. H. Zhu, Y. Zhu, B. J. Tatarchuk, A simplified equivalent circuit model for simulation of Pb-acid batteries at load for energy storage application, *Energy Conversion and Management*, Vol. 52, No. 8, pp. 2794-2799, 2011.
- [3] D. A. J. Rand, P. T. Moseley, J. Garche, C. D. Parker, *Valve-Regulated Lead-Acid Batteries*, First Edition, pp. 158-179, Netherlands: Elsevier Science, 2004.
- [4] G. E. P. Box, N. R. Draper, *Empirical Model Building and Response Surfaces*, New York: Wiley, pp. 478-569, 1987.
- [5] G. Venter, R. T. Haftka, J. H. Starness, Construction of response surfaces for design optimization applications, AIAA paper 96-4040-CP, *Proceedings of 6<sup>th</sup> AIAA/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, Bellevue WA, Part 2, pp. 548-564, 1996.
- [6] J. Newmann, W. Tiedemann, Porous-electrode theory with battery applications, *ALChE Journal*, Vol. 12, No. 1, pp. 25-41, 1975.
- [7] W. G. Sunu, *Electrochemical Cell Design*, New York: Plenum Press, pp. 357, 1984.
- [8] H. Gu, T. V. Nguyen, R. E. White, A Mathematical model of a lead-acid cell: discharge, rest and charge, *Journal of the Electrochemical Society*, Vol. 134, No. 2, pp. 2953-2960, 1987.
- [9] W. B. Gu, C. Y. Wang, B. Y. Liaw, Numerical modeling of coupled electrochemical and transport processes in lead-acid batteries, *Journal of the Electrochemical Society*, Vol. 144, No. 6, pp. 2053-2061, 1997.
- [10] V. Esfahanian, F. Torabi, Numerical simulation of lead-acid batteries using Keller-Box method, *Journal of Power Sources*, Vol. 158, No. 2, pp. 949-952, 2006.
- [11] V. Esfahanian, F. Torabi, A. Mosahebi, Predicting state of charge of lead-acid batteries for hybrid electric vehicles by extended Kalman filter, *Journal of Power Sources*, Vol. 176, No. 1, pp. 373-380, 2008.
- [12] T. Mesbahi, F. Khenfri, N. Rizoug, K. Chaaban, P. Bartholomeus, P. Moigne, Dynamical modeling of Li-ion batteries for electric vehicle applications based on hybrid Particle Swarm-Nelder-Mead optimization algorithm, *Electric Power Systems Research*, Vol. 131, No. 1, pp. 195-204, 2016.
- [13] A. Pajares, X. Blasco, J. M. Herrero, R. Simarro, Non-linear robust identification of a lead-acid battery model using multiobjective evolutionary algorithms, *IFAC Conference Paper Archive*, Vol. 50, No. 1, pp. 4466-4471, 2017.
- [14] G. Kujundzic, S. Iles, J. Matusko, M. Vasak, Optimal charging of valve-regulated lead-acid batteries based on model predictive control, *Applied Energy*, Vol. 187, No.1, pp. 189-202, 2017.
- [15] A. Alagheband, M. Azimi, H. Hashemi, M. Kalani, D. Nakhaie, Optimization of grid configuration by investigating its effect on positive plate of lead-acid batteries via numerical modeling, *Journal of Energy Storage*, Vol. 12, No. 1, pp. 202-214, 2017.
- [16] H. Pourmirzaagha, V. Esfahanian, F. Sabetghadam, F. Torabi, Optimization of electrochemical lead-acid battery using computational fluid dynamics, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 9, pp. 280-288, 2015. (In Persian)
- [17] T. Nazghelichi, F. Torabi, V. Esfahanian, Non-dimensional analysis of electrochemical governing equations of lead-acid batteries, *arXiv:arXiv1708.00470*, 2017.
- [18] D. C. Montgomery, *Design and Analysis of Experiments*, Fifth Edition, pp. 120-450, New York: John Wiley & sons Inc, 2001.
- [19] R. H. Myers, D. C. Montgomery, *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Design of Experiments*, pp. 176-198, New York: John Wiley & sons, 1995.

### 6- فهرست علائم

A	سطح فعال الکتروشیمیایی ( $\text{cm}^2 \text{cm}^{-3}$ )
C	غلظت اسید ( $\text{mol cm}^{-3}$ )
D	ضریب دیفیوژن ( $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ )
F	ثابت فارادی ( $\text{C mol}^{-1}$ )
$I_{app}$	جریان ( $\text{mA cm}^{-2}$ )
$i_i$	جریان در فاز مایع ( $\text{A cm}^{-2}$ )
$i_s$	جریان در فاز جامد ( $\text{A cm}^{-2}$ )
$j$	چگالی جریان انتقالی ( $\text{A cm}^{-2}$ )
$i_0$	چگالی جریان تبدالی ( $\text{A cm}^{-2}$ )
Q	ظرفیت ( $\text{C cm}^{-3}$ )
SoC	حالت شارژ
t	زمان (s)
T	دما (K)
V	ولتاژ (V)

### علائم یونانی

$\alpha$	ضریب انتقال آندی و کاتدی
$\epsilon$	تخلخل
$\eta$	اضافه پتانسیل (V)
k	ضریب رسانایی الکترولیت ( $\text{S cm}^{-1}$ )
$\rho$	چگالی ( $\text{kg cm}^{-3}$ )
$\sigma$	ضریب رسانایی الکتروود ( $\text{S cm}^{-1}$ )
$\phi$	پتانسیل الکتریکی (V)

### بالانویس‌ها

eff	موثر
*	علامت بی‌بعد

### زیرنویس‌ها

D	مربوط به دیفیوژن
---	------------------