

برداشت انرژی ارتعاشی در پیکره‌بندی پیزومگنتوالاستیک با استفاده از تشدید فوق هارمونیک

امین یوسف‌پور¹، محمد صفی‌خانی محمودی¹، محمدرضا حائری یزدی^{2*}، آرش بهرامی³

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

* تهران، صندوق پستی 11155-4563، myazdi@ut.ac.ir

چکیده

عوامل غیرخطی سبب بروز تشدیدهای ثانویه همچون تشدید فوق‌هارمونیک و تشدید زیرهارمونیک در سیستم‌ها می‌شوند. تشدیدهای فوق‌هارمونیک در کسری از فرکانس طبیعی سیستم رخ می‌دهند و می‌توانند پاسخ با دامنه‌ی زیادی را فعال کنند. استفاده از این تشدیدها به دلیل پایین بودن فرکانس آن‌ها برای سیستم‌های برداشت انرژی می‌تواند بسیار مفید باشد. هدف از این پژوهش، بررسی سیستم برداشت انرژی ارتعاشی غیرخطی با هندسه‌ی پیزومگنتوالاستیک تحت تحریک فوق‌هارمونیک می‌باشد. در مقاله‌ی پیش‌رو معادلات حاکم بر سیستم در دو حالت پایداری یگانه و پایداری دوگانه با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه حل شده و حالاتی که فرکانس تحریک خارجی برابر با فرکانس تشدید فوق‌هارمونیک است، بررسی می‌شود. در این حالات جابه‌جایی نوک تیر و میزان ولتاژ خروجی به دست آمده و نشان داده می‌شود که تشدید فوق‌هارمونیک برای بهره‌برداری از سیستم‌های برداشت انرژی غیرخطی مفید است و باعث افزایش انرژی برداشت‌شده در این سیستم‌ها می‌شود. همچنین میزان انرژی به دست آمده در سیستم با پایداری یگانه و سیستم با پایداری دوگانه مقایسه شده است. مشاهده می‌شود سیستم با پایداری دوگانه برای برداشت انرژی مناسب‌تر است. علاوه بر روش مقیاس‌های چندگانه، با استفاده از روش عددی رانگ-کوتا پاسخ‌های سیستم به دست آمده است. نتایج روش مقیاس‌های چندگانه با نتایج روش حل عددی مقایسه شده است. مشاهده می‌شود نتایج هر دو روش تطابق بسیار خوبی دارند.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 04 بهمن 1396
پذیرش: 15 فروردین 1397
ارائه در سایت: 07 اردیبهشت 1397
کلید واژگان:
برداشت انرژی
پیزومگنتوالاستیک
تشدید فوق‌هارمونیک
روش مقیاس‌های چندگانه

Piezomagnetoelastic vibration energy harvesting with superharmonic resonance

Amin Yousefpour, Mohammad Safikhani Mahmoudi, Mohammad Reza Hairi Yazdi*, Arash Bahrami

Department of Mechanical Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

* P.O.B. 11155-4563, Tehran, Iran, myazdi@ut.ac

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 24 January 2018
Accepted 04 April 2018
Available Online 27 April 2018

Keywords:

Energy harvesting
Piezomagnetoelastic
Superharmonic resonance
Method of multiple scales

ABSTRACT

Nonlinearities give rise to secondary resonances such as superharmonic and subharmonic resonances. The superharmonic resonance can activate large-amplitude responses when the excitation frequency is a fraction of the fundamental frequency of the system. These low frequency excitations are very beneficial for energy harvesting systems. This paper presents an analytical investigation of vibrational energy harvesters with superharmonic excitation in a piezomagnetoelastic configuration. A piezomagnetoelastic power generator is assumed to operate in the monostable and bistable modes. Nonlinear differential equations governing the oscillations of the system is solved using the method of multiple scales. System responses to the superharmonic resonance including the cantilever tip displacement and the output voltage are determined. It is found that employing the superharmonic resonance can increase the amount of harvested energy in the system. The root mean square value of the output voltage is obtained for several cases in both monostable and bistable modes. The power generated in monostable and bistable modes is then compared through numerical simulations. It is observed that the bistable mode is more convenient for harvesting energy. In addition, a Runge-Kutta numerical scheme is used to solve the differential equations. It is shown that the perturbation solution is in a close agreement with the numerical solution.

آبی بهره برده‌اند. درحالی‌که ما همچنان به این تکنیک‌ها برای تامین بخش زیادی از انرژی خود نیازمندیم، استفاده از روش‌های نوین با توجه به پیشرفت فناوری‌های مختلف برای تامین انرژی موردنیاز سیستم‌ها ضروری به نظر می‌رسد. به‌عنوان نمونه با پیشرفت ساخت قطعات الکترونیکی کم‌مصرف از

1- مقدمه

استفاده از انرژی‌هایی که در محیط پیرامونی وجود دارد، همواره موضوع مهمی بوده است. انسان‌ها از گذشته تاکنون برای تامین انرژی موردنیاز خود از روش‌های گوناگونی همچون آسیاب‌های بادی، بادبان کشتی‌ها و چرخ‌های

دادند که توان به دست آمده در مود اول تیر بسیار بیشتر از مودهای بعدی است.

مسئله مهم روش استخراج انرژی و تاثیر حالات مختلف شرایط محیطی بر میزان انرژی تولید شده می باشد. روش های متعارف برداشت انرژی بر اساس پدیده تشدید خطی طراحی می شوند و در نتیجه مشکلاتی از جمله حساسیت های شدید به عدم قطعیت پهنای باند فرکانسی را به همراه دارند. در بررسی سیستم های خطی، دستگاه ها و ابزار آلات باید به گونه ای تنظیم شده باشند که فرکانس تحریک منطبق بر فرکانس طبیعی سیستم باشد. لذا عملکرد خوب دستگاه مربوط به یک ناحیه ی فرکانسی محدود است که ممکن است در عمل به سهولت به دست نیاید. به منظور غلبه بر این موضوع، سیستم های برداشت انرژی غیر خطی برای افزایش پهنای باند فرکانس طراحی می شوند. رویکرد استفاده از روش های غیر خطی در طراحی دستگاه های برداشت انرژی بسیار نوید بخش و کارآمد است [11]. یانگ و همکاران [12] نمونه ای از یک سیستم برداشت انرژی پیزوالکتریک شامل عوامل غیر خطی هندسی را مورد بررسی قرار دادند. آن ها نشان دادند که با افزایش ضریب کوپلینگ غیر خطی ولتاژ خروجی افزایش می یابد. جهانی و آقازاده [13] نیز سیستم برداشت انرژی دارای عوامل غیر خطی مختلف از جمله عوامل غیر خطی هندسی، میرایی و مادی را مورد مطالعه قرار دادند و نشان دادند که افزایش ضریب سفتی غیر خطی سبب افزایش بیشینه ی توان تولیدی می شود. در نظر گرفتن جملات غیر خطی موجود در معادلات، این امکان را برای ما فراهم می کند که در محدوده ی وسیع تری از نظر فرکانسی، پاسخ ارتعاشی با دامنه ی بزرگ دریافت کنیم. لذا محققان زیادی از این ویژگی بهره برده اند تا عملیات برداشت انرژی را در طیف فرکانسی گسترده تری ممکن سازند [14].

یکی از مزیت های سیستم های غیر خطی وجود نقاط تعادل چندگانه در این سیستم ها است. کرمی و اینمن [15] با استفاده از تئوری اغتشاشات در دامنه ی ارتعاشاتی کوچک و انتگرال گیری عددی در دامنه ی ارتعاشاتی بزرگ سیستم برداشت انرژی با پایداری دوگانه را در حالت تشدید اولیه مورد بررسی قرار دادند.

از جمله مسائلی که برای سیستم های برداشت انرژی ارتعاشی وجود دارد، این است که سیستم بتواند در فرکانس های پایین انرژی قابل توجهی برداشت کند. یکی از مزیت های استفاده از سیستم های برداشت انرژی غیر خطی این است که در این گونه سیستم ها علاوه بر فرکانس طبیعی، در فرکانس های تشدید فوق هارمونیک¹ می تواند پاسخ هایی با دامنه ی زیاد فعال شود. از آنجا که فرکانس طبیعی سیستم معمولاً زیاد است و ارتعاشات موجود در محیط معمولاً فرکانس کمی دارند، استفاده از تحریک فوق هارمونیک که کسری از فرکانس طبیعی سیستم است، برای برداشت انرژی می تواند بسیار مفید باشد. استفاده از تحریک فوق هارمونیک در تحقیقات گذشته تنها در بعضی هندسه ها و حالات خاص مانند مکانیزم برداشت انرژی با هندسه ی M شکل [16] و برداشت انرژی در سیستم پیزومگنتوالاستیک در حالت پایداری دوگانه با استفاده از روش موازنه ی هارمونیک ها² مورد بررسی قرار گرفته است [17]. در تحقیقات گذشته برداشت انرژی در سیستم پیزومگنتوالاستیک در حالت پایداری یگانه با استفاده از تشدید فوق هارمونیک تاکنون بررسی نشده است. همچنین برداشت انرژی در سیستم پیزومگنتوالاستیک در حالت پایداری یگانه و پایداری دوگانه با استفاده از روش تئوری اغتشاشات³ در

جمله حس گرهای بی سیم، انتقال دهنده های داده، کنترل کننده ها و ایمپلنت های پزشکی که تنها چند نمونه از فناوری هایی هستند که در سال های اخیر با پیشرفت تکنولوژی به توان مصرفی کمتر از میلی وات رسیده اند، با استفاده از روش های نوین از جمله برداشت انرژی ارتعاشی هدر رونده در محیط می توان انرژی مورد نیاز این قطعات کم مصرف را تامین کرد [2,1].

تامین انرژی از منبع مستقیم مشکلاتی چون سیم های اتصال، تعمیر و نگهداری و طول عمر کوتاه منبع انرژی را به همراه دارد. از همه مهم تر، در برخی کاربردهای حیاتی مثل قلب انسان، استفاده از باتری ها و منابع انرژی با توجه به طول عمر محدودشان دشواری های زیادی را به همراه دارد. این مشکلات و همچنین انگیزه ی استفاده از انرژی های هدر رونده، تحقیقات اخیر را به سمت برداشت انرژی الکتریکی از محیط سوق داده است [3].

برداشت انرژی به معنی جمع آوری و استفاده از انرژی های هدر رونده در محیط اطراف است. وسایل و دستگاه های برداشت انرژی به منظور جمع آوری انرژی از محیط اطراف و تبدیل آن به انرژی الکتریکی قابل استفاده طراحی شده اند. از جمله انرژی هایی که در محیط وجود دارد و هدر می روند، انرژی ارتعاشی محیط است. این منابع انرژی نامحدود همواره در محیط اطراف وجود دارند. در میان منابع مختلف انرژی محیطی، برداشت انرژی از ارتعاشات مکانیکی به دلیل در دسترس بودن، رواج زیادی پیدا کرده است [4]. با توجه به این که قطعات الکتریکی نوین نیازمند توان بسیار کمی هستند، برداشت انرژی از محیط امروزه بسیار مورد توجه قرار گرفته است. با دریافت انرژی مورد نیاز از محیط به دلیل عدم نیاز به شارژ و تعویض باتری، نیاز به مراقبت های ویژه از سیستم از بین می رود که این خود در کاهش هزینه ها بسیار موثر است. سیستم های برداشت انرژی ارتعاشی در حال حاضر کاربردهای متنوعی در زمینه های مختلف فناوری دارند. به عنوان مثال، برای ایمپلنت های پزشکی از جمله ضربان ساز قلب و محرک های نخاعی، در دسترس بودن یک منبع تغذیه قابل اطمینان برای جایگزینی با باتری ضروری است تا ریسک خرابی و نابودی سیستم را برطرف کند [5]. این مقاله بر روی برداشت انرژی از ارتعاشات مکانیکی تمرکز دارد. برخی مواردی که می توان برای جذب انرژی استفاده کرد ارتعاشات پل ها، حرکت تابر خودروها و حتی ضربان قلب انسان می باشد.

برداشت انرژی از ارتعاشات مکانیکی توسط مواد پیزوالکتریک، مبدل های الکترومغناطیسی و مبدل های الکترواستاتیکی انجام می شود. تحقیقات زیادی در مورد برداشت انرژی از پیزوالکتریک ها صورت گرفته است. بزرگترین مزیت مواد پیزوالکتریک در برداشت انرژی نسبت به دو روش دیگر چگالی انرژی بالای این مواد و سهولت استفاده از آن ها است [6]. شن و همکاران [7] عملکرد سیستم های برداشت انرژی با استفاده از انواع مختلف مواد پیزوالکتریک و نحوه ی به کار بردن آن ها را مورد بررسی قرار دادند. در هندسه ی پیزومگنتوالاستیک که در این مقاله مورد مطالعه قرار گرفته است از مواد پیزوالکتریک برای برداشت انرژی استفاده می شود.

اومدا و همکاران [8] جزو اولین پژوهشگرانی بودند که روی مسئله برداشت انرژی ارتعاشی مطالعه کردند و مدل پیشنهادی آن ها یک مدل گسسته بود که از یک سیستم جرم و فنر و میراکننده تشکیل شده بود. آجیتساریا و همکاران [9] تیر یکسر گیردار با لایه های پیزوالکتریک را با فرض تیر اولیبر-برنولی و تیموشینکو بررسی کردند. اصغرزاده و همکاران [10] برداشت انرژی از ارتعاشات تیر دوزنقه ای با یک لایه ی پیزوالکتریک را با استفاده از روش پارامترهای توزیع شده مورد بررسی قرار دادند. آن ها نشان

¹ Superharmonic resonance

² Harmonic balance method

³ Perturbation theory

به‌طور معمول جملات زمانی موده‌های ارتعاشی به‌وسیله‌ی معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم بر سیستم اعمال می‌شوند. معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دوم شامل تحریک پایه، جملات غیرخطی، میرایی و کوپلینگ الکترومکانیکی است. با استفاده از روش انرژی که برای این سیستم در مراجع [20,15] استفاده شده است و در پیوست نیز آمده است، معادلات حاکم بر سیستم به‌دست می‌آیند. معادله‌ی (1) رفتار سیستم برداشت انرژی پیزومگنتوالاستیک را بیان می‌کند.

$$m\ddot{r} + d\dot{r} + Kr + \bar{b}r^3 + \bar{\psi}_1 V_1 = F \cos(\omega\tau) \quad (1-a)$$

$$C_0 \dot{V}_1 + \frac{V_1}{R_1} - \bar{\psi}_2 \dot{r} = 0 \quad (1-b)$$

r جابه‌جایی نوک تیر، τ زمان، m اینرسی معادل سیستم، d ضریب میرایی سیستم، K ضریب سفتی خطی سیستم، \bar{b} ضریب سفتی غیرخطی سیستم، V_1 ولتاژ خروجی، $\bar{\psi}_1$ ضریب کوپلینگ ولتاژ خروجی در معادله ارتعاشی، C_0 ظرفیت خازنی ماده پیزوالکتریک، R_1 میزان بار مقاومت مربوط به مدار الکتریکی، $\bar{\psi}_2$ ضریب کوپلینگ مکانیکی در معادله الکتریکی، F دامنه تحریک خارجی و ω فرکانس تحریک خارجی است.

با توجه به تابع پتانسیل سیستم و مکان قرارگیری آهنرباهای ثابت بر روی پایه، سیستم می‌تواند دارای یک یا چند نقطه تعادل باشد. نکته‌ی مهم این‌که در سیستم با پایداری یگانه مقدار K مثبت است و در سیستم با پایداری دوگانه K عددی منفی است.

3- سیستم برداشت انرژی با پایداری یگانه

در حالتی که ضریب K مثبت باشد سیستم دارای یک نقطه‌ی تعادل است. درواقع نقطه‌ی تعادل صفر، تنها نقطه‌ی تعادل پایدار سیستم است و تیر حول این نقطه نوسان خواهد کرد. در این صورت سیستم موجود یک سیستم غیرخطی برداشت انرژی با پایداری یگانه است.

با استفاده از تغییر متغیرهای بیان‌شده در معادله‌ی (2)، معادله‌ی حاکم بر سیستم را بی‌بعد می‌کنیم.

$$t = \tau \sqrt{\frac{|K|}{m}}, u = \frac{r}{b_c}, v = \frac{C_0}{\bar{\psi}_2 l_p} V_1 \quad (2)$$

با استفاده از کمیت‌های بی‌بعد تعریف شده در معادله‌ی (2)، معادله‌ی بدون بعد حاکم بر سیستم برداشت پیزومگنتوالاستیک در حالت پایداری یگانه به‌صورت بیان شده در معادله‌ی (3) تبدیل می‌شود.

$$\ddot{u} + 2\mu\dot{u} + u + \alpha u^3 - \chi v = f \cos(\Omega t) \quad (3-a)$$

$$\dot{v} + \lambda v + \kappa u = 0 \quad (3-b)$$

کمیت‌های معادله‌ی (3) در رابطه‌ی (4) بیان شده است.

$$\alpha = \frac{\bar{b}b_c^2}{|K|}, \mu = \frac{d}{2\sqrt{m|K|}}, \chi = \frac{l_p \bar{\psi}_2}{b_c |K| C_p}, \kappa = \frac{b_c}{l_p} \quad (4)$$

$$\lambda = \frac{1}{R_1 C_0} \sqrt{\frac{m}{|K|}}, \Omega = \omega \sqrt{\frac{m}{|K|}}, f = \frac{F}{b_c |K|}$$

معادله‌ی (3)، معادله‌ی بی‌بعد حاکم بر سیستم برداشت انرژی غیرخطی با هندسه‌ی پیزومگنتوالاستیک در حالت پایداری یگانه است. u جابه‌جایی بدون بعد نوک تیر، v ولتاژ بی‌بعد خروجی، μ ضریب بی‌بعد میرایی مکانیکی، b_c نسبتی از ضخامت تیر، l_p طول مشخصه‌ی المان پیزوالکتریک، α ضریب جمله‌ی غیرخطی درجه سه، v ولتاژ خروجی بدون بعد، χ ضریب بدون بعد کوپلینگ پیزوالکتریک در معادله مکانیکی، f دامنه بی‌بعد تحریک خارجی، Ω فرکانس بی‌بعد تحریک خارجی و λ ضریب بی‌بعد کوپلینگ الکتریکی است که با مقاومت الکتریکی رابطه‌ی عکس دارد همچنین κ ضریب بدون بعد کوپلینگ پیزوالکتریک در معادله الکتریکی است. مقدار

حالت تشدید فوق‌هارمونیک تاکنون در تحقیقات گذشته بررسی نشده و نتایج این سیستم در دو حالت پایداری یگانه و دوگانه با یکدیگر مقایسه نشده است. در این پژوهش برداشت انرژی در پیکره‌بندی پیزومگنتوالاستیک در دو حالت پایداری یگانه و پایداری دوگانه با تحریک فوق‌هارمونیک با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه¹ بر پایه‌ی تئوری اغتشاشات بررسی شده و میزان انرژی الکتریکی خروجی محاسبه شده است.

در قسمت 2 معادلات کلی حاکم بر سیستم برداشت انرژی غیرخطی بررسی شده و بی‌بعد شده‌اند. سپس در قسمت 3 سیستم با پایداری یگانه مورد بررسی قرار گرفته و معادله‌ی حاکم بر این سیستم‌ها با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه بر پایه‌ی تئوری اغتشاشات حل شده است. نمودار پاسخ فرکانسی و پاسخ زمانی سیستم رسم شده است. همچنین حل عددی با استفاده از روش رانگ-کوتا انجام شده و سپس نتایج هر دو روش با یکدیگر مقایسه شده است. در قسمت 4 سیستم با پایداری دوگانه مورد بررسی قرار گرفته است و مانند قسمت 3 نتایج با روش مقیاس‌های چندگانه به‌دست آمده و با حل عددی مقایسه شده است. در بخش پیوست نیز معادلات حاکم بر سیستم برداشت انرژی با هندسه‌ی پیزومگنتوالاستیک با استفاده از روش انرژی به‌دست آمده است.

2- معادلات حاکم بر سیستم

در این قسمت معادلات حاکم بر سیستم برداشت انرژی با پیکره‌بندی پیزومگنتوالاستیک ارائه می‌شود. سیستم برداشت انرژی از تیر یکسر گیردار، آهنرباها و مدار برقی متصل به پیزوالکتریک تشکیل شده است. تیر یکسر گیردار این سیستم همراه با عوامل غیرخطی هندسی اولین بار توسط مون و هلمز [18] مورد بررسی قرار گرفت. در این هندسه از آهنرباهای ثابت جهت غیرخطی‌سازی سیستم استفاده می‌شود، نیروی مغناطیسی بین آهنربای نوک تیر و روی پایه‌ی سیستم باعث به‌وجود آمدن نیروی‌های غیرخطی در سیستم می‌شود. لایه‌های پیزوالکتریک که بر روی تیر قرار دارد انرژی ارتعاشی حاصل از جابه‌جایی تیر را جذب کرده و آن را تبدیل به انرژی الکتریکی می‌کند. لازم به توجه است که در پژوهش حاضر تمرکز مطالعه بر روی قسمت ارتعاشی تیر است، لذا معادلات مربوط به قسمت الکتریکی ساده‌سازی شده‌اند و تنها ضرایب کمیت‌های الکتریکی در معادلات آمده است.

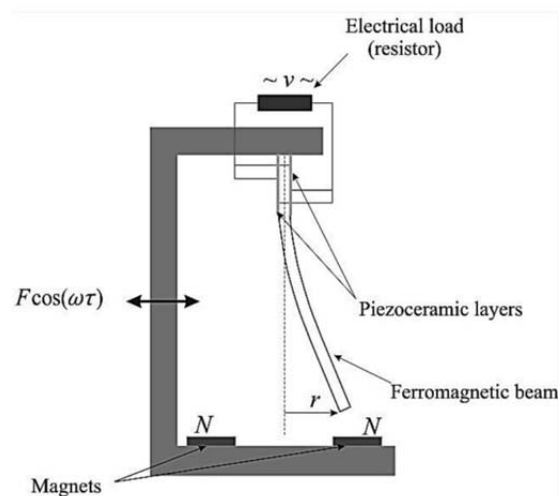


Fig. 1 Piezomagnetoelastic energy harvester mechanism [19]

شکل 1 پیکره‌بندی سیستم برداشت انرژی پیزومگنتوالاستیک [19]

¹ Method of multiple scales

سمت صفر میل کند، پاسخ های $x_0(t)$ و $v_0(t)$ پاسخ کلی سیستم را نشان می دهند. مشتقات زمانی به صورت بیان شده در معادله ی (8) هستند [21].

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n} \quad (8-a)$$

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 \quad (8-b)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0) \quad (8-c)$$

با جایگذاری معادلات (7) و (8) در معادله ی (6) و برابر قرار دادن ضرایب ε^0 و ε^1 معادلات به دو بخش تقسیم می شوند.

قسمتی از معادلات که مربوط به ε^0 است، در معادله ی (9) آمده است.

$$D_0^2 u_0 + u_0 = f \cos(\Omega t) \quad (9-a)$$

$$D_0 v_0 + \alpha v_0 = -\kappa D_0 u_0 \quad (9-b)$$

قسمت مربوط به ε^1 نیز به صورت بیان شده در معادله ی (10)، است.

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\bar{\mu} D_0 u_0 - \bar{\alpha} u_0^3 + \bar{\chi} v_0 \quad (10-a)$$

$$D_0 v_1 + \lambda v_1 = -D_1 v_0 - \kappa(D_0 u_1 + D_1 u_0) \quad (10-b)$$

پاسخ کلی معادله ی دیفرانسیل (9) در معادله ی (11) بیان شده است.

$$u_0 = A_1 e^{i\tau_0} + F_1 e^{i\Omega t_0} + cc \quad (11-a)$$

$$v_0 = \frac{-\kappa A_1 i}{i + \lambda} e^{i\tau_0} + \frac{-\kappa F_1 i \Omega}{i \Omega + \lambda} e^{i\Omega t_0} + cc \quad (11-b)$$

مقدار F_1 در معادله ی (12) آمده است.

$$F_1 = \frac{f}{2(1 - \Omega^2)} \quad (12)$$

ضریب A_1 مستقل از T_0 می باشد ولی با نرخ T_1 تغییر می کند. در واقع

A_1 تابعی از T_1 است. با حذف جملات سکولار مقدار ضریب A_1 به دست

می آید [21]. برای بررسی پاسخ به تحریک فوق هارمونیک فرکانس تحریک

سیستم $\Omega \approx \omega_n/3$ در نظر گرفته می شود و به وسیله ی پارامتر تنظیم در

معادله ی (13) توصیف می شود.

$$3\Omega = \omega_n + \varepsilon \sigma \quad (13)$$

در معادلات بی بعد حاکم بر سیستم که در این قسمت استفاده شده

است، $\omega_n = 1$ می باشد.

مقادیر به دست آمده u_0 و v_0 را در معادله ی (10-a) جایگذاری می کنیم.

$$D_0^2 u_1 + u_1 =$$

$$- [2i(\bar{A}_1 + \bar{\mu} A_1) + 3\bar{\alpha}(A_1 \bar{A}_1 + 2F_1^2) A_1] e^{i\tau_0}$$

$$- [2i\Omega \mu + 3\bar{\alpha}(2A_1 \bar{A}_1 + F_1^2)] F_1 e^{i\Omega t_0}$$

$$- \bar{\alpha} A_1^3 e^{3i\tau_0} - \bar{\alpha} F_1^3 e^{3i\Omega t_0} - 3\bar{\alpha} A_1^2 F_1 e^{i(2+\Omega)\tau_0}$$

$$- 3\bar{\alpha} A_1^2 F_1 e^{i(-2+\Omega)\tau_0} - 3\bar{\alpha} A_1 F_1^2 e^{i(1+2\Omega)\tau_0}$$

$$- 3\bar{\alpha} A_1 F_1^2 e^{i(1-2\Omega)\tau_0} - \frac{\chi \kappa A_1 i}{i + \lambda} e_0^{iT}$$

$$+ \frac{\chi \kappa F_1 i \Omega}{i \Omega + \lambda} e^{i\Omega t_0} + cc \quad (14)$$

در معادله ی (14)، \bar{A}_1 مزدوج ضریب A_1 است. و در این حالت:

$$3\Omega T_0 = (1 + \varepsilon \sigma) T_0 = T_0 + \varepsilon \sigma T_0 = T_0 + \sigma T_1 \quad (15)$$

سپس ضرایب جملات سکولار برابر صفر قرار داده می شوند. جملات

سکولار، جملاتی هستند که منجر به پاسخی می شوند که دامنه ی آن ها با

گذر زمان به صورت نامحدود رشد می کند. با مساوی صفر قرار دادن ضرایب

جملات سکولار معادله ی مربوط به حذف جملات سکولار به دست می آید که

در معادله ی (16) بیان شده است.

$$2i(\bar{A}_1 + \bar{\mu} A_1) + 3\bar{\alpha}(A_1 \bar{A}_1 + 2F_1^2) A_1 + \frac{\chi \kappa A_1 i}{i + \lambda}$$

$$+ \bar{\alpha} F_1^3 e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (16)$$

با حل معادله ی (16) ضریب A_1 به دست می آید. برای حل معادله ی

(16) ابتدا آن را با استفاده از معادله ی (17) به فرم قطبی بازنویسی می کنیم.

$$A_1 = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \quad (17)$$

کمیت های مکانیکی و الکتریکی سیستم که در این پژوهش استفاده شده در جدول 1 آمده است.

اگر عوامل غیرخطی و کوپلینگ قسمت های الکتریکی وجود نداشته

باشد، سیستم به یک ارتعاش کننده ی هارمونیک خطی تبدیل خواهد شد.

"شکل 2" نمودار انرژی پتانسیل سیستم با پایداری یگانه را نشان می دهد.

همان طور که در "شکل 2" مشخص است، در این حالت نقطه ی جابه جایی

صفر، نقطه ی تعادل پایدار سیستم است.

برای حل معادله ی حاکم بر سیستم با استفاده از روش مقیاس های

چندگانه، ابتدا معادلات حاکم بر سیستم را مقیاس سازی می کنیم. در روش

تئوری اغتشاشات برای بررسی تشدید فوق هارمونیک ناشی از جملات

غیرخطی مرتبه ی سه مقیاس سازی می بایست به گونه ای صورت گیرد که

جملات میرایی و عوامل غیرخطی و کوپلینگ الکتریکی در نهایت در یک

معادله ظاهر شوند و نیرو در معادله ی با یک مرتبه بالاتر ظاهر شود [15]. به

این منظور معادلات حاکم بر سیستم را با استفاده از روابط معادله ی (5)

مقیاس سازی می کنیم.

$$\mu = \varepsilon \bar{\mu}, \alpha = \varepsilon \bar{\alpha}, \chi = \varepsilon \bar{\chi} \quad (5)$$

در مقیاس سازی معادلات حاکم بر سیستم ε یک پارامتر قراردادی و

فرضی است که به معادله اضافه می شود تا مسئله ی غیرخطی به درجات

مختلف تقسیم شود و قابل حل باشد. معادله ی بدون بعد سیستم

پیزوالکتریک برداشت انرژی با پایداری یگانه به همراه عوامل غیرخطی درجه

سه پس از مقیاس سازی در معادله ی (6) بیان شده است.

$$\ddot{u} + \varepsilon 2\bar{\mu} \dot{u} + u + \varepsilon \bar{\alpha} u^3 - \varepsilon \bar{\chi} v = f \cos(\Omega t) \quad (6-a)$$

$$\dot{v} + \lambda v + \kappa \dot{u} = 0 \quad (6-b)$$

برای به دست آوردن جابه جایی نوک تیر و مقدار ولتاژ خروجی معادله ی

(6) حل می شود. در روش مقیاس های چندگانه ابتدا پاسخ به صورت توان های

ε بسط داده می شوند.

$$u = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \quad (7-a)$$

$$v = v_0(T_0, T_1) + \varepsilon v_1(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \quad (7-b)$$

$T_n = \varepsilon^n t$ مقیاس های مختلف زمانی را نمایش می دهد. زمانی که ε به

جدول 1 کمیت های مدل استفاده شده [19]

مقدار پارامتر	پارامتر
0.005	μ
0.05	χ
0.5	κ
0.05	λ

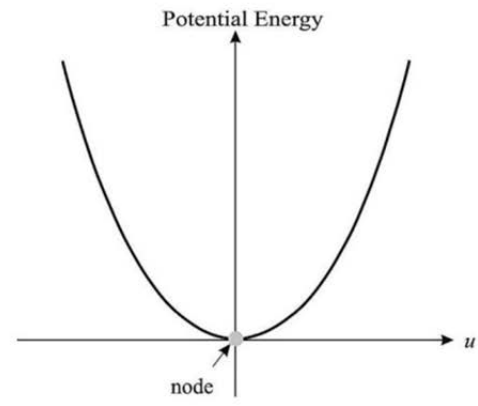


Fig 2 Potential energy function for mono-stable mode

شکل 2 نمودار انرژی پتانسیل سیستم برداشت انرژی ارتعاشی با پایداری یگانه

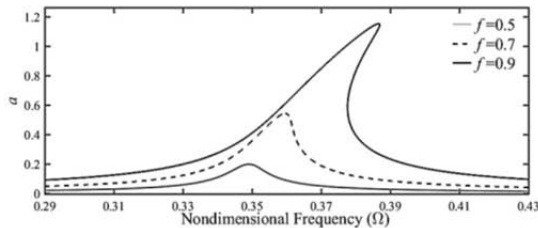


Fig. 4 Frequency response of the superharmonic resonance for the monostable energy harvesting system with different excitation amplitudes

شکل 4 نمودار پاسخ فرکانسی سیستم با پایداری یگانه در حالت تشدید فوق هارمونیک با دامنه تحریک متفاوت

غیرخطی سیستم، میزان بیشینه دامنه افزایش می‌یابد، لذا افزایش ضریب سفتی غیرخطی سبب افزایش انرژی برداشت شده می‌شود. "شکل 4" نمودار پاسخ فرکانسی برای حالات مختلف با میزان دامنه‌ی تحریک ورودی متفاوت را نشان می‌دهد. در این حالت $\alpha = 0.05$ در نظر گرفته شده است. مقدار دامنه‌ی a برای حالتی که دامنه‌ی تحریک خارجی متفاوت است، به دست آمده است. همان‌طور که در "شکل 4" نشان داده شده است با افزایش دامنه تحریک خارجی میزان بیشینه‌ی دامنه‌ی پاسخ افزایش می‌یابد. به‌عنوان مثال در حالتی که $f = 0.9$ است میزان بیشینه‌ی a برابر با 1.17 است.

معادله‌ی (23) پاسخ کلی سیستم برداشت انرژی با پایداری یگانه را در حالت تشدید فوق هارمونیک نشان می‌دهد.

$$u = a \cos(t + \beta) + 2F_1 \cos(\Omega t) + O(\epsilon) \quad (23-a)$$

$$v = \frac{\kappa a}{1 + \lambda^2} [\lambda \sin(t + \beta) - \cos(t + \beta)] + \frac{2\kappa F_1 \Omega}{\Omega^2 + \lambda^2} [\lambda \sin(\Omega t) - \Omega \cos(\Omega t)] + O(\epsilon) \quad (23-b)$$

"شکل 5-a" پاسخ زمانی جابه‌جایی نوک تیر در حالت ماندگار به تحریک فوق هارمونیک را نشان می‌دهد. مقدار ضریب $\alpha = 0.05$ و $f = 0.7$ در نظر گرفته شده است. حل عددی سیستم با استفاده از حل معادله‌ی (3) توسط روش رانگ-کوتای مرتبه‌ی چهار انجام شده است. حل عددی ابتدا دارای یک حالت گذرا است و پس از مدتی به حالت ماندگار می‌رسد. در "شکل 5" پاسخ حالت ماندگار رسم شده است. در این شکل نتایج حل عددی و حل با روش مقیاس‌های چندگانه در حالات ماندگار مقایسه شده است. تطابق نتایج هر دو روش درستی حل با روش مقیاس‌های چندگانه را نشان می‌دهد. "شکل 5-b" ولتاژ خروجی سیستم را نشان می‌دهد که با استفاده از معادله‌ی (23-b) رسم شده است. مقدار مؤثر² ولتاژ به دست آمده از سیستم برداشت انرژی با پایداری یگانه و با شرایط بررسی شده در این پژوهش برابر با 0.3143 است. همچنین روش حل عددی و حل مقیاس‌های چندگانه مورد بررسی قرار گرفته است و همان‌طور که در "شکل 5" مشخص است نتایج هر دو روش با یکدیگر تطابق بسیار خوبی دارند.

4- سیستم برداشت انرژی با پایداری دوگانه

در این قسمت انرژی برداشت شده از ارتعاشات سیستم پیزومگنتوالاستیک در حالتی که دارای دو نقطه‌ی تعادل پایدار است بررسی می‌شود. در این حالت تابع پتانسیل سیستم به دلیل تغییر مکان آهنرباها تغییر کرده است و آهنرباها به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که سیستم دارای دو نقطه‌ی تعادل پایدار می‌باشد. در این حالت نقطه‌ی صفر نقطه‌ی تعادل ناپایدار سیستم است.

² Root mean square

در این حالت معادله‌ی (16) به صورت بیان شده در معادله‌ی (18) تبدیل می‌شود.

$$i\dot{a} e^{i\beta} - a\beta' e^{i\beta} + ia\bar{\mu} e^{i\beta} + \frac{3}{2}\bar{\alpha} \left(\frac{1}{4}a^2 + 2F_1^2 \right) a e^{i\beta} + \frac{\bar{\chi}\kappa\bar{\alpha} e^{i\beta} (i\lambda + 1)}{2(1 + \lambda^2)} + \bar{\alpha} F_1^3 e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (18)$$

پس از جداسازی بخش حقیقی و موهومی، معادله‌ی (21) به دو معادله تبدیل می‌شود.

$$a' = -a\bar{\mu} - \frac{\bar{\chi}\kappa a \lambda}{2(1 + \lambda^2)} - \bar{\alpha} F_1^3 \sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (19-a)$$

$$a\beta' = 3\bar{\alpha} \left(\frac{1}{4}a^2 + 2F_1^2 \right) \frac{1}{2}a + \frac{\bar{\chi}\kappa a}{2(1 + \lambda^2)} + \bar{\alpha} F_1^3 \cos(\sigma T_1 - \beta) = 0 \quad (19-b)$$

سپس از تغییر متغیر معادله‌ی (20) استفاده می‌کنیم.

$$\gamma = \sigma T_1 - \beta \quad (20)$$

برای به دست آوردن پاسخ حالت ماندگار¹ سیستم تغییرات α و β صفر قرار داده می‌شود و معادله‌ی (19) در حالت ماندگار به معادله‌ی (21) تبدیل می‌شود.

$$a\bar{\mu} + \frac{\bar{\chi}\kappa a \lambda}{2(1 + \lambda^2)} = -\bar{\alpha} F_1^3 \sin(\gamma) \quad (21-a)$$

$$a\sigma + 3\bar{\alpha} \left(\frac{1}{4}a^2 + 2F_1^2 \right) \frac{1}{2}a + \frac{\bar{\chi}\kappa a}{2(1 + \lambda^2)} = -\bar{\alpha} F_1^3 \cos(\gamma) \quad (21-b)$$

پاسخ حالت ماندگار معادله‌ی (19) با حل معادله‌ی (21) به دست می‌آید.

$$\sigma = + \frac{\bar{\chi}\kappa}{2(1 + \lambda^2)} \pm \sqrt{\left(\frac{\bar{\alpha} F_1^3}{a} \right)^2 - \left(\bar{\mu} + \frac{\bar{\chi}\kappa}{2(1 + \lambda^2)} \right)^2} + \frac{3}{2}\bar{\alpha} \left(\frac{1}{4}a^2 + 2F_1^2 \right) \quad (22)$$

معادله‌ی (22)، معادله‌ی پاسخ فرکانسی حالت ماندگار سیستم برداشت انرژی با پایداری یگانه را در حالت تشدید فوق هارمونیک نشان می‌دهد. با استفاده از معادله‌ی (22) پاسخ فرکانسی سیستم برداشت انرژی در "شکل‌های 3 و 4" در نزدیکی فرکانس تشدید فوق هارمونیک رسم شده است. "شکل 3" نمودار پاسخ فرکانسی سیستم برداشت انرژی با پایداری یگانه را در حالت تشدید فوق هارمونیک با میزان ضریب سفتی غیرخطی متفاوت نمایش می‌دهد. همان‌طور که در نمودار مشخص است، در نزدیکی فرکانس فوق هارمونیک میزان a افزایش زیادی دارد به‌عنوان مثال در حالتی که ضریب $\alpha = 0.05$ است، بیشینه‌ی دامنه‌ی a برابر با 0.53 است. همچنین همان‌طور که در "شکل 3" نشان داده شده است، با افزایش ضریب سفتی

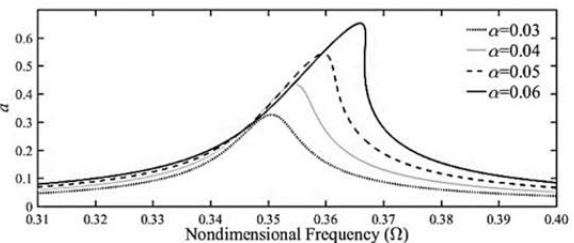


Fig. 3 Frequency response of the superharmonic resonance for the monostable energy harvesting system with different nonlinear stiffness coefficients

شکل 3 نمودار پاسخ فرکانسی سیستم با پایداری یگانه در حالت تشدید فوق هارمونیک با ضرایب سفتی غیرخطی متفاوت

¹ Steady state

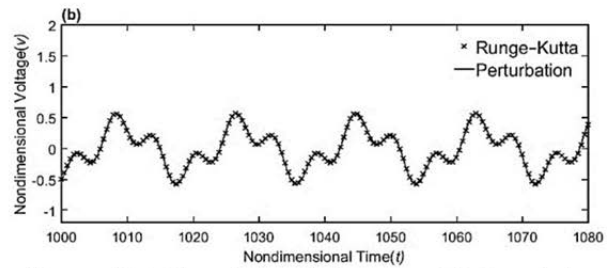
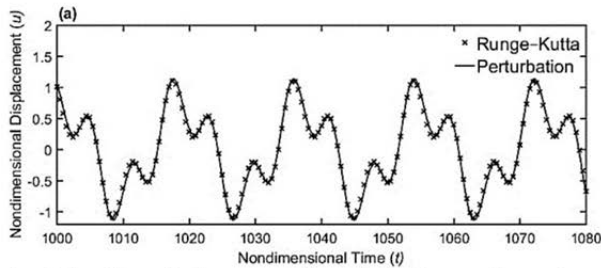


Fig. 5 Time history in the mono-stable mode for the super-harmonic resonance ($\Omega \approx \omega_n/3$): (a) dimensionless displacement and (b) dimensionless voltage

شکل 5 پاسخ زمانی در حالت پایداری یگانه به فرکانس تحریک فوق هارمونیک ($\Omega \approx \omega_n/3$): (a) جابه جایی بی بعد (b) ولتاژ بی بعد

x جابه جایی نوک تیر از نقطه تعادل پایدار سیستم است. در این حالت تابع پتانسیل آهنرباها به گونه ای تغییر کرده است که میزان ضریب جمله ی غیرخطی درجه سه کاهش یافته است. سپس معادلات حاکم بر سیستم را مقیاس سازی می کنیم. هدف از این قسمت بررسی رفتار سیستم در حالت تشدید فوق هارمونیک است که از عوامل غیرخطی درجه دو ناشی می شود لذا با استفاده از مرجع [21] و با توجه به این نکته که میزان ضریب α_b کاهش یافته است معادلات را با استفاده از رابطه ی (26) مقیاس سازی می کنیم.

$$\mu = \varepsilon \bar{\mu}, \chi = \varepsilon \bar{\chi}, \alpha_b = \varepsilon^2 \bar{\alpha}_b \quad (26)$$

در حالت پایداری دوگانه معادلات مقیاس سازی شده در معادله ی (27)

آمده است [16].

$$\ddot{x} + 2\varepsilon \bar{\mu} \dot{x} + x + \frac{3}{2} \varepsilon \sqrt{\bar{\alpha}_b} x^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \bar{\alpha}_b x^3 - \varepsilon \bar{\chi} v = f \cos(\Omega t) \quad (27-a)$$

$$\dot{v} + \lambda v + \kappa \dot{x} = 0 \quad (27-b)$$

و پاسخ به صورت توان های ε بسط داده می شوند.

$$x = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \quad (28-a)$$

$$v = v_0(T_0, T_1) + \varepsilon v_1(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \quad (28-b)$$

قسمتی از معادلات که مربوط به ε^0 است در معادله ی (29) آمده است.

$$D_0^2 x_0 + x_0 = f \cos(\Omega t) \quad (29-a)$$

$$D_0 v_0 + \lambda v_0 = -\kappa D_0 x_0 \quad (29-b)$$

قسمت مربوط به ε^1 نیز به صورت بیان شده در معادله ی (30) است.

$$D D_0^2 x_1 + x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - 2\bar{\mu} D_0 x_0 - \frac{3}{2} \sqrt{\bar{\alpha}_b} x_0^2 + \bar{\chi} v_0 \quad (30-a)$$

$$D_0 v_1 + \lambda v_1 = -D_1 v_0 - \kappa (D_0 x_1 + D_1 x_0) \quad (30-b)$$

پاسخ معادله ی (29) در معادله ی (31) بیان شده است.

$$x_0 = A_1 e^{i\Omega T_0} + F_1 e^{i\Omega T_0} + cc \quad (31-a)$$

$$v_0 = \frac{-\kappa A_1 i}{i + \lambda} e^{i\Omega T_0} + \frac{-\kappa F_1 i \Omega}{i \Omega + \lambda} e^{i\Omega T_0} + cc \quad (31-b)$$

$$F_1 = \frac{f}{2(1 - \Omega^2)} \quad (31-c)$$

حال مقادیر به دست آمده x_0 و v_0 را در معادله ی (30-a) جایگذاری

می کنیم.

$$D_0^2 x_1 + x_1 = -[2i(\bar{A}_1 + \bar{\mu} A_1)] e^{i\Omega T_0} - 2i\Omega \bar{\mu} F_1 e^{i\Omega T_0} + \frac{3}{2} \sqrt{\bar{\alpha}_b} A_1^2 e^{2i\Omega T_0} - \frac{3}{2} \sqrt{\bar{\alpha}_b} F_1^2 e^{2i\Omega T_0} - \frac{3}{2} \sqrt{\bar{\alpha}_b} A_1 \bar{A}_1 - \frac{3}{2} \sqrt{\bar{\alpha}_b} F_1^2 - 3\sqrt{\bar{\alpha}_b} F_1 \bar{A}_1 e^{i(\Omega-1)T_0} - 3\sqrt{\bar{\alpha}_b} A_1 F_1 e^{i(\Omega+1)T_0} + \frac{\bar{\chi} \kappa A_1 i}{i + \lambda} e^{i\Omega T_0} + \frac{i \bar{\chi} \kappa F_1 \Omega}{i \Omega + \lambda} e^{i\Omega T_0} + cc \quad (32)$$

در این حالت فرکانس تحریک سیستم به صورت $\Omega \approx \omega_n/2$ در نظر

گرفته می شود و به وسیله ی پارامتر تنظیم توصیف می شود.

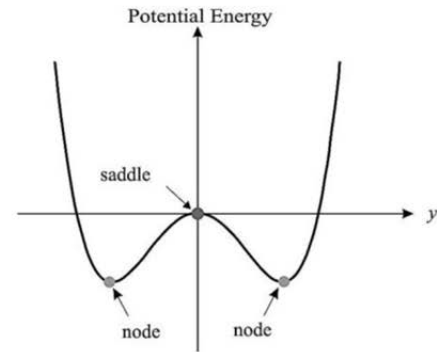


Fig. 6 Potential energy function for bistable mode

شکل 6 نمودار انرژی پتانسیل سیستم برداشت انرژی ارتعاشی با پایداری دوگانه

"شکل 6" نمودار انرژی پتانسیل سیستم با پایداری دوگانه را نشان می دهد. همان طور که در شکل مشخص است در این حالت سیستم دارای سه نقطه ی تعادل است که نقطه ی جابه جایی صفر نقطه ی تعادل ناپایدار است و دو نقطه ی دیگر، نقاط تعادل پایدار سیستم می باشند. در این حالت ضریب سفتی غیرخطی سیستم با استفاده از α_b نشان داده شده است. در سیستم با پایداری دوگانه که در این قسمت بررسی می شود فاصله و شدت آهنرباها به گونه ای تغییر یافته که مقدار ضریب α_b کمتر از ضریب غیرخطی در سیستم با پایداری یگانه است. معادله ی بی بعد حاکم بر سیستم برداشت انرژی غیرخطی با پایداری دوگانه در معادله ی (24) آمده است [15].

$$\ddot{y} + 2\mu \dot{y} - \frac{\gamma}{2} (1 - \alpha_b y^2) - \chi v = f \cos(\Omega t) \quad (24-a)$$

$$\dot{v} + \lambda v + \kappa \dot{y} = 0 \quad (24-b)$$

معادله ی (24)، معادله ی حاکم بر سیستم برداشت انرژی غیرخطی با پایداری دوگانه که با استفاده از دولاپه ی پیروالکترونیک بر روی سطوح بالا و پایین تیر برداشت انرژی صورت می گیرد را نشان می دهد. این سیستم با توجه به میزان دامنه ی تحریک ورودی می تواند سه نوع رفتار داشته باشد. اگر دامنه ی نیروی ورودی بسیار زیاد یا بسیار کم باشد، پاسخ سیستم تناوبی خواهد بود و اگر دامنه ی تحریک ورودی متوسط باشد، نتایج آشوبناک خواهد شد و در این صورت پاسخ غیرقابل پیش بینی است [22].

در این قسمت فرض می شود که دامنه تحریک خارجی کم است و سپس پاسخ سیستم با پایداری دوگانه با استفاده از روش تئوری اغتشاشات به دست می آید. برای حل معادلات سیستم ابتدا مبدأ را به یکی از نقاط تعادل پایدار استاتیکی سیستم جابه جا می کنیم. معادلات حاکم بر سیستم پیرومگنتوالاستیک در حالت پایداری دوگانه در نزدیکی نقاط تعادل استاتیکی در معادله ی (25) آمده است.

$$\ddot{x} + 2\mu \dot{x} + x + \frac{3}{2} \sqrt{\bar{\alpha}_b} x^2 + \frac{1}{2} \alpha_b x^3 - \chi v = f \cos(\Omega t) \quad (25-a)$$

$$\dot{v} + \lambda v + \kappa \dot{x} = 0 \quad (25-b)$$

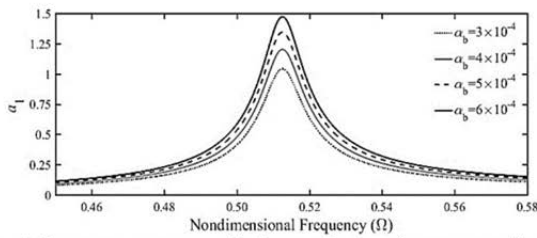


Fig. 7 Frequency response of the superharmonic resonance for the bistable energy harvesting system with different nonlinear stiffness coefficients

شکل 7 نمودار پاسخ فرکانسی سیستم با پایداری دوگانه در حالت تشدید فوق هارمونیک با ضرایب سفتی غیرخطی متفاوت

"شکل 8" نمودار پاسخ فرکانسی سیستم با پایداری دوگانه در حالت تشدید فوق هارمونیک را با دامنه های تحریک ورودی مختلف نشان می دهد. در این حالت ضریب سفتی غیرخطی سیستم برابر با 5×10^{-4} در نظر گرفته شده است. همان طور که در "شکل 8" مشخص است، با افزایش دامنه تحریک خارجی میزان بیشینه دامنه a_1 افزایش می یابد. "شکل 9-a" پاسخ حالت ماندگار جابه جایی نوک تیر به تحریک فوق هارمونیک در حالتی که $f = 0.7$ و $\alpha_b = 5 \times 10^{-4}$ است را نشان می دهد. در این شکل نتایج حل عددی و نتایج حل با روش مقیاس های چندگانه در حالات ماندگار مقایسه شده است. برای به دست آوردن پاسخ سیستم با روش حل عددی معادله (25) توسط روش رانگ-کوتا حل شده است. مقایسه ی حل عددی و حل تئوری اغتشاشات درستی نتایج را نشان می دهد.

در "شکل 9-b" ولتاژ خروجی سیستم پیزومگنتوالاستیک با پایداری دوگانه در حالت تشدید فوق هارمونیک با روش حل عددی و حل مقیاس های چندگانه مورد بررسی قرار گرفته است. مقدار موثر ولتاژ خروجی برای سیستم برداشت انرژی با شرایط بیان شده در این قسمت برابر با 0.5422 است.

در جدول 2 مقادیر مختلف ولتاژ خروجی از سیستم برداشت انرژی با استفاده از تشدید فوق هارمونیک و در حالات پایداری یگانه و دوگانه بیان شده است. همان طور که از نتایج مشخص است، مقدار موثر و بیشینه ی ولتاژ به دست آمده از سیستم در حالت پایداری دوگانه بیشتر از انرژی برداشت شده در حالت پایداری یگانه است.

5- نتیجه گیری

در این پژوهش به بررسی سیستم برداشت انرژی غیرخطی با هندسه ی پیزومگنتوالاستیک با استفاده از تشدید فوق هارمونیک در دو حالت پایداری یگانه و پایداری دوگانه پرداخته شد. فرکانس تشدید فوق هارمونیک کسری از فرکانس طبیعی سیستم است. تحریک های خارجی که در محیط پیرامونی وجود دارند اکثرا دارای فرکانس پایینی می باشند به همین دلیل احتمال وقوع

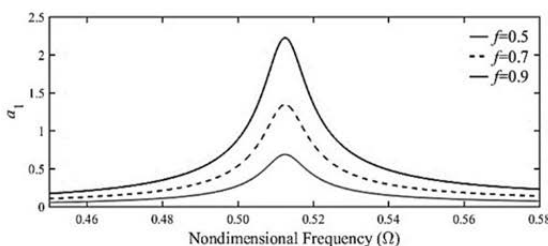


Fig. 8 Frequency response of the superharmonic resonance for the bistable energy harvesting system with different excitation amplitudes

شکل 8 نمودار پاسخ فرکانسی سیستم با پایداری دوگانه در حالت تشدید فوق هارمونیک با دامنه تحریک متفاوت

$$2\Omega = \omega_n + \varepsilon\sigma \quad (33)$$

در معادلات بی بعدی که در این قسمت استفاده شده، با $\omega_n = 1$ است. با در نظر گرفتن تحریک فوق هارمونیک در سیستم با پایداری دوگانه معادله ی (34) برقرار است.

$$2\Omega T_0 = (1 + \varepsilon\sigma)T_0 = T_0 + \varepsilon\sigma T_0 = T_0 + \sigma T_1 \quad (34)$$

در حالت تشدید فوق هارمونیک ضرایب جملات سکولار به صورت معادله ی (35) است.

$$2i(\bar{A}_1 + \bar{\mu}A_1) + \frac{\bar{\chi}\kappa A_1 i}{i + \lambda} + \frac{3}{2}\sqrt{\bar{\alpha}_b}F_1^2 e^{i\sigma T_1} \quad (35)$$

با مساوی صفر قرار دادن ضرایب جملات سکولار مقدار ضریب A_1 محاسبه می شود.

$$2i(\bar{A}_1 + \bar{\mu}A_1) + \frac{\bar{\chi}\kappa A_1 i}{i + \lambda} + \frac{3}{2}\sqrt{\bar{\alpha}_b}F_1^2 e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (36)$$

معادله ی (36) یک معادله ی خطی مرتبه ی اول است که پاسخ آن در معادله ی (37) آمده است.

$$A_1 = a_0 e^{-\left(\bar{\mu} + \frac{\bar{\chi}\kappa}{2(i+\lambda)}\right)T_1} + \frac{i3\sqrt{\bar{\alpha}_b}F_1^2}{4\left(\bar{\mu} + \frac{\bar{\chi}\kappa}{2(i+\lambda)} + i\sigma\right)} e^{i\sigma T_1} \quad (37)$$

و در این حالت با گذشت زمان مقدار $a_0 e^{-\left(\bar{\mu} + \frac{\bar{\chi}\kappa}{2(i+\lambda)}\right)T_1}$ به سمت صفر میل می کند و پاسخ حالت ماندگار معادله ی (37) به صورت بیان شده در معادله ی (38) است.

$$A_1 = \frac{i3\sqrt{\bar{\alpha}_b}F_1^2}{4\left(\bar{\mu} + \frac{\bar{\chi}\kappa}{2(i+\lambda)} + i\sigma\right)} e^{i\sigma T_1} \quad (38)$$

معادله ی (38) پاسخ فرکانسی سیستم برداشت انرژی را در حالت ماندگار نشان می دهد. و در نهایت پاسخ حالت ماندگار سیستم با پایداری دوگانه با استفاده از روش تئوری اغتشاشات در معادله ی (39) بیان شده است.

$$x = a_1 \sin(2\Omega t - \gamma) + \frac{f}{1 - \Omega^2} \cos(\Omega t) + O(\varepsilon) \quad (39-a)$$

$$a_1 = \frac{3\sqrt{\bar{\alpha}_b}f^2}{8(1 - \Omega^2)^2 \left(\left(\bar{\mu} + \frac{\bar{\chi}\kappa\lambda}{2(1+\lambda^2)}\right)^2 + \left(\sigma - \frac{\bar{\chi}\kappa}{2(1+\lambda^2)}\right)^2 \right)^{1/2}} \quad (39-b)$$

$$\gamma = \tan^{-1} \left(\frac{2\sigma(1 + \lambda^2) - \bar{\chi}\kappa}{2\bar{\mu}(1 + \lambda^2) + \bar{\chi}\kappa\lambda} \right) \quad (39-c)$$

میزان ولتاژ خروجی در رابطه ی (40) آمده است.

$$v = a_2 [4\Omega \sin(2\Omega t - \gamma) + 2\lambda \cos(2\Omega t - \gamma)] + a_3 [\Omega \cos(\Omega t) - \lambda \sin(\Omega t)] + O(\varepsilon) \quad (40-a)$$

$$a_2 = \frac{-a_1 \kappa \Omega}{(\lambda^2 + 4\Omega^2)} \quad (40-b)$$

$$a_3 = \frac{f \kappa \Omega}{(\Omega^2 - 1)(\lambda^2 + \Omega^2)} \quad (40-c)$$

با استفاده از معادله ی (38) پاسخ فرکانسی سیستم برداشت انرژی در "شکل های 7 و 8" رسم شده است. "شکل 7" پاسخ فرکانسی سیستم برداشت انرژی را در حالت تشدید فوق هارمونیک با پایداری دوگانه نشان می دهد در واقع در این شکل میزان دامنه ی a_1 رسم شده است. در این حالت دامنه تحریک خارجی f برابر 0.7 در نظر گرفته شده است. همان طور که در نمودار مشخص است در نزدیکی فرکانس فوق هارمونیک میزان a_1 افزایش زیادی دارد و سبب افزایش انرژی برداشت شده خواهد شد. همچنین با توجه به نمودار "شکل 7" مشاهده می شود که در سیستم با پایداری دوگانه نیز با افزایش ضریب سفتی غیرخطی سیستم، میزان بیشینه دامنه افزایش می یابد و در نتیجه انرژی الکتریکی به دست آمده از سیستم افزایش خواهد یافت.

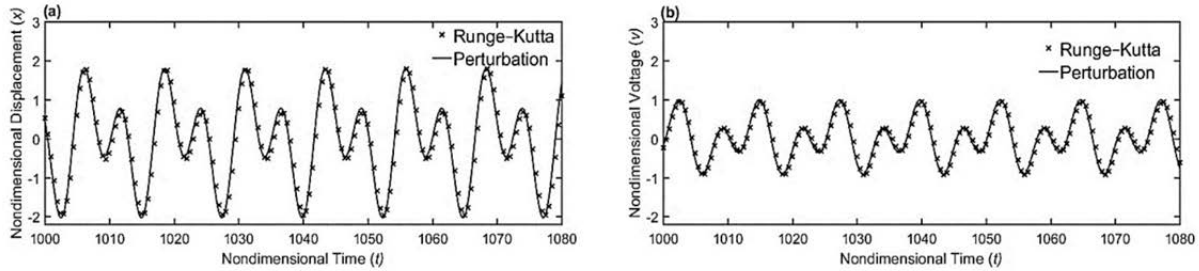


Fig. 9 Time history in the bistable mode for the superharmonic resonance ($\Omega \approx \omega_n/2$): (a) dimensionless displacement and (b) dimensionless voltage

شکل 9 پاسخ زمانی در حالت پایداری دوگانه به فرکانس تحریک فوق هارمونیک ($\Omega \approx \omega_n/2$) (a) جابه جایی بی بعد (b) ولتاژ بی بعد

جدول 2 مقایسه ولتاژ خروجی

Table 2 Comparison of the output voltage

تحریک خارجی	بیشینه‌ی مقدار ولتاژ خروجی با روش مقیاس چندگانه	مقدار موثر ولتاژ خروجی با روش مقیاس چندگانه	مقدار موثر ولتاژ خروجی با روش حل عددی
تحریک فوق هارمونیک در حالت پایداری یگانه $\Omega \approx \omega_n/3$	0.5795	0.3143	0.3048
تحریک فوق هارمونیک در حالت پایداری دوگانه $\Omega \approx \omega_n/2$	0.9932	0.5422	0.5343

$$w(x, t) = \phi(x)r(t) \quad (42)$$

شکل $\phi(x)$ شکل مود اول تیر یکسر گیردار با تغییر در سطح مقطع و جرمی در نوک تیر است. انتگرال‌های معادله‌ی (43) برای بیان بهتر معادلات در ادامه تعریف شده است.

$$\begin{aligned} \Phi_{20}^L &= \int_0^L \phi(x)^2 dx, \quad \Phi_{20}^{L_1} = \int_0^{L_1} \phi(x)^2 dx, \\ \Phi_{22}^L &= \int_0^L \phi''(x)^2 dx, \quad \Phi_{22}^{L_1} = \int_0^{L_1} \phi''(x)^2 dx \\ \Phi_{10}^L &= \int_{10}^L \phi(x) dx, \quad \Phi_{10}^{L_1} = \int_{10}^{L_1} \phi(x) dx \\ \Phi_{12}^{L_1} &= \int_0^{L_1} \phi''(x) dx \end{aligned} \quad (43)$$

L طول تیر و L_1 طول المان پیزوالکتریک است. انرژی الکتریکی و پتانسیل این سیستم در معادله‌ی (44) آمده است.

$$W_e - V = \iiint -\frac{1}{2} c_{ij} S_i S_j + e_{ij} E_i S_j + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} E_i E_j - G(w_{end}(t)) \quad (44)$$

c_{ij} ضریب سفتی، e_{ij} ثابت پیزوالکتریک، E_i بردار میدان الکتریکی، S_i کرنش خطی درونی تیر که بر اثر خمش موجود در آن به وجود می‌آید، ϵ_{ij} ثابت ذخیره‌سازی پیزوالکتریک در کرنش صفر و $G(w_{end}(t))$ پتانسیل مغناطیسی آهنرباهای ثابت است که به صورت تجربی به دست آمده است. نیروی مغناطیسی به صورتی که در معادله‌ی (45) بیان شده در نظر گرفته می‌شود.

$$f = -a_m w_{end} + b_m w_{end}^3 \quad (45)$$

a_m و b_m ضرایب نیروی مغناطیسی می‌باشند که با توجه به میزان فاصله و شدت آهنرباها روی پایه تغییر می‌کنند. در نتیجه پتانسیل مغناطیسی سیستم به صورتی که در معادله‌ی (46) آمده است، می‌باشد.

$$G(w_{end}(t)) = -\frac{a_m}{2} w_{end}^2 + \frac{b_m}{4} w_{end}^4 \quad (46)$$

مدول یانگ تیر به صورت Y_s و مدول یانگ پیزوالکتریک به صورت Y_p نمایش داده شده است. گشتاور دوم سطح تیر با I_s و گشتاور دوم سطح المان پیزوالکتریک با I_p نمایش داده می‌شود. پس از ساده‌سازی معادله‌ی

تشدید فوق هارمونیک نسبت به تشدید اولیه بسیار بیشتر است و از این رو بررسی تحریک فوق هارمونیک بسیار با اهمیت است.

در این مقاله پاسخ سیستم به تحریک فوق هارمونیک با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه به دست آمد. به منظور اعتبارسنجی، مقایسه‌ی بین روش نیمه تحلیلی و حل عددی برای حالات مختلف در حالت ماندگار ارائه شد و نشان داده شد که حل نیمه تحلیلی دارای دقت مناسبی است.

جابه جایی نوک تیر و ولتاژ خروجی سیستم در دو حالت پایداری یگانه و پایداری دوگانه در برابر تحریک فوق هارمونیک به دست آمد. همچنین مقدار موثر ولتاژ در حالات مختلف محاسبه شده است. نتایج نشان می‌دهند که استفاده از تشدید فوق هارمونیک برای سیستم‌های برداشت انرژی بسیار مفید است. همچنین میزان انرژی برداشت شده در سیستم با پایداری دوگانه بیشتر از سیستم با پایداری یگانه است و در نتیجه استفاده از سیستم‌هایی با پایداری چندگانه برای برداشت انرژی با فرکانس تحریک فوق هارمونیک پیشنهاد می‌شود.

6- پیوست

در این قسمت معادله‌ی حاکم بر سیستم برداشت انرژی پیزومگنتوالاستیک با استفاده از روش انرژی به دست می‌آید. انرژی‌های مختلف سیستم پیزومگنتوالاستیک شامل: انرژی پتانسیل الاستیک تیر و انرژی مغناطیسی آهنرباها (V)، انرژی الکتریکی ذخیره شده در پیزوالکتریک (W_e)، انرژی جنبشی موجود در تیر و جرم انتهایی آن (T)، انرژی پتانسیل مغناطیسی بین آهنرباها (G) و انرژی‌های تلف شونده به وسیله‌ی مقاومت‌ها و میراگرها می‌باشد. جابه جایی تیر و راستای اتصال تیر و پیزوالکتریک به عنوان مختصات برای سیستم در معادلات استفاده شده است [15].

با استفاده از روش بیان شده در مرجع [20] لاگرانژین سیستم در معادله‌ی (41) آمده است.

$$L_g = T - V + W_e \quad (41)$$

جابه جایی هر نقطه در هر زمان به صورت بیان شده در معادله‌ی (42) در نظر گرفته می‌شود.

7-مراجع

[1] S. Gregori, Y. Li, H. Li, J. Liu, et al. , 2.45 GHz power and data transmission for a low-power autonomous sensors platform, *Proceedings of the International Symposium on Low Power Electronics and Design*, Newport Beach, USA, August 9–11, 2004.

[2] Y. Hou, Y. Zhou, L. Yang, Q. Li, et al. , Flexible ionic diodes for low-frequency mechanical energy harvesting, *Advanced Energy Materials*, Vol. 7, No. 5, pp. 1983-1989, 2017.

[3] S. P. Beeby, R. N. Torah, M. J. Tudor, P. G. Jones, et al. , A micro electromagnetic generator for vibration energy harvesting, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 17, No. 7, pp. 1257-1265, 2007.

[4] R. L. Harne, K. W. Wang, A review of the recent research on vibration energy harvesting via bistable systems, *Smart Materials and Structures*, Vol. 22, No. 2, pp. 23001-23012, 2013.

[5] L. Beker, A. Benet, A. T. Meybodi, B. Eovino, et al. , Energy harvesting from cerebrospinal fluid pressure fluctuations for self-powered neural implants, *Biomedical Microdevices*, Vol. 19, No. 2, pp. 31-39, 2017.

[6] S. Roundy, On the effectiveness of vibration-based energy harvesting, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 16, No. 10, pp. 809-823, 2005.

[7] D. Shen, S. Y. Choe, D. J. Kim, Analysis of piezoelectric materials for energy harvesting devices under high-g vibrations, *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 46, No. 10R, pp. 6755-6760, 2007.

[8] M. Umeda, K. Nakamura, S. Ueha, Analysis of the transformation of mechanical impact energy to electric energy using piezoelectric vibrator, *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 35, No. 5S, pp. 3267-3273, 1996.

[9] J. Ajitsaria, S. Y. Choe, D. Shen, D. J. Kim, Modeling and analysis of a bimorph piezoelectric cantilever beam for voltage generation, *Smart Materials and Structures*, Vol. 16, No. 2, pp. 447-454, 2007.

[10] M. Asgharzadeh, K. Jahani, A. Kianpoor, M. H. Sadeghi, Energy harvesting investigation from unimorph trapezoidal beam vibrations using distributed parameters method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 96-102, 2015. (in Persian)

[11] M. F. Daqaq, R. Masana, A. Erturk, D. Dane Quinn, On the role of nonlinearities in vibratory energy harvesting: A critical review and discussion, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 66, No. 4, pp. 801-823, 2014.

[12] Z. Yang, Y. Zhu, J. Zu, Theoretical and experimental investigation of a nonlinear compressive-mode energy harvester with high power output under weak excitations, *Smart Materials and Structures*, Vol. 24, No. 2, pp. 25028-25041, 2015.

[13] K. Jahani, P. Aghazadeh, Investigating the performance of piezoelectric energy harvester including geometrical damping and material nonlinearities with the method of multiple scales, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 4, pp. 354-360, 2016. (in Persian)

[14] S. Roundy, P. K. Wright, J. Rabaey, A study of low level vibrations as a power source for wireless sensor nodes, *Computer Communications*, Vol. 26, No. 11, pp. 1131-1144 2003.

[15] M. A. Karami, D. J. Inman, Equivalent damping and frequency change for linear and nonlinear hybrid vibrational energy harvesting systems, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 330, No. 23, pp. 5583-5597, 2011.

[16] S. Leadenham, A. Erturk, Nonlinear M-shaped broadband piezoelectric energy harvester for very low base accelerations: primary and secondary resonances, *Smart Materials and Structures*, Vol. 24, No. 5, pp. 55021-55034, 2015.

[17] R. L. Harne, K. W. Wang, On the fundamental and superharmonic effects in bistable energy harvesting, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 25, No. 8, pp. 937-950, 2014 .

[18] F. C. Moon, P. J. Holmes, A magnetoelastic strange attractor, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 65, No. 2, pp. 275-296 1979.

[19] A. Erturk, D. J. Inman, *Piezoelectric Energy Harvesting*, pp. 233-271, New York: Wiley, 2011 .

[20] A. Preumont, *Mechatronics: Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems*, pp. 112-167, New York: Springer-Verlag, 2006.

[21] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, pp. 161-203, New York: Wiley, 1979.

[22] M. A. Karami, P. S. Varoto, D. J. Inman, Analytical approximation and experimental study of bi-stable hybrid nonlinear energy harvesting system, *Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*, Washington, USA, August 28-31, 2011.

(44)، انرژی الکتریکی و پتانسیل سیستم به صورت بیان شده در معادله (47) تبدیل می شود.

$$W_e - V = -\frac{b_m \phi(L)^4}{4} r(t)^4 - \left\{ -\frac{a_m \phi(L)^2}{2} + \frac{1}{2} Y_s I_s \Phi_{22}^L + Y_p I_p \Phi_{22}^{L_1} \right\} r(t)^2 + \frac{2A_p Z_p \Phi_{22}^{L_1} \epsilon_{13}}{h_p} \dot{\lambda}_1(t) r(t) + \frac{\epsilon_{33} A_p L_1}{h_p^2} \dot{\lambda}_1(t) \quad (47)$$

$\lambda_1(t)$ شار اتصال پیزوالکتریک، A_p سطح مقطع پیزوالکتریک، ضخامت لایه پیزوالکتریک و Z_p فاصله پیزوالکتریک تا تار خشی است. انرژی جنبشی سیستم در معادله (48) آمده است.

$$T = \left[\frac{1}{2} \rho_s A_s \Phi_{20}^L + \rho_p A_p \Phi_{20}^{L_1} + \frac{1}{2} M_{tip} \phi(L)^2 \right] \dot{r}(t)^2 + [\rho_s A_s \Phi_{10}^L + 2\rho_p A_p \Phi_{10}^{L_1} + M_{tip} \phi(L)] \dot{R}(t) \dot{r}(t) + \frac{1}{2} [M_{tip} + M_s + 2M_p] \dot{R}(t)^2 \quad (48)$$

R جابه جایی پایه سیستم، A_s سطح مقطع تیر الاستیک، چگالی تیر استیل و ρ_p چگالی پیزوالکتریک می باشد. جرم تیر M_s جرم پیزوالکتریک M_p و جرم آهنربای متصل به نوک تیر با M_{tip} نشان داده شده است.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_g}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L_g}{\partial u} = d \dot{r} \quad (49-a)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_g}{\partial \dot{\lambda}_1} \right) - \frac{\partial L_g}{\partial \lambda_1} = -\frac{\dot{\lambda}}{R_1} \quad (49-b)$$

میرایی سیستم مکانیکی با d نمایش داده شده است. پس از انجام مشتق ها در معادله (49) معادله حاکم بر سیستم به صورت بیان شده در معادله (50) حاصل می شود [15].

$$m \ddot{r} + d \dot{r} + Kr + \bar{b} r^3 + \bar{\psi}_1 V_1 = -\bar{m} \ddot{R}(t) \quad (50-a)$$

$$\dot{V}_1 + \frac{V_1}{R_1 C_0} - \frac{\bar{\psi}_2}{C_0} \dot{r} = 0 \quad (50-b)$$

ضرایب معادله (50) در رابطه (51) بیان شده است.

$$m = \rho_s A_s \Phi_{20}^L + 2\rho_p A_p \Phi_{20}^{L_1} + M_{tip} \phi(L)^2$$

$$\bar{m} = \rho_s A_s \Phi_{10}^L + 2\rho_p A_p \Phi_{10}^{L_1} + M_{tip} \phi(L)$$

$$K = -a_m \phi(L)^2 + Y_s I_s \Phi_{22}^L + 2Y_p I_p \Phi_{22}^{L_1}$$

$$\bar{b} = b_m \phi(L)^4, C_0 = \frac{\epsilon_{33} A_p L_1}{h_p^2}$$

$$\bar{\psi}_1 = -\frac{2A_p Z_p \Phi_{22}^{L_1} \epsilon_{13}}{h_p}, \bar{\psi}_2 = m \bar{\psi}_1 \quad (51)$$

تحریک خارجی به صورت هارمونیک که در معادله (52) بیان شده، در نظر گرفته می شود.

$$\bar{m} \ddot{R}(t) = F \cos(\omega t) \quad (52)$$