

## ردیابی آرایش در سیستم‌های چند عامله مرتبه کسری: رویکرد کنترل مد لغزشی مقاوم

وحید مومنی<sup>1</sup>، مهدی سجودی<sup>2\*</sup>، وحید جوهری مجد<sup>3</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی برق، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استادیار، مهندسی برق، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

3- دانشیار، مهندسی برق، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

\* تهران، صندوق پستی 14115، sojoodi@modares.ac.ir

### چکیده

هدف اصلی در این مقاله ردیابی آرایش توزیع شده برای سیستم‌های چند عامله مرتبه کسری با رویکرد راهبر-پیرو می‌باشد. ابتدا در مورد تابع نامزد لیاپانوف که برای بررسی پایداری سیستم کنترل شده مورد استفاده قرار می‌گیرد، بحث شده است. تابع نامزد معرفی شده مبتنی بر خواص ماتریس معرف گراف سیستم مورد نظر می‌باشد. در این مرحله از روش مستقیم لیاپانوف برای پایداری سیستم‌های مرتبه کسری استفاده شده است. سپس با استفاده از روش کنترل مد لغزشی به طراحی کنترل کننده غیر متمرکز برای ردیابی آرایش در سیستم‌های چندعامله مرتبه کسری خطی پرداخته شده است. که در آن به معرفی و اثبات کارایی ورودی کنترل معرفی شده پرداخته شده است. در ادامه در مدل سیستم ورودی از نوع اغتشاش نیز در نظر گرفته شده و کارایی کنترل طراحی شده در حالت اعمال اغتشاش نشان داده شده است. در این بخش نشان داده شده است که کنترل کننده معرفی شده در قسمت قبل با توجه به کارایی کنترل مد لغزشی کارایی مطلوب را دارا می‌باشد. در قسمت دوم نیز پایداری سیستم مانند حالت نخست مورد بررسی قرار گرفته است. در پایان چند مثال شبیه سازی برای راستی آزمایی نتایج ارائه شده است.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 27 دی 1396

پذیرش: 19 خرداد 1396

ارائه در سایت: 21 اردیبهشت 1397

کلید واژگان:

ردیابی آرایش

سیستم‌های چند عامله

کنترل توزیع شده

کنترل مد لغزشی

سیستم‌های مرتبه کسری

## Formation tracking in fractional-order multi-agent systems: robust sliding mode approach

Vahid Momeni, Mahdi Sojoodi\*, Vahid Johari Majd

Department of Electrical and Computer Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

\* P.O.B. 14115 Tehran, Iran, sojoodi@address.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 17 January 2017  
Accepted 09 June 2017  
Available Online 11 May 2018

### Keywords:

Formation tracking  
Multi agent systems  
Distributed control  
Sliding mode control  
Fractional order systems

### ABSTRACT

The main purpose of this paper is to the distributed formation tracking for fractional order multi agent systems with the leader-follower approach. First, it discusses the Lyapunov candidate function used to check the stability of the controlled system. The introduced candidate function is based on the properties of the matrix representing the desired system graph of the system. In this phase, the Lyapunov direct method is used to determine the stability of fractional order systems. Then, using sliding mode control, a decentralized controller design for tracking in fractional multi agent system is presented in which it introduces and verifies the introduced control inputs. In the model, the input system is also considered as a disturbance type, and the control efficiency designed in turbulence mode is shown. In this section, it is shown that the controller introduced in the previous section has a desirable efficiency due to the sliding mode control. In the second section, the stability of the system, such as the first section, is investigated. at the end of this paper, several simulation examples are developed for controlling the performance of the controller.

### 1- مقدمه

کارهای که با تعریف از پیش تعیین شده ای برای عامل‌ها و تعریف آرایش مشخص سعی بر رسیدن به این هدف دارند [6-8] این پژوهش‌ها بدون در نظر گرفتن نظریه گراف و خواص مربوطه برای سیستم‌های چند عامله است و عمدتاً از طراحی رفتار مشخص برای هر عامل یا تعریف یک ساختار مجازی و یا با ساختار راهبر پیرو و طراحی رفتار برای راهبر سعی بر رسیدن عامل‌ها به آرایش مطلوب دارند.

اما بخش دیگر کارهای صورت گرفته مبتنی بر نظریه گراف می‌باشد. به عنوان نمونه در [9] مسئله ترکیبی کنترل آرایش و مهار عامل‌ها برای سیستم‌های با دینامیک عامل‌های مرتبه دوم به همراه تأخیر در آن بررسی شده است. روشی آموزشی و تکراری تطبیقی مبتنی بر روش کنترل آرایش

کنترل مشارکتی توزیع شده بدین معنی است که عامل‌ها در یک رفتار هماهنگ با یکدیگر به سمت دست‌یابی به هدفی مشترک همکاری کنند و این کار را از طریق کنترل کننده‌های غیر متمرکز و محلی انجام دهند.

در زمینه کنترل مشارکتی بیشتر مطالعاتی که در راستای این همکاری و هماهنگی صورت گرفته است مربوط به توافق بین عامل‌ها می‌باشد [1-5].

عمده پژوهش‌های صورت گرفته در زمینه کنترل مشارکتی در زمینه توافق می‌باشد. اما یکی از زمینه‌های پرکاربرد دیگر مطرح در زمینه کنترل مشارکتی برای هماهنگی و همکاری عامل‌ها مربوط به کنترل آرایش است. کارهای صورت گرفته در این زمینه عمدتاً به دوبخش کلی تقسیم‌بندی می‌شوند. اول

$$L\{x^{(\alpha)}(t)\} = s^\alpha X(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} x^{(k)}(0) \quad (3)$$

در حالی که  $X(s) = L\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} x(t) dt$  می‌باشد. با توجه به اینکه در این تحقیق  $\alpha \in (0, 1]$  فرض شده است، بنابراین

تعریف رابطه (3) به شکل رابطه (4) قابل بازنویسی است:

$$L\{x^{(\alpha)}(t)\} = s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1} x(0) \quad (4)$$

برای بررسی پایداری نیز روش مستقیم لیاپانوف برای سیستم‌های مرتبه صحیح، به سیستم‌های مرتبه کسری تعمیم داده شده است [19] که به آن روش مستقیم لیاپانوف مرتبه کسری گفته می‌شود.

لم 1-2. (روش مستقیم لیاپانوف مرتبه کسری). به یک سیستم مرتبه کسری در نقطه تعادل  $\bar{x} = (0, 0, \dots, 0)^T$  پایدار میتگ لفلر<sup>2</sup> گفته می‌شود اگر تابعی مشتق پذیر و پیوسته‌ای به شکل  $V(t, x(t))$  وجود داشته باشد که شروط روابط (5) و (6) را برآورده کند:

$$\alpha_1 \|x\|^c \leq V(t, x(t)) \leq \alpha_2 \|x\|^{cd} \quad (5)$$

$${}_a^c D_t^\alpha V(t, x(t)) \leq -\alpha_3 \|x\|^{cd} \quad (6)$$

وقتی که برای  $D \rightarrow R$  و  $[0, +\infty) \times D \rightarrow R$  شرط محلی لیبیشیتز روی  $x$  برآورده شود.  $D \subset R^n$  دامنه‌ای است که شامل ناحیه پیوسته  $t \geq 0$  است و  $\alpha \in (0, 1)$  است و  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, c, d$  ثابت‌های مثبت می‌باشند.

ویژگی 1. اگر برای توابع  $f(t)$  و  $g(t)$  همه مشتقات در بازه  $[t_0, t]$  وجود داشته باشند بنابراین مشتق کسری در قانده لاینیز<sup>3</sup> شکل رابطه (7) را به خود می‌گیرد:

$${}_a^c D_t^\alpha (f(t), g(t)) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) {}_a^c D_t^{\alpha-k} g(t) \quad (7)$$

نکته حائز اهمیت این است که استفاده از قانده لاینیز معمول در سیستم‌های مرتبه صحیح برای سیستم‌های مرتبه کسری مسئله را پیچیده می‌کند و پیدا کردن تابع نامزد لیاپانوف تطبیقی را دچار مشکل می‌سازد. برای یافتن تابع لیاپانوف مورد نظر برای سیستم‌های مرتبه کسری از نامساوی زیر بهره گرفته شده است [20]:

لم 2-2. تابع پیوسته و مشتق پذیر  $x(t) \in R$  در نظر گرفته می‌شود. بنابراین برای هر ثابت زمانی  $t \geq t_0$  رابطه (8) نتیجه می‌دهد:

$$\frac{1}{2} {}_a^c D_t^\alpha x^2(t) \leq x(t) {}_a^c D_t^\alpha x(t), \quad \alpha \in (0, 1] \quad (8)$$

تذکر 3-2. به وضوح روشن است وقتی که  $x(t) \in R^n$  رابطه (9) قابل حصول است:

$$\frac{1}{2} {}_a^c D_t^\alpha (x^T(t) x(t)) \leq x^T(t) {}_a^c D_t^\alpha x(t), \quad \alpha \in (0, 1] \quad (9)$$

## 2-2- نظریه گراف

این زیر بخش به ارائه‌ی مقدمه‌ای بر تئوری جبری گراف‌ها که در نمایش سیستم‌های چندعاملی، اتصالات درونی و توپولوژی شبکه‌ی آن‌ها کارایی عمده دارد اختصاص یافته است.

در گراف متناظر با شبکه‌ی عامل‌ها، هر عامل با یک گره<sup>4</sup> و ارتباط بین هر جفت عامل نیز با یک یال<sup>5</sup> نشان داده می‌شود. یک گراف جهت‌دار با  $N$  گره، با  $G = (V, E, A)$  معرفی می‌شود که در آن  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  مجموعه‌ی گره‌ها و  $E \subseteq V \times V$  مجموعه‌ی یال‌هاست. وجود یال  $(v_i, v_j)$  در گراف، بیان‌گر دریافت اطلاعات عامل  $v_j$  توسط  $v_i$  است. در این مدل

برای سیستم مرتبه دوم در [10] معرفی شده است.

کنترل آرایش مبتنی بر توافق از روش‌های بسیار پرکاربردی است که برای طراحی و پیاده سازی در مجموعه‌های سیستم‌های چند عامله مورد توجه قرار گرفته است. در [12,11] از این روش برای سیستم‌های چند عامله مرتبه دوم استفاده شده است. در [13] مبتنی بر توافق و خطی سازی خروجی، آرایشی متغیر با زمان طراحی شده است. در عمل با سیستم‌های پیچیده متنوعی رو به رو هستیم. مانند فضاپیماها و گروهی از وسایل هوایی کنترل از راه دور و سیستم‌هایی از این نوع که همه‌ی این‌ها دارای مدل‌های پیچیده‌ای می‌باشند. اخیراً حسابان کسری برای مدل کردن دقیق‌تر سیستم‌های پیچیده به ویژه در سیستم‌های چند عامله مورد توجه قرار گرفته است [14] در سیستم‌های چند عامله مرتبه کسری مسئله توافق بسیار زیاد مورد توجه قرار دارد که به عنوان مثال در [15] مسئله ساده‌ی توافق و در [17,16] مسئله توافق با در نظر گرفتن اغتشاشات بیرونی و عدم قطعیت و تأخیر مورد توجه بوده است.

کنترل مد لغزشی روشی برای طراحی کنترل مقاوم در مقابل عدم قطعیت و اغتشاش می‌باشد. به عنوان مثال این روش در سیستم‌های چند عامله مرتبه کسری در [18] بررسی شده است.

برای بررسی پایداری در سیستم‌های چند عامله مرتبه کسری قضایای بسیاری با توجه به نوع سیستم و پیچیدگی‌های مربوطه ارائه شده است. روش مستقیم لیاپانوف برای بررسی پایداری سیستم‌های مرتبه کسری متداول ترین روش می‌باشد که البته برای سیستم‌های پیچیده و غیر خطی به کار گیری آن مشکل می‌باشد [19].

بر این اساس در مورد مسئله ردیابی آرایش برای سیستم‌های چند عامله مرتبه کسری بحث می‌شود. در اینجا از روش کنترل مد لغزشی برای طراحی کنترل کننده استفاده می‌شود. در بخش دوم مقدمات حسابان کسری و نظریه گراف ارائه می‌گردد. در بخش سوم با طراحی کنترل کننده مورد نظر برای سیستم چند عامله مرتبه کسری پرداخته شده است. در بخش چهارم تعدادی مثال برای شبیه سازی و مشاهده نتیجه کنترل کننده طراحی شده ارائه می‌شود. در پایان در بخش پنجم جمع‌بندی ارائه می‌گردد.

## 2- پیشیازها

### 1-2- حسابان کسری

در سیستم‌های مرتبه کسری، مقدار اولیه مشخص شده در مشتق کسری با تعریف کاپوتو<sup>1</sup> می‌تواند نشان دهنده مفهومی فیزیکی باشد. از آنجا که از مفهوم مشتق کاپوتو در این مقاله استفاده می‌شود بنابراین [19]:

$${}_a^c D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t \frac{x^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \quad (1)$$

که در رابطه (1)،  $a$  یک مقدار حقیقی و  $m$  هم مقداری صحیح می‌باشد که می‌توان نشان داد  $m-1 \leq \alpha < m$  برقرار است. در این تعریف  ${}_a^c D_t^\alpha$  به معنای مشتق کسری با تعریف کاپوتو و  $\alpha$  مرتبه مشتق کسری می‌باشد. تابع گاما به شکل  $\Gamma(\cdot)$  نشان داده می‌شود که تعریف آن به صورت  $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt$  است و خاصیت رابطه (2) برای هر مقدار حقیقی  $p$  برقرار است:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad (2)$$

در تعریف مشتق کسری کاپوتو، تبدیل لاپلاس به شکل رابطه (3) قابل محاسبه است:

<sup>2</sup> Mittag-Leffler

<sup>3</sup> Leibniz

<sup>4</sup> Node

<sup>5</sup> Edge

<sup>1</sup> Caputo

ماتریس مثبت معین فرض شده است. در ادامه برای تابع مورد نظر لم زیر تعریف می‌شود:

لم 1-3. تابع مشتق پذیر و پیوسته  $y(t) \in R^n$  را در نظر گرفته می‌شود. سپس برای هر ثابت زمانی  $t \geq t_0$  رابطه (11) برقرار است.

$$\frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha (y^T(t)Ay(t)) \leq y^T(t)A {}^C D_{t_0}^\alpha y(t) \quad (11)$$

در حالی که  $\alpha \in (0, 1]$  و ماتریس  $A$ ، ماتریسی قطری و مثبت نیمه معین می‌باشد.

اثبات. فرض کنید  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$  و  $y^T(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T$   $\lambda_i \geq 0$  آنگاه رابطه (12) نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{2} y^T(t)Ay(t) = \frac{1}{2} \lambda_1 y_1^2(t) + \frac{1}{2} \lambda_2 y_2^2(t) + \dots + \frac{1}{2} \lambda_n y_n^2(t) \quad (12)$$

سپس طبق لم 2-2 رابطه (13) قابل استخراج است:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha (y^T(t)Ay(t)) &\leq \lambda_1 y_1(t) {}^C D_{t_0}^\alpha y_1(t) \\ &+ \lambda_2 y_2(t) {}^C D_{t_0}^\alpha y_2(t) + \dots + \lambda_n y_n(t) {}^C D_{t_0}^\alpha y_n(t) \\ &= y^T(t)A {}^C D_{t_0}^\alpha y(t) \end{aligned} \quad (13)$$

حال طبق لم فوق قضیه 3-2 معرفی می‌شود.

قضیه 3-2. برای هر ثابت زمانی  $t \geq t_0$  اگر تابع پیوسته و مشتق پذیر  $x(t) \in R^n$  وجود داشته باشد، آنگاه می‌توان نامساوی رابطه (14) را با توجه به خواص حسابان کسری بیان کرد:

$$\frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha (x^T(t)Mx(t)) \leq x^T(t)M {}^C D_{t_0}^\alpha x(t) \quad (14)$$

در حالی که  $\alpha \in (0, 1]$  و  $M$  ماتریسی مثبت معین می‌باشد.

اثبات. با توجه به اینکه  $M$  ماتریسی مثبت معین است، آنگاه می‌توان نشان داد ماتریس یکمعامد<sup>2</sup>  $P \in R^{n \times n}$  وجود دارد به طوری که:

$$PMP^T = \Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] \quad (15)$$

در حالی که  $\Lambda$  ماتریسی قطری و مقادیر ویژه ماتریس  $M$  می‌باشد. در ادامه رابطه (16) نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha (x^T(t)Mx(t)) &= \frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha (x^T(t)P^T \Lambda Px(t)) \\ &= \frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha ((Px(t))^T \Lambda (Px(t))) \end{aligned} \quad (16)$$

در ادامه  $Px(t) = y(t)$  قرار داده می‌شود. نامساوی رابطه (17) از لم 1-3 نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha (x^T(t)Mx(t)) &= \frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha (y^T(t)Ay(t)) \\ &\leq y^T(t)A {}^C D_{t_0}^\alpha y(t) = (Px(t))^T \Lambda {}^C D_{t_0}^\alpha Px(t) \\ &= x^T(t)P^T \Lambda P {}^C D_{t_0}^\alpha x(t) = x^T(t)M {}^C D_{t_0}^\alpha x(t) \end{aligned} \quad (17)$$

تذکر 3-3. نامساوی رابطه (17) در قضیه 3-2 می‌تواند به حالت مرتبه صحیح نیز تعمیم داده شود یعنی تابع نامزد لیپانوف به شکل  $V'(t, x(t)) = \frac{1}{2} [x^T(t)Mx(t)]' = x^T(t)Mx'(t)$

### 3-2- ردیابی آرایش توزیع شده با در نظر گرفتن دینامیک خطی برای عامل‌ها

در این قسمت با فرض خطی بودن دینامیک عامل‌های پیرو به طراحی کنترل مد لغزشی برای رسیدن به هدف مذکور خواهیم پرداخت. سیستم چند عامله مرتبه کسری با  $n$  پیرو به صورت رابطه (18) در نظر

$[a_{ij}] \in R^{N \times N}$  ماتریس مجاورت<sup>1</sup> می‌باشد. اگر عامل  $i$  اطلاعات عامل  $z$  را دریافت کند، به این معنی که یال جهت‌داری از  $z$  به  $i$  وجود داشته باشد،  $a_{ii} > 0$  و در غیر این صورت  $a_{ij} = 0$  فرض می‌شود؛ همچنین همواره  $a_{ii} = 0$ .

پس از مدل‌سازی شبکه‌ی عامل‌ها با گراف‌های جهت‌دار، لازم است تعداد عامل‌ها و نحوه‌ی ارتباط آن‌ها در قالب ماتریسی بیان شود تا بتوان با آن را در فضای ریاضی اعمال کرد. بدین منظور با معرفی ماتریس لاپلاسی متناظر با یک شبکه و خواص آن، می‌توان به خواص گراف شبکه‌ی متناظر و نحوه‌ی ارتباط عامل‌های آن پی برد. ماتریس لاپلاسی  $L = [l_{ij}] \in R^{N \times N}$  مرتب با گراف  $G = (V, E, A)$  به صورت رابطه (10) تعریف می‌گردد:

$$l_{ii} = \sum_{j \in N_i} a_{ij} \quad l_{ij} = -a_{ij} \quad \forall i \neq j \quad i, j \in 1, \dots, N \quad (10)$$

برای تشکیل ماتریس لاپلاسی،  $a_{ij}$  در صورت غیر صفر بودن، هر عددی می‌تواند فرض شود.

ماتریس لاپلاسی  $L$  برای یک گراف بی جهت متقارن و نیمه مثبت معین می‌باشد. و این ماتریس حداقل شامل یک مقدار ویژه صفر است که بردار ویژه متناظر با آن واحد می‌باشد.

در این مقاله عامل راهبر با اندیس  $v_0$  و حالت آن با  $x_0(t)$  مشخص شده اند. در اینجا گراف  $\bar{G}$  همان گراف  $G$  به همراه گره راهبر  $v_0$  می‌باشد که نشان دهنده‌ی ارتباط بین این گره و سایر گره‌های  $G$  می‌باشد.

در این مقاله برای بررسی ردیابی آرایش باید ماتریس مجاورت مربوط به راهبر را نیز تعریف کنیم که به صورت  $B \in R^{n \times n}$  و قطری می‌باشد که عناصر قطری آن به شکل  $b_i, i \in N$  نمایش داده می‌شود. طبق تعریف وقتی که عامل راهبر با عامل همسایه خودش ارتباط داشته باشد، عنصر قطری مربوط به شکل  $b_i = a_{i0} > 0$  می‌باشد و اگر هیچ ارتباطی وجود نداشته باشد درایه متناظر روی قطر اصلی صفر می‌باشد.

لم 4-2 [20] فرض شده‌است که گراف مربوطه بدون جهت و متصل می‌باشد که شامل  $n$  پیرو و یک راهبر است. آنگاه ماتریس  $M = L + B$  مثبت معین و مربعی است اگر درایه‌های ماتریس مجاورت مقادیر غیر منفی به خود بگیرند و همچنین همه‌ی آنها صفر می‌باشند.

### 3-3- ردیابی آرایش توزیع شده با رویکرد کنترل مد لغزشی

در این قسمت هدف ردیابی آرایش در سیستم‌های چند عامله مرتبه کسری است که در آن گراف ارتباطی سیستم به صورت ثابت و غیر مستقیم است. در اینجا با ارائه ورودی کنترلی که مبتنی بر روش کنترل مد لغزشی به دست آمده، سعی شده هدف مذکور قابل دسترس باشد. در قدم اول برای بررسی پایداری سیستم از روش مستقیم لیپانوف برای سیستم‌های مرتبه کسری نیاز به معرفی تابع نامزد لیپانوف به شکل  $V(t, x(t)) = \frac{1}{2} x^T(t)Mx(t)$  داریم. در ادامه فرض شده‌است دینامیک عامل‌های پیرو خطی می‌باشد و به طراحی کنترل کننده پرداخته می‌شود. در ادامه در دینامیک عامل‌ها اغتشاش نیز در نظر گرفته می‌شود و کنترل کننده طراحی شده در روش قبل برای سیستم جدید تعمیم داده می‌شود.

#### 3-1- معرفی تابع نامزد لیپانوف

در این قسمت تولید تابع نامزد لیپانوف مربعی مطلوب به صورت  $V(t, x(t)) = \frac{1}{2} x^T(t)Mx(t)$  پیشنهاد می‌شود. در این تابع ماتریس  $M$  یک

<sup>2</sup> Orthogonal

<sup>1</sup> Adjacency matrix



گرفته می‌شود:

$$x_i^{(\alpha)}(t) = u_i(t), \quad i \in N \quad (18)$$

در حالی که برای نمایش از  $x_i^{(\alpha)}(t)$  به جای  $D_t^\alpha x(t)$  استفاده کردیم.  $u_i(t) \in R$  و  $x_i(t) \in R$  به ترتیب حالت سیستم و ورودی کنترلی را برای هر عامل نشان می‌دهد.

راهبر در این سیستم به صورت رابطه (19) معرفی می‌شود:

$$x_0^{(\alpha)}(t) = f(t, x_0(t)), \quad h_0^{(\alpha)}(t) = f(t, h_0(t)) \quad (19)$$

در حالی که  $x_0(t)$  و  $h_0(t)$  حالت و آرایش راهبر و  $f(t, x_0(t))$  و  $|f(t, x_0(t))| \leq k_1$  شکل  $|f(t, h_0(t))| \leq k_2$  که  $k_1$  و  $k_2$  ثابت‌هایی مثبت می‌باشند.

تذکر 4-3 در اینجا فرض شده‌است که عامل‌ها در فضای یک بعدی می‌باشند که نتایج برای  $n$  بعدی با ضرب کرونیکر قابل تعمیم است.

تعریف 1. اگر برای هر شرایط اولیه ای شرط رابطه (20) برقرار باشد آنگاه ردیابی آرایش توزیع شده قابل حصول است:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x_i(t) - x_0(t) - (h_i(t) - h_0(t))\| = 0 \quad i \in N \quad (20)$$

که در آن  $H = [h_1^T, h_2^T, \dots, h_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$  توصیف کنندهی آرایش مطلوب طراحی شده است.

برای رسیدن به آرایش توزیع شده کنترل مد لغزشی به شکل رابطه (21) معرفی می‌شود:

$$u_i(t) = -a \sum_{j=0}^n a_{ij} [x_i(t) - x_j(t) - (h_i(t) - h_j(t))] - \beta \operatorname{sgn} \left( \sum_{j=0}^n a_{ij} [x_i(t) - x_j(t) - (h_i(t) - h_j(t))] \right) \quad i, j \in N \quad i \neq j \quad (21)$$

$\beta$  ثابتی نامنفی و  $a$  ثابتی مثبت است.  $a_{ij}$  نشان دهنده عناصر ماتریس وزنی گراف سیستم می‌باشند.  $a_{i0}$  ثابتی مثبت است اگر عامل راهبر اطلاعات را به عامل ارسال کند و در غیر این صورت صفر می‌باشد.

با توجه به اینکه  $\bar{G}$  گراف ارتباطی متصل است،  $v_0$  گره‌ای دسترس پذیر سراسری می‌باشد. در نتیجه  $M = L + B$  و می‌توان نشان داد که طبق لم 4-2  $M$  ماتریسی مثبت معین می‌باشد.

قضیه 5-3. برای سیستم رابطه (18)، کنترل کننده رابطه (21) مسئله ردیابی آرایش را با شرط  $\beta \geq k_1 + k_2$  تحقق می‌بخشد.

اثبات. با جایگذاری رابطه (21) در (18) رابطه (22) مطرح می‌گردد:

$$x^\alpha(t) = -aMx(t) + aMh(t) + aB(x_0(t)1) - aB(h_0(t)1) - \beta \operatorname{sgn}(Mx(t) - Mh(t) - B(x_0(t)1) + B(h_0(t)1)) \quad (22)$$

در حالی که  $M = L + B$  و  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$  می‌باشد. با انتخاب  $\bar{x}_i(t) = x_i(t) - h_i(t) - (x_0(t) - h_0(t))$  رابطه (23) نتیجه می‌شود:

$$\bar{x}^\alpha(t) = x^\alpha(t) - h^\alpha - (x_0^\alpha(t) - h_0^\alpha)1 = -aM\bar{x}(t) - \beta \operatorname{sgn}(M\bar{x}(t)) - f(t, x_0(t))1 - f(t, h_0(t))1 \quad (23)$$

وجود دارد ماتریس ارتوگونال  $P \in R^{n \times n}$  به طوری که:

$$M^2 = P\Lambda^2P^T \geq \lambda_{\min}P\Lambda P^T = \lambda_{\min}M \quad (24)$$

تابع نامزد لیپانوف رابطه (25) را در نظر گرفته می‌شود:

$$V(t, \bar{x}(t)) = \frac{1}{2} \bar{x}^T(t)M\bar{x}(t) \quad (25)$$

با توجه به  $\beta > k_1 + k_2$  مشتق کسری می‌تواند به شکل رابطه (26) نوشته

شود:

$$\begin{aligned} V^\alpha(t, \bar{x}(t)) &\leq \bar{x}^T(t)M\bar{x}^\alpha(t) = \bar{x}^T(t)M(-aM\bar{x}(t) \\ &\quad - \beta \operatorname{sgn}(M\bar{x}(t)) - f(t, x_0(t))1 - f(t, h_0(t))1) \\ &\leq -a\lambda_{\min}\bar{x}^T(t)M\bar{x}(t) - \beta\|M\bar{x}(t)\|_1 + k_1\|M\bar{x}(t)\|_1 \\ &\quad + k_2\|M\bar{x}(t)\|_1 \leq -a\lambda_{\min}\bar{x}^T(t)M\bar{x}(t) \\ &\quad - (\beta - k_1 - k_2)\|M\bar{x}(t)\|_1 \leq -a\lambda_{\min}\bar{x}^T(t)M\bar{x}(t) \\ &= -2a\lambda_{\min}V(t, \bar{x}(t)) \end{aligned} \quad (26)$$

مبتنی بر روش مستقیم لیپانوف در سیستم‌های مرتبه کسری در لم 2-1 نتیجتاً سیستم پایدار است و شرط ردیابی آرایش را برآورده می‌کند. به این معنی که با شرط  $\beta \geq k_1 + k_2$  سیستم رابطه (18) با کنترل کننده (21) به ردیابی آرایش دست پیدا می‌کند.

### 3-3- ردیابی آرایش برای سیستم خطی با در نظر گرفتن اغتشاش

#### خروجی

در اکثر پدیده‌های فیزیکی قابل لمس معمولاً اثر اغتشاش‌های خارجی بر دینامیک حالت‌ها مشهود می‌باشد. بنابراین با در نظر گرفتن اغتشاش خارجی یک مرحله سیستم به واقعیت نزدیک‌تر شده است.

دینامیک عامل‌های پیرو را با این فرض به شکل رابطه (27) در نظر گرفته می‌شود:

$$x_i^{(\alpha)}(t) = u_i(t) + d_i(t), \quad i \in N \quad (27)$$

وقتی که  $d_i(t)$  اغتشاش ورودی بر سیستم رو بیان می‌کند در حالی که محدود و به صورت  $|d_i(t)| \leq D$  می‌باشد.

قضیه 8-3. قانون کنترلی رابطه (21) مسئله ردیابی آرایش را برای سیستم رابطه (18) تحقق می‌بخشد اگر  $\beta \geq k_1 + k_2 + D$  و گراف ارتباطی بدون جهت و متصل باشد.

اثبات. با جایگذاری ورودی کنترلی (21) در سیستم رابطه (27) رابطه (28) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} x_i^{(\alpha)}(t) &= d_i(t) - a \sum_{j=0}^n a_{ij} [x_i(t) - x_j(t) - (h_i(t) - h_j(t))] \\ &\quad - \beta \operatorname{sgn} \left( \sum_{j=0}^n a_{ij} [x_i(t) - x_j(t) - (h_i(t) - h_j(t))] \right) \end{aligned} \quad i, j \in N \quad i \neq j \quad (28)$$

با انتخاب  $\bar{x}_i(t) = x_i(t) - h_i(t) - (x_0(t) - h_0(t))$  رابطه (29) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \bar{x}^\alpha(t) &= x^\alpha(t) - h^\alpha - (x_0^\alpha(t) - h_0^\alpha)1 = D(t)1 \\ &\quad - aM\bar{x}(t) - \beta \operatorname{sgn}(M\bar{x}(t)) - f(t, x_0(t))1 \\ &\quad - f(t, h_0(t))1 \end{aligned} \quad (29)$$

در حالی که در رابطه (29)،  $D(t) = [d_1(t), d_2(t), \dots, d_n(t)]^T$  می‌باشد. با توجه به تابع نامزد لیپانوف مرحله قبل و لم 4-2 رابطه (30) قابل طرح می‌باشد:

$$\begin{aligned} V^\alpha(t, \bar{x}(t)) &\leq \bar{x}^T(t)M\bar{x}^\alpha(t) \\ &= \bar{x}^T(t)M \left( (t)1 - aM\bar{x}(t) - \beta \operatorname{sgn}(M\bar{x}(t))D \right. \\ &\quad \left. - f(t, x_0(t))1 - f(t, h_0(t))1 \right) \\ &\leq -a\lambda_{\min}\bar{x}^T(t)M\bar{x}(t) + D\|M\bar{x}(t)\|_1 - \beta\|M\bar{x}(t)\|_1 \\ &\quad + k_1\|M\bar{x}(t)\|_1 + k_2\|M\bar{x}(t)\|_1 \\ &\leq -a\lambda_{\min}\bar{x}^T(t)M\bar{x}(t) \\ &\quad - (\beta - k_1 - k_2 - D)\|M\bar{x}(t)\|_1 \\ &\leq -a\lambda_{\min}\bar{x}^T(t)M\bar{x}(t) \\ &= -2a\lambda_{\min}V(t, \bar{x}(t)) \end{aligned} \quad (30)$$

مبتنی بر روش مستقیم لیپانوف در سیستم‌های مرتبه کسری که در لم 2-1 عنوان شد، سیستم پایدار است و شرط توافق را برآورده می‌کند. به این معنی که با شرط  $\beta \geq k_1 + k_2 + D$  سیستم رابطه (27) با کنترل کننده (21) به

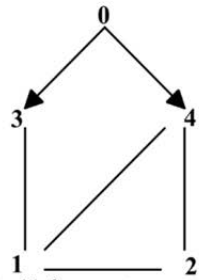


Fig. 1 Example 1 graph with four agents

شکل 1 گراف مثال اول با چهار عامل

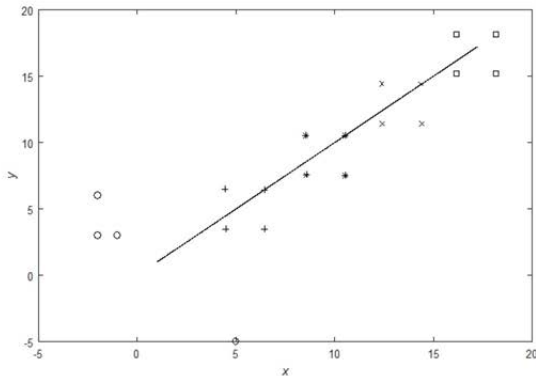


Fig. 2 Formation tracking four agent for example 1 with leader path

شکل 2 ردیابی آرایش چهار عامل مثل اول به همراه مسیر راهبر

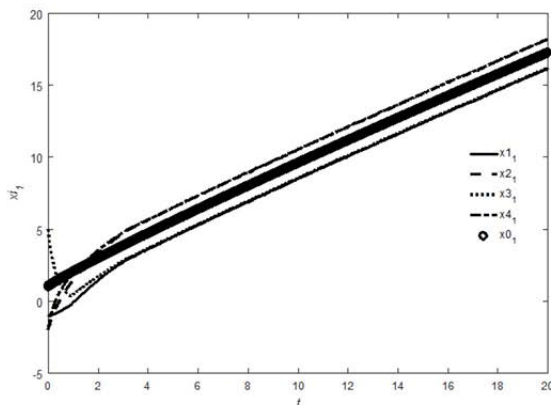


Fig. 3(a) The trajectories between the followers  $x_{1i}$  and the leader

شکل 3 (الف) مسیر بین عامل‌های  $x_{1i}$  و راهبر

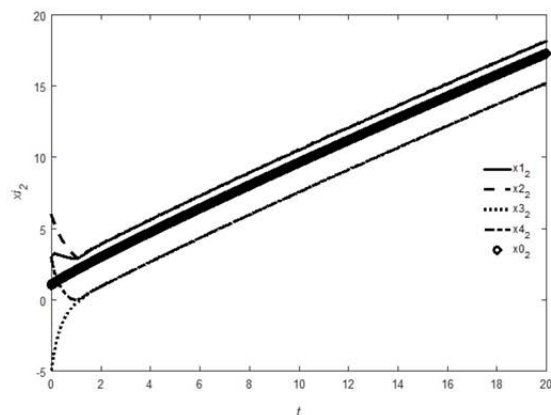


Fig. 3(b) The trajectories between the followers  $x_{2i}$  and the leader

شکل 3 (ب) مسیر بین عامل‌های  $x_{2i}$  و راهبر

توافق دست پیدا می‌کند

4- شبیه‌سازی

برای بیان نتایج ارائه شده در بالا و ارزش گذاری بر آنها به دو مثال شبیه سازی زیر به ترتیب با چهار پیرو و شش پیرو رجوع می‌شود.

پیروها در گراف به شکل 1 در نظر گرفته شده است. برای برقرار شرایط

قضیه 5-3 مقادیر  $\alpha = 0.92$  و  $\beta = 1.5$  و  $\alpha = 1$  و  $f(x_0(t)) = f(h_0(t)) = 1$  در نظر گرفته شده است. آرایش مورد نظر برای چهار عامل به صورت  $[1 \ 1]^T$

رابطه (31) فرض شده است:

$$\begin{aligned} h_1 &= [0, 2] & h_2 &= [2, 2] \\ h_3 &= [0, -1] & h_4 &= [2, -1] \end{aligned} \quad (31)$$

و مقادیر اولیه برای عامل‌ها (هر عامل دو بعدی است) به شکل رابطه (32)

می‌باشد:

$$\begin{aligned} (x_0(0), y_0(0)) &= (1, 1) & (x_1(0), y_1(0)) &= (-1, 3) \\ (x_2(0), y_2(0)) &= (-2, 6) & (x_3(0), y_3(0)) &= (5, -5) \\ (x_4(0), y_4(0)) &= (-2, 3) \end{aligned} \quad (32)$$

با توجه به شکل 2 که در آن نمودار موقعیت‌های  $(x, y)$  در زمان‌های  $t =$

$\{0, 5, 10, 15, 20\}$  برای چهار عامل نشان داده شده است. طبق شکل مشاهده

می‌شود که آرایش مطلوبی که برای عامل‌ها در نظر گرفته ایم به خوبی آرایش

مرجع طراحی شده برای راهبر را ردیابی می‌کند. در شکل‌های 3 مسیر

عامل‌ها به همراه مسیر راهبر رسم شده است و در شکل‌های 4 خطای بین

عامل‌ها و راهبر نمایش داده شده است و همان طور که مشاهده می‌شود با

توجه به آرایش مطلوبی که تعریف شد، مسیر عامل‌ها به خوبی راهبر را

ردیابی می‌کند و خطای عامل‌ها به مقداری ثابت (که متناسب با آرایش

مطلوب می‌باشد) میل می‌کند.

اما در مثال بعد گراف شش عامل به صورت شکل 5 در نظر گرفته می‌شود.

در این حالت اغتشاش خروجی به شکل رابطه (33) در نظر گرفته می‌شود:

$$d_i(t) = \left[ \sin\left(\frac{t}{10}\right), \cos\left(\frac{t}{10}\right) \right], \quad i = 0, \dots, n \quad (33)$$

برای برآورده شده قضیه 8-3 مقدار  $\alpha = 1$ ،  $\beta = 2$  در نظر گرفته می‌شود.

مرتبه مشتق کسری همان مقدار مثال قبل می‌باشد و شرایط اولیه به شکل

رابطه (34) است:

$$\begin{aligned} (x_0(0), y_0(0)) &= (1, 0) & (x_1(0), y_1(0)) &= (-2, 1) \\ (x_2(0), y_2(0)) &= (0, -1) & (x_3(0), y_3(0)) &= (2, 1) \\ (x_4(0), y_4(0)) &= (3, 2) & (x_5(0), y_5(0)) &= (-4, 4) \\ (x_6(0), y_6(0)) &= (4, -3) \end{aligned} \quad (34)$$

آرایش مطلوب در نظر گرفته برای عامل‌ها به صورت رابطه (35) می‌باشد:

$$\begin{aligned} h_1 &= [0.5, 2] & h_2 &= [1.5, 2] & h_3 &= [0, 1] \\ h_4 &= [2, 1] & h_5 &= [0.5, 0] & h_6 &= [1.5, 0] \end{aligned} \quad (35)$$

در شکل 6 مشاهده می‌شود در حضور اغتشاش کنترل کننده طراحی شده به

خوبی هدف مطلوب یعنی ردیابی آرایش طراحی شده برای عامل‌ها را محقق

می‌سازد. مانند قسمت قبل مسیر عامل‌ها به همراه خطای عامل‌ها با عامل

راهبر رسم شده است. در شکل‌های 7 مسیر عامل‌ها به همراه مسیر راهبر

رسم شده است و در شکل‌های 8 خطای بین عامل‌ها و راهبر نمایش داده

شده است و همان طور که مشاهده می‌شود با توجه به آرایش مطلوبی که

تعریف شده است مسیر عامل‌ها به خوبی راهبر را در شرایط اغتشاش ردیابی

می‌کند و خطای عامل‌ها به مقداری ثابت (که متناسب با آرایش مطلوب

می‌باشد) میل می‌کند.

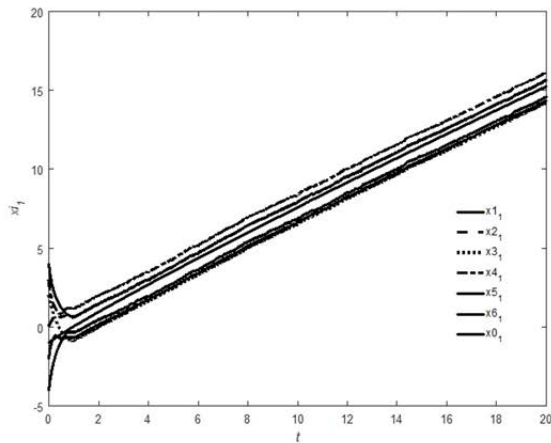


Fig. 7(a) The trajectories between the followers  $xi_1$  and the leader  
شکل 7 الف) مسیر بین عامل‌های  $xi_1$  و راهبر

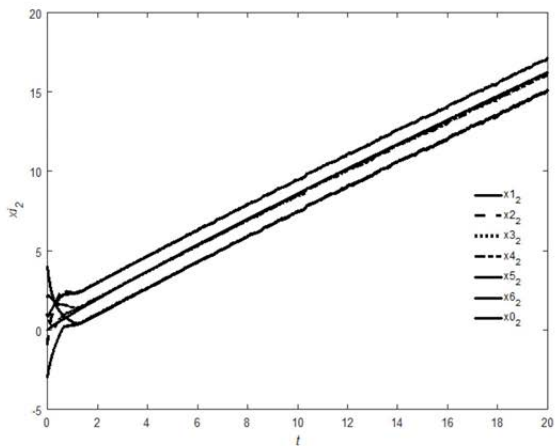


Fig. 7(b) The trajectories between the followers  $xi_2$  and the leader  
شکل 7 ب) مسیر بین عامل‌های  $xi_2$  و راهبر

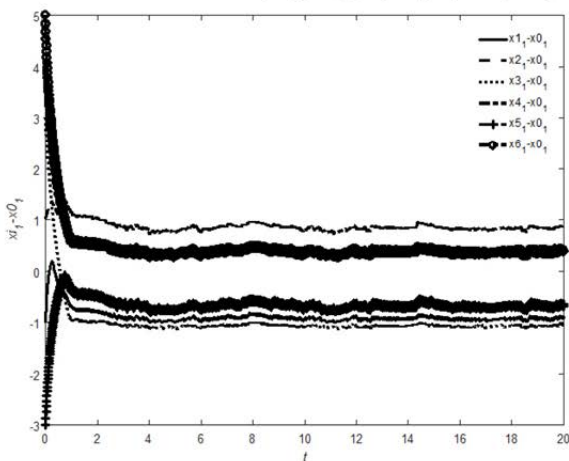


Fig. 8(a) The errors between the followers  $xi_1$  and the leader  
شکل 8 الف) خطای بین عامل‌های  $xi_1$  و راهبر

5- نتیجه گیری

در این تحقیق ردیابی آرایش دسته‌ای از سامانه‌های کسری چند عاملی مورد بررسی قرار گرفت. با استفاده از تعریف و مفهوم توافق در سیستم‌های چند عاملی، تعریفی مبتنی بر توافق به منظور ردیابی آرایش در سیستم‌های مذکور

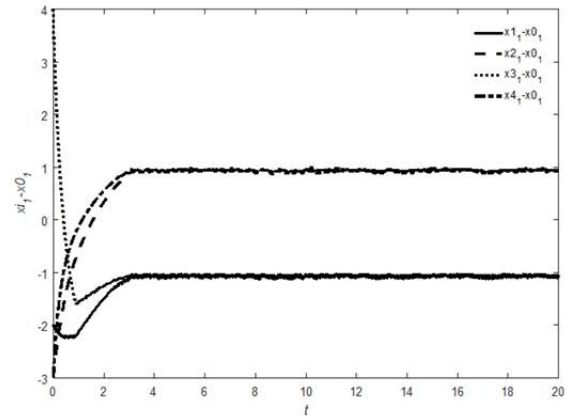


Fig. 4(a) The errors between the followers  $xi_1$  and the leader  
شکل 4 الف) خطای بین عامل‌های  $xi_1$  و راهبر

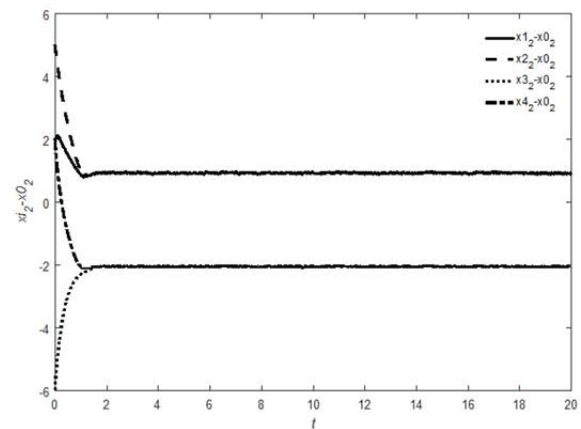


Fig. 4(b) The errors between the followers  $xi_2$  and the leader  
شکل 4 ب) خطای بین عامل‌های  $xi_2$  و راهبر

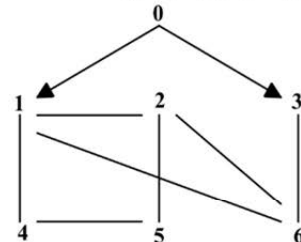


Fig. 5 Example 2 graph with six agents  
شکل 5 گراف مثال دوم با شش عامل

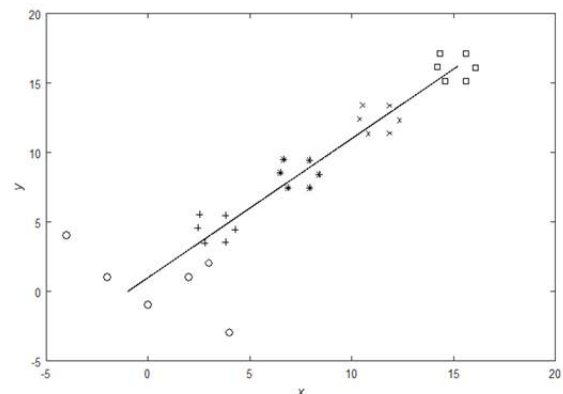


Fig. 6 Formation tracking six agent for example 2 with leader path  
شکل 6 ردیابی آرایش شش عامل مثل دوم به همراه مسیر راهبر



[3] G. Xiong, S. Kishore, Discrete-time second-order distributed consensus time synchronization algorithm for wireless sensor networks, *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, Vol. 2009, No. 1, pp. 623537, 2008.

[4] Y. Xu, W. Liu, J. Gong, Stable multi-agent-based load shedding algorithm for power systems, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 26, No. 4, pp. 2006-2014, 2011.

[5] L. Zhao, Y. Jia, J. Yu, J. Du,  $H_\infty$  sliding mode based scaled consensus control for linear multi-agent systems with disturbances, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 292, pp. 375-389, 2017.

[6] X. Dong, G. Hu, Time-varying formation control for general linear multi-agent systems with switching directed topologies, *Automatica*, Vol. 73, pp. 47-55, 2016.

[7] S.-M. Kang, H.-S. Ahn, Design and realization of distributed adaptive formation control law for multi-agent systems with moving leader, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 63, No. 2, pp. 1268-1279, 2016.

[8] A. Mahmood, Y. Kim, Decentralized formation flight control of quadcopters using robust feedback linearization, *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 354, No. 2, pp. 852-871, 2017.

[9] L. Han, X. Dong, Q. Li, Z. Ren, Formation-containment control for second-order multi-agent systems with time-varying delays, *Neurocomputing*, Vol. 218, pp. 439-447, 2016.

[10] J. Li, J. Li, Adaptive iterative learning control for coordination of second-order multi-agent systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 24, No. 18, pp. 3282-3299, 2014.

[11] H. M. Guzey, T. Dierks, S. Jagannathan, Hybrid consensus-based formation control of agents with second order dynamics, in *Proceeding of, IEEE*, pp. 4386-4391.

[12] W. Ren, Consensus strategies for cooperative control of vehicle formations, *IET Control Theory & Applications*, Vol. 1, No. 2, pp. 505-512, 2007.

[13] J. Seo, Y. Kim, S. Kim, A. Tsourdos, Consensus-based reconfigurable controller design for unmanned aerial vehicle formation flight, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 226, No. 7, pp. 817-829, 2012.

[14] Y. Cao, Y. Li, W. Ren, Y. Chen, Distributed coordination algorithms for multiple fractional-order systems, in *Proceeding of, IEEE*, pp. 2920-2925.

[15] Y. Cao, W. Ren, Distributed formation control for fractional-order systems: Dynamic interaction and absolute/relative damping, *Systems & Control Letters*, Vol. 59, No. 3, pp. 233-240, 2010.

[16] J. Chen, Z.-H. Guan, T. Li, D.-X. Zhang, M.-F. Ge, D.-F. Zheng, Multiconsensus of fractional-order uncertain multi-agent systems, *Neurocomputing*, Vol. 168, pp. 698-705, 2015.

[17] C. Song, J. Cao, Y. Liu, Robust consensus of fractional-order multi-agent systems with positive real uncertainty via second-order neighbors information, *Neurocomputing*, Vol. 165, pp. 293-299, 2015.

[18] C. Yin, Y. Chen, S.-m. Zhong, Fractional-order sliding mode based extremum seeking control of a class of nonlinear systems, *Automatica*, Vol. 50, No. 12, pp. 3173-3181, 2014.

[19] Y. Li, Y. Chen, I. Podlubny, Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 59, No. 5, pp. 1810-1821, 2010.

[20] W. Ren, Y. Cao, *Distributed coordination of multi-agent networks: emergent problems, models, and issues*: Springer Science & Business Media, 2010.

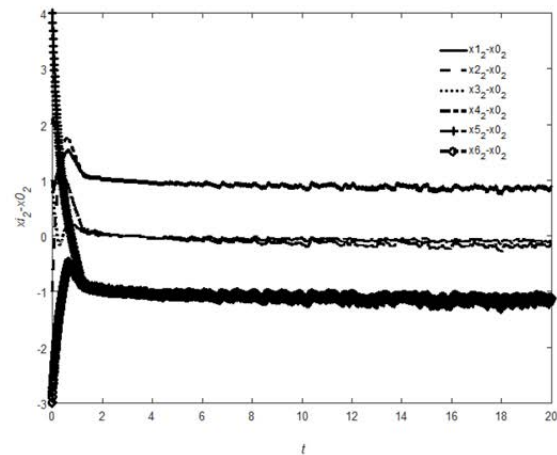


Fig. 8(b) The errors between the followers  $x_{i2}$  and the leader

شکل 8 (ب) خطای بین عامل‌های  $x_{i2}$  و راهبر

معرفی گردید. این تعریف به گونه‌ای است که به راحتی می‌تواند سیستم را به سمت آرایشی دلخواه ببرد و آن را ردیابی کند. در ادامه قانون ورودی کنترلی متناسب با این تعریف معرفی شد. نشان داده شد با تعریف ماتریس ارتباط عامل‌ها با عامل راهبر و تعریف ماتریس  $M$  می‌توان به تابع نامزد لیاپانوفی رسید که مسیر بررسی پایداری از روش مستقیم لیاپانوف برای سیستم‌های مرتبه کسری را هموار می‌کند. همچنین نشان داده شد که سیستم مذکور در حضور ورودی اغتشاش نیز عملکرد مطلوب را داراست. نشان داده شده است که با استفاده از رویکرد مد لغزشی می‌توان به طراحی کنترل کننده‌ای پرداخت که نسبت به شرایط مختل کننده مانند اغتشاش مقاوم باشد و این رویکرد در طراحی بسیار آسان و کارآمد است.

### 6- مراجع

[1] A. Amini, A. Azarbahram, M. Sojoodi,  $H_\infty$  Consensus of nonlinear multi-agent systems using dynamic output feedback controller: an LMI approach, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 85, No. 3, pp. 1865-1886, August 01, 2016.

[2] F. Xiao, L. Wang, J. Chen, Y. Gao, Finite-time formation control for multi-agent systems, *Automatica*, Vol. 45, No. 11, pp. 2605-2611, 2009.