

استفاده از روشی نوین برای محاسبه حساسیت طراحی برای مدل المان محدود غیر خطی

مهدی حسنزاده¹، پدram صفرپور^{2*}

1- مری، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد گرگان، کردکوی
2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید بهشتی، تهران
* تهران صندوق پستی 1719-16765، sbu.ac.ir، p_safarpour@sbu.ac.ir

چکیده

روش نیمه تحلیلی روشی است که از نظر محاسباتی کارایی بالایی دارد و به سادگی می‌توان آن را پیاده کرد به این دلیل اغلب از این روش برای تحلیل حساسیت در مدل‌های المان محدود استفاده می‌شود. اما روش نیمه تحلیلی بدون عیب نیست خصوصاً در مسائلی که حرکت صلب گونه جسم به صورت نسبی بزرگ است خطای شدیدی را به دنبال دارد. چنین خطاهایی ناشی از بردار نیروی کاذب ایجاد شده به وسیله مشتق‌گیری با روش تفاضل محدود است. در این مقاله روش نیمه تحلیلی نوینی بر پایه متغیرهای مختلط برای محاسبه حساسیت در مدل المان محدود غیرخطی پیشنهاد می‌شود. این روش، روش متغیرهای مختلط را با روش تحلیل حساسیت گسسته ترکیب کرده تا حساسیت و مشتقات مورد نیاز در طراحی را با دقت و کارایی بالا محاسبه کند. روش مذکور کارایی محاسباتی روش نیمه تحلیلی را با دقت بالاتر حفظ می‌کند. به علاوه این روش نسبت به انتخاب اندازه گام حساس نیست، خصوصیتی که استفاده از آن را در مسائل کاربردی راحت می‌کند. از این روش می‌توان در مدل‌های المان محدود غیرخطی تنها با اصلاح جزئی در کدهای المان محدود موجود استفاده کرد. در این مقاله نویسندگان اثبات می‌کنند که تحلیل حساسیت گسسته و روش متغیرهای مختلط معادل هم بوده و یک معادله حساسیت را حل می‌کنند. سرانجام با چندین مثال عددی دقت روش مذکور با مقایسه با دیگر روش‌ها بررسی می‌شود و نشان داده می‌شود که این روش قابل اعتماد و مستقل از اندازه گام می‌باشد.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 09 بهمن 1396
پذیرش: 20 اسفند 1396
ارائه در سایت: 30 فروردین 1397
کلید واژگان:
تحلیل حساسیت گسسته
روش اعداد مختلط
روش نیمه تحلیلی
روش المان محدود

Employing a new method for computation of design sensitivities for nonlinear FEM

Mahdi Hassanzadeh¹, Pedram Safarpour^{2*}

1- School of Mechanical engineering, Islamic azad university of Gorgan branch, Kordkuy center, Kordkuy, Iran

2- School of Mechanical engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

* P.O.B. 1719-16765, Tehran, Iran, p_safarpour@sbu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 29 January 2018
Accepted 11 March 2018
Available Online 19 April 2018

Keywords:

Discrete sensitivity analysis (DSA)
complex variable method (CVM)
Semi-analytical method (SAM)
Finite element method (FEM)

ABSTRACT

The semi-analytical method (SAM) is an approach that computationally efficient and easy to implement. That's why this method often used for the sensitivity analysis of finite element models. However, SAM is not without defect especially in problems that rigid body motions are relatively large reveals severe inaccuracy. Such errors outcome from the pseudo load vector calculated by differentiation using the finite difference method. In the present paper, a new semi-analytical approach based on complex variables is proposed to compute the sensitivity of nonlinear finite element models. This method combines the complex variable method with the discrete sensitivity analysis to obtain the response sensitivity accurately and efficiently. The current approach maintains the computational efficiency of the semi-analytical method with higher accuracy. In addition, the current approach is insensitive to the choice of step size, a feature that simplifies its use in practical problems. The method can be used to nonlinear finite elements only requires minor modifications to existing finite element codes. In this paper, the authors demonstrate that the discrete sensitivity analysis and the complex variable method are equivalent and solve the same equation. Finally, the accuracy of the method is investigated through the various numerical examples by comparing by other methods and will show that this method is reliable and independent of step size.

1- مقدمه

پلاستیسیته می‌شود. برای بیشینه کردن کارایی یک قطعه باید از تحلیل حساسیت بهره برد [1-3].

آنالیز حساسیت به مشتقات پاره‌ای خروجی یک تابع (متغیر وابسته) نسبت به پارامترهای ورودی (متغیرهای مستقل) اطلاق می‌شود [4] به بیان دیگر تغییرات تابع نسبت به تغییرات پارامترهای ورودی را آنالیز حساسیت گویند. کویل تحلیل المان محدود غیرخطی با تحلیل حساسیت طراحی منافع

تحلیل المان محدود غیرخطی و تحلیل حساسیت طراحی از اهمیت زیادی در طراحی مهندسی و تحقیقات علمی برخوردار است. تحلیل غیرخطی برای حصول طراحی اقتصادی‌تر و ایمن‌تر و یا محاسبه خرابی سازه مورد استفاده قرار می‌گیرد و به‌طور کل چنین تحلیل‌هایی شامل اثرات تغییر شکل بزرگ و یا شرایط موادی غیرخطی در پدیده‌های غیرالاستیک مثل خزش و

مشق گیری می شود و به این روش مشتقات کل محاسبه می شوند. به عبارت دیگر ابتدا معادلات حاکم تقریب زده می شوند و سپس از آن ها مشتق گرفته می شود. در تحلیل حساسیت پیوسته معادلات دیفرانسیل پاره ای برای حساسیت ها با مشتق گیری ضمنی از معادلات حاکم بدست می آید سپس این معادلات پاره ای با روش های عددی تقریب زده می شوند یعنی ابتدا از معادلات مشتق گرفته و سپس تقریب زده می شوند. این روش ها، روش هایی قوی هستند چرا که به صورت خودکار کد مربوط به محاسبه حساسیت ها را تولید می کند ولی مشتقات تحلیلی کمیت های گسسته مثل ماتریس سفتی، ماتریس جرم و بردار نیرو به سختی بدست می آیند ضمن این که پیاده سازی آن از مسئله ای به مسئله دیگر متفاوت است. به این دلیل روش های نیمه تحلیلی به صورت گسترده به کار گرفته می شوند.

در روش نیمه تحلیلی مشتقات مورد نیاز در روش معادلات حساسیت گسسته مانند ماتریس سفتی، بردار نیرو و غیره با روش های تفاضل محدود تقریب زده می شوند اما حل نهایی با روش تحلیلی انجام می شود. روش نیمه تحلیلی جذابیت زیادی برای مهندسی دارد چرا که کارایی محاسباتی روش تحلیلی با سادگی پیاده سازی روش تفاضل محدود ترکیب شده است. اما SAM در محاسبه حساسیت های شکل خطاهای زیادی در بعضی موارد خاص از خود نشان داده است [15,14]. برای غلبه بر مسئله بی دقتی SAM مطالعات گسترده ای صورت گرفته است و چندین روش برای از بین بردن خطای SAM پیشنهاد شده است. برای مثال حساسیت نیمه تحلیلی دقیق [16-18] و نیمه تحلیلی اصلاح شده [19,20] را نام برد که قادر هستند خطا را در مسائل خطی حذف کنند. اخیراً وانگ و همکاران [20] با استفاده از روش ماتریس سفتی سکانت تحلیل حساسیت نیمه تحلیلی را برای مسائل بهینه سازی غیرخطی ارائه داده اند. اصلاحات صورت گرفته در این مطالعات غالباً شامل روابط تحلیلی پیچیده بوده و پیاده سازی آن به صورت عمومی مشکل است از این رو ارائه روشی نوین برای تحلیل حساسیت مسائل غیرخطی که به راحتی و دقت بالا پیاده سازی و اجرا شود احساس می شود.

منشا خطا در SAM مشتق گیری عددی از ماتریس سفتی المان محدود است که مختص SAM است [14]. به عبارت دقیق تر مربوط به روش تفاضل محدود (FDM) است. دقت FDM وابسته به اندازه گام انتخابی توسط کاربر است. اندازه گام باید به اندازه کافی کوچک باشد تا خطای برش کمینه باشد و به اندازه کافی بزرگ باشد تا اندازه خطای از بین رفتن ارقام با معنی در منها به وجود نیاید. بنابراین برای کمینه کردن خطای کل، اندازه گام بهینه وجود دارد که متأسفانه از قبل مشخص نیست و برای هر پارامتر طراحی این اندازه گام عوض می شود. انتخاب اندازه گام مناسب برای مسائل پیچیده با تعداد متغیرهای زیاد مشکل است.

بر اساس منشا خطا در SAM، اگر بتوان مشتقات دقیق ماتریس سختی و ماتریس نیرو را محاسبه کرد می توان حساسیت ها را بدون نیاز به اصلاح فرمول بندی المان محدود، با دقت محاسبه کرد. این ایده ساده فرمول بندی تحقیق حاضر را تشکیل می دهد که متمرکز بر بهبود دقت SAM با حذف خطاهای تفریق (که نتیجه استفاده از FDM است)، می باشد.

در این مقاله که ادامه پژوهش [12] می باشد روش نیمه تحلیلی جدیدی از ترکیب تحلیل حساسیت گسسته با روش متغیرهای مختلط برای محاسبه حساسیت در مسائل عددی غیرخطی ارائه می شود. در این روش در معادله اضافی که برای محاسبه حساسیت به کار می رود به جای استفاده از روش تفاضل محدود از روش متغیرهای مختلط استفاده می شود و عملیات دیگری

زیادی را به دنبال دارد زیرا ابزاری را جهت تعیین اثرات پارامترهای مختلف در پاسخ غیرالاستیک سازه فراهم می آورد. آنالیز حساسیت در المان محدود مشتقات پاره ای خروجی یک اجرای تحلیل عددی را (برای مثال جابجایی ها و تنش ها) نسبت به پارامترهای ورودی (برای مثال ابعاد، پارامتر ماده و بارگذاری) تعیین می کند. برای مثال حساسیت تنش نسبت به بار اعمالی می تواند نمونه ازین دست باشد. یکی از مهم ترین این تحلیل ها در زمینه طراحی، حساسیت شکل می باشد. حساسیت شکل به طراح نشان می دهد که چگونه تغییر کوچک در شکل یا اندازه قطعه روی کارایی آن تاثیر می گذارد. همچنین تحلیل حساسیت این اطلاعات را فراهم می آورد که کدام متغیرها بیشترین اهمیت را دارا هستند و یا در فرآیند طراحی حیاتی هستند [5].

روش های مختلفی برای محاسبه آنالیز حساسیت در تحلیل المان محدود مورد استفاده قرار می گیرد که از این میان می توان به روش تفاضل محدود¹، روش متغیرهای مختلط² [6-8]، روش تحلیل حساسیت پیوسته³ [9]، روش تحلیل حساسیت گسسته⁴ [10] و روش های نیمه تحلیلی⁵ [11,12] اشاره کرد. هر یک از این روش ها با توجه به هزینه محاسباتی، دقت مشتقات، سهولت در پیاده سازی در کد المان محدود مزایا و معایب خود را دارد.

روش تفاضل محدود به سادگی پیاده سازی می شود ولی زمان محاسبات بالا و خطای تفریق این روش باعث شده است که محققین این روش را کنار گذاشته و سراغ دیگر روش های کارا تر بروند. علت پرهزینه بودن روش تفاضل محدود اینست که مسئله باید برای هر پارامتر طراحی دو یا چند بار حل شود به علاوه برای پارامترهای طراحی ممکن است به علت تغییر مش بندی مشکلاتی ایجاد شود [9].

روش متغیرهای مختلط بوسیله ترب و اسکور [13] به جامعه علمی دوباره معرفی شد. از این روش در محاسبه حساسیت در خستگی [7] و در محاسبه حساسیت المان محدود خطی [6] توسط ورهی و همکاران به کار گرفته شده است. همچنین از این روش در محاسبه حساسیت در مسائل خزش استفاده شده است [8]. روش متغیر مختلط نیازمند باز نویسی کد برنامه نوشته شده با متغیرهای مختلط است. بدین صورت که کل کد مربوطه به صورت مختلط درآمده و قسمت موهومی حل به عنوان حساسیت تعیین شده است و معادله ای به معادله تحلیل تنش اضافه نمی شود. اگر چه این عمل به صورت خودکار انجام می پذیرد ولی روی کارایی انجام تحلیل تاثیر زیادی دارد. عیب اصلی روش متغیرهای مختلط هنگامی که برای بهینه سازی طراحی عددی مورد استفاده قرار می گیرند این است که معادلات حاکم باید با آرگومان مختلط همگرا شوند که نوعاً دو الی سه برابر آرگومان حقیقی زمان می برد [9]. روش متغیرهای مختلط وقتی که به درستی مورد استفاده قرار گیرد مشتقات طراحی را با دقت مطلوب نتیجه می دهند [6]. متأسفانه این روش نیز هم اندازه روش تفاضل محدود هزینه محاسباتی بالایی دارد و برای هر متغیر طراحی محاسبات باید تا همگرایی به صورت آرگومان مختلط انجام شود.

در روش تحلیلی از معادلات حاکم مشتق گیری می شود تا سیستم معادلاتی برای محاسبه حساسیت به وجود آید که به دو صورت انجام می پذیرد: تحلیل حساسیت گسسته و تحلیل حساسیت پیوسته. در تحلیل حساسیت گسسته از شکل گسسته معادلات نسبت به پارامترهای طراحی

¹ finite difference method

² complex variables method

³ continuous sensitivity method

⁴ discrete sensitivity method

⁵ semi-analytical method

$$\int_V \beta: \tau dV = \int_S N^T \cdot t dS + \int_V N^T \cdot f dV \quad (6)$$

این معادله اساس تحلیل المان محدود برای مسائل تحلیل تنش را شکل می‌دهد و به شکل خلاصه زیر نوشته می‌شود:

$$R(\hat{u})=0 \quad (7)$$

که R به صورت زیر می‌باشد:

$$R = - \int_V \beta: \tau dV + \int_S N^T \cdot t dS + \int_V N^T \cdot f dV \quad (8)$$

معادله (8) با روش نیوتن-رافسون به صورت زیر حل می‌شود:

$$\left[\frac{\partial R}{\partial \hat{u}} \right]^{n-1} \Delta \hat{u}^n = -R^{n-1} \quad (9)$$

$$\hat{u}^n = \hat{u}^{n-1} + \Delta \hat{u}^n$$

که $\partial R / \partial \hat{u}$ ماتریس سفتی مماسی (ژاکوبین) که در تکرار $n-1$ ام محاسبه شده است، می‌باشد. برای هر تکرار، ژاکوبین و R باید محاسبه شود و با حل دستگاه معادلات (9)، $\Delta \hat{u}$ به دست آمده برای محاسبه \hat{u} در تکرار بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

3- تحلیل حساسیت

3-1- روش تفاضل محدود

روش تفاضل محدود مشهورترین روش برای به دست آوردن تقریبی مشتق یک تابع است. از بارزترین خصوصیات آن مفهوم ساده و کاربرد راحت آن است. مشتق یک تابع به صورت حد تغییرات مقدار تابع تقسیم بر مقدار تغییرات مربوط به متغیر مستقل زمانی که تغییرات متغیر مستقل به سمت صفر میل کند تعریف می‌شود:

$$\frac{d\phi(x_0)}{dx} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} \quad (10)$$

روش تفاضل محدود مشتق را با تقریب حد در معادله (10) به صورت تفاضل بین مقدار تابع محاسبه شده در دو نقطه متمایز به فاصله h تقسیم بر h تخمین می‌زند:

$$\frac{d\phi(x_0)}{dx} \approx \frac{\phi(x_0+h) - \phi(x_0)}{h} \quad (11)$$

فاصله h اغلب اندازه گام نامیده می‌شود. وقتی که h مثبت باشد این روش به تفاضل پیشین و اگر h منفی باشد تفاضل محدود پسین ارجاع داده می‌شود. اگر از نتایج تفاضل پیشین و پسین میانگین گرفته شود این روش را تفاضل مرکزی گویند. تفاضل مرکزی به صورت زیر است:

$$\frac{d\phi(x_0)}{dx} \approx \frac{\phi(x_0+h) - \phi(x_0-h)}{2h} \quad (12)$$

در تفاضل محدود نیازی به تغییر کد در برنامه کامپیوتری نیست تنها چند اجرای برنامه نیاز است. اگر چه ساده و اغلب موثر است اما روش تفاضل محدود بدون عیب نیست. تقریب مشتقات به صورت تفاضل دو عدد نزدیک به هم منجر به خطای برش در سری تیلور تابع می‌شود. این خطا با کوچک کردن طول گام کم می‌شود. اما زمانی که طول گام کاهش یابد خطای دیگری پدید می‌آید و آن خطای گرد کردن است. به دلیل محدود بودن تعداد اعشار در کامپیوتر، کامپیوتر نمی‌تواند اختلاف درست بین دو عدد بسیار نزدیک به هم را محاسبه کند و به این دلیل خطای گرد کردن و یا حذف ارقام با معنی به وجود می‌آید. بنابراین برای تفاضل محدود یک حد کمینه برای طول گام و یک حد بیشینه برای دقت محاسبات وجود دارد. برای تفاضل محدود پسرو و پیشرو از آن جایی که ترم‌های مرتبه بالاتر حذف نمی‌شوند دقت محاسبات برای طول گام داده شده از مرتبه $O(h)$ [6] و برای تفاضل مرکزی چون ترم‌های زوج حذف می‌شوند دقت محاسبات از مرتبه $O(h^2)$ [6] می‌باشد.

3-2- روش متغیرهای مختلط

از قبیل جداسازی مودها و ... برای افزایش دقت انجام نمی‌شود. روش ارائه شده مزایای روش نیمه تحلیلی و روش متغیرهای مختلط را در خود جمع کرده است. روش متغیرهای مختلط مشتقات عددی ماتریس‌های سفتی المان محدود را با دقت محاسبه کرده و حساس به اندازه گام نیست همچنین در این روش نیازی به انجام عملیات پیچیده بر روی ماتریس سفتی المان نیست. بنابراین روش ارائه شده حساسیت‌های موردنیاز در طراحی را با دقت و کارایی بالا محاسبه کند. همچنین در این مقاله نشان داده می‌شود که CVM و روش نیمه تحلیلی ارائه شده معادل هم بوده و معادلات یکسانی را حل می‌کنند. ویژگی بارز روش ارائه شده سادگی پیاده‌سازی و قابل اعتماد بودن آن در محاسبه حساسیت‌ها در مسائل FEM و همچنین عدم وابستگی به المان استفاده شده و اندازه گام می‌باشد. با چندین مثال عددی دقت روش مذکور با دیگر روش‌ها مقایسه می‌شود و نشان داده خواهد شد که این روش قابل اعتماد و مستقل از اندازه گام می‌باشد.

2- روش المان محدود غیرخطی

روش المان محدود مبتنی بر این ایده است که هر سیستمی از لحاظ فیزیکی از تکه‌های مختلفی تشکیل شده و از این رو حل آن می‌تواند برای تکه‌ها بیان شود. روش المان محدود به طور کل به دو دسته مهم خطی و غیرخطی تقسیم‌بندی می‌شود. روش المان محدود خطی به دستگاه معادلات خطی منتهی می‌شود که از رفتار خطی ماده نشأت می‌گیرد. ولی در بسیاری از کاربردهای مهندسی محدودیت رفتار خطی از دست یافتن به جواب‌های درست و طراحی مناسب جلوگیری می‌کند. دو منشأ رایج برای غیرخطی بودن وجود دارد: (1) هندسی و (2) ماده. غیرخطی بودن هندسی صرفاً از ملاحظات هندسی (برای مثال، روابط غیرخطی کرنش-جابجایی) ناشی می‌شود و غیرخطی بودن ماده به خاطر رفتار غیرخطی معادله متشکله ماده‌ی سیستم است. یک نوع سوم از غیرخطی بودن ممکن است ناشی از تغییر شرایط اولیه یا مرزی باشد.

معادله تعادل به صورت اصل کار مجازی به صورت نوشته می‌شود [21]:

$$\int_V \tau: \delta \varepsilon dV = \int_S t^T \cdot \delta v dS + \int_V f^T \cdot \delta v dV \quad (1)$$

τ و ε تانسور تنش و کرنش مزدوج، t نیروهای سطحی، δv میدان سرعت مجازی، f نیروی حجمی، V حجم و S بیانگر سطح و T علامت ترانهاده می‌باشد. میانمایی المان محدود به صورت کلی زیر نوشته می‌شود:

$$u = N \hat{u} \quad (2)$$

که N توابع میانمایی و u متغیرهای گره‌ای می‌باشند.

میدان مجازی δv باید سازگار با قيود سینماتیکی باشد. با میانمایی معرفی شده در معادله (2) جابه‌جایی با تغییرات مشخصی مقید می‌شوند بنابراین δv باید به شکل زیر باشد:

$$\delta v = N \delta \hat{v} \quad (3)$$

حال $\delta \varepsilon$ تغییرات نرخ کرنش ماده مرتبط با δv به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta \varepsilon = \beta \delta \hat{v} \quad (4)$$

که β ماتریس کرنش-جابه‌جایی که عموماً وابسته به موقعیت مکانی x که ماده در آن قرار گرفته می‌باشد و $\delta \varepsilon$ را به $\delta \hat{v}$ مرتبط می‌سازد. حال معادله تعادل به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\delta \hat{v} \int_V \beta: \tau dV = \delta \hat{v} \left[\int_S N^T \cdot t dS + \int_V N^T \cdot f dV \right] \quad (5)$$

از آن جایی که $\delta \hat{v}$ متغیرهای مستقل هستند می‌توان یکی را یک و بقیه را صفر در نظر گرفت و سیستم معادلات تعادل غیرخطی را به صورت زیر بازنویسی کرد:

محاسبه گردد. این عبارت یا به صورت تحلیلی و یا به صورت عددی تفاضل محدود محاسبه می شود.

3-4- روش نیمه تحلیلی پیشنهادی

در این مقاله برای محاسبه بردار $\partial R/\partial X_p$ با دقت بالا از CVM به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$\frac{\partial R}{\partial X_p} = \frac{\text{Im}[R(\hat{u}, X_p + ih)]}{h} \quad (18)$$

حل نهایی مسئله آنالیز حساسیت با حل سیستم معادله (17) برای هر X_p و $p = 1, \dots, P$ و سپس قرار دادن در معادله (16) به دست می آید.

ماتریس $[\partial R/\partial \hat{u}]$ مورد استفاده در معادله (17) آخرین ماتریس سفتی مماسی مورد استفاده در الگوریتم تکراری معادله (9) است و نیازی به محاسبه مجدد آن نیست که خود باعث صرفه جویی در محاسبات می شود. در ضمن همان طور که دیده می شود در تمام محاسبات دستگاه معادلات جبری حقیقی حل می گردد در نتیجه حافظه کامپیوتر همانند روش CVM برای کل ماتریس ها مصرف نمی شود.

برای اثبات این که روش به دست آمده با روش CVM سازگاری داشته و به همان نتایج خواهد رسید روش CVM را به صورت عددی در حل سیستم معادلات المان محدود غیرخطی اعمال می کنیم. در روش CVM اختلاف موهومی در کل کد وارد شده و بعد از همگرایی قسمت حقیقی پاسخ میدان و قسمت موهومی تقسیم بر اندازه اختلاف حساسیت پاسخ نسبت به پارامتر مختل شده می باشد. حل معادلات تعادل به وسیله روش المان محدود به صورت دستگاه معادلات جبری منتج می شود که در معادله (9) نشان داده شده اند و در زیر دوباره آورده شده است:

$$\left[\frac{\partial R}{\partial \hat{u}}(\hat{u}, X_p) \right] \Delta \hat{u} = -R \quad (19)$$

با اختلاف موهومی به دستگاه معادلات زیر می رسمیم (در تکرار n):

$$\left[\frac{\partial R}{\partial \hat{u}}(\hat{u}_R + i\hat{u}_I, X_p + ih) \right] (\Delta \hat{u}_R + i\Delta \hat{u}_I) = -R(\hat{u}_R + i\hat{u}_I, X_p + ih) \quad (20)$$

که هر دو با تکرار به دست می آیند. h را به صورت ورودی وارد می شود و $\Delta \hat{u}_R$ و $\Delta \hat{u}_I$ به دست می آید. عبارات داده شده دقیقاً مورد استفاده در کدنویسی می باشند یعنی با روش نیوتن-رافسون معادله (20) حل می گردد. $\partial R/\partial \hat{u}$ ماتریس $n \times n$ می باشد که n تعداد درجه آزادی مسئله می باشد و به صورت جمع ماتریس حقیقی و موهومی می باشد. پس:

$$\left[\left(\frac{\partial R}{\partial \hat{u}} \right)_R + i \left(\frac{\partial R}{\partial \hat{u}} \right)_I \right] (\Delta \hat{u}_R + i\Delta \hat{u}_I) = -(R_R + iR_I) \quad (21)$$

که زیرنویس R نشانگر قسمت حقیقی ماتریس و زیرنویس I نشانگر قسمت موهومی می باشد.

با بسط معادله (21) داریم:

$$\left[\left(\frac{\partial R}{\partial \hat{u}} \right)_R \right] \Delta \hat{u}_R - \left[\left(\frac{\partial R}{\partial \hat{u}} \right)_I \right] \Delta \hat{u}_I = -R_R \quad (22)$$

$$\left[\left(\frac{\partial R}{\partial \hat{u}} \right)_I \right] \Delta \hat{u}_I + \left[\left(\frac{\partial R}{\partial \hat{u}} \right)_R \right] \Delta \hat{u}_R = -R_I \quad (23)$$

با در نظر گرفتن معادله (14) عبارات $[\partial R/\partial \hat{u}]_I$ و $[\partial R/\partial \hat{u}]_R$ معادل عبارات زیر هستند:

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial \hat{u}} \right)_I \right] &= \left[\frac{\partial}{\partial X_p} \left(\frac{\partial R}{\partial \hat{u}} \right)_R \right] h + \left[\frac{\partial}{\partial \hat{u}} \left(\frac{\partial R}{\partial \hat{u}} \right)_R \right] \hat{u}_I \\ &= \left[\left(\frac{\partial^2 R}{\partial X_p \partial \hat{u}} \right)_R \right] h + \left[\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \hat{u}^2} \right)_R \right] \hat{u}_I \end{aligned}$$

$$\hat{u}_I = \frac{d\hat{u}}{dX_p} h$$

روش متغیر مختلط روش مشتق گیری عددی است که از نظر مفهوم شبیه تفاضل محدود است اما مزایای قابل توجهی دارد. در این روش اختلاف کوچکی به صورت موهومی به تابع در نقطه ی مورد نظر داده می شود یعنی در متغیر مستقل از $x = x_0 + ih$ به جای $x = x_0$ استفاده می شود که i دلالت بر عدد موهومی و h دلالت بر طول گام دارد. برای استخراج فرمول مشتق، سری تیلور تابع در نقطه مختلط به صورت زیر بسط داده می شود [6]:

$$\phi(x_0 + ih) = \phi(x_0) + \phi^{(1)}(x_0) \frac{(ih)}{1!} + \phi^{(2)}(x_0) \frac{(ih)^2}{2!} + \phi^{(3)}(x_0) \frac{(ih)^3}{3!} + \dots \quad (13)$$

که $\phi^{(1)}$ مشتق مرتبه اول، $\phi^{(2)}$ مشتق مرتبه دوم و ... می باشد. با گرفتن قسمت موهومی دو طرف معادله بالا با صرف نظر از ترم های مرتبه $O(h^2)$ به بالا، مشتق مرتبه اول به صورت زیر تخمین زده می شود:

$$\phi^{(1)}(x_0) \approx \frac{\text{Im}(\phi(x_0 + ih))}{h} \quad (14)$$

در معادله (14) برای تخمین مشتق مرتبه اول نیازی به عمل تفریق نیست بنابراین اندازه گام می تواند به هر میزان بدون نگرانی از خطای گرد کردن انتخاب شود.

به وسیله روش متغیرهای مختلط مشتقات مرتبه اول هر تابع صریح یا ضمنی نسبت به هر پارامتر ورودی، می تواند به آسانی با استفاده از تعیین قسمت موهومی تابع و تقسیم آن بر اندازه گام اختلاف پارامتر ورودی، محاسبه شود. البته این افزایش دقت بدون عیب نیست. محاسبه مشتقات اول با این روش هزینه محاسباتی زیادی دارند زیرا مشتق گیری برای هر متغیر ورودی باید کد کامپیوتری به صورت کامل به صورت موهومی اجرا شود بنابراین علاوه بر زمان زیاد، حافظه بیشتری نیز اشغال می کند.

3-3- تحلیل حساسیت گسسته

تحلیل حساسیت گسسته، مشتقات فضای طراحی را با استفاده از بردار باقیمانده معادلات حاکم، $R(\hat{u}, X)$ تخمین می زند که \hat{u} بردار متغیرهای میدان جابجایی گره ای و X بردار متغیرهای طراحی می باشد.

فرض، پاسخ ϕ تابعی از پارامترهای طراحی X_p ، $p = 1, \dots, P$ باشد و به آن ها، هم به صورت صریح و هم از طریق میدان جابجایی گره ای \hat{u} وابسته باشد یعنی:

$$\phi = \phi(\hat{u}(X_p), X_p) \quad (15)$$

وابستگی $u(X_p)$ فقط به صورت ضمنی می باشد به عبارت دیگر از طریق ضرایب سیستم معادلات تعادل که حل آن \hat{u} است، وابسته می باشد. مشتق ϕ نسبت به پارامتر طراحی X_p به صورت زیر تعریف می شود [22]:

$$\frac{d\phi}{dX_p} = \frac{\partial \phi}{\partial X_p} + \frac{\partial \phi}{\partial \hat{u}} \frac{d\hat{u}}{dX_p} \quad (16)$$

تمام کمیت ها در معادله (16) به جز $d\hat{u}/dX_p$ به صورت صریح قابل محاسبه است. برای محاسبه $d\hat{u}/dX_p$ سیستم معادلات دیگری باید حل شود.

کمیت های معادله (7) فرض می شود که به صورت صریح یا از طریق میدان جابجایی u تابعی از h_p باشد. مشتق گیری از رابطه (7) نسبت به پارامترهای طراحی منجر به رابطه زیر می شود [22]:

$$\left[\frac{\partial R}{\partial \hat{u}} \right] \frac{d\hat{u}}{dX_p} = - \frac{\partial R}{\partial X_p} \quad (17)$$

$[\partial R/\partial \hat{u}]$ همان ماتریس سفتی مماسی است که در معادله (9) آمده است و $\partial R/\partial X_p$ کمیتی است که به صورت صریح محاسبه می شود. با استفاده از معادله (10)، $d\hat{u}/dX_p$ به دست می آید و با قرار دادن آن در معادله (16) حل مسئله تحلیل حساسیت گسسته کامل می شود. برای محاسبه آنالیز حساسیت بعد از همگرا شدن معادله (9) و به دست آوردن \hat{u} ، لازم است بردار $\partial R/\partial X_p$

که:

$$\hat{u}_1 = \frac{d\hat{u}}{dX_p} h \quad (32)$$

4- پیاده سازی در کد المان محدود

برای پیاده سازی روش مذکور کد المان محدود به همراه تحلیل حساسیت در نرم افزار متلب تدوین شده است. در نرم افزار متلب علاوه بر سادگی کدنویسی در آن می توان به راحتی متغیرها را به صورت مختلط تعریف کرد و اعمال ماتریسی را به صورت مختلط انجام داد. برنامه المان محدود نوشته شده از توابع شکل خطی مربعی چهار گره ای برای مش دوبعدی استفاده می کند. هندسه مسئله و مش بندی آن در نرم افزار آباکوس ایجاد شده و سپس به برنامه متلب وارد می شود و مسئله توسط کد نوشته شده تحلیل می گردد. به منظور انجام محاسبه حساسیت شکل، گام کوچکی باید به صورت موهومی در پارامتر طراحی ایجاد شود. تغییر نسبی به صورت موهومی است یعنی برای تغییر کوچک در X از $X+ih$ استفاده می کنیم. نتایج به دست آمده با حساسیت به دست آمده از حل های نیمه تحلیلی مرسوم (TSAM) و FDM مقایسه می شود.

4-1- مثال عددی: تیر یکسر در گیر تحت جابه جایی بزرگ

تیری تحت بار گسترده یکنواخت به طول $L=10$ in، $\nu=1$ in، $q=3$ lb/in و ضخامت $t = 1$ in را در نظر بگیرید (شکل 1). خواص مورد استفاده به صورت زیر می باشد:

$$E = 1.2e4 \text{ psi}, \nu = 0.2 \quad (33)$$

تیر را به صورت تنش صفحه ای مدل می شود و برای حل غیرخطی از فرمول بندی لاگرانژ به روز شده استفاده شده است. در فرمول بندی با جابه جایی بزرگ از کرنش های گرین استفاده می شود که شامل ترم های غیرخطی می باشد در فرمول بندی خطی قسمت غیرخطی صرف نظر می شود. کرنش های گرین به صورت معادلات (34) هستند:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 \right] \\ E_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 \right] \\ E_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right) \end{aligned} \quad (34)$$

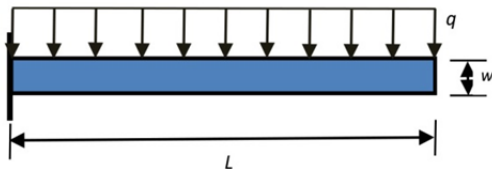


Fig. 1 Cantilever beam with distributing load

شکل 1 تیر یکسردرگیر با بارگذاری گسترده

جدول 1 صحت سنجی نتایج به دست آمده از کد نوشته شده با مقایسه با نتایج بدست آمده از شبیه سازی نرم افزار آباکوس (برای $q=3$)

Table 1 Verification of the obtained results from our written code in comparison with the obtained results from the simulation of the Abaqus software (for $q=3$)

درصد اختلاف	آباکوس	کد نوشته شده	جابه جایی سرتیر
0.3%	-3.643 in	-3.6539 in	

$$R_1 = \left(\frac{\partial R}{\partial X_p} \right)_R h + \left[\left(\frac{\partial R}{\partial \hat{u}} \right)_R \right] \hat{u}_1 \quad (24)$$

با جایگذاری عبارات (24) در معادلات (22) و (23) معادلات (25) و (26) به دست می آیند:

$$\left[\left(\frac{\partial R}{\partial \hat{u}} \right)_R \right] \Delta \hat{u}_R - \left(\left[\left(\frac{\partial^2 R}{\partial X_p \partial \hat{u}} \right)_R \right] + \left[\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \hat{u}^2} \right)_R \right] \frac{d\hat{u}}{dX_p} \right) h \Delta \hat{u}_1 = -R_R \quad (25)$$

$$\left[\left(\frac{\partial R}{\partial \hat{u}} \right)_R \right] \Delta \hat{u}_1 + \left(\left[\left(\frac{\partial^2 R}{\partial X_p \partial \hat{u}} \right)_R \right] + \left[\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \hat{u}^2} \right)_R \right] \frac{d\hat{u}}{dX_p} \right) h \Delta \hat{u}_R = - \left(\left(\frac{\partial R}{\partial X_p} \right)_R + \left[\left(\frac{\partial R}{\partial \hat{u}} \right)_R \right] \frac{d\hat{u}}{dX_p} \right) h \quad (26)$$

در معادله (25) اگر h را کوچک انتخاب در نظر گرفته شود، می توان از $(\partial^2 R / \partial X_p \partial \hat{u}) + [\partial^2 R / \partial \hat{u}^2] d\hat{u} / dX_p$ صرف نظر کرد و معادله (27) حاصل می شود:

$$\left[\left(\frac{\partial R}{\partial \hat{u}} \right)_R \right] \Delta \hat{u}_R = -R_R \quad (27)$$

معادله (27) همانند معادله (9) می باشد و این یعنی قسمت حقیقی به پاسخ مسئله ختم می شود. از طرف دیگر همگرایی (27) یعنی این که $\Delta \hat{u}_R$ از ترانس خطا کوچک تر می باشد پس در معادله (26) می توان از $(\partial^2 R / \partial X_p \partial \hat{u}) + [\partial^2 R / \partial \hat{u}^2] d\hat{u} / dX_p$ صرف نظر کرد و به رابطه زیر رسید:

$$\left[\left(\frac{\partial R}{\partial \hat{u}} \right)_R \right] \Delta \hat{u}_1 = - \left(\left(\frac{\partial R}{\partial X_p} \right)_R + \left[\left(\frac{\partial R}{\partial \hat{u}} \right)_R \right] \frac{d\hat{u}}{dX_p} \right) h \quad (28)$$

در معادله (28)، $(\partial R / \partial \hat{u})_R$ و $(\partial R / \partial X_p)_R$ توابعی مستقل از \hat{u}_1 هستند بنابراین معادله بالا خطی بوده و نیاز به تکرار ندارد و می توان بعد از همگرایی معادله (27) با استفاده از آخرین ژاکوبین، معادله (28) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\left[\left(\frac{\partial R}{\partial \hat{u}} \right)_R \right] \frac{d\hat{u}}{dX_p} = - \left(\frac{\partial R}{\partial X_p} \right)_R \quad (29)$$

که همان معادله (17) با روشی دیگر اثبات می شود و همچنین اثبات می شود که معادله (17) و (20) معادل همدیگر بوده و به یک جواب می رسند. مزیت روش مفروض در این است که بعد از همگرایی فقط یک معادله حل می شود و $\partial R / \partial \hat{u}$ از اطلاعات قبلی است در صورتی که در روش CVM سیستم معادلات باید با آرگومان مختلط در هر تکرار حل شوند. در نتیجه کارایی روش مذکور بسیار بالاتر است.

برای محاسبه حساسیت طراحی با استفاده از روش ارائه شده، الگوریتم زیر پیشنهاد می شود:

1. با استفاده از کد با آرگومان حقیقی، حل همگرا شده مسئله را به دست آورید،
2. آخرین ماتریس ژاکوبین را با آرگومان حقیقی ذخیره کنید،
3. از متغیرهای مختلط برای محاسبه باقیمانده مختلط $R(\hat{u}, X_p + ih)$ استفاده کنید،
4. معادله زیر را حل کنید:

$$\left[\frac{\partial R}{\partial \hat{u}} \right] \frac{d\hat{u}}{dX_p} = - \frac{\text{Im}[R(\hat{u}, X_p + ih)]}{h} \quad (30)$$

5. حال می توان مشتقات طراحی را با معادله (6) یا معادله زیر محاسبه کرد:

$$\frac{d\phi}{dX_p} = \frac{\text{Im}[\phi(\hat{u} + i\hat{u}_1, X_p + ih)]}{h} \quad (31)$$

جدول 3 همگرایی جابه‌جایی افقی u و مشتق آن نسبت به L
Table 3 The convergence of horizontal displacement u and its derivation relative to L

تعداد المان	زمان (s)	u (in)	$\frac{du}{dL}$ (in/in)	درصد تغییر u	درصد تغییر $\frac{du}{dL}$
10	0.2	-0.2070	-0.2108	-	-
40	0.6	-0.4180	-0.3743	50.4711	43.6907
160	2.6	-0.5106	-0.4436	18.1459	15.6271
640	10.5	-0.5382	-0.4640	5.1186	4.3920
1000	17.4	-0.5417	-0.4666	0.6401	0.5476
2560	49.8	-0.5455	-0.4694	0.6994	0.5980
10240	306.3	-0.5473	-0.4707	0.3425	0.2919

جدول 4 نتایج آنالیز حساسیت du/dL در مسئله تیر با $q=3$ (مدل با تعداد المان 2560)

Table 4 The results of sensitivity analysis du/dL in the beam problem with $q = 3$ (model with 2560 elements)

اندازه گام	SAM پیشنهادی	TSAM	FDM
1.E-02	-1.4618	-3.8071	-1.4006
1.E-03	-1.4012	-1.4732	-1.4006
1.E-04	-1.4006	-1.4500	-1.4006
1.E-05	-1.4006	-1.4498	-1.4006
1.E-06	-1.4006	-1.4498	-1.4006
1.E-07	-1.4006	-1.4498	-1.4006
1.E-08	-1.4006	-1.4498	-1.4006
1.E-09	-1.4006	-1.4498	-1.4006
1.E-10	-1.4006	-1.4498	-1.4006
1.E-11	-1.4006	-1.4497	-1.4007
1.E-12	-1.4006	-1.4504	-1.4024
1.E-13	-1.4006	-1.4434	-1.4122
1.E-14	-1.4006	-1.4789	-1.2212
1.E-15	-1.4006	-1.4748	-0.2220

پرهزینه است که خود نشان می‌دهد روش‌های نیمه تحلیلی روش‌های کم هزینه‌ای هستند و نیز روش ارائه شده مزیت کم هزینه بودن TSAM را نیز علاوه بر عدم وابستگی به طول گام در خود دارد.

نتایج حل تیر با فرض خطی و غیرخطی به صورت گرافیکی در "شکل 4" ترسیم شده است. دیده می‌شود در نیروهای گسترده کم، اختلاف نتایج با فرض خطی و غیرخطی قابل طرف‌نظر است اما برای مقادیر بالاتر اختلاف بین حل‌ها بیشتر می‌شود و قابل اغماض نیستند اما بین حساسیت‌ها اختلاف زیادی آشکار است و اختلافات از اختلافات بین حل جابه‌جایی‌ها مشهودترند و افزایش فاصله بین حساسیت‌ها با فرض خطی و غیرخطی نسبت به افزایش

جدول 5 مقایسه زمان نسبی شبیه‌سازی برای مسئله تیر
Table 5 Comparison of execution times in the beam problem

زمان شبیه‌سازی نسبی	روش
1	روش ارائه شده
0.84	روش نیمه تحلیلی مرسوم
1.61	روش تفاضل محدود

در حل غیرخطی با چرخش المان، نیروهای گسترده نیز می‌چرخند تا همواره عمود بر سطح قرار گیرند. هدف محاسبه مشتق جابه‌جایی سر تیر نسبت به طول تیر می‌باشد $du/dL(x=L)$ می‌باشد.

برای صحت‌سنجی کد نوشته شده، تیر را در نرم‌افزار آباکوس مدل کرده و با حل حاصل از کد نوشته شده مقایسه می‌شود. نتایج در جدول 1 آمده است. دیده می‌شود تطابق خوبی بین حل به‌دست آمده از آباکوس و حل به‌دست آمده از کد نوشته شده وجود دارد.

به‌منظور مشاهده همگرایی جابه‌جایی‌ها و حساسیت‌ها، مسئله با تعداد المان‌های مختلف شبیه‌سازی شده است و نتایج در جدول 2 و 3 آمده است. در این جدول‌ها علاوه بر مقادیر جابه‌جایی u و v ، زمان لازم برای شبیه‌سازی و میزان درصد تغییرات نسبی برای جابه‌جایی‌ها و حساسیت‌ها نسبت به نتایج قبلی آمده است و به‌صورت گرافیکی در "شکل 2" نیز آمده است. نتیجه قابل توجه اینست که نمودارها از نظر شکل کاملاً شبیه یکدیگر بوده و خصوصاً این‌که خطاهای جابه‌جایی u و v به ترتیب با خطاهای مشتقاتشان du/dL و dv/dL تقریباً منطبق است. این نتیجه نشانگر اینست که دقت مشتقات جابه‌جایی مرتبط با دقت خود میدان جابه‌جایی است. "شکل 3" نمودار براش درصد تغییرات نسبی (یا خطا) را نشان می‌دهد همان‌طور که دیده می‌شود شیب نمودار برای هر داده تقریباً برابر 1- می‌باشد که منطبق با انتخاب نوع المان خطی می‌باشد.

مشتق جابه‌جایی نسبت به طول تیر با استفاده از دیگر روش‌ها یعنی TSAM و FDM با طول گام‌های مختلف برای در جدول 4 آمده است. نتایج روش پیشنهادی (New SAM) و روش تفاضل محدود یکسان است و این دقت روش پیشنهادی را تایید می‌کند در صورتی که TSAM برای تمام گام‌ها با خطا مواجه می‌باشد که مربوط به خود روش و خطای چرخش صلب گونه می‌باشد [17] و همچنین دیده می‌شود برای رنج وسیعی از طول گام‌ها تغییری در اندازه حساسیت نشده است که تایید می‌کند دقت حساسیت‌ها در روش المان محدود بیشتر وابسته به دقت تحلیل المان محدود دارد. در طول گام‌های کوچک‌تر از 10^{-13} دیده می‌شود که روش‌های سنتی دقت خود را از دست داده‌اند درحالی‌که روش‌های مبتنی بر متغیر مختلط یعنی روش پیشنهادی پایدار بوده و وابسته به طول گام نیستند که خود مزیت این روش محسوب می‌شود چرا که می‌توان به اندازه دلخواه طول گام را کوچک در نظر گرفت و نگرانی بابت خطای گرد کردن نداشت.

در جدول 5 زمان محاسبه با روش‌های مختلف نشان داده شده است. واضح است که زمان محاسباتی روش ارائه شده فقط به اندازه 19 درصد بیشتر است در حالی‌که روش تفاضل محدود همان‌طور که انتظار می‌رفت روشی

جدول 2 همگرایی جابه‌جایی عمودی v و مشتق آن نسبت به L
Table 2 The convergence of vertical displacement v and its derivation relative to L

تعداد المان	زمان (s)	v (in)	$\frac{dv}{dL}$ (in/in)	درصد تغییر v	درصد تغییر $\frac{dv}{dL}$
10	0.2	-2.5826	-1.0038	-	-
40	0.6	-3.3366	-1.2767	22.5985	21.3725
160	2.6	-3.6048	-1.3689	7.4411	6.7357
640	10.5	-3.6797	-1.3941	2.0364	1.8077
1000	17.4	-3.6891	-1.3972	0.2523	0.2222
2560	49.8	-3.6993	-1.4006	0.2763	0.2426
10240	306.3	-3.7043	-1.4023	0.1356	0.1183

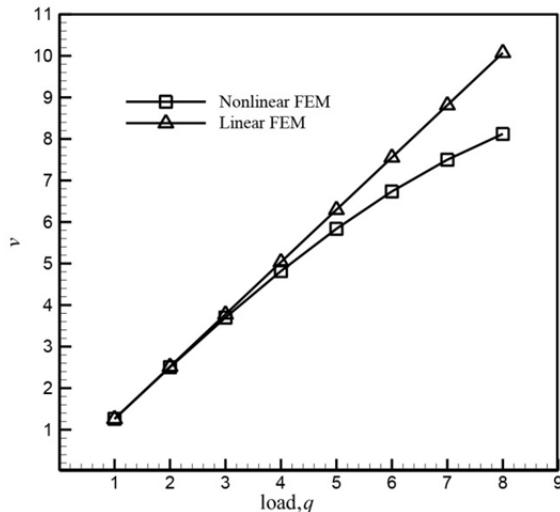


Fig. 4 Comparison of tip of the beam displacement with solving of linear and nonlinear finite element for various loading

شکل 4 مقایسه جابه‌جایی سر تیر با حل المان محدود خطی و غیر خطی برای بارگذاری‌های مختلف

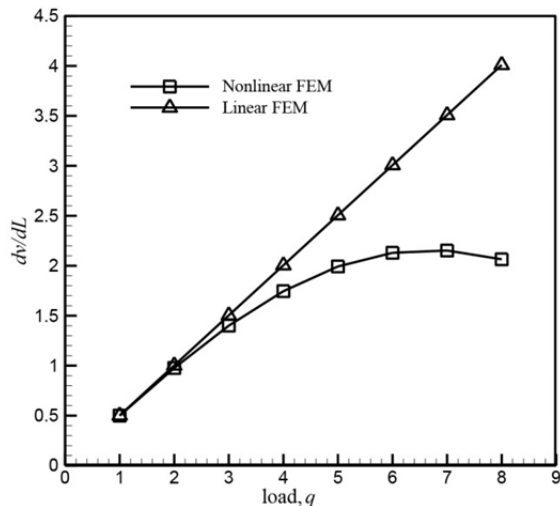


Fig. 5 Comparison of tip of the beam displacement sensitivity with respect to length with solving of linear and nonlinear finite element for various loading

شکل 5 مقایسه حساسیت جابه‌جایی سر تیر نسبت به طول با حل المان محدود خطی و غیرخطی برای بارگذاری‌های مختلف

6" آمده است. فرض ضریب هدایت گرمایی ماده k به صورت غیرخطی زیر

باشد:

$$k = k_0(1 + \beta T) \quad (35)$$

که k_0 هدایت گرمایی ثابت و β ضریب دمایی هدایت گرمایی باشد. فرض $k_0 = 0.2 \text{ w/mK}$ و $\beta = 2 \times 10^{-3} 1/K$ و تولید گرمای داخلی نداشته و شرایط مرزی به صورت زیر باشد:

$$r = r_i \Rightarrow T = 500K \quad (36)$$

$$r = r_o \Rightarrow q = -20 \text{ J/m} \quad (37)$$

برای اعتبارسنجی کد نوشته شده، در "شکل 7" توزیع دما برحسب شعاع با استفاده کد و تحلیل نرم‌افزار آباکوس رسم شده است و دیده می‌شود تطابق بسیار خوبی دارد. هدف محاسبه مشتق دمایی شعاع خارجی نسبت به شعاع

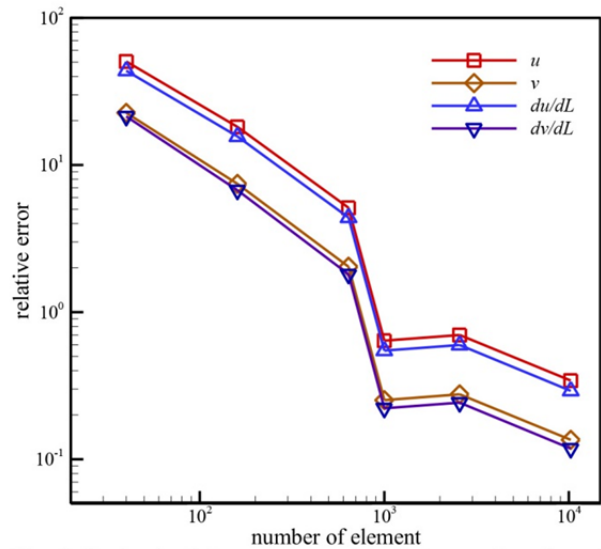


Fig. 2 Graph of relative error percentage in terms of number of elements for displacements and sensitivities

شکل 2 نمودار درصد خطای نسبی برحسب تعداد المان برای جابه‌جایی‌ها و حساسیت‌ها

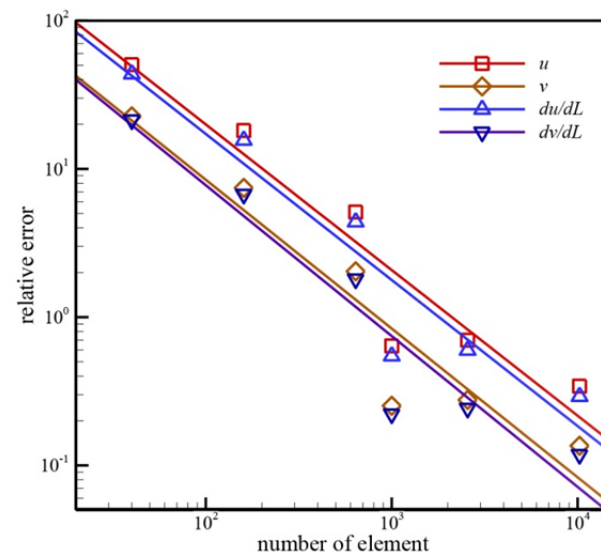


Fig. 3 Fit graph of relative error percentage in terms of number of elements for displacements and sensitivities

شکل 3 نمودار برازش درصد خطای نسبی برحسب تعداد المان برای جابه‌جایی‌ها و حساسیت‌ها

نیروها رشد بالاتری دارد. نتیجه حاصله اینست که نمی‌توان در این مسئله برای حل تیر فرض خطی را معتبر دانست و باید مسئله را به صورت غیرخطی مدل کرد. نکته جالب توجه اینست که اگرچه روند افزایش جابه‌جایی صعودی است اما حساسیت محاسبه شده با فرض غیرخطی ابتدا صعودی بوده و سپس با شیب کم نزولی شده است درحالی‌که با فرض خطی همواره صعودی است.

4-2- مثال عددی: آنالیز حساسیت هدایت گرمایی در استوانه توخالی بلند

هدایت گرمایی در یک استوانه توخالی با شعاع داخلی $r_i = 0.4 \text{ m}$ و شعاع خارجی $r_o = 1 \text{ m}$ را در نظر بگیرید. هندسه مسئله و مش‌بندی آن در "شکل

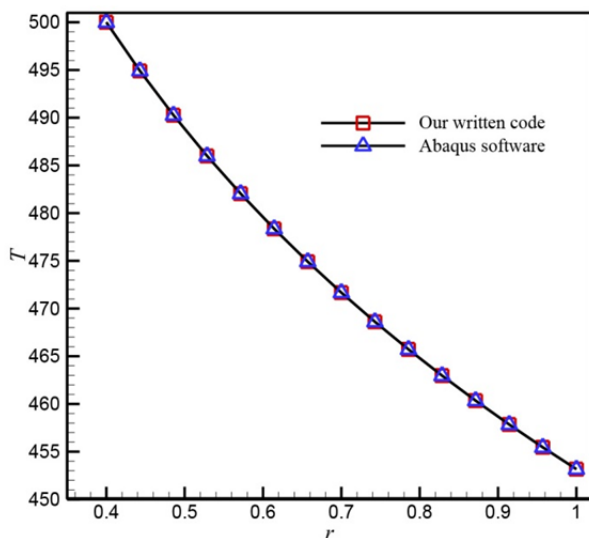


Fig. 7 plot of temperature relative to radius using our written code

شکل 7 رسم توزیع دما برحسب شعاع با استفاده از کدنویسی شده و نرم افزار آباکوس

جدول 6 همگرایی دما $T(r=r_0)$ و مشتق آن نسبت به r_0 و k_0

Table 6 The convergence of temperature $T(r=r_0)$ and its derivation relative to r_0 and k_0

تعداد المان	T	$\frac{dT}{dr_0}$	$\frac{dT}{dk_0}$	درصد تغییر T	درصد تغییر $\frac{dT}{dr_0}$	درصد تغییر $\frac{dT}{dk_0}$
22	463.3565	-47.9582	186.5094	-	-	-
72	454.0498	-51.2907	235.3482	2.0497	6.4974	20.7518
288	453.3285	-52.1730	239.0864	0.1591	1.6911	1.5635
840	453.1693	-52.3622	239.9076	0.0351	0.3613	0.3423
1869	453.1237	-52.4154	240.1476	0.0101	0.1015	0.0999
4224	453.0994	-52.4433	240.2745	0.0054	0.0531	0.0528

جدول 7 نتایج آنالیز حساسیت dT/dk_0 در مسئله گرمایی (مدل با تعداد المان 840)

Table 7 The results of sensitivity analysis dT/dk_0 in the heat problem (model with 840 elements)

اندازه گام	SAM پیشنهادی	TSAM	FDM
1.E-02	239.9076	240.5400	239.9076
1.E-03	239.9076	239.9139	239.9076
1.E-04	239.9076	239.9077	239.9076
1.E-05	239.9076	239.9076	239.9076
1.E-06	239.9076	239.9076	239.9076
1.E-07	239.9076	239.9076	239.9076
1.E-08	239.9076	239.9075	239.9076
1.E-09	239.9076	239.9071	239.9068
1.E-10	239.9076	239.9014	239.9102
1.E-11	239.9076	239.8821	239.9501
1.E-12	239.9076	239.5666	238.7522
1.E-13	239.9076	241.5845	235.9765
1.E-14	239.9076	349.5870	209.3138
1.E-15	239.9076	-312.6388	-7.5815

خارجی $dT(r_0)/dr_0$ و همچنین نسبت به ضریب k_0 ، $dT(r_0)/dk_0$ می باشد. همگرایی دما و حساسیت آن نسبت r_0 و k_0 در جداول 6 آمده است و میزان درصد خطای نسبی در "شکل 8" رسم شده است. روشن است که میزان خطا برای دما و همچنین حساسیت آن با تعداد المان رابطه مستقیم دارد. نتیجه های مشابه با آنچه در مثال قبل مشاهده شد. در این نمودارها شیب نمودار اندکی از -1 کمتر است (حدودا -1.5) که به خوش رفتار بودن مسئله انتقال حرارت برمی گردد.

در جدول 7 و 8 نتایج آنالیز حساسیت با طول گام های مختلف با استفاده از روش پیشنهادی (New SAM) و با استفاده از روش تفاضل محدود (FDM) از روش نیمه تحلیلی مرسوم (TSAM) برای مقایسه آمده است.

نتایج نشان می دهد که هر سه روش یعنی روش پیشنهادی (New SAM)، روش نیمه تحلیلی مرسوم (TSAM) و روش تفاضل محدود جواب های یکسانی را نتیجه می دهند و این دقت روش پیشنهادی را تایید می کند. TSAM در این مسئله دارای خطای ذاتی نمی باشد زیرا مسئله دارای چرخش صلب گونه ندارد همچنین دیده می شود برای رنج وسیعی از طول گام ها تغییری در اندازه حساسیت نشده است که تایید می کند دقت حساسیت ها در روش المان محدود بیشتر وابسته به دقت تحلیل المان محدود دارد. در طول گام های کوچکتر از 10^{-12} دیده می شود که روش های سنتی دقت خود را از دست داده اند در حالی که روش پیشنهادی پایدار بوده و وابسته به طول گام نیستند.

در جدول 9 زمان نسبی محاسبه با روش های مختلف نشان داده شده است. واضح است که زمان محاسباتی روش ارائه شده و روش TSAM تقریباً از یک مرتبه هستند و حتی در این مسئله هزینه روش ارائه شده پایین تر است در حالی که روش تفاضل محدود همان طور که انتظار می رفت روشی پرهزینه است.

5- نتیجه گیری

آنالیز حساسیت گسسته از کارایی خوبی برخوردار است و در زمان محاسبه نسبت به دیگر روش ها صرفه جویی می کند زیرا مقادیر حساسیت را تنها در جاهایی که تحلیل گر می خواهد محاسبه می کند. اما روش های رایج از شیوه

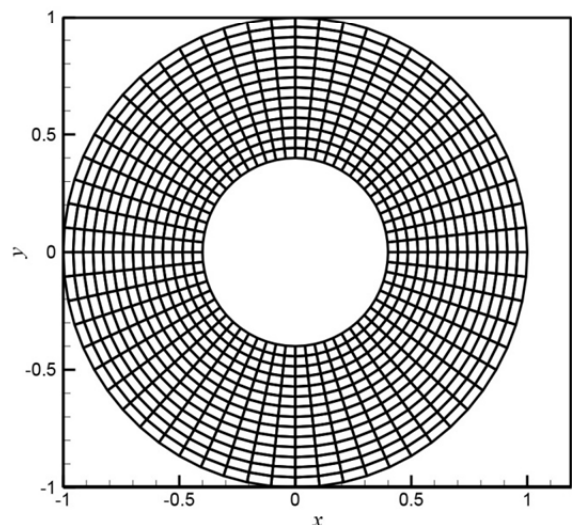


Fig. 6 The geometry and mesh of a hollow cylinder for the heat problem

شکل 6 هندسه و مش بندی استوانه تو خالی بلند در مسئله گرمایی

با بهره‌گیری از مزایای روش حساسیت گسسته و متغیرهای مختلط که تحت تأثیر اندازه طول گام اختلال قرار نمی‌گیرد این مقاله رویه محاسباتی جدیدی برای محاسبه حساسیت عددی بر پایه روش حساسیت گسسته و روش متغیرهای مختلط (CVM) در مسائل سازه‌ای غیرخطی ارائه می‌دهد و اثبات می‌کند که روش ارائه‌شده به همان نتایج روش CVM منتهی می‌شود. با چندین مثال برتری روش ارائه شده نسبت به روش‌های محاسباتی مرسوم نشان داده شده است. اگر تنها اندازه گام کوچک انتخاب شود خطای گرد کردن قابل اغماض است و این روش حل پایداری را برای حساسیت مدل غیرخطی فراهم می‌آورد. نتایج نشان می‌دهد که روش تفاضل محدود و روش ارائه شده از دقت خوبی برخوردارند ولی روش نیمه تحلیلی مرسوم دارای خطای ذاتی در بعضی مسائل می‌باشد. البته باید در انتخاب گام در روش تفاضل محدود و روش نیمه تحلیلی مرسوم دقت کرد. زمان محاسبه حساسیت‌ها نیز در روش ارائه شده همانند روش نیمه تحلیلی مرسوم پایین است اما روش تفاضل محدود بالاست. از دیگر مزایای روش ارائه شده حجم پایین حافظه اشغال شده و سادگی پیاده‌سازی آن است. با بررسی همگرایی نتایج حاصل از حل المان محدود مشخص شد که حساسیت‌ها مستقل از روش محاسباتی به کار رفته هستند و همانند دیگر نتایج روش المان محدود وابسته به تعداد المان‌ها می‌باشند.

6- مراجع

- [1] H. A. Jahangiri, A. Jahangiri, Topology optimization of heat conduction problem via Level-Set method and the Finite Elements analysis, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 12, pp. 703-710, 2016. (in Persian)
- [2] V. Tahmasbi, M. Ghoreishi, M. Taheri, Sensitivity analysis of material removal rate in dry electro-discharge machining process, *Modares Mechanical Engineering, Proceedings of the Advanced Machining and Machine Tools Conference*, Vol. 15, No. 13, pp. 382-386, 2015. (in Persian)
- [3] M. H. Djavahreshkian, A. Esmacili, Aerodynamic modification of high-rise buildings based on adjoint method to reduce wind induced forces, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 4, pp. 221-229, 2016. (in Persian)
- [4] P. Bakshi, P. C. Pandey, Semi-analytical sensitivity using hybrid finite elements, *Computers & Structures*, Vol. 77, pp. 201-213, 2000.
- [5] M. S. Choi, J. H. Byun, Sensitivity analysis for free vibration of rectangular plate, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, pp. 1610-1625, 2013.
- [6] A. Voorhees, H. Millwater, R. Bagley, Complex variable methods for shape sensitivity of finite element models, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 47, No. 10, pp. 1146-1156, 2011.
- [7] A. Voorhees, H. Millwater, R. Bagley, P. Golden, Fatigue sensitivity analysis using complex variable methods, *International Journal of Fatigue*, Vol. 40, pp. 61-73, 2012.
- [8] A. Gomez-Farias, A. Montoya, H. Millwater, Complex finite element sensitivity method for creep analysis, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 132, pp. 27-42, 2015.
- [9] F. Ilinca, D. Pelletier, A continuous shape sensitivity equation method for unsteady laminar flows, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol. 21, pp. 255-266, 2007.
- [10] S. H. Chung, Y. S. Kwon, S. J. Park, R. M. German, Sensitivity analysis by the adjoint variable method for optimization of the die compaction process in particulate materials processing, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 45, No. 11, pp. 836-844, 2009.
- [11] W. Wang, P. M. Clausen, K. U. Bletzinger, Improved semi-analytical sensitivity analysis using a secant stiffness matrix for geometric nonlinear shape optimization, *Computers & Structures*, Vol. 146, pp. 143-151, 2015.
- [12] M. Hassanzadeh, Computation of shape design sensitivities for linear FEM using modified semi-analytical method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 11, pp. 73-80, 2015. (In Persian)
- [13] W. Squire, G. Trapp, Using complex variables to estimate derivatives of real functions, *Siam Review*, Vol. 40, No. 1, pp. 110-112, 1998.
- [14] S. Oral, An improved semianalytical method for sensitivity analysis, *Structural optimization*, Vol. 11, No. 1-2, pp. 67-69, 1996.
- [15] G. Cheng, N. Olhoff, New method of error analysis and detection in semi-analytical sensitivity analysis, In: Rozvany G.I.N. (eds) *Optimization of Large Structural Systems*. NATO ASI Series (Series E: Applied Sciences), vol. 231, pp. 361-383, Dordrecht, Springer, 1993.

جدول 8 نتایج آنالیز حساسیت dT/dr_0 در مسئله گرمایی (مدل با تعداد المان 840)
Table 8 The results of sensitivity analysis dT/dr_0 in the heat problem (model with 840 elements)

FDM	TSAM	SAM پیشنهادی	اندازه گام
-55.3767	-52.3630	-49.6581	1.E-02
-52.3903	-52.3617	-52.3332	1.E-03
-52.3620	-52.3617	-52.3614	1.E-04
-52.3617	-52.3617	-52.3617	1.E-05
-52.3617	-52.3617	-52.3617	1.E-06
-52.3617	-52.3617	-52.3617	1.E-07
-52.3617	-52.3617	-52.3617	1.E-08
-52.3615	-52.3622	-52.3617	1.E-09
-52.3612	-52.3602	-52.3617	1.E-10
-52.3726	-52.3187	-52.3617	1.E-11
-52.2945	-53.1486	-52.3617	1.E-12
-54.2074	-55.7066	-52.3617	1.E-13
-29.9294	-119.3712	-52.3617	1.E-14
-38.3982	-255.7954	-52.3617	1.E-15

جدول 9 مقایسه زمان نسبی شبیه‌سازی کد کامپیوتری برای مسئله گرمایی
Table 9 Comparison of execution times in the heat problem

زمان شبیه‌سازی نسبی	روش
1	روش ارائه شده
1.1	روش نیمه تحلیلی مرسوم
1.64	روش تفاضل محدود

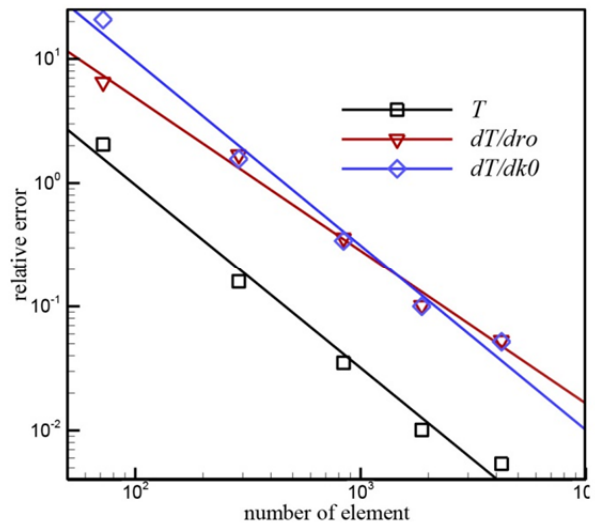


Fig. 8 Fit graph of relative error percentage in terms of number of elements for temperature and its sensitivities

شکل 8 نمودار برازش درصد خطای نسبی برحسب تعداد المان برای دما و حساسیت‌های آن

دقیق برای مشتق‌گیری ماتریس سفتی و ماتریس جرم بهره می‌برد. مشتق‌گیری در این شیوه به صورت دقیق برای هر نوع المان محدود می‌تواند طاق‌ت فرسا باشد. برای بهبود کارایی روش حساسیت گسسته، مشتق‌گیری دقیق می‌تواند با شیوه عددی تفاضل محدود جایگزین شود. اما شیوه‌های محاسبه حساسیت مرسوم شدیداً وابسته به مقادیر گام می‌باشند.

- [19] H. de Boer, F. van Keulen, Refined semi-analytical design sensitivities, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, No. 46-47, pp. 6961-6980, 2000.
- [20] K. U. Bletzinger, M. Firl, F. Daoud, Approximation of derivatives in semi-analytical structural optimization, *Computers & Structures*, Vol. 86, No. 13-14, pp. 1404-1416, 2008.
- [21] J. N. Reddy, *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, OUP Oxford, pp. 328-365, 2004
- [22] J. M. Pajot, K. Maute, Analytical sensitivity analysis of geometrically nonlinear structures based on the co-rotational finite element method, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 42, pp. 900-913, 2006.
- [16] N. Olhoff, J. Rasmussen, E. Lund, A method of "exact" numerical differentiation for error elimination in finite-element-based semi-analytical shape sensitivity analyses, *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 21, No. 1, pp. 1-66, 1993.
- [17] E. Lund, N. Olhoff, Shape design sensitivity analysis of eigenvalues using "exact" numerical differentiation of finite element matrices, *Structural optimization*, Vol. 8, No. 1, pp. 52-59, 1994.
- [18] F. Van Keulen, H. De Boer, Rigorous improvement of semi-analytical design sensitivities by exact differentiation of rigid body motions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 42, No. 1, pp. 71-91, 1998.