

## تحریک مودهای ارتعاشی بالاتر در میکروسکوپ نیروی اتمی در حالت غیر تماسی

محمد صفی‌خانی محمودی<sup>1</sup>، امین یوسف‌پور<sup>2</sup>، آرش بهرامی<sup>3\*</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

\* تهران، صندوق پستی 4563-11155، arash.bahrami@ut.ac.ir

## چکیده

در این پژوهش، استفاده از فرکانس‌های تشدید بالاتر برای تحریک میکروتر میکروسکوپ نیروی اتمی در حالت غیرتماسی مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. روش‌های رایج مدل‌سازی ارتعاشات غیرخطی مانند معادلسازی با سیستم گسسته جرم و فنر علاوه بر دقت پایین به دلیل در نظر نگرفتن پیوستگی تیر قابلیت انطباق با مودهای بالاتر را ندارند. در این مقاله، ابتدا معادله‌ی حاکم بر ارتعاشات غیرخطی میکروتر با استفاده از اصل همپلتون تعمیم‌یافته و بر مبنای فرضیات تیر اویلر-برنولی و تغییر شکل‌های کوچک به دست آمده است. معادله‌ی حاصل معادله‌ای با مشتقات جزئی و شرایط مرزی غیرخطی است. روش متداول در حل چنین معادلاتی، تبدیل معادله‌ی جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی با استفاده از روش‌های کاهش مرتبه می‌باشد. اما در پژوهش حاضر معادله با مشتقات جزئی به‌طور مستقیم و بدون استفاده از روش‌های کاهش مرتبه با روش اغتشاشات حل شده است. همچنین با حل عددی معادله دیفرانسیل معمولی حاصل از روش گلرکین صحت روابط به دست آمده از روش اغتشاشات بررسی و مورد تأیید قرار گرفته است. رفتار میکروسکوپ در حالت استاتیکی، شکل مودهای خطی میکروسکوپ، معادلات حاکم بر هارمونیک صفر، اصلی و دوم در طول میکروتر و همچنین پارامترهای تأثیرگذار بر پیشینه دامنه‌ی سوزن در هر مود و فرکانسی که پیشینه دامنه در آن اتفاق می‌افتد بررسی شده است. مشاهده می‌شود که با بالاتر رفتن شماره مود، جایجایی غیرخطی فرکانس تشدید کوچک‌تر می‌شود، اما مودها و هارمونیک‌های بالاتر نسبت به فرکانس تشدید اول سرعت بیشتری در ثبت اطلاعات نمونه دارند و همچنین به دلیل حساسیت بیشتر به دامنه‌ی تحریک کوچکتری نیاز دارند.

## اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
 دریافت: 22 بهمن 1396  
 پذیرش: 15 فروردین 1397  
 ارائه در سایت: 14 اردیبهشت 1397

کلید واژگان:

میکروسکوپ نیروی اتمی  
 تحریک مودهای بالاتر  
 مود غیرتماسی  
 تئوری اغتشاشات  
 گسسته‌سازی گلرکین

## Higher-mode Excitation in The Non-contact Atomic force Microscopy

Mohammad Safikhani Mahmoudi, Amin Yousefpour, Arash Bahrami\*

Department of Mechanical Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.

\* P.O.B. 4563-11155, Tehran, Iran, arash.bahrami@ut.ac.ir

## ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
 Received 11 February 2018  
 Accepted 04 April 2018  
 Available Online 04 May 2018

## Keywords:

AFM  
 higher-mode excitation  
 non-contact mode  
 perturbation theory  
 Galerkin discretization

## ABSTRACT

In the present research, higher resonance frequencies are employed to improve the performance of the atomic force microscopy in the non-contact mode. Conventional models already used in the literature to study AFM microcantilever dynamics such as point-mass approach are not only incapable of modeling higher vibrational modes but also fail to predict microcantilever complicated dynamics with a sufficient accuracy. In this paper, the Hamilton's extended principle is used to obtain equations governing the nonlinear oscillations of the AFM probe. Euler-Bernoulli beam assumptions and small deflection theory are assumed. The resulting partial differential equation is often converted to a set of ordinary differential equations and then this set is solved either numerically or based on perturbation methods. In the present research, however, the partial differential equation is attacked directly by a special perturbation technique. The accuracy of the present method is then verified by a combination of the Galerkin discretization scheme and a Rung - Kutta numerical solution. Finally, different behaviors of the AFM probe including static behavior, linear mode shapes and frequency response curves are investigated through several numerical simulations. It is found out that higher vibrational modes have smaller frequency shift. It is also found out that higher modes are faster in gathering surface information and also more sensitive to the excitation.

## 1- مقدمه

مغناطیسی، تعیین اصطکاک و زبری سطح، اندازه‌گیری چسبندگی و تشخیص ناخالصی از جمله اطلاعاتی است که این میکروسکوپ از سطح نمونه به دست می‌دهد. مودهای عملیاتی مختلفی برای میکروسکوپ نیروی اتمی تعریف شده است. این مودها معمولاً براساس فاصله‌ی سوزن از نمونه تعریف می‌شوند. سه مود اصلی عملیاتی دستگاه عبارتند از: مود تماسی، مود غیرتماسی و مود تماس متناوب. همان‌طور که از نام آن‌ها قابل پیش‌بینی است در مود

میکروسکوپ نیروی اتمی ابزاری قوی برای بررسی خواص و ساختار سطحی مواد در ابعاد نانو است. این میکروسکوپ قابلیت عملکرد در محیط‌های مایع، هوا و خلأ را داراست و برخلاف اکثر روش‌های مشابه محدودیتی از نظر جنس نمونه‌ی مورد اندازه‌گیری اعم از رسانا یا نارسانا، پودری یا متراکم، نرم یا سخت ندارد. ترسیم تصاویر سه‌بعدی، تعیین خواص الکتریکی و

آشوب، تنها بعد از اعمال چندین شکل مود مشخص خواهند شد [13-18]. روش اغتشاشات از جمله ابزارهای قدرتمندی است که امکان حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی را فراهم می‌کند. ترنر [19, 20] و همچنین عبدالرحمن و نایفه [21] از این روش برای حل معادلات مودتماسی دینامیکی در حالات مختلف استفاده کرده‌اند. این روش در حل مسائل غیرخطی خارج از محدوده میکروسکوپ نیروی اتمی نیز استفاده شده است [22, 23].

در سال‌های اخیر استفاده از مدها و فرکانس‌های تشدید بالاتر و همچنین هارمونیک‌های بعدی میکروسکوپ نیروی اتمی به ویژه در حالت غیرتماسی بسیار مورد توجه قرار گرفته است. مدها و هارمونیک‌های بالاتر به دلیل بزرگ‌تر بودن فرکانس نوسان‌شان نسبت به فرکانس تشدید اول سرعت بیشتری در ثبت اطلاعات نمونه دارند [24, 25]. همچنین با تحریک همزمان چند مود می‌توان اطلاعات جدیدی از نمونه به دست آورد [26, 27]. گارسیا از پیشگامان استفاده از مدهای ارتعاشی بالاتر می‌باشد [10, 27-30].

به دلیل جدید بودن استفاده از مدهای بالاتر در AFM رفتار آن‌ها به خوبی مود اول شناخته شده نیست. در مقالات ارائه شده در زمینه AFM روند حل معادلات به این گونه است که ابتدا معادلات حرکت پیوسته را حول یکی از فرکانس‌های تشدید گسسته می‌کنند و سپس از روش‌های تحلیلی و یا عددی استفاده می‌کنند. گسسته‌سازی معادلات حرکت علاوه بر افزایش بار محاسباتی، پیچیدگی روند حل و امکان بروز خطا را به دنبال دارند. در مقاله حاضر معادلات حرکت پیوسته بدون گسسته‌سازی و به صورت شبه تحلیلی حل شده‌اند. به این ترتیب روابطی ارائه شده است که می‌توان با استفاده از آن‌ها و تنها با جایگذاری فرکانس تشدید مود مورد نظر رفتار آن را بررسی کرد.

در پژوهش حاضر با استفاده از تئوری تیر اوپلر-برنولی معادلات حرکت پیوسته میکروتر استخراچ شده‌اند. از روش اغتشاشات برای حل معادلات حرکت استفاده شده و با حل دوباره به روش گلرکین-رانگ کوتا نتایج صحه‌گذاری شده‌اند. روابط تحلیلی به دست آمده از روش اغتشاشات به درک بهتر از مسأله می‌انجامد و همچنین پارامترهای تأثیرگذار بر خواص ارتعاشی میکروتر را به خوبی نشان می‌دهند. به علاوه حل مستقیم معادلات به روش اغتشاشات، مرحله‌ی کاهش مرتبه را حذف می‌کند و بار محاسباتی مسأله را به شکل قابل توجهی کاهش می‌دهد. پاسخ فرکانسی سوزن و تأثیر فاصله‌ی بین سوزن و نمونه بر دامنه‌ی نوسان در مدهای ارتعاشی مختلف از جمله مواردی است که در این پژوهش بررسی شده‌اند.

## 2- مدل‌سازی و استخراج معادلات

شکل 1 به صورت نمادین میکروتر میکروسکوپ نیروی اتمی را نمایش می‌دهد. پایه‌ی میکروتر توسط المان پیزوالکتریک به صورت رابطه (1) تحریک می‌شود:

$$\bar{y} = \bar{Y} \cos \bar{\Omega} \bar{t} \quad (1)$$

در معادله (1)،  $\bar{Y}$  جابجایی سرگردار میکروتر و  $\bar{\Omega}$  فرکانس تحریک است. فرکانس تحریک معمولاً نزدیک یکی از فرکانس‌های تشدید میکروتر (غالباً فرکانس اول) در نظر گرفته می‌شود. در پژوهش حاضر فرکانس‌های بالاتر نیز تحریک شده و پاسخ میکروتر مورد بررسی فرار می‌گیرد. به علاوه،  $\bar{Y}$  دامنه‌ی تحریک پایه‌ی میکروتر می‌باشد. تحریک میکروتر توسط المان پیزوالکتریک صورت می‌گیرد. در شکل 1،  $\bar{Z}$  فاصله‌ی بین نمونه و سوزن در حالت سکون یا اولیه و  $\bar{Z}(t)$  فاصله‌ی آنی این دو می‌باشد. سوزن میکروسکوپ که نقش

تماسی سوزن با سطح در تماس دائم است اما در مود غیرتماسی سوزن هیچ‌گاه با سطح تماس ندارد و با فاصله‌ی اندک نسبت به نمونه، بالای آن نوسان می‌کند. مود تماس متناوب نیز ترکیبی از این دو حالت است. مود تماسی که عملکرد ساده‌تری دارد زودتر از سایر روش‌ها اختراع شد. در این حالت بین سوزن و نمونه نیروی دافعه وجود دارد. از بین رفتن سریع سوزن به دلیل کشیده شدن آن روی سطح و همچنین عدم سازگاری با نمونه‌های نرم از مایب این مود کاری است [1-4].

در مود غیرتماسی به دلیل کوچک بودن نیروی برهم‌کنش و عدم تماس سوزن و نمونه، احتمال از بین رفتن سوزن و یا خراشیدن سطح نمونه در حین آزمایش بسیار کمتر است. در این مود کاری کاربر می‌تواند از سیگنال‌های مختلفی مانند فرکانس تشدید، دامنه‌ی نوسان و یا تأخیر فاز برای بررسی توپوگرافی سطح استفاده کند. مود غیرتماسی به دلیل حساسیت زیاد و همچنین اعمال نیروی بسیار کم به نمونه، در بررسی سطوح حساس از جمله بافت‌های زنده مانند سلول‌ها، DNA، پروتئین‌ها و سایر نمونه‌های نرم مورد توجه است. در مود غیرتماسی، میکروتر با فاصله‌ی کمی بالای نمونه نوسان می‌کند. فرکانس تحریک میکروتر معمولاً بسیار نزدیک به فرکانس اول تشدید انتخاب می‌شود. در این حالت سوزن تحت تأثیر نیروی جذبی و اندروالس قرار دارد. در اثر نیروی غیرخطی بین سوزن و نمونه فرکانس تشدید میکروتر اندکی جابه‌جا می‌شود. با توجه به وابستگی اندازه‌ی نیروی واندوالس به فاصله‌ی بین سوزن و نمونه، تغییرات فرکانس تشدید نیز به فاصله‌ی بین سوزن و نمونه وابسته است. با ثبت تغییرات فرکانس تشدید یا دامنه‌ی نوسان سوزن می‌توان ارتفاع هر نقطه از نمونه را اندازه‌گیری نمود [5-8].

از زمان اختراع میکروسکوپ نیروی اتمی [9] تحقیقات زیادی برای ارزیابی و مدل‌سازی دینامیک غیرخطی آن صورت گرفته است. به رغم تعداد زیاد مقالات در این زمینه، تعداد بسیار کمی از پژوهش‌های صورت گرفته ماهیت پیوسته‌ی میکروتر را در مدل‌سازی خود لحاظ کرده‌اند. در اکثر تحلیل‌های انجام شده از مدل گسسته‌ی جرم و فنر استفاده شده است. در این روش میکروتر و سوزن به صورت یک جرم متمرکز در نظر گرفته می‌شود. سختی میکروتر که با اندازه‌گیری انحراف استاتیکی آن محاسبه می‌شود نیز به عنوان ضریب فنریت مدل استفاده می‌شود [10-12]. روش جرم و فنر، علاوه بر دقت پایین در پیش‌بینی دینامیک مسأله، در مدل‌سازی مدها و فرکانس‌های بالاتر میکروتر ناتوان است. همچنین تحریک در این روش به صورت یک نیروی خارجی که به جرم متمرکز وارد می‌شود در نظر گرفته می‌شود. حال آنکه در واقع تحریک به صورت جابه‌جایی در تکیه‌گاه به میکروتر اعمال می‌شود و این خود یکی از عوامل بروز خطا است [13].

دسته دیگری از پژوهشگران ابتدا با استفاده از تئوری تیر اوپلر-برنولی یا تیر تیموشنکو معادلات حرکت میکروتر را استخراج کرده‌اند. معادلات با مشتقات جزئی به دست آمده به این ترتیب را می‌توان با روش‌های گوناگون از جمله روش گلرکین به معادله دیفرانسیل معمولی کاهش درجه داد. علی محمدی و همکاران با استفاده از این روش و با یک شکل مود گلرکین رفتار دینامیکی میکروسکوپ را بر اساس تئوری گردیان کرنشی بررسی کرده‌اند [14]. همچنین جلیلی و همکاران از این روش برای تحلیل رفتار دینامیک غیر خطی میکروسکوپ استفاده نموده‌اند [15-17]. بهرامی و نایفه نشان داده‌اند اگرچه در حالت غیرتماسی با یک شکل مود گلرکین می‌توان جواب نسبتاً دقیق به دست آورد، اما در مود تماس متناوب برخی خواص غیرخطی مانند

جدول 1 پارمترها و مشخصات میکروتر میکروسکوپ نیروی اتمی

Table 1 Parameters and properties of the AFM

واحد	مقدار	نماد	
μm	225	<i>l</i>	طول میکروتر
μm	40	<i>b</i>	عرض میکروتر
μm	1.8	<i>h</i>	ضخامت میکروتر
m <sup>2</sup>	7.2 × 10 <sup>-11</sup>	<i>A</i>	مساحت سطح مقطع
m <sup>4</sup>	1.94 × 10 <sup>-23</sup>	<i>I</i>	گشتاور دوم سطح
μm	20	<i>R</i>	شعاع سوزن
Gpa	170	<i>E</i>	مدول یانگ
kg/m <sup>3</sup>	2320	<i>ρ</i>	چگالی
kg/m · s	2 × 10 <sup>-4</sup>	<i>c</i>	ضریب میرایی
J	2 × 10 <sup>-19</sup>	<i>H</i>	ثابت هامکر

بنابر اصل همیلتون:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta \bar{D}) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta \bar{T} - \delta \bar{V} + \delta \bar{D}) dt = 0 \quad (8)$$

با استفاده از تئوری حساب تغییرات و مرتب‌سازی عبارات، معادله حرکت میکروتر به صورت رابطه (9) استخراج می‌شود:

$$EI \bar{u}''''(\bar{x}, \bar{t}) + \rho A \bar{u}''(\bar{x}, \bar{t}) + \bar{c} \bar{u}'(\bar{x}, \bar{t}) = 0$$

$$\bar{x} = 0: \bar{u} = \bar{y}(\bar{t}), \quad \bar{u}' = 0$$

$$\bar{x} = l: \bar{u}'' = 0, \quad EI \bar{u}'''' = -\frac{\bar{H}R}{6(\bar{Z} - \bar{u})^2} \quad (9)$$

### 1-2- حالت استاتیکی

برای درک بهتر عملکرد میکروسکوپ و همچنین آشنایی با رفتار نیروی واندروالس وارده بر سوزن بهتر است در اولین قدم حالت استاتیکی میکروسکوپ بررسی شود. معادله حرکت حالت استاتیکی با حذف عبارتهای دارای مشتق زمانی و همچنین تحریک از معادله (9) به دست می‌آید:

$$EI \bar{u}''''(\bar{x}) = 0$$

$$\bar{u}^*(0) = 0, \quad \bar{u}'^*(0) = 0, \quad \bar{u}''^*(l) = 0$$

$$EI \bar{u}''''(0, \bar{t}) = -\frac{\bar{H}R}{6(\bar{Z} - \bar{u}^*(l))^2} \quad (10)$$

پارامتر  $\Delta$  به صورت  $\Delta = \bar{Z} - \bar{u}^*(l)$  تعریف می‌شود. معادله (10) با روش تحلیلی و روش گلرکین با یک شکل مود حل شده است. شکل 2 تغییرات پارامتر  $\Delta$  را بر حسب  $\bar{Z}$  نمایش می‌دهد که با نتایج منبع [13] تطابق کیفی دارد. همان‌طور که در شکل 2 مشخص است دو شاخه‌ی مجزای حل برای  $\Delta$  وجود دارد. با استفاده از تحلیل تابع پتانسیل می‌توان نشان داد که شاخه‌ی پایینی ناپایدار است. در این مقاله تنها نتایج شاخه‌ی پایدار در نظر گرفته شده است.

### 2.2 بی‌بعدسازی معادلات

با جایگذاری متغیرهای بدون بعد زیر می‌توان معادلات را بی‌بعد کرد:

$$x = \frac{\bar{x}}{l}, \quad t = \bar{t} \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}, \quad \Omega = \bar{\Omega} \sqrt{\frac{\rho A l^4}{EI}}, \quad H = \frac{\bar{H} R l^3}{6 E I \Delta^3}$$

$$c = \frac{\bar{c} l^2}{\sqrt{EI \rho A}}, \quad Z = \frac{\bar{Z}}{\Delta}, \quad y = \frac{\bar{y}}{\Delta}, \quad u = \frac{\bar{u}}{\Delta}, \quad w = \frac{\bar{w}}{\Delta} \quad (11)$$

با جایگذاری روابط ارائه شده در (11) در معادله‌ی (9)، معادله‌ی بدون بعد حرکت میکروتر به صورت رابطه (12) به دست می‌آید:

مهمی در عملکرد آن دارد، در انتهای میکروتر مشخص است. جابه‌جایی کلی سوزن  $\bar{u}(l, \bar{t})$  و به طور کلی هر نقطه از میکروتر  $\bar{u}(\bar{x}, \bar{t})$ . عبارت است از جابه‌جایی ناشی از خمش میکروتر به اضافه جابه‌جایی ناشی از تحریک سر آن:

$$\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{w}(\bar{x}, \bar{t}) + \bar{y}(\bar{t}) \quad (2)$$

رابطه‌ی (3) بین  $\bar{u}(\bar{x}, \bar{t})$  و  $\bar{z}(t)$  برقرار است:

$$\bar{z}(t) = \bar{Z} - \bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) \quad (3)$$

برای استخراج معادلات حرکت میکروتر شکل 1 فرضیات زیر در نظر گرفته شده است:

- در مدل‌سازی میکروتر از جرم و ابعاد سوزن صرف‌نظر می‌شود.
- المان پی‌زو که به سر گیردار میکروتر متصل است، میکروتر و سوزن را با فرکانس و دامنه‌ی ثابت تحریک می‌کند.
- میکروسکوپ در حالت کاری غیرتماسی قرار دارد و تنها نیروی عمل‌کننده بین سوزن و نمونه، نیروی جذبی واندروالس است.
- برای تعیین نیروی واندروالس بین سوزن و نمونه از مدل نیرویی گوی و صفحه تخت استفاده شده است
- با توجه به کوچک بودن تغییر شکل‌های ناشی از نیروی برشی از تئوری تیر اولبر- برنولی برای مدل‌سازی نواسانات تیر استفاده شده است.
- سیستم در محیط هوا عمل می‌کند و دارای میرایی ویسکوز است. به دلیل کوچک بودن میرایی داخلی میکروتر از آوردن آن در معادلات صرف‌نظر شده است (جدول 1).

با در نظر گرفتن فرضیات گفته شده، انرژی جنبشی میکروتر به صورت رابطه (4) است:

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A (\bar{u}'(\bar{x}, \bar{t}))^2 dx \quad (4)$$

- نیروی واندروالس بین سوزن و نمونه در منبع [31] با معادله (5) ارائه شده است:

$$\bar{F}_{vdw} = \frac{-\bar{H}R}{6\bar{z}(\bar{t})^2} \quad (5)$$

نیروی واندروالس یک نیروی پایستار است. می‌توان با انتگرال‌گیری از معادله (5) نسبت به متغیر  $\bar{z}(t)$ ، تابع پتانسیل متناظر با آن را به دست آورد. انرژی پتانسیل کل سیستم به صورت رابطه (6) است:

$$\bar{V} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 \bar{w}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^2} \right)^2 dx + \frac{\bar{H}R}{6(\bar{Z} - \bar{u}(\bar{x}, \bar{t}))} \quad (6)$$

تابع اتلاف انرژی سیستم را نیز می‌توان به صورت رابطه (7) نوشت:

$$\bar{D} = \frac{1}{2} \int_0^l \bar{c} (\dot{\bar{u}}(\bar{x}, \bar{t}))^2 dx \quad (7)$$

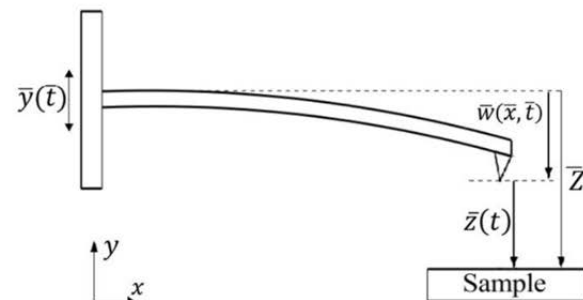


Fig. 1 A schematic of the AFM

شکل 1 شماتیک میکروتر میکروسکوپ نیروی اتمی

$$\begin{aligned}
 x = 0: \quad v_3 &= \frac{1}{2} Y e^{i\omega T_0} + cc, \quad v_2' = 0 \\
 x = 1: \quad v_2'' &= 0, \quad v_3''' = \beta_1 v_3 + 2\beta_2 v_1 v_1 + \beta_3 v_1^3
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

لازم به ذکر است در معادلات (17-19)،  $D_j^i = \frac{\partial^i}{\partial T_j^i}$  می‌باشد. همچنین منظور از  $cc$  مزدوج مختلط است. همان‌طور که قابل مشاهده است میرایی، تحریک و عبارت غیرخطی درجه سه، همه در معادله از درجه  $\varepsilon^3$  آمده‌اند.

### 3-1-1- حل مسأله درجه $\varepsilon$

برای حل مسأله اغتشاشات باید از پایین‌ترین مقیاس شروع کرد. مسأله خطی (17) را می‌توان با تکیه بر اصول ارتعاشات ممتد و با فرض ضربی بودن توابع مکان - زمان حل نمود. جواب این بخش به صورت رابطه (20) است:

$$v_1(x, T_0, T_1, T_2) = A_j e^{i\omega_j T_0} \psi_j(x) + cc \tag{20}$$

$A_j$  در معادله (20)، تابعی نامعلوم از  $T_1$  و  $T_2$  است که با جایگذاری  $A_j = v_1(x, T_0, T_1, T_2)$  در مراحل بعدی حل به دست می‌آید. همچنین  $\psi_j$  شکل مود زام تابعی از مکان به صورت زیر است:

$$\psi_j(x) = \psi_{0j} [\sin \gamma_j x - \sinh \gamma_j x - \kappa_{0j} (\cos \gamma_j x - \cosh \gamma_j x)] \tag{21}$$

$$\psi_{0j} = \frac{\cos \gamma_j - \cosh \gamma_j}{(\sin \gamma_j \cos \gamma_j - \sinh \gamma_j \cosh \gamma_j)} \tag{22}$$

$$\kappa_{0j} = \frac{\sin \gamma_j x + \sinh \gamma_j x}{\cos \gamma_j x + \cosh \gamma_j x} \tag{23}$$

$\gamma_j$  در معادله (21)، ریشه‌ی زام معادله مشخصه زیر است:

$$\gamma^3 (\cos \gamma \cosh \gamma + 1) + \beta_1 (\sin \gamma \cosh \gamma - \sinh \gamma \cos \gamma) = 0 \tag{24}$$

رابطه‌ی زیر بین  $\gamma_j$  و  $\omega_j$  که در معادله (21) ظاهر می‌شود وجود دارد:

$$\omega_j = \gamma_j^2 \tag{25}$$

### 3-1-2- مسأله درجه $\varepsilon^2$

در هر مرحله از حل به روش اغتشاشات باید ابتدا جواب به دست آمده از مرحله‌ی قبل جایگذاری شود. با جایگذاری معادله (20)، معادله (18) به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\begin{aligned}
 v_2'''' + D_0^2 v_2 &= -2i\omega_j D_1 A_j e^{i\omega_j T_0} \psi_j(x) + cc \\
 x = 0: \quad v_2 &= 0, \quad v_2' = 0, \quad x = 1: \quad v_2'' = 0
 \end{aligned}$$

$$x = 1: \quad v_2''' = \beta_1 v_2 + \beta_2 [A_j^2 e^{2i\omega_j T_0} + A_j \bar{A}_j + cc] \tag{26}$$

در این قسمت و همچنین قسمت بعدی از حل عمومی جواب صرف‌نظر می‌شود. برای حل خصوصی مسأله (26)، ابتدا جوابی مشابه با هریک از عبارات غیر همگن در نظر گرفته می‌شود و مسأله حل می‌شود. در نهایت با توجه به اصل برهم‌نهی، جواب کلی جمع همه‌ی جواب‌های به‌دست آمده قبلی است. در ابتدا جوابی به صورت  $v_2 = h_1 e^{i\omega_j T_0}$  برای مسأله‌ی (26) فرض می‌شود. با جایگذاری می‌توان روابط (27) را نوشت:

$$\begin{aligned}
 h_1'''' - \omega_j^2 h_1 &= -2i\omega_j D_1 A_j \psi_j(x) \\
 x = 0: \quad h_1 &= 0, \quad h_1' = 0 \\
 x = 1: \quad h_1'' &= 0, \quad h_1''' = \beta_1 h_1
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

$h_1$  دارای حل عمومی غیرصفر است (حل عمومی آن برابر با  $\psi_j(x)$  است). بنابراین برای اینکه قسمت غیرهمگن مسأله (27) قابل حل باشد باید قائده‌ی حل‌پذیری [34] رعایت شود. با نوشتن قائده‌ی حل‌پذیری می‌توان نشان داد  $D_1 A_j = 0$ . برای یافتن بخش‌های بعدی، جواب‌هایی به فرم  $v_2 = h_0(x)$

$$u''''(x, t) + \ddot{u}(x, t) + c\dot{u}(x, t) = 0 \tag{12-الف}$$

$$x = 0: \quad u = y(t), \quad u' = 0 \tag{12-ب}$$

$$x = 1: \quad u'' = 0, \quad u''' = -\frac{H}{(Z-u)^2} \tag{12-پ}$$

### 3-حل معادلات

در این بخش از دو روش مختلف برای حل معادله حرکت (12) استفاده می‌شود و در بخش بعدی نتایج حل با هم مقایسه می‌شوند.

### 3-1- روش اغتشاشات

در این قسمت، معادله‌ی حرکت میکروتیر که شامل مشتقات جزئی است به طور مستقیم و بدون عملیات گسسته‌سازی با روش اغتشاشات حل می‌شود. عبارت سمت راست شرایط مرزی (12-پ)، تنها عبارت غیر خطی موجود در معادله حرکت میکروتیر میکروسکوپ است. به دلیل پیچیدگی فرم غیرخطی این عبارت، امکان اعمال روش اغتشاشات بدون تغییر فرم آن ممکن نیست. در ابتدا فرض می‌شود نوسانات میکروتیر حول تعادل استاتیکی آن صورت گیرد:

$$u(x, t) = u^*(x, t) + v(x, t) \tag{13}$$

در معادله (13)،  $u^*$  تعادل استاتیکی بین میکروتیر و نمونه، و  $v$  نوسان میکروتیر حول این تعادل است. با فرض کوچک بودن این نوسانات نیروی واندروالس را حول نقطه‌ی تعادل بسط تیلور داده و سه جمله‌ی نخست آن در نظر گرفته می‌شود:

$$F_{vdw} \approx \sum_{j=0}^3 \beta_j H \cdot v(x, t)^j, \quad \beta_j = -(j+1)H \tag{14}$$

پس از بسط نیروی برهم‌کنش ادامه روند حل از سر گرفته می‌شود. طبق روش اغتشاشات نوسانات میکروتیر به مقیاس‌های زمانی چندگانه تفکیک می‌شوند:

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^{N=3} \varepsilon^j v_j(x, T_0, T_1, T_2) \tag{15}$$

که در آن واحدهای زمانی به صورت  $T_i = \varepsilon^i$  در نظر گرفته می‌شوند. طبق اصول روش اغتشاشات [33,32] عبارت غیرخطی مرتبه‌ی سه و همچنین عبارت مربوط به میرایی و تحریک باید دارای مقیاس مشابهی باشند. به همین دلیل پارامترهای جدید میرایی و تحریک به صورت زیر بازتعریف می‌شوند:

$$\underline{Y} = \frac{Y}{\varepsilon^3}, \quad \underline{c} = \frac{c}{\varepsilon^2} \tag{16}$$

با جایگذاری معادله‌های (14-16) در معادله (12) مقیاس‌های گوناگون مسأله مشخص می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon: \\
 v_1'''' + D_0^2 v_1 &= 0 \\
 x = 0: \quad v_1 &= 0, \quad v_1' = 0 \\
 x = 1: \quad v_1'' &= 0, \quad v_1''' = \beta_1 v_1
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^2: \\
 v_2'''' + D_0^2 v_2 &= -2D_0 D_1 v_1 \\
 x = 0: \quad v_2 &= 0, \quad v_2' = 0 \\
 x = 1: \quad v_2'' &= 0, \quad v_2''' = \beta_1 v_2 + \beta_2 v_1^2
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^3: \\
 v_3'''' + D_0^2 v_3 &= -2D_0 D_1 v_2 + [-2D_0 D_2 - D_1^2 - \underline{c} D_0] v_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta'''' - \omega_j^2 \eta &= 0 \\ x = 0: \eta &= 0, \quad \eta' = 0, \quad x = 1: \eta'' = 0 \\ x = 1: \eta'''' &= \beta_1 \eta \end{aligned} \quad (34)$$

معادله دیفرانسیل (34) کاملاً مشابه فرم همگن شده معادله دیفرانسیل (31) می‌باشد. بنابراین  $\eta(x)$  و  $g_1(x)$  خودالحاق هستند. معادله (34) جوابی برابر با شکل مودهای ارائه شده در معادله (21) می‌باشد  $\eta(x) = \psi_j(x)$  در ادامه روند حل پذیری، این بار بدون حذف عبارات غیرهمگن، بعد از ضرب کردن  $\eta(x)$  در دو طرف معادله، انتگرال گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} \int (g_1'''' - \omega_j^2 g_1) \eta(x) dx \\ = -i\omega_j(2A'_j + \underline{c}A_j) \int \psi_j(x) \eta(x) dx \end{aligned} \quad (35)$$

با استفاده از شرایط مرزی معادلات (34,31) می‌توان معادله (35) را به صورت رابطه (36) بازنویسی نمود:

$$A_j^2 \bar{A}_j \Gamma_j + \psi_j''''(0) \left[ \frac{1}{2} \underline{Y} e^{i\sigma T_2} \right] + i\omega_j(2A'_j + \underline{c}A_j) \zeta_j = 0 \quad (36)$$

متغیرهای  $\Gamma_j$  و  $\zeta_j$  که در معادله (36) آمده‌اند به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\zeta_j = \int_0^1 \psi_j^2(x) dx \quad (37)$$

$$\Gamma_j = \frac{-4\beta_2^2}{3 + \beta_2} + 2\beta_2^2 G(\sqrt{2\omega}, 1) + 3\beta_3 \quad (38)$$

تابع  $G(\lambda, \chi)$  که در معادله (38) آمده، همان است که قبل‌تر در معادله (29) تعریف شد. برای حل معادله (36) جوابی به فرم  $\frac{1}{2} p e^{iq}$  برای  $A_j$  فرض شده و جایگذاری می‌شود. نتیجه به صورت رابطه (39) است:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} p^3 \Gamma_j e^{iq} + \psi_j''''(0) \left[ \frac{1}{2} \underline{Y} e^{i\sigma T_2} \right] \\ + i\omega_j \left( p' + ipq' + \frac{1}{2} \underline{c}p \right) e^{iq} \zeta_j = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

در ادامه متغیر  $\varphi$  به صورت رابطه (40) تعریف می‌شود:

$$\varphi = \sigma T_2 - q \Rightarrow q' = \sigma - \varphi' \quad (40)$$

با جایگذاری رابطه (40) در معادله (39) و جداسازی بخش حقیقی و موهومی، می‌توان روابط زیر را نوشت:

$$\frac{1}{8} p^3 \Gamma_j + \frac{1}{2} \underline{Y} \psi_j''''(0) \cos \varphi - p(\sigma - \varphi') \omega_j \zeta_j = 0 \quad (41)$$

$$\frac{1}{2} \underline{Y} \psi_j''''(0) \sin \varphi + \omega_j \left( p' + \frac{1}{2} \underline{c}p \right) \Gamma_j = 0 \quad (42)$$

در حالت پایا عبارات‌های دارای مشتق زمانی در معادله‌ی (41) و (42) برابر صفر می‌باشند. با استخراج سینوس و کسینوس، معادله‌ی (41) و (42) در حالت پایا به صورت روابط (44,43) نوشته می‌شوند:

$$\cos \varphi = \frac{p\sigma \omega_j \zeta_j - \frac{1}{8} p^3 \Gamma_j}{\frac{1}{2} \underline{Y} \psi_j''''(0)} \quad (43)$$

$$\sin \varphi = \frac{-\omega_j \underline{c} p \Gamma_j}{\underline{Y} \psi_j''''(0)} \quad (44)$$

با استفاده از قوانین مثلثات و مرتب‌سازی می‌توان رابطه‌ی بین پارامتر تنظیم  $\sigma$ ، دامنه‌ی نوسان  $p$  را به صورت رابطه (45) استخراج کرد:

$$\sigma = \frac{1}{p\omega_j \zeta_j} \left[ \pm \sqrt{\left( \frac{\underline{Y} \psi_j''''(0)}{2} \right)^2 - \left( \frac{\omega_j \underline{c} p \Gamma_j}{2} \right)^2} + \frac{1}{8} p^3 \Gamma_j \right] \quad (45)$$

همچنین رابطه‌ی تأخیر فاز نیز به صورت رابطه (46) استخراج می‌شود:

و  $v_2 = h_2 e^{2i\omega_j T_0}$  فرض می‌شود و به صورت جداگانه در معادله (26) جایگذاری می‌شود. جواب نهایی با تجمیع همه‌ی بخش‌های جواب به صورت رابطه (28) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} v_2(x, T_0, T_2) = \frac{\beta_2 A_j \bar{A}_j}{2(3 + \beta_1)} x^2 (x - 3) \\ + \beta_2 A_j^2 G(\sqrt{2\omega}, x) e^{2i\omega_j T_0} + cc \end{aligned} \quad (28)$$

تابع  $G(\lambda, \chi)$  در معادله (28) به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{aligned} G(\lambda, \chi) = [(\cos \lambda + \cosh \lambda)(\sinh \lambda \chi - \sin \lambda \chi) \\ + (\cos \lambda + \cosh \lambda)(\sinh \lambda \chi - \sin \lambda \chi)] / 2[\lambda^3 \\ \times (1 + \cos \lambda \cosh \lambda) - \beta_1 (\sinh \lambda \cos \lambda - \sin \lambda \cosh \lambda)] \end{aligned} \quad (29)$$

### 3-1-3- مسئله درجه 3

حل این بخش به جواب‌های به دست آمده برای  $v_1$  و  $v_2$  وابسته است. با جایگذاری آن‌ها، معادله (19) به صورت روابط (30) در می‌آید:

$$\begin{aligned} v_3'''' + D_0^2 v_3 = i\omega_j [-2A'_j - \underline{c}A_j] e^{i\omega_j T_0} \psi_j(x) \\ x = 0: v_3 = \frac{1}{2} \underline{Y} e^{i\Omega T_0} + cc, \quad v_3' = 0 \\ x = 1: v_3'' = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 1: v_3'''' = \beta_1 v_3 + \left[ \frac{-4\beta_2^2}{3 + \beta_2} + 2\beta_2^2 G(\sqrt{2\omega}, 1) + 3\beta_3 \right] \\ \times A_j^2 \bar{A}_j e^{i\omega_j T_0} + [\beta_3 + 2\beta_2^2 G(\sqrt{2\omega}, 1)] A_j^3 e^{3i\omega_j T_0} \end{aligned} \quad (30)$$

با توجه به اینکه مشتق  $v_1$  و  $v_2$  نسبت به  $T_1$  صفر است، در معادله‌ی (30) عبارات‌های دارای  $D_1$  حذف شده‌اند. همچنین منظور از  $A'_j$  مشتق  $A_j$  نسبت به  $T_2$  می‌باشد. در این قسمت از حل، هدف پاسخ  $v_3$  نیست، بلکه یافتن معادله‌ای برای پارامتر  $A_j$  می‌باشد. برای این منظور ابتدا جوابی به صورت  $v_3 = g_1(x) e^{i\omega_j T_0}$  برای  $v_3$  فرض می‌شود و در معادله (30) جایگذاری می‌شود. نتیجه به صورت روابط (31) است:

$$\begin{aligned} g_1'''' + \omega_j^2 g_1 = i\omega_j [-2A'_j - \underline{c}A_j] \psi_j(x) \\ x = 0: g_1 = \frac{1}{2} \underline{Y} e^{i\sigma T_2}, \quad g_1' = 0 \\ x = 1: g_1'' = 0, \quad g_1'''' = \beta_1 g_1 \\ + \left[ \frac{-4\beta_2^2}{3 + \beta_2} + 2\beta_2^2 G(\sqrt{2\omega}, 1) + 3\beta_3 \right] \times A_j^2 \bar{A}_j \end{aligned} \quad (31)$$

در معادله (31)،  $\sigma$  به صورت  $\sigma = \frac{\omega - \Omega}{\epsilon^2}$  تعریف شده است.  $g_1$  دارای حل عمومی غیرصفر است (حل عمومی آن برابر با  $\psi_j(x)$  است). بنابراین برای اینکه قسمت غیرهمگن مسئله (31) قابل حل باشد باید قانده‌ی حل‌پذیری رعایت شود. بنابراین معادله غیرهمگن (31) تنها در صورتی قابل حل است که قانده‌ی حل‌پذیری ارضاء شود. برای نوشتن قانده‌ی حل‌پذیری طبق روش ارائه شده در مرجع [34]، با حذف عبارات غیرهمگن فرض می‌شود معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی (31) همگن است. متغیر دلخواه و نامشخص  $\eta(x)$  در معادله همگن شده (31) ضرب شده و سپس انتگرال گرفته می‌شود:

$$\int (g_1''''(x) - \omega_j^2 g_1(x)) \eta(x) dx = 0 \quad (32)$$

معادله (32) را می‌توان به صورت رابطه (33) بسط داد:

$$\begin{aligned} \int (g_1''''(x) - \omega_j^2 g_1(x)) \eta(x) dx = [g_1'''' \eta - g_1'' \eta' + g_1' \eta'' \\ - g_1 \eta'''] \Big|_0^1 + \int (\eta''''(x) - \omega_j^2 \eta(x)) g_1(x) dx \end{aligned} \quad (33)$$

حال با استفاده از همگن شده شرایط مرزی (31) و جایگذاری آن در سمت راست معادله (32) می‌توان معادله دیفرانسیل حاکم بر  $\eta(x)$  را استخراج کرد:

اتمی هستند. در روش گلرکین، برای کاهش مرتبه معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی توصیف کننده حرکت میکروتیر به یک معادله دیفرانسیل معمولی فرض می‌شود:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^N \psi_j(x) Q_j(t) \quad (50)$$

رابطه‌ی  $w(x, t)$  با  $u(x, t)$  در معادله (2) بیان شده است. برای استخراج روابط در روش گلرکین دوباره از معادلات انرژی میکروتیر کمک می‌گیریم:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \sum_{n=1}^N \psi_j(x) \dot{Q}_j(t) + \dot{y}(t) \right)^2 dx \quad (51)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \sum_{n=1}^N \psi_j''(x) Q_j(t) \right)^2 dx + \frac{H \psi_j(x)}{\left( Z - \sum_{n=1}^N \psi_j(x) Q_j(t) - y(t) \right)^2} \quad (52)$$

$$D = \frac{1}{2} \int_0^1 c \left( \sum_{n=1}^N \psi_j(x) Q_j(t) + \dot{y}(t) \right)^2 dx \quad (53)$$

از معادلات لاگرانژ می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{Q}_j} \quad j = 1, 2, 3 \dots \quad (54)$$

در معادله (52) لاگرانژین به صورت  $L = T - V$  تعریف می‌شود. با جایگذاری معادلات (51-49) در معادله (51) و انجام انتگرالی‌های مربوطه و همچنین با استفاده از تعامد شکل‌مودها، معادلات گلرکین به شکل زیر استخراج می‌شوند:

$$\ddot{Q}_j + \frac{H \psi_j(x)}{\left[ Z - \sum_{n=1}^N \psi_j(x) Q_j(t) - y(t) \right]^2} + c \dot{Q}_j + \omega_j^2 Q_j - \psi_j(x) \sum_{i=1}^N \psi_i'''(x) Q_i(t) = \int_0^1 \psi_i(x) dx [\ddot{y}(t) + c \dot{y}(t)], \quad j = 1, 2, 3 \dots \quad (55)$$

در اولین قدم برای حل مسأله به روش گلرکین، معادله‌ی انحراف استاتیکی (10) با این روش حل شده است. در شکل 2 نتایج حل به روش گلرکین با نتایج حل تحلیلی مقایسه شده‌اند. برای ترسیم شکل 2 از یک شکل مود

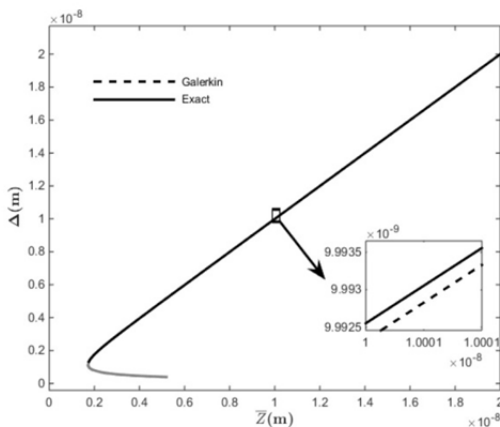


Fig. 2 Variation of Tip static deflection with initial tip-sample distance

شکل 2 تغییرات انحراف استاتیکی سوزن با تغییر فاصله‌ی اولیه بین سوزن و نمونه

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{-\omega_j c p \Gamma_j}{2 p \sigma \omega_j \zeta_j - \frac{1}{4} p^3 \Gamma_j} \right) \quad (46)$$

با دقت در معادله (45) مشخص می‌شود در این معادلات اثری از متغیر  $\varepsilon$  وجود ندارد و رابطه‌ی بین پارامترهای مسأله مستقل از آن است. با استخراج رابطه‌های دامنه و تأخیر فاز، روند حل معادله حرکت میکروتیر به پایان می‌رسد. در اینجا بار دیگر تأکید می‌شود مطابق روش اغتشاشات، در مسأله از درجه 3،  $\varepsilon^3$  هدف تنها پیدا کردن رابطه‌ی بین پارامتر تنظیم و دامنه‌ی نوسان است و نیازی به حل کامل مسأله نیست. روش اغتشاشات علاوه بر حل معادله‌ی میکروتیر به صورت پیوسته و استخراج روابط مختلف بین پارامترهای مسأله این امکان را فراهم می‌کند که دامنه‌ی نوسان ماکزیمم و همچنین فرکانس مربوط به آن را پیدا کرد. با گرفتن مشتق ضمنی از معادله‌ی (45) نسبت به متغیر  $p$  می‌توان نشان داد که دامنه‌ی ماکزیمم و فرکانس مربوط به آن به صورت روابط (47) است:

$$p_{max} = \frac{2Y \psi_j'''(0)}{\omega_j c \zeta_j}, \quad \sigma_{max} = \frac{\Gamma_j \left( Y \psi_j'''(0) \right)^2}{2c^2 (\omega_j \zeta_j)^3} \quad (47)$$

با جایگذاری معادله (47) در معادله (46) می‌توان نشان داد دامنه‌ی ماکزیمم در تأخیر فاز 90 درجه اتفاق می‌افتد که کاملاً مطابق رفتار تجربی میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی است. جواب نهایی میکروتیر میکروسکوپ و سوزن مربوطه که تجمیع جواب‌های به دست آمده برای  $v_1$  و  $v_2$  است را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$u(x, t) = u^*(x, t) + v(x, t) = u^*(x, t) + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 = u^*(x, t) + \varepsilon p \cos(\Omega t - \varphi) \psi_j(x) + \frac{\beta_2 A_j \bar{A}_j}{2(3 + \beta_1)} x^2 (x - 3) + A_j^2 G(\sqrt{2\omega}, x) \cos(2\Omega t - 2\varphi) \quad (48)$$

همان‌طور که مشخص است برای دستیابی به حرکت سوزن کافی است در معادله بالا  $x = 1$  قرار داده شود:

$$u(1, t) = u^*(1, t) + v(1, t) \quad (49)$$

### 2-3- روش گلرکین

به منظور اعتبارسنجی جواب به دست آمده از روش اغتشاشات، مسأله مجدداً با روش گلرکین حل شده است. روش گلرکین یکی از ساده‌ترین و متداول‌ترین روش‌های حل معادلات غیر خطی است. در این روش با فرض جواب ضریبی و حدس یک دسته تابع برای متغیر مکان، یک مرتبه از معادله دیفرانسیل حاکم بر AFM کاسته می‌شود و معادله‌ی با مشتقات جزئی به دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. سپس معادلات دیفرانسیل معمولی به دست آمده را می‌توان با استفاده از روش‌های عددی مانند روش رانگ - کوتا حل نمود. از توابع مختلفی می‌توان برای توزیع مکانی استفاده نمود، اما شکل مودهای خطی به دلیل ارضا نمودن شرایط مرزی و مستقل خطی بودن باعث سادگی بیشتر معادلات می‌شوند. برای دستیابی به شکل‌مودهای خطی باید معادله دیفرانسیل حرکت میکروتیر (12) را برای نوسان حول تعادل استاتیکی بازنویسی نمود و به جای نیروی برهم‌کنش غیرخطی در شرایط مرزی (12- پ) از معادل خطی آن استفاده کرد، همچنین عبارات مربوط به میرایی و تحریک نیز باید از معادله حرکت حذف شوند. لازم به توجه است که بعد از انجام این تغییرات روی معادله (12) دقیقاً معادله (17) بدست می‌آید. پس به این ترتیب شکل مودهای  $\psi_j$  که در معادله (21) توصیف شدند، شکل مودهای خطی میکروتیر میکروسکوپ نیروی

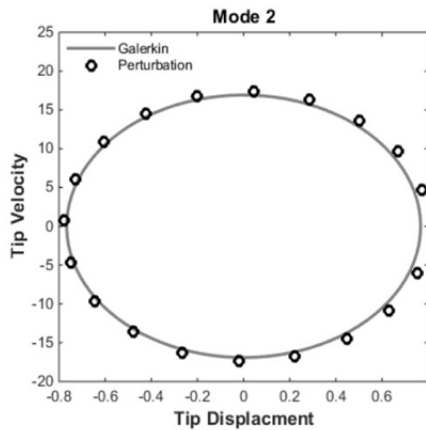


Fig. 4 Comparison of the second-mode limit-cycle oscillations obtained from two different methods ( $\bar{Z} = 5 \text{ nm}$ )

شکل 4 مقایسه‌ی سیکل حدی مود دوم به دست آمده از دو روش مختلف ( $\bar{Z} = 5 \text{ nm}$ )

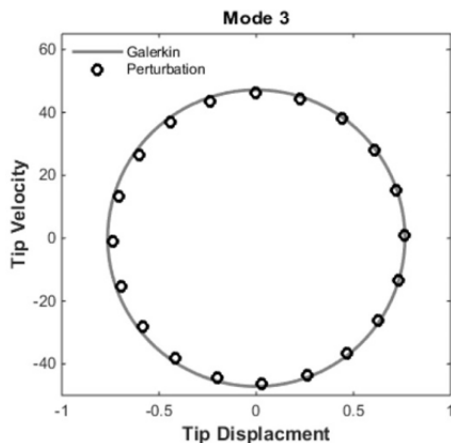


Fig. 5 Comparison of the third-mode limit-cycle oscillations obtained from two different methods ( $\bar{Z} = 5 \text{ nm}$ )

شکل 5 مقایسه‌ی سیکل حدی مود سوم به دست آمده از دو روش مختلف ( $\bar{Z} = 5 \text{ nm}$ )

#### 2-4- خواص مودهای مختلف میکروتیر

در ادامه پاسخ فرکانسی چهار مود اولیه میکروتیر برای حالات مختلف ارائه شده است. باید توجه کرد در این مسأله وابستگی دامنه‌ی نوسان سوزن به دامنه‌ی تحریک، دقیقاً برعکس وابستگی آن به مقدار ضریب میرایی است. شکل‌های 7 تا 10 پاسخ فرکانسی برای ضریب میرایی ثابت و مقادیر کاهشی دامنه‌ی تحریک را نشان می‌دهد. دامنه‌ی تحریک برای مودهای اول تا چهارم به ترتیب برابر است با:

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= 0.012, 0.008, 0.004 \text{ nm} \\ \bar{Y} &= 0.0035, 0.0025, 0.0015 \text{ nm} \\ \bar{Y} &= 0.002, 0.0015, 0.001 \text{ nm} \\ \bar{Y} &= 0.0015, 0.0011, 0.0007 \text{ nm} \end{aligned}$$

مودهای بالاتر به دلیل فرکانس بالای نوسان، انرژی بیشتری دارند و با دامنه‌ی تحریک کوچک، دامنه‌ی نوسان بزرگی از خود نشان می‌دهد.  $\bar{Y}$  در مودهای مختلف به گونه‌ای انتخاب شده که دامنه‌ی نوسان وارد ناحیه‌ی تماسی نشود. در شکل‌های 7 تا 10 میرایی ثابت فرض شده و تحریک افزایش یافته است. لازم به ذکر است با ثابت در نظر گرفتن تحریک و کاهش میرایی نیز می‌توان به نتایج مشابهی دست یافت. ضریب میرایی برابر مقدار گزارش شده در جدول 1 در نظر گرفته شده است. فاصله‌ی اولیه بین سوزن و نمونه

استفاده شده است. در ادامه برای انجام حل‌های دینامیکی نیز از یک شکل مود (همان مود ارتعاشی که در مسأله تحریک می‌شود) استفاده شده است. قابل ذکر است استفاده از دو یا تعداد بیشتری شکل مود در روش گلرکین، در این مسأله خاص تأثیر چندانی در نتیجه نهایی ندارد.

#### 4- بحث و بررسی نتایج حل

در این قسمت با تکیه بر روابط تشریح شده در قسمت‌های قبل، نمودارهای مختلفی از عملکرد میکروسکوپ ارائه گردیده. در همه‌ی نمودارها به جز نمودار 15 همه‌ی متغیرها بی‌بعد هستند.

#### 1-4- اعتبار سنجی حل

برای هر دو روش حل توضیح داده شده در قسمت‌های قبل یک کد به صورت جداگانه در نرم‌افزار متلب توسعه داده شده است. همان‌طور که از ارتعاشات مقدماتی استنباط می‌شود، جواب مسائل ارتعاشی با تحریک خارجی دارای دو قسمت پایا و گذرا است. روش اغتشاشات به صورت مستقیم جواب پایا را می‌دهد، اما برای دستیابی به جواب پایا در روش گلرکین باید معادله (55) را برای یک زمان بزرگ حل عددی کرد؛ با توجه به اینکه در زمان‌های بزرگ جواب گذرا میرا می‌شود، نتایج مربوط به بازه‌ی زمانی انتهایی حل را می‌توان به عنوان جواب پایا در نظر گرفت. شکل‌های 3 تا 6 به ترتیب سیکل‌های حدی سوزن مربوط به تحریک مودهای ارتعاشی اول تا چهارم که با دو روش مختلف به دست آمده را نشان می‌دهند. 4 فرکانس تشدید اول بدون بعد میکروتیر عبارتند از: 3.517, 22.036, 61.698, 120.902. لازم به ذکر است که در هر یک از این شکل‌ها و به طور کلی در این پژوهش تنها یک شکل مود تحریک شده و تحریک به گونه‌ای نیست که چندین مود ارتعاشی به صورت همزمان نوسان کنند. در هر چهار شکل 3 تا 6 که مربوط به تحریک چهار مود اول میکروتیر هستند دو روش اختلاف بسیار ناچیزی دارند. البته در این شکل‌ها بدترین حالت از نظر اختلاف دو روش که فاصله‌ی اولیه بین سوزن و نمونه نسبتاً کوچک است ( $\bar{Z} = 5 \text{ nm}$ ) نشان داده شده و در فواصل بیشتر بین سوزن و نمونه و یا نوسانات کوچکتر سوزن، اختلاف دو روش از این نیز کمتر است. دامنه‌ی نوسان تحریک، در مودهای یک تا چهارم به ترتیب برابر است با (با افزایش عدد مود تحریک کوچک شده):

$$\bar{Y} = 0.0035 \text{ nm}, \bar{Y} = 0.012 \text{ nm}, \bar{Y} = 0.015 \text{ nm}, \bar{Y} = 0.02 \text{ nm}$$

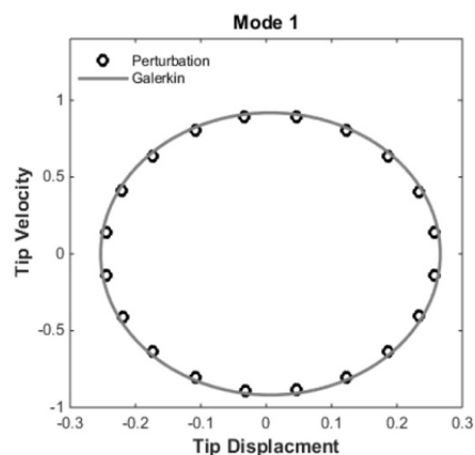


Fig. 3 Comparison of the first-mode limit-cycle oscillations obtained from two different methods ( $\bar{Z} = 5 \text{ nm}$ )

شکل 3 مقایسه‌ی سیکل حدی مود اول به دست آمده از دو روش مختلف ( $\bar{Z} = 5 \text{ nm}$ )

یکی دیگر از خواص مهم میکروسکوپ نیروی اتمی که مستقیماً به دینامیک غیرخطی مسأله وابسته است در شکل‌های 11 تا 14 نشان داده شده. در شکل‌های 11 تا 14 با ثابت در نظر گرفتن دامنه‌ی تحریک و ضریب میرایی، پاسخ فرکانسی دامنه‌ی نوسان سوزن برای مقادیر مختلف  $\bar{Z}$  ترسیم شده است. با کاهش مقدار  $\bar{Z}$  و نزدیک‌تر شدن میکروتیپ به نمونه خاصیت نرم شوندگی که باعث جابجایی فرکانس تشدید به مقادیر کمتر می‌شود در همه‌ی چهار مود نشان داده شده مشهود است. البته این جابجایی فرکانس با بالاتر رفتن عدد مود کاهش می‌باید تا جایی که برای مدهای بالاتر از یک برای تفکیک نمودارها از به بزرگ‌نمایی زیاد نیاز است.

در شکل 15 دامنه‌ی نوسان سوزن و ضریب میرایی در مدهای مختلف ثابت نگه داشته شده است و تأثیر تحریک مدهای مختلف در جابجایی فرکانس تحریک در اثر تغییر  $\bar{Z}$  بررسی شده است. همان‌طور که از شکل 15 مشخص است در شرایط برابر مدهای بالاتر به تغییرات در فاصله‌ی میکروتیپ و نمونه کمتر حساس هستند. این بدان معنی است که برای تحریک و استفاده از مدهای بالاتر باید دستگاه‌های حساس‌تری استفاده کرد تا بتوان تغییرات کوچک در فرکانس تشدید یا دامنه‌ی نوسان را حس نمود. این حساسیت کمک می‌کند تا از ارتعاشات دامنه کوچک میکروتیپ بتوان اطلاعات مورد نیاز در مورد نمونه را کسب کرد و نیازی به تحریک بزرگتر نباشد.

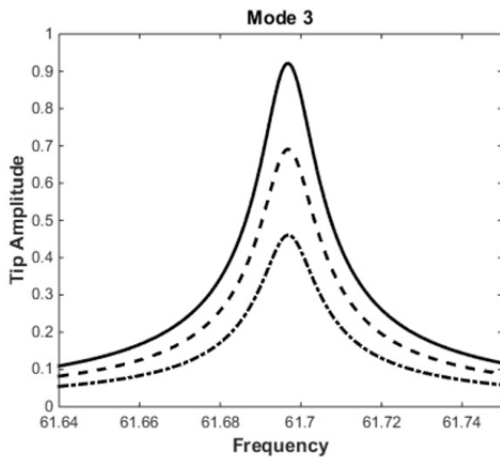


Fig. 9 Frequency-response curve for the third mode ( $\bar{Z} = 8 \text{ nm}$ )  
 شکل 9 منحنی پاسخ فرکانسی دامنه‌ی نوسان سوزن در مود سوم ( $\bar{Z} = 8 \text{ nm}$ )

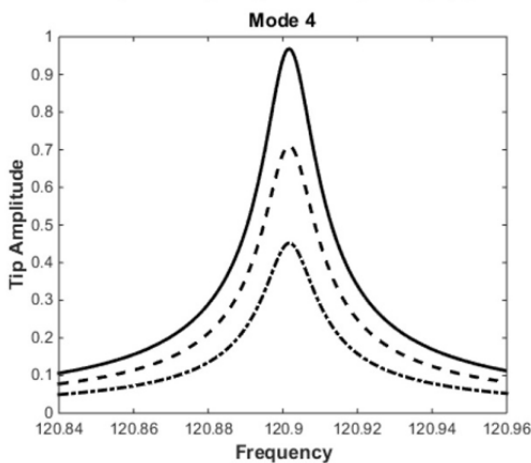


Fig. 10 Frequency-response curve for the fourth mode ( $\bar{Z} = 8 \text{ nm}$ )  
 شکل 10 منحنی پاسخ فرکانسی دامنه‌ی نوسان سوزن در مود چهارم ( $\bar{Z} = 8 \text{ nm}$ )

برابر  $\bar{Z} = 8 \text{ nm}$  می‌باشد و همان‌طور که مشخص است در این فاصله، فرکانس ماکزیمم نوسان با تغییر دامنه‌ی تحریک تقریباً تغییر نمی‌کند اما همواره شرایط به این صورت نیست و برای مقادیر کوچک‌تر  $\bar{Z}$ ، فرکانس ماکزیمم دامنه به دامنه‌ی تحریک نیز وابسته است.

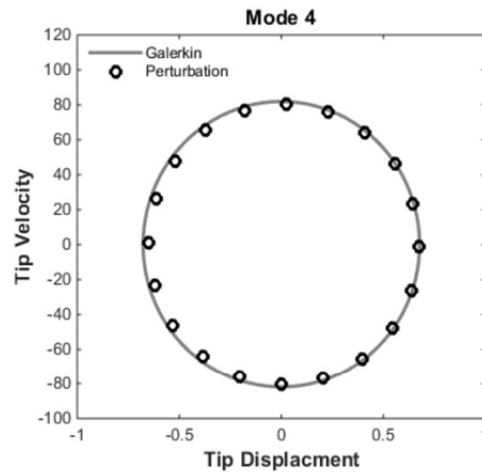


Fig. 6 Comparison of the forth-mode limit-cycle oscillations obtained from two different methods ( $\bar{Z} = 5 \text{ nm}$ )

شکل 6 مقایسه‌ی سیکل حدی مود چهارم به دست آمده از دو روش مختلف ( $\bar{Z} = 5 \text{ nm}$ )

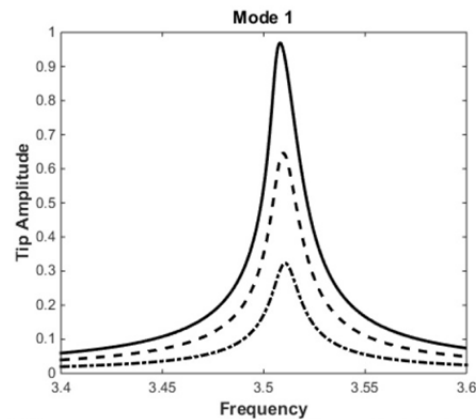


Fig. 7 Frequency-response curve for the first mode ( $\bar{Z} = 8 \text{ nm}$ )  
 شکل 7 پاسخ فرکانسی دامنه‌ی نوسان سوزن در مود اول ( $\bar{Z} = 8 \text{ nm}$ )

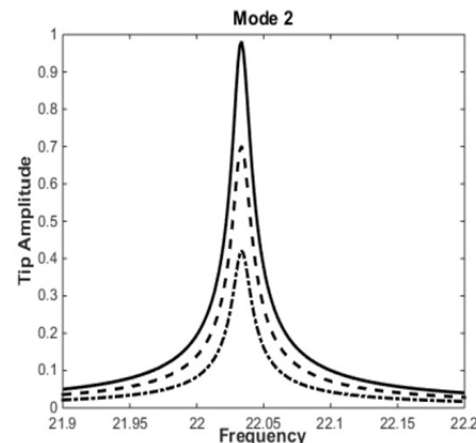


Fig. 8 Frequency-response curve for the second mode ( $\bar{Z} = 8 \text{ nm}$ )  
 شکل 8 پاسخ فرکانسی دامنه‌ی نوسان سوزن در مود دوم ( $\bar{Z} = 8 \text{ nm}$ )



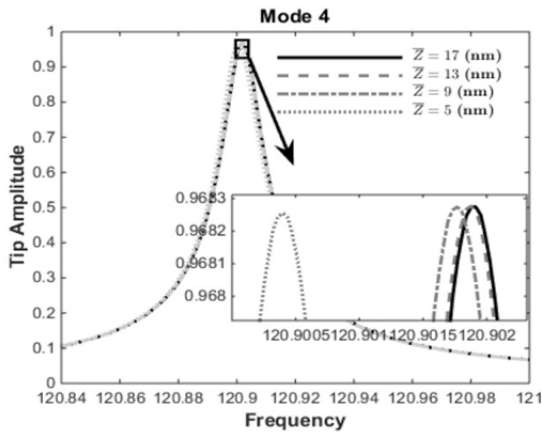


Fig. 14 Fourth-mode frequency-response curves for several initial tip-sample separations

شکل 14 منحنی پاسخ فرکانسی برای فواصل اولیه‌ی مختلف سوزن و نمونه در مود چهارم

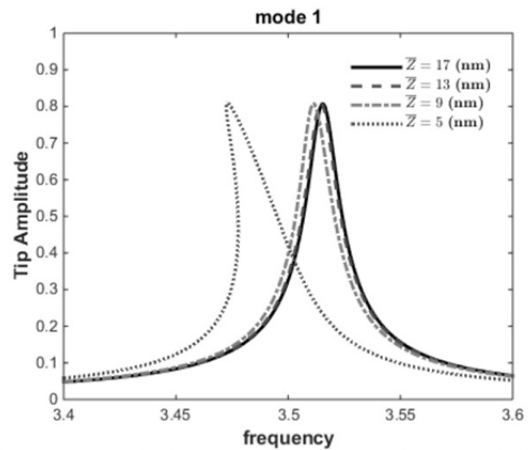


Fig. 11 First-mode frequency-response curves for several initial tip-sample separations

شکل 11 منحنی پاسخ فرکانسی برای فواصل اولیه‌ی مختلف سوزن و نمونه در مود اول

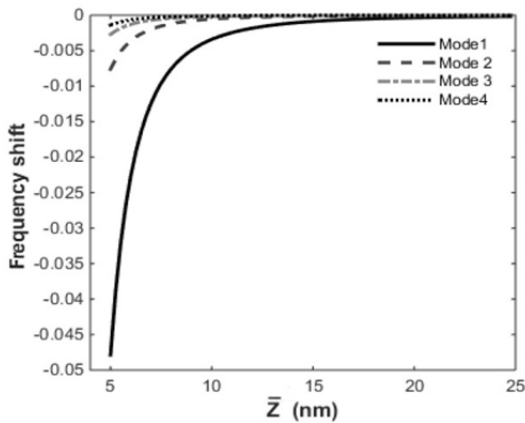


Fig. 15 Frequency shift versus initial tip-sample separation

شکل 15 جابه‌جایی فرکانسی بر حسب فاصله‌ی اولیه سوزن - نمونه

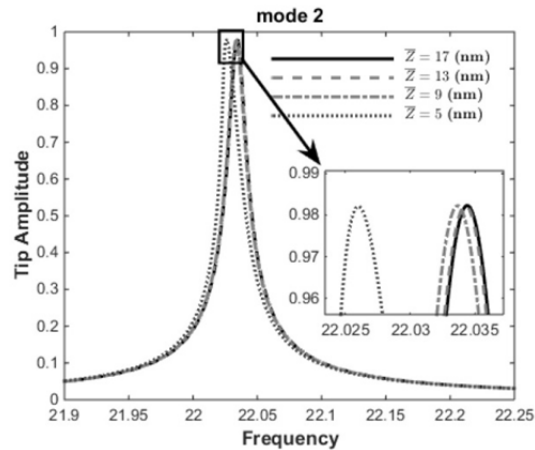


Fig. 12 second-mode frequency-response curves for several initial tip-sample separations

شکل 12 منحنی پاسخ فرکانسی برای فواصل اولیه‌ی مختلف سوزن و نمونه در مود دوم

5- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

امروزه مودهای بالاتر میکروتیر به دلیل سرعت بیشتر در روبش سطح مورد توجه قرار گرفته‌اند اما امکان تحلیل دقیق این مودها، بدون لحاظ کردن ماهیت پیوسته میکروتیر در استخراج معادلات حرکت و همچنین حل آن‌ها وجود ندارد. در این پژوهش از تئوری تیر اویلر-برنولی برای استخراج روابط استفاده شده و سپس از روش اغتشاشات برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی میکروتیر استفاده شده است. ضمناً جواب به دست آمده از این روش با حل عددی بر مبنای روش گلرکین صحت‌گذاری شده است. روش اغتشاشات به دلیل ارائه روابط به صورت تحلیلی دید بهتری از مسأله در اختیار می‌گذارد و کیفیت وابستگی ارتعاش سوزن به پارامترهای مختلف را به خوبی نمایش می‌دهد. برای مثال روابط حاکم بر ماکزیمم دامنه‌ی نوسان و همچنین فرکانس مربوط به آن به صورت تحلیلی ارائه گردیده است.

برای درک بهتر از روابط استخراج شده و همچنین ایجاد دید دقیق‌تر از مودهای بالاتر میکروتیر، نمودارهای مختلف و متفاوتی از عملکرد میکروسکوپ در چهار مود اول میکروتیر کشیده شده است. پاسخ فرکانسی دامنه‌ی نوسان سوزن برای هر چهار مود و با دامنه‌های تحریک متفاوت ترسیم شد و نشان داده شده مودهای بالاتر به دلیل انرژی بیشتر، دامنه‌ی نوسان بزرگتری دارند. مودهای بالاتر حساسیت بیشتری به اندازه‌ی دامنه‌ی

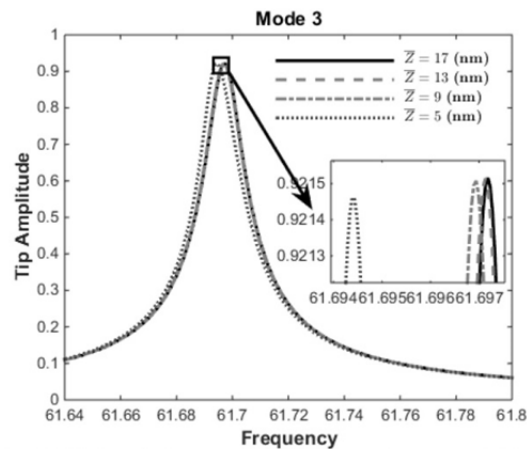


Fig. 13 Third-mode frequency-response curves for several initial tip-sample separations

شکل 13 منحنی پاسخ فرکانسی برای فواصل اولیه‌ی مختلف سوزن و نمونه در مود سوم

- [15] S. Eslami, N. Jalili, A comprehensive modeling and vibration analysis of AFM microcantilevers subjected to nonlinear tip-sample interaction forces, *Ultramicroscopy*, Vol. 117, pp. 31-45, 2012.
- [16] N. Jalili, M. Dadfarnia, D. M. Dawson, A fresh insight into the microcantilever-sample interaction problem in non-contact atomic force microscopy, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 126, No. 2, pp. 327-335, 2004.
- [17] N. Jalili, M. Dadfarnia, D. M. Dawson, Distributed-parameters base modeling and vibration analysis of micro-cantilevers used in atomic force microscopy, *Proceeding of ASME 2003 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Chicago: American Society of Mechanical Engineers, pp. 1643-1651, 2003.
- [18] A. Bahrami, A. H. Nayfeh, Nonlinear dynamics of tapping mode atomic force microscopy in the bistable phase, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 18, No. 3, pp. 799-810, 2013.
- [19] J. Turner, Non-linear vibrations of a beam with cantilever-Hertzian contact boundary conditions, *Journal of sound and Vibration*, Vol. 275, No. 1, pp. 177-191, 2004.
- [20] J. A. Turner, Nonlinear vibrations in contact atomic force microscopy, *Proceeding of ASME 2003 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Chicago: American Society of Mechanical Engineers, pp. 1821-1830, 2003.
- [21] E. M. Abdel-Rahman, A. H. Nayfeh, Contact force identification using the subharmonic resonance of a contact-mode atomic force microscopy, *Nanotechnology*, Vol. 16, No. 2, pp. 199, 2005.
- [22] D. Zulli, A. Luongo, Nonlinear energy sink to control vibrations of an internally nonresonant elastic string, *Meccanica*, Vol. 50, No. 3, pp. 781-794, 2015.
- [23] A. Luongo, D. Zulli, Nonlinear energy sink to control elastic strings: the internal resonance case, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 81, No. 1-2, pp. 425-435, 2015.
- [24] R. Garcia, E. T. Herruzo, The emergence of multifrequency force microscopy, *Nature Nanotechnology*, Vol. 7, No. 4, pp. 217-226, 2012.
- [25] A. Raman, S. Trigueros, A. Cartagena, A. Stevenson, M. Susilo, E. Nauman, S. A. Contera, Mapping nanomechanical properties of live cells using multi-harmonic atomic force microscopy, *Nature Nanotechnology*, Vol. 6, No. 12, pp. 809-814, 2011.
- [26] R. Vázquez, F. J. Rubio-Sierra, R. W. Stark, Multimodal analysis of force spectroscopy based on a transfer function study of micro-cantilevers, *Nanotechnology*, Vol. 18, No. 18, pp. 185504, 2007.
- [27] N. Martinez, J. R. Lozano, E. Herruzo, F. Garcia, C. Richter, T. Sulzbach, R. Garcia, Bimodal atomic force microscopy imaging of isolated antibodies in air and liquids, *Nanotechnology*, Vol. 19, No. 38, pp. 384011, 2008.
- [28] J. R. Lozano, R. Garcia, Theory of multifrequency atomic force microscopy, *Physical Review Letters*, Vol. 100, No. 7, pp. 076102, 2008.
- [29] J. R. Lozano, R. Garcia, Theory of phase spectroscopy in bimodal atomic force microscopy, *Physical Review B*, Vol. 79, No. 1, pp. 014110, 2009.
- [30] T. R. Rodriguez, R. Garcia, Compositional mapping of surfaces in atomic force microscopy by excitation of the second normal mode of the microcantilever, *Applied Physics Letters*, Vol. 84, No. 3, pp. 449-451, 2004.
- [31] S. Rützel, S. I. Lee, A. Raman, Nonlinear dynamics of atomic-force-microscope probes driven in Lennard-Jones potentials, *the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 459, No. 2036, pp. 1925-1948, 2003.
- [32] A. H. Nayfeh, *Introduction to Perturbation Techniques*, pp. 432-438, New York: John Wiley & Sons, 2011.
- [33] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, pp. 161-258, New York: John Wiley & Sons, 2008.
- [34] A. H. Nayfeh, *Perturbation Methods*, pp. 228-308, New York: John Wiley & Sons, 2008.

تحریک دارند و با دامنه‌ی تحریک‌های به نسبت کوچک دامنه‌ی نوسان‌های بزرگی از خود نشان می‌دهند. جابه‌جایی فرکانس تشدید که از جمله مهم-ترین خواص میکروسکوپ نیروی اتمی در حالت غیرتماسی است از دیگر مواردی است که به تفصیل واکاوی شد. دامنه‌ی نوسان سوزن و فاصله‌ی اولیه‌ی بین سوزن و نمونه و همچنین شماره مود سه عامل مهمی هستند که بر اندازه جابجایی فرکانسی تأثیر می‌گذارند. افزایش دامنه‌ی نوسان و همچنین کاهش فاصله‌ی اولیه بین سوزن و نمونه جابجایی فرکانسی را کاهش می‌دهد. نشان داده شد که مودهای بالاتر میکروتیر دارای جابجایی فرکانس کوچک‌تری هستند. این مورد به این معنی است که برای استفاده از فواید مودهای بالاتر به دستگاه‌های حساس‌تری که تغییرات کوچک در خواص ارتعاشی سوزن را حس می‌کنند نیاز است. در نهایت این پژوهش می‌تواند به درک بهتر از دینامیک غیرخطی میکروسکوپ نیروی اتمی و همچنین انتخاب مناسب پارامترها در استفاده از مودهای بالاتر میکروتیر کمک کند.

## 6- مراجع

- [1] G. Haugstad, *Atomic Force Microscopy: Understanding Basic Modes and Advanced Applications*, pp. 10-30, New Jersey: John Wiley & Sons, 2012.
- [2] G. H. Michler, *Electron Microscopy of Polymers*, pp. 186-197, Berlin, Springer, 1999.
- [3] P. C. Braga, D. Ricci, *Atomic Force Microscopy: Biomedical Methods and Applications*, pp. 3-31, Milan: Springer Science & Business Media, 2004.
- [4] P. Eaton, P. West, *Atomic Force Microscopy*, pp. 49-78, Oxford: Oxford University Press, 2010.
- [5] R. Garcia, R. Pérez, Dynamic atomic force microscopy methods, *Surface Science Reports*, Vol. 47, No. 6, pp. 197-301, 2002.
- [6] A. Raman, J. Melcher, R. Tung, Cantilever dynamics in atomic force microscopy, *Nano Today*, Vol. 3, No. 1, pp. 20-27, 2008.
- [7] F. J. Giessibl, Advances in atomic force microscopy, *Reviews of Modern Physics*, Vol. 75, No. 3, pp. 949-985, 2003.
- [8] R. Garcia, *Amplitude Modulation Atomic Force Microscopy*, pp. 90-101, New York, John Wiley & Sons, 2011.
- [9] G. Binnig, C. F. Quate, C. Gerber, Atomic force microscope, *Physical Review Letters*, Vol. 56, No. 9, pp. 930-933, 1986.
- [10] A. San Paulo, R. Garcia, High-resolution imaging of antibodies by tapping-mode atomic force microscopy: Attractive and repulsive tip-sample interaction regimes, *Biophysical Journal*, Vol. 78, No. 3, pp. 1599-1605, 2000.
- [11] N. Jalili, K. Laxminarayana, A review of atomic force microscopy imaging systems: application to molecular metrology and biological sciences, *Mechatronics*, Vol. 14, No. 8, pp. 907-945, 2004.
- [12] A. San Paulo, R. Garcia, Tip-surface forces, amplitude, and energy dissipation in amplitude-modulation (tapping mode) force microscopy, *Physical Review B*, Vol. 64, No. 19, pp. 193411, 2001.
- [13] A. Bahrami, A. H. Nayfeh, On the dynamics of tapping mode atomic force microscope probes, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 70, No. 2, pp. 1605-1617, 2012.
- [14] M. A. Mohammadi, K. A. Yousefi, M. E. Maani, M. Karimpour, Dynamic behavior analysis atomic force microscopy based on gradient theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 9, pp. 155-164, 2016. (In Persian)